

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2012

Veronika Picková

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY



Název bakalářské práce:

**Vybrané metody řešení úloh smíšeného
celočíselného programování**

Autor:	Veronika Picková
Katedra:	Katedra ekonometrie
Obor:	Statistika a ekonometrie
Vedoucí práce:	Mgr. Jana Sekničková, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Vybrané metody řešení úloh smíšeného celočíselného programování“ zpracovala samostatně. Veškerou použitou literaturu a další podkladové materiály uvádím v seznamu použité literatury.

V Praze dne

.....

Veronika Picková

Poděkování:

Ráda bych na tomto místě poděkovala Mgr. Janě Sekničkové, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, její ochotu a trpělivost, čas, který mi věnovala, stejně tak jako za cenné připomínky a rady, které tuto práci obohatily.

Dále bych chtěla poděkovat i prof. RNDr. Janu Pelikánovi, CSc. a Ing. Janu Fábrymu, Ph.D. za jejich pomoc.

Abstrakt

Název práce: Vybrané metody řešení úloh smíšeného celočíselného programování

Autor: Veronika Picková

Katedra: Katedra ekonometrie

Vedoucí práce: Mgr. Jana Sekničková, Ph.D.

Tato práce se zabývá úlohami smíšeného celočíselného programování a metodami jejich řešení. Čtenář je v první části nejprve uveden do problematiky celočíselného programování a poté, v druhé části, seznámen s různými metodami řešení. V této práci se jedná konkrétně o možnost výpočtu bez podmínek celočíselnosti a následnému zaokrouhlení, metodu větvení a mezí a Gomoryho metodu. Cílem této práce je seznámit čtenáře i s další metodou, konkrétně s Bendersovou dekompoziční metodou. Dekompoziční metody v podstatě úlohu rozkládají na dvě části, a to na část, která řeší úlohu s podmínkami celočíselnosti, a na část bez podmínek celočíselnosti. Veškeré použité metody jsou doplněny ilustrativním příkladem pro názornější pochopení. Třetí část práce je následná aplikace vysvětlených metod na konkrétním příkladu.

Klíčová slova: smíšené celočíselné programování, metoda větvení a mezí, Gomoryho metod, Bendersova dekompozice

Abstract

Title: Selected methods for solving mixed integer programming problems

Author: Veronika Picková

Department: Department of Econometrics

Supervisor: Mgr. Jana Sekničková, Ph.D.

This final thesis work is dealing with the problems of mixed integer linear programming and their possible methods of solving. The reader will be introduced to the issues of integer programming in the first part of the work. There follow the different methods of solving in the second part, concretely the possibility of solving without the integer constraints and rounding the solution, the branch and bound method and the Gomory's method. The purpose of this work is to inform the reader about the Benders decomposing algorithm. Decomposing methods divide the original problem into two parts: a part with the constraints of integrity and a part without them. All of the explained methods are supported by illustrative examples. The third part of this thesis is the application of used methods to a concrete problem.

Keywords: mixed integer linear programming, branch and bound method, Gomory's method, Benders decomposition

Obsah

Úvod	1
1 Celočíselné programování.....	2
1.1 Úvod do celočíselného programování	2
1.2 Formulace úlohy smíšeného celočíselného programování	4
1.3 Množina přípustných řešení v lineárním programování	5
2 Metody řešení úloh smíšeného celočíselného lineárního programování	8
2.1 Metoda zaokrouhlování	8
2.2 Kombinatorické metody	11
2.2.1 Metoda větvení a mezí (Land a Doig).....	11
2.3 Metody řezných nadrovin	15
2.3.1 Gomoryho metoda	16
2.4 Speciální metody.....	19
2.4.1 Bendersova metoda.....	19
3 Aplikace metod na praktickém příkladu	24
3.1 Přiblížení ekonomického a matematického modelu	27
3.2 Metoda zaokrouhlování	30
3.3 Metoda větvení a mezí.....	31
3.4 Gomoryho metoda	32
3.5 Bendersova metoda.....	33
3.6 Srovnání jednotlivých metod	38
Závěr.....	40
Seznam použité literatury	41
Přílohy	42
Příloha A	42

ÚVOD

Ústředním tématem této bakalářské práce jsou metody, které hledají řešení úloh smíšeného celočíselného lineárního programování.

S podmínkami celočíselnosti, ať již pro všechny proměnné či jen pro nějakou jejich část, se v reálném světě člověk setká velmi často. Jedná se přitom o rozličné obory lidské činnosti, například výrobní plánování nebo investiční modely. Tyto podmínky celočíselnosti často samy vyplývají z ekonomické podstaty daného problému.

Například různé praktické úlohy plánování a řízení obvykle obsahují velké množství proměnných, stejně tak i vysoký počet omezujících podmínek. Navíc tyto proměnné a podmínky jsou spolu různě propojené. V praxi, tedy v ekonomickém systému, dochází k tomu, že jsou jednotlivé úlohy a zodpovědnosti rozděleny mezi různé orgány daného systému. Je snaha o dosažení toho samého i v matematickém modelu: rozložení obsáhlé úlohy na několik úloh menších, které nejsou výpočetně tak náročné. Mimoto, ekonomická interpretace takto zjednodušených úloh bývá snazší, přehlednější a pochopitelnější.

Samotná práce je rozdělena do dvou částí, přičemž ta první je teoretická. Čtenář zde bude seznámen s vybranými metodami řešení smíšeně celočíselných úloh, jejich algoritmem a pro snazší pochopení je v práci uveden i ilustrační příklad.

Cílem druhé části této práce je aplikace vybraných dekompozičních metod na konkrétní praktickou úlohu, jejich následné porovnání a srovnání z hlediska výpočetní a časové náročnosti, a vyjádření se k vhodnosti použití pro danou konkrétní úlohu. Pro získání řešení budou použity, jak softwarové produkty jako Lingo 11.0, LinPro, MS Excel, tak alespoň částečně ruční výpočty.

1 CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVÁNÍ

1.1 ÚVOD DO CELOČÍSELNÉHO PROGRAMOVÁNÍ

V rámci lineárního programování je možné se setkat s různými speciálními úlohami. Jednou z těchto úloh je celočíselné lineární programování. Jeho hlavním znakem jsou podmínky celočíselnosti, které vyžadují, aby hodnota jedné či více proměnných byla celé číslo. Je možné tedy rozlišit úlohy ryze celočíselné, pokud je kladen požadavek celočíselnosti na všechny proměnné, a smíšeně celočíselné úlohy, kdy je tento požadavek kladen pouze na určitou podmnožinu proměnných. Specifickým případem ryze celočíselných úloh jsou například úlohy bivalentní, ve kterých proměnné mohou nabývat pouze hodnot 0 nebo 1.

Podmínka celočíselnosti vychází z podstaty daného problému. Pokud v ekonomickém modelu, ze kterého vychází, určuje úroveň procesu, tedy například počet kusů výroby nějakého výrobku, je zřejmé, že v matematickém modelu musí být hodnota odpovídající proměnné celočíselná. Bylo by nesmyslné například prodávat 2,5 židle. Nicméně pokud je úloha rozsáhlá, je možné od některých podmínek celočíselnosti upustit. Například velkopekárna, která každý den upeče několik stovek tisíc rohlíků, může tuto podmínku zanedbat, protože vzniklá ztráta je zanedbatelná.

V některých modelech nemusí být implicitně napsána podmínka celočíselnosti, avšak pro získání řešení, nebo ulehčení jeho získání, je třeba zavést umělé celočíselné proměnné. Příkladem může být úloha s fixními náklady, ve které je jedna část nákladů pevně daná a druhá je variabilní. Pro lepší pochopení lze uvažovat příklad z [3, str. 319] dopravního problému s fixními náklady, kde

$a_i, i = 1, 2, \dots, m$, jsou kapacity výroby,

$b_j, j = 1, 2, \dots, n$, jsou požadavky zákazníků,

n je počet zákazníků,

c_{ij} jsou náklady na výrobu a dopravu z místa i k zákazníkovi j ,

k_i jsou jednorázové náklady spojené s kapacitami a_i ,

z je hodnota účelové funkce,

x_{ij} je přepravované množství mezi místem i a odběratelem j ,

f_{ij} je pomocná proměnná,

y_i je binární proměnná, a je určena podle hodnoty x_{ij} .

Účelová funkce je tvořena celkovými náklady a v modelu je snaha o její minimalizaci.

Nechť je matematický model úlohy následující

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} x_{ij},$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j, & j = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ij} &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

kde

$$f_{ij} x_{ij} = \begin{cases} c_{ij} x_{ij} + k_i, & \text{pokud } x_{ij} > 0 \\ 0, & \text{pokud } x_{ij} = 0, \end{cases}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$

Tento zápis je možné změnit zavedením binární proměnné y_{ij} . V tomto případě dochází ke změně modelu na smíšeně celočíselný.

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_{ij} > 0 \\ 0, & \text{pokud } x_{ij} = 0. \end{cases}$$

Po zavedení binární proměnné y_{ij} se změní zápis úlohy následujícím způsobem:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} x_{ij} + k_i y_{ij}),$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i y_{ij}, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j, & j = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ij} &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ y_{ij} &= 1 \text{ (0)}, & i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

V praxi je možné se setkat s úlohami celočíselného programování velmi často. Jak uvádí [2, str. 258], řešení takovýchto úloh je výpočetně velmi náročné, byť existují různé algoritmy, u kterých je za určitých podmínek dokázána konvergence k optimálnímu řešení. Některé úlohy jsou tak rozsáhlé a obsahují tak velké množství proměnných a omezujících podmínek, že navzdory neustále se vyvíjejícím technickým prostředkům, není možné tyto úlohy vyřešit v krátkém čase, pokud vůbec software dojde k nějakému řešení.

Jak již bylo zmíněno, existují různé algoritmy, které dle [1, str. 115] můžeme rozdělit podle charakteru do následujících skupin:

1. metody řezných nadrovin,
2. kombinatorické metody,
3. speciální metody.

Existují ale i další způsoby dělení a členění, nebo metody, které nejdou jednoznačně zařadit. Jako příklad dalších metod lze uvést například metodu dynamického programování nebo některé heuristické metody.

Tato práce bude zaměřena pouze na několik vybraných metod, které budou blíže popsány v kapitole 2 Metody řešení úloh smíšeného celočíselného lineárního programování, a to z důvodu omezeného rozsahu této práce.

1.2 FORMULACE ÚLOHY SMÍŠENÉHO CELOČÍSELNÉHO PROGRAMOVÁNÍ

Jak uvádí [4, str. 9], obecným tvarem úlohy smíšeného celočíselného lineárního programování je úloha maximalizace lineární funkce s tím, že nezávisle proměnné musí splňovat soustavu omezení ve tvaru soustavy lineárních rovnic nebo nerovnic, a některé z nich ještě musí splňovat podmínku celočíselnosti, zatímco jiné mohou být neceločíselné.

Úlohu pak lze zapsat ve tvaru

$$\max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} : \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{y} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^p \},$$

kde $\mathbb{Z}_+$ je množina celých nezáporných čísel,

$\mathbb{R}_+$ je množina nezáporných reálných čísel,

$\mathbf{c}^T$ je n -složkový vektor cen celočíselných proměnných,

$\mathbf{d}^T$ je p -složkový vektor cen neceločíselných proměnných,

$\mathbf{A}$ je matice $m \times n$ koeficientů m omezení a n celočíselných proměnných,

$\mathbf{D}$ je matice $m \times p$ koeficientů m omezení a n neceločíselných proměnných,
 $\mathbf{b}$ je m -složkový vektor pravých stran, přičemž hodnoty pravých stran mohou nabývat libovolných hodnot (tedy i záporných).

Množinu přípustných řešení lze označit následujícím způsobem

$$S = \{ \mathbf{x} \in Z_+^n, \mathbf{y} \in R_+^p : \mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{b} \}.$$

Tato množina obsahuje vektory $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, které splňují soustavu omezujících podmínek, a zároveň jsou všechny složky vektoru $\mathbf{x}$ nezáporné a celočíselné, zatímco složky vektoru $\mathbf{y}$ jsou nezáporné, ale mohou být i neceločíselné.

Pro pochopení problematiky je nutné, aby se čtenář seznámil s některými základními pojmy, které budou v této práci užívány. Vysvětlení jednotlivých pojmů je převzato z [1, str. 17, 82].

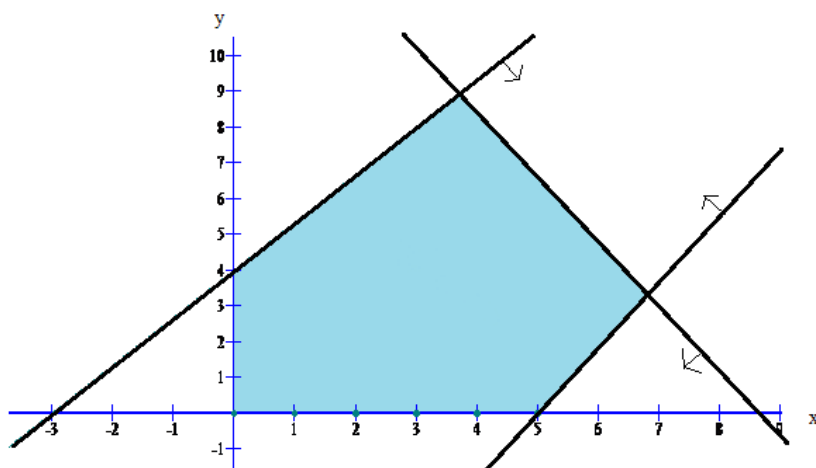
Ekonomický model je takový model, který popisuje reálný systém s tím, že se jedná o jeho zjednodušení a jsou uváděny jen nejdůležitější prvky a vazby mezi nimi. K němu vytvořený **matematický model** popisuje ekonomický model za pomoci rovnic a nerovnic. V tomto stavu již je problém řešitelný standardními výpočetními postupy.

Nepřípustné řešení je takové řešení, které porušuje alespoň jednu z omezujících podmínek úlohy. Oproti tomu může existovat **přípustné řešení**, které neporušuje ani jedno z vlastních omezení, ani podmínky nezápornosti nebo celočíselnosti. **Optimální řešení** je pak nejlepší ze všech přípustných řešení (dosahuje nejvyšší hodnoty pro maximalizační úlohy a nejnižší pro úlohy minimalizační).

Simplexová metoda je speciální iterační postup pro řešení úloh lineárního programování. Tuto metodu lze nastudovat například v [2, od str. 81].

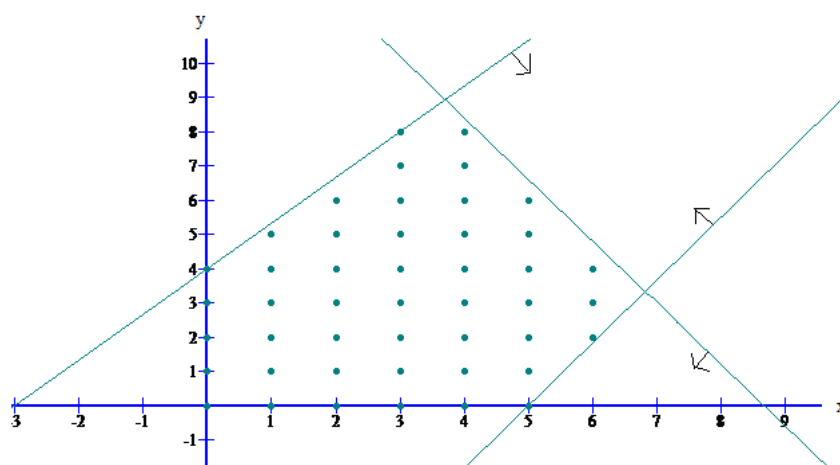
1.3 MNOŽINA PŘÍPUSTNÝCH ŘEŠENÍ V LINEÁRNÍM PROGRAMOVÁNÍ

Pro úlohy **lineárního programování** platí, že množina přípustných řešení je konvexní polyedrická množina, viz obrázek 1. Tato množina je tvořena průnikem konečného počtu nadrovin a má konečný počet krajních bodů. Toto tvrzení obecně neplatí v úlohách celočíselného programování.



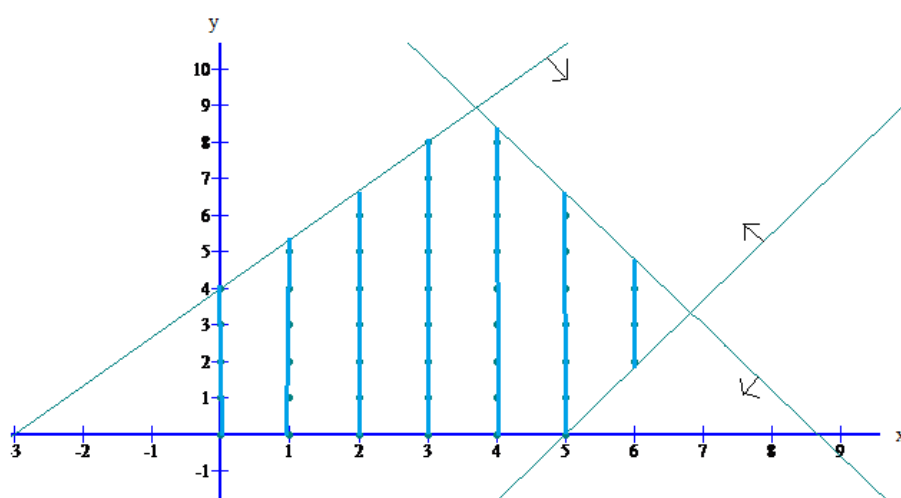
Obrázek 1: Množina přípustných řešení úlohy lineárního programování

Množina přípustných řešení úlohy **ryze celočíselného programování** je tvořena jednotlivými izolovanými celočíselnými body, viz obrázek 2. Pokud je tato množina přípustných řešení S tvořena malým počtem bodů, je možné použít některou z enumerativních metod, také označovaných pojmem metody hrubé síly, ve kterých jde o vypočtení hodnoty účelové funkce v každém bodě množiny přípustných řešení a následné vybrání toho bodu, jehož hodnota účelové funkce je optimální (nejvyšší pro maximalizační úlohu, respektive nejnižší pro úlohu minimalizační).



Obrázek 2: Množina přípustných řešení úlohy ryze celočíselného programování

Ve dvourozměrných úlohách **smíšeného celočíselného programování**, kde jedna proměnná je celočíselná a druhá libovolná, je množina přípustných řešení tvořena soustavou rovnoběžných úseček s jednou z os, viz obrázek 3. V případě úlohy znázorněné na obrázku 3 jsou hodnoty x celočíselné, hodnoty y mohou být i neceločíselné, za předpokladu, že splňují ostatní vlastní omezení úlohy. Ve třírozměrné úloze může být množina přípustných řešení tvořena rovnoběžnými plochami, jejichž vzdálenost je jedna. Tato množina přípustných řešení ovšem může být také tvořena rovnoběžnými přímkami nebo úsečkami. Pokud je úloha vícerozměrná, je velice těžké představit si, jak vypadá množina přípustných řešení.



Obrázek 3: Množina přípustných řešení úlohy smíšeného lineárního programování

2 METODY ŘEŠENÍ ÚLOH SMÍŠENÉHO CELOČÍSELNÉHO LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Vzhledem k tomu, že existuje mnoho rozličných metod pro řešení úloh smíšeného celočíselného lineárního programování, budou v této práci vysvětleny pouze některé, a to z důvodu rozsahu této práce.

2.1 METODA ZAOKROUHLOVÁNÍ

Jednou z metod řešení úlohy celočíselného programování je primární zanedbání podmínek celočíselnosti. Úloha se řeší vhodnou metodou lineárního programování, například simplexovou metodou, a konečný výsledek se upraví zaokrouhlením na celá čísla.

Tato metoda je nepřesná a řešitel se může dopustit velkých chyb při jejím používání. Nicméně v praxi se zaokrouhlení používá a to v situaci, kdy je zřejmé, že chyba, která vznikne, je přijatelná [6, str. 57].

Při zaokrouhlování výsledku směrem dolů se může dojít k řešení úlohy, jehož účelová funkce dosahuje nižší hodnoty (u maximalizační úlohy) než je u optimálního řešení. Naopak, při zaokrouhlování směrem nahoru, je možné dosáhnout nepřipustného řešení. Může ovšem nastat případ, kdy to bude obráceně: při zaokrouhlení směrem dolů se získá nepřipustné řešení nebo zaokrouhlením směrem nahoru se získá hodnota účelové funkce, která je nižší než hodnota optimální. Nadto, v případě, kdy úloha nemá žádné celočíselné řešení, nemusí se k tomuto závěru vůbec dojít.

Na druhou stranu, některé typy úloh nejsou ovlivněny zanedbáním těchto podmínek a zachovávají si řešení celočíselné. Jedná se především o úlohy přiřazovacího a dopravního problému, pokud jsou ovšem hodnoty pravých stran celočíselné.

Nyní bude uveden příklad, na kterém bude ukázáno, jak se mění výsledek v závislosti na způsobu zaokrouhlování.

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5y \rightarrow \max$$

za podmínek

$$\begin{aligned} 10x_1 + 15x_2 + 7y &\leq 250, \\ x_1 + 3x_2 + 8y &\leq 50, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \text{ celé,}$$

$$y_j \geq 0.$$

Nejprve byl zadán model v rovnicové formě do programu LINGO 11.0, včetně podmínek celočíselnosti, viz model v Lingu 1.

```
Model:
max = 3*x1 + 2*x2 + 5*y;
10*x1 + 15*x2 + 7*y <= 250;
x1 + 3*x2 + 8*y <= 50;
@gin(x1);
@gin(x2);
End
```

Model v Lingu 1

Po provedení výpočtu simplexovou metodou bylo získáno optimální řešení, viz výstup z Linga 1. Toto optimální řešení se nechá zapsat ve formě $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (22; 0)^T$, $\mathbf{y}^{\text{opt}} = (3,5)$ a optimální hodnota účelové funkce jako $z^{\text{opt}} = 83,5$.

```
Global optimal solution found.
Objective value:                83.50000
Objective bound:                83.50000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        3
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	22.00000	-2.375000
X2	0.000000	-0.1250000
Y	3.500000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	83.50000	1.000000
2	5.500000	0.000000
3	0.000000	0.6250000

Výstup z Linga 1

Model této samé úlohy bez uvažování podmínek celočíselnosti jsou zapsány v modelu z Linga 2. Po provedení výpočtu je získáno optimální řešení, které je zapsáno ve výstupu z Linga 2. Toto řešení lze zapsat ve formě $\mathbf{x}_2^{\text{opt}} = (22,6; 0)^T$, $\mathbf{y}_2^{\text{opt}} = (3,42)$ a $z_2^{\text{opt}} = 84,93$.

```
Model:
max = 3*x1 + 2*x2 + 5*y;
10*x1 + 15*x2 + 7*y <= 250;
x1 + 3*x2 + 8*y <= 50;
End
```

Model v Lingu 2

```
Global optimal solution found.
Objective value:                84.93151
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        2
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	22.60274	0.000000
X2	0.000000	3.095890
Y	3.424658	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	84.93151	1.000000
2	0.000000	0.2602740
3	0.000000	0.3972603

Výstup z Linga 2

Je vidět, že jedna složka vektoru x porušuje podmínku celočíselnosti, která je na ni kladena, a proto je nutné tuto proměnnou zaokrouhlit na celé číslo. Jednotlivá řešení jsou uvedena v tabulce 1. V posledním řádku je uvedeno optimální řešení s podmínkami celočíselnosti. V prvním řádku je uvedeno řešení bez podmínek celočíselnosti. Druhý a třetí řádek označují případy zaokrouhlení nahoru, respektive dolů.

	x_1	x_2	y	z
1)	22,60	0,00	3,42	84,93
2)	23,00	0,00	3,42	86,10
3)	22,00	0,00	3,42	83,10
4)	22,00	0,00	3,50	83,50

Tabulka 1: Přehled jednotlivých řešení

Je vidět, že se jednotlivá řešení pohybují kolem optima, nicméně při zaokrouhlení nahoru je hodnota účelové funkce nadhodnocena a při zaokrouhlování dolů zase podhodnocena. Navíc při kontrole, zda jsou dodrženy všechny podmínky zadané úlohy, se ukazuje, že při zaokrouhlení nahoru je získané řešení nepřípustné, protože jsou porušeny obě podmínky:

$$10x_1 + 15x_2 + 7y \leq 250,$$

$$x_1 + 3x_2 + 8y \leq 50,$$

$$10 \cdot 23 + 15 \cdot 0 + 7 \cdot 3,42 = 253,94 > 250,$$

$$23 + 0 + 8 \cdot 3,42 = 50,36 > 50.$$

Z tabulky 1 je zřejmé, že tímto způsobem nebylo dosaženo optimálního řešení. Navíc, může nastat situace, kdy žádné z řešení není přípustné a tím pádem, musí řešitel použít nějakou jinou metodu řešení úlohy. Tato konkrétní úloha byla velmi malá, a proto i výpočet byl krátký, nicméně pro rozsáhlejší úlohy může být výpočet náročný.

2.2 KOMBINATORICKÉ METODY

Kombinatorické metody vycházejí z předpokladu, že existuje konečný počet řešení. Pro úlohy ryze celočíselného typu to je konečný počet řešení, pro úlohy smíšené se jedná o konečný počet kombinací hodnot celočíselných proměnných. Tyto metody se snaží efektivně prohledávat možná řešení či jejich kombinace.

2.2.1 METODA VĚTVENÍ A MEZÍ (LAND A DOIG)

Jedná se o metodu formulovanou autorkami Land a Doig, kterou je možné aplikovat jak na ryze, tak na smíšeně celočíselné úlohy. Vzhledem k zaměření této práce, zde bude popsán pouze případ smíšených celočíselných úloh lineárního programování. Postup pro ryze celočíselné úlohy je možno nastudovat v [1, od str. 261].

Mezi algoritmy pro smíšené a ryze celočíselné úlohy existuje jen několik málo odlišností. Pro vytvoření další větve se vybírá pouze mezi proměnnými s podmínkou celočíselnosti. Dále, existuje-li optimální řešení, pak je takové, že všechny proměnné s celočíselným omezením toto omezení splňují.

Postup spočívá v rozdělení celkové množiny přípustných řešení X^0 odpovídající úlohy lineárního programování bez podmínek celočíselnosti na dílčí podmnožiny řešení, které jsou systematicky vyhodnocovány, dokud nejsou vyhodnocena všechna přípustná řešení. Protože se jedná o smíšenou celočíselnou úlohu, pouze některé proměnné podléhají podmínce celočíselnosti, zatímco jiné proměnné mohou nabývat reálných nezáporných hodnot.

Nejprve je třeba definovat množinu všech přípustných řešení bez podmínek celočíselnosti, která je následující

$$X^0 = \{ \mathbf{x} \in R^p, \mathbf{y} \in R^p \mid \mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0 \}.$$

Úloha se řeší klasickým postupem, bez uvažování podmínek celočíselnosti, na množině přípustných řešení X^0 . Řešením bude vektor $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ a vektor $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_p^0)^T$ s hodnotou účelové funkce z^0 . Jednotlivé složky vektoru $\mathbf{x}^0$ je nutné konfrontovat s podmínkami celočíselnosti.

Mohou nastat dvě situace: v té první řešení vyhovuje všem podmínkám celočíselnosti, vypočtené řešení je přípustné a končí výpočet v dané větvi. Pokud ovšem řešení podmínkám celočíselnosti nevyhovuje, je třeba pokračovat ve výpočtu.

Dochází k tomu, že se původní množina přípustných řešení X^0 rozdělí, neboli bude provedeno větvení množiny, do dvou podmnožin $X^{0,1}$ a $X^{0,2}$, a to podle jedné proměnné z vektoru $\mathbf{x}^0$ porušující podmínky celočíselnosti, například x_k . Její hodnota je označena jako x_k^0 .

U množiny X^0 se doplní podmínka $x_k \leq [x_k^0]$ a získá se tak $X^{0,1}$, přidáním podmínky $x_k \geq [x_k^0] + 1$, kde $[x_k^0]$ je celá část hodnoty x_k se získá množina $X^{0,2}$.

Podmnožiny jsou tedy definovány následovně

$$\begin{aligned} X^{0,1} &= \{\mathbf{x} \in X^0 \mid x_k \leq [x_k^0]\}, \\ X^{0,2} &= \{\mathbf{x} \in X^0 \mid x_k \geq [x_k^0] + 1\}. \end{aligned}$$

Klasickou metodou, bez uvažování podmínek celočíselnosti, se spočítá optimální řešení pro obě větve. Řešitel se dostává do bodu, kdy řešení buď vyhovuje všem podmínkám celočíselnosti, anebo, v opačném případě, je nutné proces větvení opakovat.

Součástí algoritmu je definování horní meze pro hodnotu účelové funkce v každé větvi (v případě maximalizační úlohy, dolní meze pro úlohu minimalizační). Horní mez v dané větvi odpovídá hodnotě účelové funkce, spočítané bez podmínek celočíselnosti. Stanovení těchto horních mezí umožňuje uzavření větve, pokud spočítaná hodnota účelové funkce (neboli horní mez) je nižší než hodnota účelové funkce přípustného řešení spočítaného dříve v jiné větvi.

Existují tři způsoby uzavření větve.

1. Ve větvi je nalezeno řešení přípustné, tzn. celočíselné pro všechny proměnné, na které jsou kladeny podmínky celočíselnosti.
2. Ve větvi neexistuje přípustné řešení.
3. Ve větvi existuje neceločíselné řešení, jehož horní mez (pro maximalizační úlohu) hodnoty účelové funkce je nižší než hodnota účelové funkce přípustného řešení, nalezeného v předchozích krocích v jiné větvi. Pro minimalizační úlohu platí, že existuje neceločíselné řešení, jehož dolní mez hodnoty účelové funkce je vyšší než hodnota účelové funkce přípustného řešení.

Poté, co jsou uzavřeny všechny větve, je třeba vyhodnotit nalezená přípustná řešení a prohlásit, které je nejlepší (tj. pro maximalizační úlohu to s nejvyšší hodnotou účelové funkce). Může se stát, že optimální řešení pro danou úlohu neexistuje, a to tehdy, pokud nebylo nalezeno žádné přípustné řešení v žádné větvi.

Pro větší názornost bude tato metoda aplikována na příkladu nadefinovaném v kapitole 3.1.

Nejprve se spočítá optimální řešení pro úlohu nezahrnující podmínky celočíselnosti, například za pomoci programu LinPro. Získané řešení je uvedené v tabulce 2. Řešení je možné zapsat ve formě $\mathbf{x}^0 = (22,6; 0)^T$, $\mathbf{y}^0 = (3,42)$, $z^0 = 84,93$.

Prom.	x_1	x_2	y	x_4	x_5	b
x_1	1	1,356	0	0,110	-0,096	22,60
y	0	0,205	1	-0,014	0,137	3,42
z	0	3,096	0	0,260	0,397	84,93

Tabulka 2: Řešení úlohy bez uvažování podmínek celočíselnosti

Toto řešení není pro úlohu optimální, protože hodnota proměnné x_1 porušuje podmínku celočíselnosti. Množina přípustných řešení neceločíselné úlohy se rozdělí na dvě části, dvě větve. Pro každou větev se přidá jedna další podmínka, v tomto případě $x_1 \leq 22$ pro větev první, respektive $x_1 \geq 23$ pro větev druhou.

Pokračuje se ve výpočtu v první větvi. Po přidání podmínky $x_1 \leq 22$ k původním podmínkám je získáno řešení obsažené v tabulce 3. Toto řešení se zapíše jako $\mathbf{x}^1 = (22; 0,44)^T$, $\mathbf{y}^1 = (3,33)$, hodnota účelové funkce jako $z^1 = 83,56$.

Prom.	x_1	x_2	y	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	1	0	0,081	-0,071	-0,737	0,44
y	0	0	1	-0,030	0,152	0,152	3,33
x_1	1	0	0	0	0	1	22
z	0	0	0	0,010	0,616	2,283	83,56

Tabulka 3: Řešení úlohy po přidání podmínky

Je vidět, že toto řešení opět nesplňuje podmínky celočíselnosti, konkrétně hodnota proměnné x_2 tuto podmínku porušuje. Tato podmnožina se opět rozdělí na dvě části. Přidáním první podmínky $x_2 \leq 0$, vzhledem k podmínce nezápornosti proměnných upravené na $x_2 = 0$, se získá podmnožina $X^{1,1}$, a přidáním podmínky druhé $x_2 \geq 1$ se získá podmnožina $X^{1,2}$.

Vzhledem k tomu, že se pokračuje ve výpočtu ve větvi s nejvyšší mezí, je třeba nejprve počítat $X^{0,2}$ a až následně pokračovat v $X^{1,1}$ a $X^{2,1}$.

Je tedy třeba pokračovat s výpočty ve větvi $X^{0,2}$ s přidanou podmínkou $x_1 \geq 23$.

Po přidání podmínky $x_1 \geq 23$ řešitel dospěje k řešení, které je zobrazeno v tabulce 4. Toto řešení může zapsat jako $\mathbf{x}^4 = (23; 0)^T$, $\mathbf{y}^4 = (2,86)$ a $z^4 = 83,29$. Toto řešení splňuje všechny kladené podmínky celočíselnosti a větev je uzavřena.

Prom.	x_1	x_2	y	x_4	x_5	x_6	y_1	b
y	0	2,143	1	0,143	0	1,429	-1,429	2,86
x_5	0	-14,143	0	-0,143	1	-10,429	10,429	4,14
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	23
z	0	8,714	0	0,714	0	4,143	-4,143	83,29

Tabulka 4: Řešení úlohy po přidání podmínky

Po přidání podmínky $x_2 = 0$ (tedy $X^{1,1}$: model nyní obsahuje 2 původní vlastní omezující podmínky a 2 přidané), se získá řešení obsažené v tabulce 5. Lze ho zapsat ve formě vektoru $\mathbf{x}^2 = (22; 0)^T$, $\mathbf{y}^2 = (3,5)$, $z^2 = 83,5$.

Prom.	x_1	x_2	y	x_4	x_5	x_6	y_1	b
x_4	0	0	0	1	-0,875	-9,125	-12,375	5,5
y	0	0	1	0	0,125	-0,125	-0,375	3,5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	22
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0
z	0	0	0	0	0,625	2,375	0,125	83,5

Tabulka 5: Řešení úlohy po přidání podmínky

Toto řešení již splňuje podmínky celočíselnosti, tato větev tímto výpočtem končí.

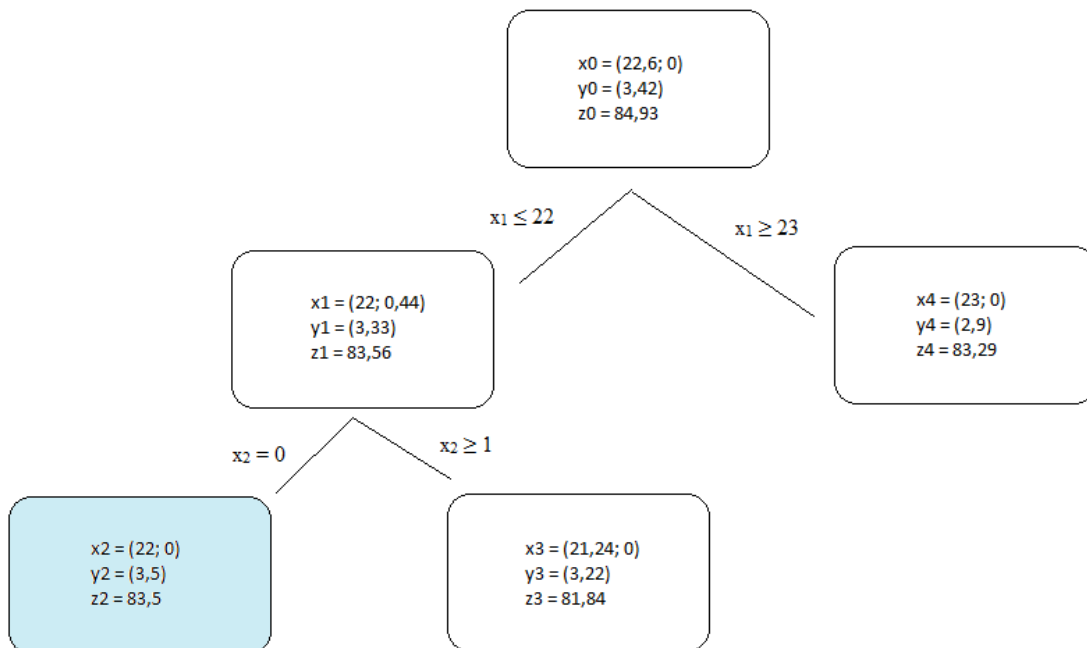
Druhá větev $X^{1,2}$ vycházející z řešení $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{y}^1$, z^1 je charakterizována přidáním podmínky $x_2 \geq 1$. Výpočtem se získá řešení obsažené v tabulce 6. Nechá se zapsat vektorově jako $\mathbf{x}^3 = (21,24; 0)^T$, $\mathbf{y}^3 = (3,22)$ a hodnota účelové funkce jako $z^3 = 81,83$. V tomto řešení opět hodnota proměnné x_1 porušuje podmínku celočíselnosti. Tato větev je však uzavřena, protože horní mez pro hodnotu účelové funkce je nižší, než hodnota účelové funkce celočíselného řešení, ke kterému se dospělo v předchozím kroku ($z_2 = 83,5$).

Prom.	x_1	x_2	y	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	b
x_1	1	0	0	0,110	-0,096	0	1,356	-1,356	21,25
x_3	0	0	1	-0,014	0,137	0	0,205	-0,205	3,22
x_6	0	0	0	-0,110	0,096	1	-1,356	1,356	0,75
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	-1	1
z	0	0	0	0,260	0,397	0	3,096	-3,096	81,84

Tabulka 6: Řešení úlohy po přidání podmínky

Posledním krokem je porovnání všech získaných řešení, která splňují podmínky celočíselnosti, z hlediska účelové funkce. V tomto konkrétním příkladu se budou porovnávat hodnoty řešení $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{y}^2$ a $\mathbf{x}^4$, $\mathbf{y}^4$. Zadaná úloha je maximalizační, a proto se zvolí řešení s vyšší hodnotou účelové funkce. Optimálním řešením je tedy řešení $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{y}^2$, s hodnotou účelové funkce 83,5.

Všechna větvení a řešení jsou zrekapitulována v obrázku 4, přičemž optimální řešení je vizuálně odlišeno barevně.



Obrázek 4: Přehled jednotlivých větví a jejich řešení

2.3 METODY ŘEZNÝCH NADROVIN

Jak je uvedeno v nadpisu kapitoly, pro tyto metody se používá označení metody řezných nadrovin, ale lze se setkat i s označením metody sečných nadrovin, nebo v angličtině cutting planes. Tyto metody je možné použít jak na ryze, tak na smíšeně celočíselné úlohy lineárního programování.

První krok spočívá v nalezení výchozí množiny přípustných řešení, spočítané bez uvažování podmínek celočíselnosti, jako tomu bylo u metody větvení a mezí. Standardním způsobem je vypočteno optimální řešení a v každém následujícím kroku je přidáváno jedno dodatečné omezení, které odstraňuje vždy nějakou určitou podmnožinu, která však neobsahuje žádné přípustné celočíselné řešení, zato obsahuje neceločíselné řešení z předchozího kroku. Pro každou novou zúženou množinu se přepočítává optimální řešení, až je nalezeno optimální řešení celočíselné úlohy, pokud takové řešení existuje.

2.3.1 GOMORYHO METODA

Tato část čerpá z [4, str. 80], není-li uvedeno jinak.

Gomoryho metoda pro úlohu smíšeného celočíselného programování se od klasické Gomoryho metody odlišuje pouze tvarem Gomoryho nerovnosti. Metody řešení úloh ryze celočíselného lineárního programování lze nastudovat v [2, od str. 265].

Prvním krokem výpočtu je získání optimálního řešení za předpokladu, že se vynechají podmínky celočíselnosti. Toto řešení bude pravděpodobně porušovat alespoň v jedné základní proměnné v s -tém kroku výpočtu podmínku celočíselnosti. Řádek, který porušuje podmínku celočíselnosti, je definován následující rovnicí

$$x_{B_s} + \sum_{j \in N} a_{sj} x_j = b_s,$$

kde x_{B_s} je základní proměnná, podléhající podmínce celočíselnosti,
 a_{sj} jsou transformované koeficienty s -tého řádku simplexové tabulky pro j -tou proměnnou,
 x_j představuje j -tou proměnnou,
 N je množina nezákladních proměnných,
 b_s znázorňuje hodnotu pravé strany a může být neceločíselná.

Pokud by všechny nezákladní proměnné byly rovny nule, získala by se rovnice $x_{B_s} = b_s$, která ovšem nemusí splňovat podmínky celočíselnosti. Libovolné přípustné řešení splňuje následující rovnici:

$$x_{B_s} + \sum_{j \in N} a_{sj} x_j = [b_s] + r_0,$$

kde $[b_s]$ je celočíselná část hodnoty pravé strany a r_0 je celočíselný zbytek.

Pro získané přípustné řešení $\mathbf{X}$ mohou nastat dva stavy.

$$1. \sum_{j \in N} a_{sj} x_j > 0,$$

Vzhledem k tomu, že x_{B_s} i $[b_s]$ jsou celé, musí při tomto stavu platit

$$\sum_{j \in N} a_{sj} x_j \in \{r_0, 1 + r_0, 2 + r_0, \dots\},$$

Platí $\sum_{j \in N} a_{sj}x_j \geq r_0$, a pokud se vynechají záporné členy, platí $\sum_{j \in N} a_{sj}^+x_j \geq r_0$, kde $a_{sj}^+ = \max\{a_{sj}, 0\}$.

$$2. \sum_{j \in N} a_{sj}x_j < 0,$$

V druhém případě musí být

$$\sum_{j \in N} a_{sj}x_j \in \{-1 + r_0, -2 + r_0, \dots\}.$$

Platí tedy $\sum_{j \in N} a_{sj}x_j \leq -1 + r_0$ a po vynechání kladných členů získáváme nerovnici ve tvaru $\sum_{j \in N} a_{sj}^-x_j \leq r_0 - 1$, kde $a_{sj}^- = \min\{a_{sj}, 0\}$.

Což je ekvivalentní s

$$\frac{r_0}{(r_0 - 1)} \sum_{j \in N} a_{sj}^-x_j \geq r_0.$$

Konečná Gomoryho nerovnost pro smíšenou úlohu celočíselného lineárního programování se získá spojením obou možných případů, a to v následujícím tvaru

$$\sum_{j \in N} a_{sj}^+x_j + \frac{r_0}{(r_0 - 1)} \sum_{j \in N} a_{sj}^-x_j \geq r_0.$$

Jak uvádí [4, str. 81], použitím metody Chvátalovy-Gomoryho se získá silnější tvar Gomoryho nerovnosti:

$$\sum_{j \in N} g_{sj}x_j \geq r_0,$$

kde

1. $g_{sj} = a_{sj}$ pro $a_{sj} \geq 0$, x_j spojitou proměnnou,
2. $g_{sj} = \frac{r_0}{(r_0 - 1)} a_{sj}$ pro $a_{sj} < 0$, x_j spojitou proměnnou,
3. $g_{sj} = r_{sj}$ pro $r_{sj} \leq r_0$, x_j celočíselnou proměnnou,
4. $g_{sj} = \frac{r_0}{(r_0 - 1)} (1 - r_{sj})$ pro $r_{sj} > r_0$, x_j celočíselnou proměnnou.

Nyní bude tato metoda použita pro vyřešení následující úlohy.

$$3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$10x_1 + 7x_2 \leq 250$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 50$$

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0, \text{ celé} \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Úloha se nejprve řeší bez podmínek celočíselnosti. Získané řešení je obsaženo v tabulce 7. Toto řešení není optimální, protože hodnota proměnné x_1 porušuje podmínku celočíselnosti.

Prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	0,130	-0,304	17,391
x_2	0	1	-0,043	0,435	10,870
z	0	0	0,174	1,261	106,522

Tabulka 7: Řešení bez podmínek celočíselnosti

Pro vytvoření Gomoryho nerovnosti se použije první řádek, jehož hodnota pravé strany porušuje celočíselné omezení, $x_1 = 17,391$. Z něj se spočítá celočíselný zbytek r_0 , g_{13} a g_{14} (podle vzorců uvedených výše). V tomto případě je $N = \{3, 4\}$.

$$r_0 = 17,391 - [17,391] = 0,391,$$

$$g_{13} = a_{13} = 0,13, \text{ protože } a_{sj} \geq 0 \text{ a } x_j \in N,$$

$$g_{14} = \frac{r_0}{(r_0-1)} \cdot a_{14} = \frac{0,391}{(0,391-1)} \cdot -0,304 = 0,196, \text{ protože } r_{sj} > r_0 \text{ a } x_j \in Z_+^n.$$

Gomoryho nerovnost je tedy v následujícím tvaru

$$0,13x_3 + 0,196x_4 \geq 0,391.$$

Aby se tato nerovnice mohla přidat do simplexové tabulky, musí se nejprve upravit. Nerovnici je třeba nejprve převést do tvaru „ $\leq$ “, a to vynásobením (-1) . Následně je nutné vyrovnat na rovnici přidáním přídatné proměnné x_5 , která podléhá omezení $x_5 \geq 0$. Předchozí nerovnice se přepíše ve tvaru:

$$-0,13x_3 - 0,169x_4 + x_5 = -0,391.$$

Prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0,130	-0,304	0	17,391
x_2	0	1	-0,043	0,435	0	10,870
x_5	0	0	-0,130	-0,196	1	-0,391
z	0	0	0,174	1,261	0	106,522

Tabulka 8: Simplexová tabulka po přidání podmínky získané z Gomoryho nerovnosti

Takto upravenou podmínku je možné připojit do simplexové tabulky, viz tabulka 8. Jedná se o postoptimalizační změnu. Řešení zapsané v simplexové tabulce v tabulce 8 je primárně

nepřípustné, ale duálně přípustné. Použitím duální simplexové metody se získá řešení, které je obsaženo v tabulce 9. Toto řešení je třeba zkontrolovat, zda je primárně i duálně přípustné a zda žádná proměnná neporušuje podmínku celočíselnosti. Řešení obsažené v tabulce 9 je optimální. Lze zapsat vektor $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (17; 11)$ a hodnotu účelové funkce $z^{\text{opt}} = 106$.

Prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	-0,5	1	17
x_2	0	1	0	0,5	-0,333	11
x_3	0	0	1	1,5	-7,667	3,000
z	0	0	0	1,000	1,333	106

Tabulka 9: Optimální řešení úlohy

2.4 SPECIÁLNÍ METODY

2.4.1 BENDERSOVA METODA

Pokud není uvedeno jinak, čerpá tato podkapitola z [5, od str. 459].

Bendersova metoda řeší úlohu smíšeně celočíselného lineárního programování dekompozicí úlohy na dvě části, a to na část ryze celočíselnou a část bez podmínek celočíselnosti.

Nechť je dána úloha

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} + \mathbf{c}_2^T \mathbf{w} \rightarrow \max, \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{w} &\leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq 0, \mathbf{w} \geq 0, \text{ celé.} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Za předpokladu, že je úloha omezená, ji lze zapsat také jako

$$z_1 = \mathbf{c}_2^T \mathbf{w} + \left(\text{maximum } z_2 = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}, \text{ za podmínek } \begin{matrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{matrix} \right). \quad (2.4.2)$$

Pokud by existoval malý počet možných celočíselných hodnot $\mathbf{w}$, bylo by možné použít metodu hrubé síly, tedy postupně dosazovat jednotlivé hodnoty a vybrat tu, která by účelovou funkci maximalizovala. Toto ovšem není možné použít, pokud existuje velké množství hodnot $\mathbf{w}$. Bendersova metoda spočívá v postupném přidávání podmínek v průběhu výpočtu.

Nechť je k úloze

$$z_2 = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \rightarrow \max, \quad (2.4.3)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}, \\ \mathbf{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

vytvořena úloha duální. Pro primární úlohu maximalizačního typu je úloha duální vytvořena způsobem, který je popsán v tabulce 10.

Primární úloha	Duální úloha
$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min$	$f = \mathbf{u}^T \mathbf{b} \rightarrow \max$
$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$	$\mathbf{u} \geq 0$
$\mathbf{x} \geq 0$	$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$

Tabulka 10: formulace symetrického duálního problému

Duální úloha má tedy tvar

$$z_2 = (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w})^T \mathbf{u} \rightarrow \min, \quad (2.4.4)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^T \mathbf{u} &\geq \mathbf{c}_1, \\ \mathbf{u} &\geq 0. \end{aligned}$$

Za předpokladu, že $\mathbf{w}$ je fixováno, se nechá vypočítat optimální řešení primární i duální úlohy, a získané výsledky se zapíší jako $\mathbf{x}^*$, respektive $\mathbf{u}^*$. Z věty o dualitě vyplývá, že

$$\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}^* = (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w})^T \mathbf{u}^*.$$

Věta o dualitě: Je-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ libovolné přípustné řešení primární úlohy a $\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ libovolné přípustné řešení duální úlohy, pak platí $z(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{u})$.

Jak je uvedeno v [2, str. 147], z této věty vyplývají následující důsledky:

- Platí-li $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{b}$, pak vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}^T$ jsou optimálním řešením primární, respektive duální úlohy.
- Pokud má jedna ze sdružených úloh neomezenou účelovou funkci, pak druhá úloha nemá přípustné řešení, a naopak.
- Existuje-li optimální řešení jedné úlohy, existuje i řešení úlohy s ní sdružené.
- Mají-li obě sdružené úlohy přípustné řešení, pak mají i řešení optimální.

Z úlohy (2.4.2) a jí úloh ekvivalentních (2.4.3) a (2.4.4) vyplývá, že se úloha nechá zapsat také jako

$$\text{maximum } \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} + \mathbf{c}_2^T \mathbf{w} = \text{maximum } \left\{ \mathbf{c}_2^T \mathbf{w} + \text{minimum} \{ (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w})^T \mathbf{u} \} \right\},$$

kde $\mathbf{u}$ je řešením úlohy (2.4.3).

Pro získání řešení je třeba nalézt p extrémálních bodů řešení $\mathbf{y}_k$, $k = 1, 2, \dots, p$, přičemž tyto extrémální body nejsou závislé na hodnotách $\mathbf{w}$.

Podle [4, str. 51], **extremní (extremální) bod** množiny přípustných řešení P (v této práci je množina přípustných řešení značena S) odpovídá nezápornému základnímu řešení soustavy lineárních rovnic, získaného z kanonického tvaru této soustavy lineárních rovnic. Jestliže v kanonickém tvaru, který je stejný s ekvivalentní soustavou rovnic, dosadíme nuly za nezákladní proměnné, dostaneme základní řešení, které představuje extrémní bod množiny P .

Necht' existuje množina bodů $\{x^1, x^2, \dots, x^t\}$, $x^i \in R^n, i = 1, 2, \dots, t$.

Bod $x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_t x^t$, pro $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in R$ se nazývá lineární kombinací bodů $x^1, x^2, \dots, x^t$.

Po získání extrémálních bodů je třeba řešit úlohu

$$c_2^T w + z_2 \rightarrow \max,$$

za podmínek

$$z_2 \leq (b - A_2 w)^T u_k, \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, p, \\ w \geq 0, \text{ celé.}$$

Získané řešení w bude optimální pro celočíselné proměnné. Řešení spojitých proměnných x se získá po dosazení w do (2.4.3).

Bendersova metoda spočívá v získávání jednotlivých řešení y_k , přičemž se předpokládá, že k získání optimálního řešení bude třeba jen několika řešení y_k . Jednotlivá řešení y_k se získávají vyřešením úlohy (2.4.4) při použití konkrétního w . Pokud je získáno řešení, přidá se k původním podmínkám z (2.4.5) podmínka nová, ve tvaru $z_2 \leq (b - A_2 w)^T u_k$. Nově získané řešení, po přidání podmínky, se použije pro řešení úlohy (2.4.4) a získání nového řešení y_k , tak dlouho, dokud není získáno optimální řešení.

Může nastat situace, kdy úloha (2.4.4) nemá přípustné řešení, nebo má neomezenou hodnotu účelové funkce. Pokud pro dané w je úloha (2.4.4) neomezená, neexistuje optimální řešení pro úlohu (2.4.1) při daném w . V tomto případě je totiž porušeno minimálně jedno z vlastních omezení úlohy (2.4.1). Vytvoří se vektor v a do modelu (2.4.5) se přidá podmínka

$$(b - A_2 w)^T v \geq 0.$$

Tento vektor v se také nazývá extrémální směr. Jak dále uvádí [4, str. 51-52], vektor $r \in R^n$ ($r \neq 0$) se nazývá přípustný směr, jestliže pro každý bod $x \in P$ a pro všechna $\alpha \geq 0$ je $x + \alpha r \in P$, tedy přípustným řešením. Pokud na množině P existuje přípustný směr, pak je P neomezená. V případě, že P je omezená, neexistuje v této množině přípustný směr. Přípustný směr r se nazývá **extrémní (extremální) směr**, jestliže neexistují přípustné směry r^1 a r^2 takové, že $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$. Ze simplexové tabulky lze extrémní směr získat jednoduše: vynásobením sloupců, které jsou nekladné (mimo hodnotu řádku účelové funkce z), hodnotou

(-1). *Libovolný přípustný směr je konickou kombinací extrémních směrů.* Složkami vektoru $\mathbf{r}$ jsou tedy jednotlivé složky celého nekladného sloupce v simplexové tabulce.

Shrnutí Bendersovy metody

- 1) Řeší se ryze celočíselná úloha, která byla vytvořena z původní úlohy tak, že spojité proměnné byly nahrazeny pomocnou proměnnou z_2 .

$$z_1 \leq \mathbf{c}_2^T \mathbf{w} + z_2 \rightarrow \max,$$

za podmínek

původní podmínky, kterým podléhají $\mathbf{w}$ a z_2 , označené jako množina Q ,
 $z_2 \leq M$, pro M dostatečně velké

Pokud tato úloha nemá žádné přípustné řešení, pak neexistuje žádné přípustné řešení ani v původní úloze (2.4.1). Pokud řešení existuje, označí se jako $\mathbf{w}^*$ a pokračuje se krokem 2.

- 2) Řeší se úloha (2.4.4) za použití hodnot $\mathbf{w}^*$ získaných v prvním kroku výpočtu. Pokud je řešení neomezené, k podmínkám nadefinovaným v prvním kroku se přidá nová podmínka $(\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^*)^T \mathbf{v} \geq 0$ a pokračuje se krokem 1. Naopak, pokud řešení existuje, označí se jako $\mathbf{y}^*$ a pokračuje se krokem 3.

- 3) Je třeba porovnat hodnoty z_1 , získané v prvním kroku výpočtu s hodnotou $\mathbf{c}_2^T \mathbf{w}^* + (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^*)^T \mathbf{u}^*$. Pokud se obě hodnoty rovnají, výpočet končí. Řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ tvoří řešení optimální. Pokud se hodnoty nerovnají, je třeba přidat k původní množině Q další podmínku

$$z_2 \leq (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^*)^T \mathbf{u}^*,$$

a pokračovat ve výpočtu krokem 1.

Nyní bude tato dekompozice demonstrována na následující úloze.

Nechť je dána úloha (LP)

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5y \rightarrow \max$$

za podmínek

$$10x_1 + 15x_2 + 7y \leq 250,$$

$$x_1 + 3x_2 + 8y \leq 50,$$

$$x_j \geq 0, \text{ celé},$$

$$y_j \geq 0.$$

První krok spočívá v řešení ryze celočíselné úlohy, přičemž spojitá proměnná y je nahrazena pomocnou proměnnou z_2 . Je přidána podmínka omezující z_2 seshora.

Úloha se nechá řešit v Lingu, viz model v Lingu3.

```
Model:
max=3*x1 +2*x2 +z2;
10*x1+15*x2+7*y<250;
x1+3*x2+8*y<50;
z2<1000;
@gin(x1);
@gin(x2);
End
```

Model v Lingu 3

```
Global optimal solution found.
Objective value:                1075.000
Objective bound:                1075.000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        0
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	25.00000	-3.000000
X2	0.000000	-2.000000
Z2	1000.000	0.000000
Y	0.000000	0.000000

Výstup z Linga 3

Jak je vidět z výstupu z Linga 3, bylo získáno přípustné řešení $\mathbf{w}^* = (25; 0)$ a hodnota účelové funkce $z_1 = 1075$.

Druhým krokem je vytvoření duální úlohy k původní úloze, při použití hodnot $\mathbf{w}^*$. Tato úloha bude opět řešena v Lingu, pro zápis modelu viz model v Lingu 4.

```
Model:
min=0*u1+25*u2+75;
7*u1+8*u2>5;
End
```

Model v Lingu 4

```
Global optimal solution found.
Objective value:                75.00000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        0
```

Variable	Value	Reduced Cost
U1	0.7142857	0.000000
U2	0.000000	25.00000

Výstup z Linga 4

Řešení duální úlohy je obsaženo ve výstupu z Linga 4. Řešení se označí jako $\mathbf{u}^* = (0,7142857; 0)$, hodnota účelové funkce je $f = 75$.

Protože se hodnoty účelových funkcí nerovnají, je třeba ve výpočtu pokračovat. K původním podmínkám se přidá nová podmínky, $z_2 \leq (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^*)^T \mathbf{u}^*$. Model lze do Linga zapsat způsobem, který je uveden v modelu v Ling 5.

```
Model:
max=3*x1 +2*x2 +z2;
10*x1+15*x2+7*y<250;
x1+3*x2+8*y<50;
z2<1000;
z2<0.7142857*(250-10*x1-15*x2);
@gin(x1);
@gin(x2);
End
```

Model v Ling 5

```
Global optimal solution found.
Objective value:                178.5714
Objective bound:                178.5714
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        0
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	4.142857
X2	0.000000	8.714286
Z2	178.5714	0.000000
Y	0.000000	0.000000

Výstup z Ling 5

Podle výstupu z Ling 5 se dá zapsat nové řešení $\mathbf{w}^* = (0; 0)$ a nová hodnota účelové funkce je $z_1 = 178,5714$.

Opět se vytvoří duální úloha k původní úloze, přičemž se použijí hodnoty $\mathbf{w}^*$, tedy $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$. Model se zapíše do Linga, viz model v Ling 6, a nechá se vyřešit.

```
Model:
min=250*u1+50*u2;
7*u1+8*u2>5;
End
```

Model v Ling 6

```
Global optimal solution found.
Objective value:                31.25000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        0
```

Variable	Value	Reduced Cost
U1	0.000000	206.2500
U2	0.625000	0.000000

Výstup z Ling 6

Řešení duální úlohy je obsaženo ve výstupu z Linga 6. Řešení se označí jako $\mathbf{u}^* = (0; 0,625)$, hodnota účelové funkce je $f = 31,25$.

Protože se hodnoty účelových funkcí nerovnají, je třeba ve výpočtu pokračovat. K původním podmínkám se přidá nová podmínky, $z_2 \leq (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^*)^T \mathbf{u}^*$. Model lze do Linga zapsat způsobem, který je uveden v modelu v Lingu 7.

```
Model:
max=3*x1 +2*x2 +z2;
10*x1+15*x2+7*y<250;
x1+3*x2+8*y<50;
z2<1000;
z2<0.7142857*(250-10*x1-15*x2);
z2<0.625*(50-x1-3*x2);
@gin(x1);
@gin(x2);
End
```

Model v Lingu 7

```
Global optimal solution found.
Objective value:                83.50000
Objective bound:                83.50000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        3
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	22.00000	-2.375000
X2	0.000000	-0.1250000
Z2	17.50000	0.000000
Y	0.000000	0.000000

Výstup z Linga 7

Podle výstupu z Linga 7 se dá zapsat nové řešení $\mathbf{w}^* = (22; 0)$ a nová hodnota účelové funkce je $z_1 = 83,5$.

Opět se vytvoří duální úloha k původní úloze, přičemž se použijí hodnoty $\mathbf{w}^*$, tedy $x_1 = 22$ a $x_2 = 0$. Model se zapíše do Linga, viz model v Lingu 8, a nechá se vyřešit.

```
Model:
min=30*u1+28*u2+66;
7*u1+8*u2>5;
End
```

Model v Lingu 8

```
Global optimal solution found.
Objective value:                83.50000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        0
```

Variable	Value	Reduced Cost
U1	0.000000	5.500000
U2	0.6250000	0.000000

Výstup z Linga 8

Řešení duální úlohy je obsaženo ve výstupu z Linga 8. Řešení se označí jako $\mathbf{u}^* = (0; 0,625)$, hodnota účelové funkce je $f = 83,5$.

Hodnoty obou účelových funkcí se rovnají, výpočet je u konce. Je pouze třeba dopočítat hodnoty spojitých proměnných, tedy proměnné y . Model je zapsán v modelu v Linga 9. Získané řešení z výstupu z Linga 9 je možné zapsat jako $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (22; 0)^T$, $\mathbf{y}^{\text{opt}} = (3,5)$ a hodnota účelové funkce je $z^{\text{opt}} = 83,5$.

```
Model:
max=3*x1 +2*x2 +5*y;
10*x1+15*x2+7*y<250;
x1+3*x2+8*y<50;
x1=22;
x2=0;
@gin(x1);
@gin(x2);
End
```

Model v Linga 9

```
Global optimal solution found.
Objective value:                83.50000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        0
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	22.00000	0.000000
X2	0.000000	0.000000
Y	3.500000	0.000000

Výstup z Linga 9

3 APLIKACE METOD NA PRAKTICKÉM PŘÍKLADU

V této části bude formulována jedna konkrétní úloha smíšeného celočíselného programování. Pro vyřešení této úlohy budou použity výše uvedené metody. Obsahem bude také následné srovnání použitých metod, jejich efektivnost, případně nedostatky, v tomto konkrétním případě. Pro řešení v aplikační části byl vybrán kapacitní problém s polotovary.

3.1 PŘÍBLÍŽENÍ EKONOMICKÉHO A MATEMATICKÉHO MODELU

První část dat je stažena z internetu [7], a to konkrétně ceny za kilogram bonbonů. Druhá část dat, disponibilní množství jednotlivých bonbonů a požadavky na počty bonbonů do jednotlivých bonboniér, byla nadefinována autorkou této práce.

Nechť je dána firma, která má k dispozici množství bonbonů za uvedenou cenu, uvedených v tabulce 11. V následujícím období má tedy firma k dispozici 3 kg čokoládových bonbonů Monardo s rumem, 2 kg čokoládových bonbonů vanilka, 3 kg Cuneesi oříšků v mléčné čokoládě, 1,5 kg višně v likéru, 1 kg čokoládových bonbonů Socado Lemon a 1,5 kg bonbonů Cuneesi mandle. Tyto bonbony mohou být prodávány samostatně na váhu, nebo mohou být vyrobeny bonboniéry, které obsahují jednotlivé bonbony tak, jak je uvedeno v tabulce 12 (nejedná se o počet bonbonů v kusech ale v gramech).

Typ bonbonu	Cena/Kg [Kč/kg]	Dispozice [kg]
Čokoládové bonbony Monardo s rumem	197	3
Čokoládové vanilka	255	2
Cuneesi Oříšek v mléčné čokoládě	315	3
Višně v likéru	255	1,5
Čokoládové Bonbony Socado Lemon	257	1
Cuneesi Mandle	315	1,5

Tabulka 11: Množství bonbonů k dispozici

Bonboniera	1 [g]	2 [g]	3 [g]
Čokoládové bonbony Monardo s rumem	51	34	0
Čokoládové vanilka	42	28	70
Cuneesi Oříšek v mléčné čokoládě	60	40	0
Višně v likéru	42	28	70
Čokoládové Bonbony Socado Lemon	45	30	0
Cuneesi Mandle	60	40	100
Cena	95	80	70

Tabulka 12: Složení bonbonů v jednotlivých bonboniérách uvedeno v počtech na kusy i na gramy

Pro přepis výše uvedeného ekonomického modelu do modelu matematického, je třeba nadefinovat proměnné. Tyto proměnné jsou uvedeny v tabulce 13. Necht' tedy uvedené proměnné vždy znázorňují počet prodaných bonboniér pro x_7 , x_8 a x_9 a množství volně prodaných bonbonů v kilogramech pro x_1 až x_6 .

x_1	Čokoládové bonbony Monardo s rumem
x_2	Čokoládové vanilka
x_3	Cuneesi Oříšek v mléčné čokoládě
x_4	Višně v likéru
x_5	Čokoládové Bonbony Socado Lemon
x_6	Cuneesi Mandle
x_7	Bonboniera 1
x_8	Bonboniera 2
x_9	Bonboniera 3

Tabulka 13: Proměnné modelu

Cílem je maximalizace tržby za prodané bonbony a bonboniéry. Tuto celkovou tržbu lze zapsat účelovou funkcí

$$z = 197x_1 + 255x_2 + 315x_3 + 255x_4 + 257x_5 + 315x_6 + 120x_7 + 100x_8 + 80x_9.$$

Na výrobu první bonboniéry se spotřebuje 51 g čokoládových bonbonů Monardo s rumem, 42 g čokoládových bonbonů vanilka, 60 g Cuneesi oříšků v mléčné čokoládě, 42 g višní v likéru, 45 g čokoládových bonbonů Socado Lemon a 60 g Cuneesi mandlí. Obdobě pro výrobu bonboniér 2 a 3 je zapotřebí 34 g čokoládových bonbonů Monardo s rumem, 28 g čokoládových bonbonů vanilka, 40 g Cuneesi oříšků v mléčné čokoládě, 28 g višní v likéru, 30 g čokoládových bonbonů Socado Lemon a 40 g Cuneesi mandlí, respektive 70 g čokoládových bonbonů vanilka, 70 g višní v likéru a 100 g Cuneesi mandlí. Spotřeba bonbonů na tvorbu bonboniér, ale i množství prodané samostatně na váhu, musí ovšem být nižší nebo rovna kapacitě jednotlivých bonbonů.

Dále je kladen požadavek, aby byly vyrobeny vždy alespoň 3 bonboniéry prvního typu, 3 třetího typu a maximálně 10 bonboniér druhého typu. Zároveň musí být počet bonboniér prvního a druhého typu roven 13. Je zřejmé, že je třeba uvažovat podmínku celočíselnosti pro proměnné x_7 , x_8 a x_9 , zatímco proměnné x_1 až x_6 mohou být i neceločíselné (je možný prodej i na necelé kilogramy).

Vlastní omezení úlohy je možné zapsat ve tvaru:

$$\begin{array}{rcll}
 x_1 & +0,051x_7 & +0,034x_8 & \leq 3 \\
 x_2 & +0,042x_7 & +0,028x_8 & +0,07x_9 \leq 2 \\
 x_3 & +0,06x_7 & +0,04x_8 & \leq 3 \\
 x_4 & +0,042x_7 & +0,028x_8 & +0,07x_9 \leq 1,5 \\
 x_5 & +0,045x_7 & +0,03x_8 & \leq 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_6 & +0,06x_7 & +0,04x_8 & +0,1x_9 & \leq 1,5 \\
 & x_7 & & & \geq 3 \\
 & & x_8 & & \leq 10 \\
 & & & x_9 & \geq 3 \\
 & x_7 & +x_8 & & = 13
 \end{array}$$

Je třeba také nadefinovat podmínku, která zaručí nezápornost všech proměnných a podmínky celočíselnosti pro proměnné x_7 , x_8 a x_9

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad x_7, x_8, x_9 - \text{celé}$$

Pro zápis ekonomického modelu v programu Lingo 11.0 viz model v Lingo 10.

Model:

```

Max=197*x1 + 255* x2 + 315* x3 + 255*x4 + 257* x5 + 315* x6 + 120*x7 +
100*x8 + 80*x9;
x1+ 0.051*x7 + 0.034*x8 <= 3;
x2 + 0.042*x7 + 0.028*x8 + 0.070*x9 <=2;
x3 + 0.060*x7 + 0.040*x8 <=3;
x4 + 0.042*x7 + 0.028*x8 + 0.070*x9 <=1.5;
x5 + 0.045*x7 + 0.030*x8 <=1;
x6 + 0.060*x7 + 0.040*x8 +0.1*x9 <=1.5;
x7 >= 3;
x8 <= 10;
x9 >= 3;
x7 + x8 = 13;
@gin(x7);
@gin(x8);
@gin(x9);
End

```

Model v Lingo 10

Global optimal solution found.

Objective value:	3851.824
Objective bound:	3851.824
Infeasibilities:	0.1665335E-15
Extended solver steps:	0
Total solver iterations:	0

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.507000	0.000000
X2	0.9640000	0.000000
X3	2.420000	0.000000
X4	0.4640000	0.000000
X5	0.5650000	0.000000

X6	0.2000000E-01	0.000000
X7	3.000000	-39.16800
X8	10.00000	-46.11200
X9	9.000000	-12.80000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	3851.824	1.000000
2	0.000000	197.0000
3	0.000000	255.0000
4	0.000000	315.0000
5	0.000000	255.0000
6	0.000000	257.0000
7	0.000000	315.0000
8	0.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	6.000000	0.000000
11	0.000000	0.000000

Výstup z Linga 10

Optimálním řešením této úlohy je vektor $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (2,507; 0,964; 2,42; 0,464; 0,565; 0,02; 3; 10; 9)$ a hodnota účelové funkce je 3 851,824 Kč, viz výstup z Linga 10.

Celkem je tedy prodáno:

- 2,507 kg čokoládových bonbonů Monardo s rumem,
- 0,964 kg čokoládových bonbonů s příchutí vanilky,
- 2,420 kg bonbonů Cuneesi: Oříšek v mléčné čokoládě,
- 0,464 kg bonbonů Višeň v likéru,
- 0,565 kg čokoládových bonbonů Socado Lemon,
- 0,02 kg bonbonů Cuneesi Mandle,
- 3 bonboniéry prvního typu,
- 10 bonboniér druhého typu,
- 9 bonboniér třetího typu,
- celkové týdenní tržby byly ve výši 3 851,824 Kč,
- všechny bonbony byly spotřebovány,
- bonboniéry 1 bylo prodáno o 0 kusů více, než byl minimální požadavek,
- bonboniéry 2 bylo prodáno o 0 kusů méně, než byl maximální požadavek,
- bonboniéry 3 bylo prodáno o 6 kusů více, než byl minimální požadavek,
- bonboniér 1 a 2 bylo prodáno přesně 13.

3.2 METODA ZAOKROUHLOVÁNÍ

V této části bude vidět, jak by se změnil výsledek, pokud by se podmínky celočíselnosti primárně zanedbaly a až výsledek získaný simplexovou metodou by se podle nich upravoval.

V tomto případě porušuje podmínku celočíselnosti jedna proměnná ze tří, a proto je možné zaokrouhlit dvěma způsoby (x_9 dolů nebo x_9 nahoru). Srovnání jednotlivých získaných hodnot je v tabulce 14. Výpočet tímto ovšem nekončí: je třeba se ujistit, zda jsou řešení přípustná, zda neporušují některou z vlastních omezení původního matematického modelu.

U zaokrouhlení 1 dochází k porušení minimálně jednoho z vlastních omezení. Není třeba kontrolovat všechny zbývající podmínky, protože už při porušení jednoho omezení se stává řešení nepřipustným.

$$x_4 + 0,042x_7 + 0,028x_8 + 0,07x_9 \leq 1,5,$$

$$0,45 + 0,042 \cdot 3 + 0,028 \cdot 10 + 0,07 \cdot 10 = 1,556 > 1,5.$$

U zaokrouhlení 2 dochází k porušení minimálně jednoho z vlastních omezení, řešení tudíž není přípustné.

$$x_2 + 0,042x_7 + 0,028x_8 + 0,07x_9 \leq 2,$$

$$0,95 + 0,042 \cdot 3 + 0,028 \cdot 10 + 0,07 \cdot 10 = 2,056 > 2.$$

Z tohoto příkladu je vidět, že zaokrouhlení není vhodnou formou, protože ani jedno řešení získané touto metodou nebylo přípustné a tudíž nijak nevyřešilo daný problém.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	z
OŘ s celočíselností	2,507	0,964	2,42	0,464	0,565	0,02	3	10	9	3 851,824 Kč
bez celočíselnosti	2,507	0,95	2,42	0,45	0,565	0	3	10	9,2	3 854,384 Kč
zaokrouhlení 1	2,507	0,95	2,42	0,45	0,565	0	3	10	9	3 838,384 Kč
zaokrouhlení 2	2,507	0,95	2,42	0,45	0,565	0	3	10	10	3 918,384 Kč

Tabulka 14: Přehled řešení úlohy

3.3 METODA VĚTVENÍ A MEZÍ

Jak bylo uvedeno v první části této práce, prvním krokem této metody je výpočet bez podmínek celočíselnosti. Výpočtem pomocí programu Lingo 11.0 bylo získáno řešení obsažené v tabulce 15. Proměnná x_9 porušuje podmínku celočíselnosti, které je na ni kladena.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	z
2,507	0,95	2,42	0,45	0,565	0	3	10	9,2	3 854,384 Kč

Tabulka 15: Řešení bez uvažování podmínek celočíselnosti

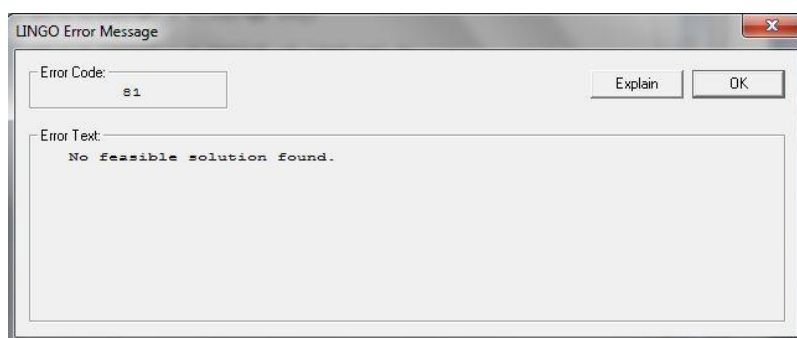
V tomto kroku byla tedy vybrána proměnná x_9 a na základě její hodnoty jsou vytvořeny dvě větve podle podmínek, které se přidají k původním podmínkám, a to $x_9 \leq 9$, resp. $x_9 \geq 10$.

Přidáním první podmínky je získáno nové řešení úlohy, které je zapsané v tabulce 16. Toto řešení je přípustné, hodnoty proměnných x_7 , x_8 a x_9 jsou celočíselné, výpočet v této větvi končí.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	z
2,5070	0,964	2,42	0,464	0,5650	0,02	3	10	9	3 851,82 Kč

Tabulka 16: Nové řešení po přidání podmínky $x_9 \leq 9$

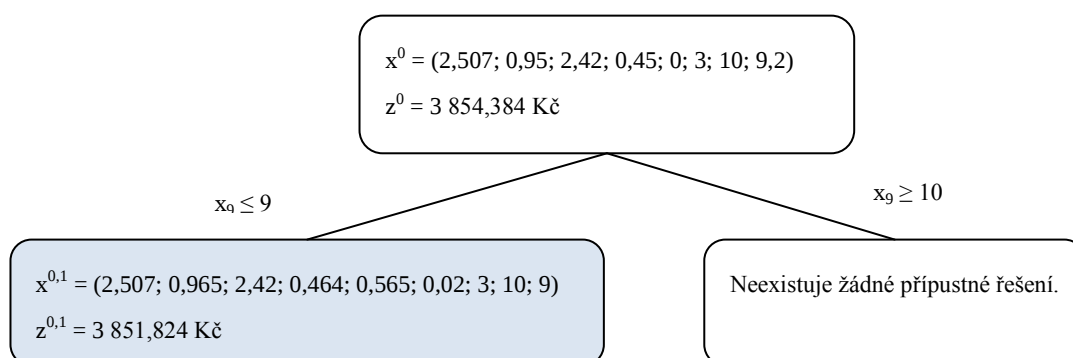
Po přidání druhé podmínky $x_9 \geq 10$, dochází k situaci, kdy takto definovaná úloha nemá přípustné řešení, viz obrázek 4. Výpočet v této větvi končí.



Obrázek 4: Neexistuje žádné přípustné řešení dané úlohy

Je třeba zkontrolovat všechna přípustná řešení a vybrat řešení s nejvyšší hodnotou účelové funkce. V tomto případě bylo získáno pouze jedno přípustné řešení, tedy je i řešením optimálním (obsaženo v tabulce 16).

Pro větší přehlednost byl celý postup shrnut v obrázku 5.



Obrázek 5: Rekapitulace větvení a jednotlivých řešení

3.4 GOMORYHO METODA

Úloha se nejprve řeší bez podmínek celočíselnosti. Získané řešení je obsaženo v tabulce 17 v příloze A. Toto řešení ovšem není optimální, protože jsou porušeny podmínky celočíselnosti, kladené na proměnné x_7 , x_8 a x_9 .

Pro vytvoření Gomoryho nerovnosti se použije devátý řádek, jehož hodnota pravé strany nesplňuje celočíselné omezení. Z hodnot tohoto řádku je třeba vypočítat hodnoty r_0 a g_{ij} podle vzorců uvedených v kapitole 2.3.1. Gomoryho metoda.

$$r_0 = 9,2 - [9,2] = 0,2,$$

$$g_{9,6} = a_{9,6} = 10, \quad \text{protože } a_{9,6} > 0 \text{ a } x_6 \text{ je spojitá,}$$

$$\begin{aligned}
 g_{9,10} &= g_{9,11} = g_{9,12} = g_{9,13} = g_{9,14} = g_{9,19} = g_{7,20} = 0, \text{ protože } a_{sj} > 0 \text{ a } x_j \text{ je spojitá,} \\
 g_{9,15} &= a_{9,15} = 10, \quad \text{protože } a_{9,15} > 0 \text{ a } x_{15} \text{ je spojitá,} \\
 g_{9,17} &= a_{9,17} = 0,2, \quad \text{protože } a_{9,17} > 0 \text{ a } x_{17} \text{ je spojitá,} \\
 g_{9,21} &= \frac{r_0}{(r_0 - 1)} \cdot a_{9,21} = \frac{0,2}{-0,8} \cdot -0,6 = 0,15, \quad \text{protože } a_{9,21} < 0 \text{ a } y_3 \text{ je spojitá.}
 \end{aligned}$$

Gomoryho nerovnost má tedy následující tvar

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 10x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 10x_{15} + 0x_{16} + 0,2x_{17} + 0x_{18} + 0y_1 + 0y_2 + 0,15y_3 \geq 0,2.$$

Po úpravě na rovnost

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 10x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} - 10x_{15} + 0x_{16} - 0,2x_{17} + 0x_{18} + x_{19} + 0y_1 + 0y_2 - 0,15y_3 = -0,2.$$

Po úpravě je možné tuto novou podmínku přidat do simplexové tabulky, jak je znázorněno v tabulce 18 v příloze A. Tato úloha není duálně přípustná, proto je nutné řešit duálně simplexovou metodou. Nové řešení obsažené v tabulce 19 v příloze A není optimální, hodnoty proměnných x_7 , x_8 a x_9 sice celočíselné jsou, ale úloha není primárně přípustná. Z toho důvodu je nutné tabulku přepočítat simplexovou metodou. Přepočtené řešení je obsažené v tabulce 20 v příloze A. Toto řešení je primárně i duálně přípustné, hodnoty proměnných x_7 , x_8 a x_9 jsou celočíselné. Toto řešení je optimální.

3.5 BENDERSOVA METODA

Primární úloha je definována jako

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} + \mathbf{c}_2^T \mathbf{w} \rightarrow \max, \\
 \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{w} &\leq \mathbf{b}, \\
 \mathbf{x} &\geq 0, \quad \mathbf{w} \geq 0, \text{ celé}
 \end{aligned}$$

197 x_1	+255 x_2	+315 x_3	+255 x_4	+257 x_5	+315 x_6	+120 x_7	+100 x_8	+80 x_9	$\rightarrow \max$
x_1						+0,051 x_7	+0,034 x_8		≤ 3
	x_2					+0,042 x_7	+0,028 x_8	+0,07 x_9	≤ 2
		x_3				+0,06 x_7	+0,04 x_8		≤ 3
			x_4			+0,042 x_7	+0,028 x_8	+0,07 x_9	$\leq 1,5$
				x_5		+0,045 x_7	+0,03 x_8		≤ 1
					x_6	+0,06 x_7	+0,04 x_8	+0,1 x_9	$\leq 1,5$

$$\begin{array}{rcll}
 & -x_7 & & \leq -3 \\
 & & x_8 & \leq 10 \\
 & & & -x_9 \leq -3 \\
 & x_7 & + x_8 & = 13
 \end{array}$$

$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad x_7, x_8, x_9 - \text{celé}$

Krok 1:

Řeší se ryze celočíselná úloha, která má následující tvar

$$\begin{aligned}
 z_1 &\leq z_2 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{w}, \\
 \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{w} &\leq \mathbf{b}, \\
 z_2 &\leq M, \quad \text{pro } M \text{ dostatečně velké,} \\
 \mathbf{x} &\geq 0, \quad \mathbf{w} \geq 0, \text{ celé}
 \end{aligned}$$

Došlo tedy ke změně zápisu účelové funkce, kde místo proměnných $x_1 - x_6$ vystupuje pomocná proměnná z_2 . Dochází k přidání jedné podmínky, a to horní mez M pro z_2 , přičemž M je dostatečně velké. Viz model v Lingu 11 pro samotný zápis modelu.

Model:

```

Max=z2 + 120*x7 + 100*x8 + 80*x9;
x1+ 0.051*x7 + 0.034*x8 <= 3;
x2 + 0.042*x7 + 0.028*x8 + 0.070*x9 <=2;
x3 + 0.060*x7 + 0.040*x8 <=3;
x4 + 0.042*x7 + 0.028*x8 + 0.070*x9 <=1.5;
x5 + 0.045*x7 + 0.030*x8 <=1;
x6 + 0.060*x7 + 0.040*x8 +0.1*x9 <=1.5;
x7 >= 3;
x8 <= 10;
x9 >= 3;
x7 + x8 = 13;
z2<10000;
@gin(x7);
@gin(x8);
@gin(x9);
End

```

Model v Lingu 11

Vyřešením této úlohy je získáno přípustné řešení, viz výstup z Linga 11. Je tedy získáno řešení $\mathbf{w}^* = (1,997; 0,264; 1,82; 0; 0,115; 0; 13; 0; 7)$ s hodnotou účelové funkce $z_1 = 12\,120$.

Global optimal solution found.

Objective value:	12120.00
Objective bound:	12120.00
Infeasibilities:	0.000000
Extended solver steps:	0
Total solver iterations:	0

Variable	Value	Reduced Cost
Z2	10000.00	0.000000
X7	13.00000	-120.0000
X8	0.000000	-100.0000
X9	7.000000	-80.00000
X1	1.997000	0.000000
X2	0.2640000	0.000000
X3	1.820000	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	0.1150000	0.000000
X6	0.000000	0.000000

Výstup z Linga 11

Krok 2:

K této primární úloze s proměnnými $\bar{x}_7 = 13$, $\bar{x}_8 = 0$ a $\bar{x}_9 = 7$ se vytvoří duální úloha a vyřeší se. Tato duální úloha bude mít tvar

$$\begin{aligned} z_2 &= (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2)^T \mathbf{u}, \\ \mathbf{A}_1^T \mathbf{u} &\geq \mathbf{c}_1, \\ \mathbf{u} &\geq 0. \end{aligned}$$

$$2,337u_1 + 0,964u_2 + 2,22u_3 + 0,464u_4 + 0,415u_5 + 0,02u_6 + 2120 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{rcl} u_1 & & \geq 197 \\ & u_2 & \geq 255 \\ & & u_3 & \geq 315 \\ & & & u_4 & \geq 255 \\ & & & & u_5 & \geq 257 \\ & & & & & u_6 & \geq 315 \end{array}$$

$$u_i \geq 0$$

Tato úloha se nechá řešit v Lingu, viz model v Lingu 12. Optimální řešení této úlohy je tvořeno vektorem $\mathbf{u}^* = (197; 255; 315; 255; 257; 315)$ a hodnota účelové funkce je $z = 3756,784$, viz výstup z Linga 12.

Model:

```
min = 2.337*u1 + 0.964*u2 + 2.22*u3 + 0.464*u4 + 0.415*u5 + 0.02*u6 + 2120;
u1 >= 197;
u2 >= 255;
u3 >= 315;
u4 >= 255;
u5 >= 257;
```

```
u6 >= 315;
End
```

Model v Lingu 12

Global optimal solution found.

```
Objective value:          3756.784
Infeasibilities:          0.000000
Total solver iterations:   0
```

Variable	Value	Reduced Cost
U1	197.0000	0.000000
U2	255.0000	0.000000
U3	315.0000	0.000000
U4	255.0000	0.000000
U5	257.0000	0.000000
U6	315.0000	0.000000

Výstup z Linga 12

Krok 3:

Protože $z_1 = 12\,120 \neq \mathbf{c}_2^T \mathbf{w}^* + (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^*)^T \mathbf{y}^* = 3\,756,784$, je třeba se vrátit ke kroku 1 a připojit podmínku

$$z_2 \leq (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^*)^T \mathbf{y}^*.$$

Model pak má tvar, který je uveden v modelu v Lingu 13.

Model:

```
Max=z2 + 120*x7 + 100*x8 + 80*x9;
x1+ 0.051*x7 + 0.034*x8 <= 3;
x2 + 0.042*x7 + 0.028*x8 + 0.070*x9 <=2;
x3 + 0.060*x7 + 0.040*x8 <=3;
x4 + 0.042*x7 + 0.028*x8 + 0.070*x9 <=1.5;
x5 + 0.045*x7 + 0.030*x8 <=1;
x6 + 0.060*x7 + 0.040*x8 +0.1*x9 <=1.5;
x7 >= 3;
x8 <= 10;
x9 >= 3;
x7 + x8 = 13;
z2<10000;
z2=197*x1+255*x2+315*x3+255*x4+257*x5+315*x6;
z2< 197*(3 - 0.051*x7 - 0.034*x8) + 255*(2 - 0.042*x7 - 0.028*x8 -
0.07*x9)+315*(3-0.06*x7-0.04*x8)+255*(1.5-0.042*x7-0.028*x8-0.07*x9)+
257*(1-0.045*x7-0.03*x8) + 315*(1.5 - 0.06*x7 - 0.04*x8 - 0.1*x9);
@gin(x7);
@gin(x8);
```

```
@gin(x9);
End
```

Model v Lingo 13

Global optimal solution found.

```
Objective value:           3851.824
Infeasibilities:          0.000000
Total solver iterations:    0
```

Variable	Value	Reduced Cost
Z2	1771.824	0.000000
X7	3.000000	0.000000
X8	10.00000	0.000000
X9	9.000000	0.000000
X1	2.507000	0.000000
X2	0.9640000	0.000000
X3	2.420000	0.000000
X4	0.4640000	0.000000
X5	0.5650000	0.000000
X6	0.2000000E-01	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	3851.824	1.000000
2	0.000000	197.0000
3	0.000000	255.0000
4	0.000000	315.0000
5	0.000000	255.0000
6	0.000000	257.0000
7	0.000000	315.0000
8	0.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	6.000000	0.000000
11	0.000000	0.000000
12	8228.176	0.000000
13	0.000000	0.000000
14	0.000000	39.16800
15	0.000000	46.11200
16	0.000000	12.80000
17	0.000000	1.000000

Výstup z Lingo 13

Z výstupu z Lingo 13 lze vyčíst optimální řešení této úlohy: hodnota účelové funkce je $z^1 = 3\,851,824$ a vektor řešení je $\mathbf{w}^* = (2,507; 0,965; 2,42; 0,464; 0,565; 0,02; 3; 10; 9)$.

Krok4:

K této primární úloze s proměnnými $\bar{x}_7 = 3$, $\bar{x}_8 = 10$ a $\bar{x}_9 = 9$ se vytvoří duální úloha a vyřeší se. Tato duální úloha bude mít tvar, který je zapsán v modelu v Lingo 14.

Model:

```
min = 2.507*u1 + 0.964*u2 + 2.42*u3 + 0.464*u4 + 0.565*u5 + 0.02*u6 + 2080;
u1 >= 197;
u2 >= 255;
u3 >= 315;
u4 >= 255;
```

```

u5 >= 257;
u6 >= 315;
End

```

Model v Lingo 14

Řešením této úlohy je $\mathbf{u}^* = (197; 255; 315; 255; 257; 315)$ a hodnota účelové funkce je $z = 3851,824$, viz výstup z Linga 14.

```

Global optimal solution found.
Objective value:                3851.824
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        0

```

Variable	Value	Reduced Cost
U1	197.0000	0.000000
U2	255.0000	0.000000
U3	315.0000	0.000000
U4	255.0000	0.000000
U5	257.0000	0.000000
U6	315.0000	0.000000

Výstup z Linga 14

Krok 5:

Protože $z_1 = 3851,824 = \mathbf{c}_2^T \mathbf{w}^* + (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^*)^T \mathbf{y}^* = 3851,824$, hodnota účelové funkce je optimální a výpočet končí.

Optimální řešení je obsaženo ve výstupu z Linga 13. Z tohoto výstupu je dále vidět, že:

- byly spotřebovány všechny bonbony,
- byly vyrobeny přesně 3 bonboniéry prvního typu, tedy o 0 více než byl minimální požadavek,
- bylo vyrobeno přesně 10 bonboniér druhého typu, tedy o 0 bonboniér méně, než byl maximální požadavek,
- byly vyrobeny 9 bonboniér třetího typu, tedy o 6 více než byl minimální požadavek,
- bylo vyrobeno přesně 13 bonboniér prvního a druhého typu.

3.6 SROVNÁNÍ JEDNOTLIVÝCH METOD

Při primárním zanedbání podmínek celočíselnosti a až následným zaokrouhlením proměnných, na které jsou kladeny požadavky celočíselnosti, byla získána dvě řešení. Avšak při kontrole přípustnosti jednotlivých řešení, získaných zaokrouhlením, se ukázalo, že dochází k porušení minimálně jednoho vlastního omezení úlohy, a tedy řešení nebyla přípustná. Samotné řešení bez uvažování podmínek celočíselnosti bylo získáno rychle, nicméně dosazování jednotlivých řešení do vlastních omezení úlohy a kontrola přípustnosti

řešení byla náročnější a zdlouhavá. Navíc nebylo získáno žádné přípustné řešení, úloha by se tedy musela řešit nějakou jinou metodou.

Metoda větvení a mezí v tomto konkrétním případě byla velmi snadná a rychlá. Bylo to dáno především tím, že při tvorbě větví došlo k tomu, že jedna větev byla ihned uzavřena, vzhledem k tomu, že v dané větvi neexistovalo žádné přípustné řešení. Nicméně v rozsáhlejších úlohách, či úlohách jinak formulovaných, může docházet k tomu, že počet větví a přípustných řešení v nich je příliš velký a tyto úlohy nemusí být řešitelné v přijatelném čase, či jsou výpočetně příliš náročné.

U Gomoryho metody již simplexová tabulka začínala být nepřehledná, vzhledem k počtu všech proměnných, včetně přídatných a pomocných. Přepočtení simplexové tabulky byl prováděn v MS Excel, ale bylo náročné hlídat korektnost postupu výstupu, právě kvůli nepřehlednosti. Vytvoření samotné Gomoryho nerovnosti nebylo zase tak složité, vzhledem k tomu, že většina koeficientů u proměnných v potřebném řádku byla nulová. Nicméně pokud by byl značný počet celočíselných proměnných, bylo by možné, že by bylo nutné provádět výpočet v mnoha krocích. Byť v této úloze stačilo k získání optimálního řešení pouze přidat jednu Gomoryho nerovnost a tedy učinit dva přepočty simplexové tabulky, bylo řešení úlohy časově náročnější než u předchozích dvou metod.

Bendersova metoda byla poněkud náročnější na pochopení a aplikaci na konkrétní příklad. Nakonec však výpočet nebyl zase tak složitý, jen bylo velmi důležité nezaplést se do jednotlivých úloh, správně nadefinovat úlohy duální a systematicky si zaznamenávat jednotlivá získaná řešení.

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s vybranými metodami řešení úloh smíšeného celočíselného programování, a to jak z teoretického hlediska, tak i z toho praktického. Tato práce je členěna do tří kapitol, přičemž první dvě se zabývají teoretickým pohledem a kapitola třetí je tvořena aplikací metod na praktickém příkladu.

V první kapitole, nazvané Celočíselné programování, je čtenář uveden do problematiky celočíselného programování, včetně seznámení s množinou přípustných řešení. Dále tu je také obecná formulace úlohy smíšeného celočíselného lineárního programování.

V kapitole druhé jsou již obsaženy jednotlivé vybrané metody řešení úloh smíšeného celočíselného lineárního programování. U každé metody je uveden teoretický postup výpočtu, který je pro větší srozumitelnost rozšířen o jednoduchý příklad. V této práci jsou konkrétně obsaženy následující metody:

- metoda zaokrouhlování,
- metoda větvení a mezí,
- Gomoryho metoda
- a Bendersova metoda.

Ve třetí kapitole byl naformulován konkrétní problém, pro jehož řešení byly použity zmíněné metody. Cílem této práce bylo zjistit vhodnost jednotlivých metod, jejich časová a výpočetní náročnost a případné srovnání výsledků.

Vzhledem k tomu, že je tato práce zaměřená pouze na vybrané metody řešení, jistě by se dala rozšířit o další metody, například dekompoziční metodu Dantziga-Wolfeho, nebo o problém dynamického programování.

Pokud by úloha byla příliš rozsáhlá a nebylo by možné získat optimální řešení některou z uvedených metod, dalo by se využít některé z heuristických metod a dosáhnout alespoň dostatečně dobrého přípustného řešení.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] JABLONSKÝ, Josef: *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3
- [2] LAGOVÁ, Milada, JABLONSKÝ, Josef: *Lineární modely*. Praha: Vysoká škola ekonomická, Nakladatelství Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-25-1511-3
- [3] LAŠČIAK, Adam, a kolektiv: *Optimálne programovanie*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1983
- [4] PELIKÁN, Jan: *Diskrétní modely v operačním výzkumu*. Praha: Professional Publishing, 2001. ISBN 80-86419-17-7
- [5] ZIONTS, Stanley: *Linea rand integer programming*. New Jersey, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1974. ISBN 0-13-536763-8

Internetové zdroje

- [6] DEMEL, Jiří, 2011 [online, citováno 10. 3. 2012], dostupné z <http://kix.fsv.cvut.cz/~demel/ped/ov/ov.pdf>
- [7] Velkoobchod Vojáček ČOKOSVĚT [online, citováno 21. 4. 2012], dostupné z <http://www.cokosvet.cz/eshop/>

PŘÍLOHY

PŘÍLOHA A

Tabulky výpočtu pro Gomoryho metodu, obsahuje tabulky 17, 18, 19 a 20.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	y1	y2	y3	b
x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,017	0	0	0	-0,051	2,507
x2	0	1	0	0	0	-0,7	0	0	0	0	1	0	0	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	0,95
x3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0,02	0	0	0	-0,06	2,42
x4	0	0	0	1	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	1	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	0,45
x5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,015	0	0	0	-0,045	0,565
x18	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0,2	1	0	-1	-0,6	6,2
x7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	3
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	10
x9	0	0	0	0	0	10	0	0	1	0	0	0	0	0	10	0	0,2	0	0	0	-0,6	9,2
x16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	1	0
z	0	0	0	0	0	128	0	0	0	197	255	315	255	257	443	0	9,504	0	0	0	31,488	3854,384

Tabulka 17

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	y1	y2	y3	b
x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,017	0	0	0	0	-0,051	2,507
x2	0	1	0	0	0	-0,7	0	0	0	0	1	0	0	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	0	0,95
x3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0,02	0	0	0	0	-0,06	2,42
x4	0	0	0	1	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	1	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	0	0,45
x5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,015	0	0	0	0	-0,045	0,565
x18	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0,2	1	0	0	-1	-0,6	6,2
x7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	3
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
x9	0	0	0	0	0	10	0	0	1	0	0	0	0	0	10	0	0,2	0	0	0	0	-0,6	9,2
x16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	0	1	0
x19	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-0,2	0	1	0	0	0,15	-0,2
z	0	0	0	0	0	128	0	0	0	197	255	315	255	257	443	0	9,504	0	0	0	0	31,488	3854,384

Tabulka 18

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	y1	y2	y3	b
x1	1	0	0	0	0	-0,85	0	0	0	1	0	0	0	0	-0,85	0	0	0	0,09	0	0	-0,0383	2,49
x2	0	1	0	0	0	-0,7	0	0	0	0	1	0	0	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	0	0,95
x3	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0,1	0	0	-0,045	2,4
x4	0	0	0	1	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	1	0	-0,7	0	0	0	0	0	0	0	0,45
x5	0	0	0	0	1	-0,75	0	0	0	0	0	0	0	1	-0,75	0	0	0	0,08	0	0	-0,0338	0,55
x18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	-0,45	6
x7	0	0	0	0	0	50	1	0	0	0	0	0	0	0	50	0	0	0	-5	0	0	0,25	4
x8	0	0	0	0	0	-50	0	1	0	0	0	0	0	0	-50	0	0	0	5	0	0	0,75	9
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0,45	9
x16	0	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	50	1	0	0	-5	-1	0	0,25	1
x19	0	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	50	0	1	0	-5	0	0	-0,75	1
z	0	0	0	0	0	-347	0	0	0	197	255	315	255	257	-32,2	0	0	0	47,5	0	0	38,616	3844,88

Tabulka 19

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	y1	y2	y3	b
x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0,017	0	0	0	-0	0	-0,034	2,507
x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0,014	0	0	-0,07	-0	0	0,0035	0,964
x3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0,02	0	0	0	-0	0	-0,04	2,42
x4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,014	0	0	-0,07	-0	0	0,0035	0,464
x5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0,015	0	0	0	-0	0	-0,03	0,565
x18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	-0,45	6
x7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	3
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	10
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0,45	9
x6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,02	0	0	-0,1	-0	0	0,005	0,02
x19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0	-1	0
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	197	255	315	255	257	315	6,944	0	0	12,8	-6,9	0	40,352	3851,824

Tabulka 20