

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2012

Ondřej Götze

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY



Název bakalářské práce:

**Metody pro uspořádání efektivních jednotek
v modelech analýzy obalu dat**

Autor:	Ondřej Götze
Katedra:	Katedra ekonometrie
Obor:	Statistika a ekonometrie
Vedoucí práce:	prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Metody pro uspořádání efektivních jednotek v modelech analýzy obalu dat“ zpracoval samostatně. Veškerou použitou literaturu a další podkladové materiály uvádím v seznamu použité literatury.

V Praze dne 30. května 2012

.....

Ondřej Götze

Poděkování:

Rád bych na tomto místě poděkoval panu prof. Ing. Josefu Jablonskému, CSc. za vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily. Rovněž děkuji firmě Raiffeisen stavební spořitelna a.s. za poskytnutí dat.

Abstrakt

Název práce: Metody pro uspořádání efektivních jednotek v modelech analýzy obalu dat
Autor: Ondřej Götzt
Katedra: Katedra ekonometrie
Vedoucí práce: prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.

Tato práce je zaměřena na teorii modelů analýzy obalu dat a následné metody třídění získaných efektivních jednotek. Práce je rozdělena do tří hlavních částí. V první části je popsána základní teorie analýzy obalu dat pro různé situace vstupů a výstupů, dále obsahuje základní informace o konkrétních modelech CCR, BCC a SBM včetně názorných příkladů jejich funkce. V druhé části jsou tyto modely modifikovány pro potřeby celkového uspořádání produkčních jednotek, tedy na modely super efektivnosti a cross efektivnosti. U obou metod jsou popsány základní principy jejich fungování. Cílem práce je porovnání výsledků jednotlivých způsobů třídění na praktickém příkladě, kterým se zabývá poslední část. V této kapitole jsou porovnány výsledky dosažené pomocí výše uvedených modelů. Jako vstupní hodnoty byla použita data o pobočkách stavební spořitelny.

Klíčová slova: DEA, uspořádání, CCR, BCC, SBM, super efektivnost, cross efektivnost

Abstract

Title: Methods for ranking efficient units in data envelopment analysis
Author: Ondřej Götzt
Department: Department of Econometrics
Supervisor: prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.

This thesis focuses on the theory of models, data envelopment analysis and subsequent methods in ranking of obtained efficient units. The thesis is divided into three main parts. The first part describes the basic theoretical background of data envelopment analysis for different situations of inputs and outputs. It also contains basic information on specific models of CCR, BCC and SBM, including illustrative examples of their function. In the second part these models are adapted for use in the overall layout of production units which are the models of super efficiency and cross efficiency. Both methods include the description of the basic principles of their functioning. The aim is to compare the results of the various types of ranking using a practical example. This is included in the last part of the thesis. This chapter compares the results obtained using the models mentioned above. Data of the S & L branches were used as the input values for this work.

Keywords: DEA, ranking, CCR, BCC, SBM, super efficiency, cross efficiency

Obsah

1 ÚVOD.....	6
2 MODELÝ ANALÝZY OBALU DAT	7
2.1 PŘÍPAD JEDNOHO VSTUPU A JEDNOHO VÝSTUPU	8
2.2 PŘÍPAD DVOU VSTUPŮ A JEDNOHO VÝSTUPU	10
2.3 PŘÍPAD JEDNOHO VSTUPU A DVOU VÝSTUPŮ	12
2.4 ZÁKLADNÍ DEA MODELÝ	13
2.4.1 CCR model.....	13
2.4.2 BCC model.....	16
2.4.3 SBM model	18
3 USPOŘÁDÁNÍ EFEKTIVNÍCH JEDNOTEK V DEA MODELECH.....	20
3.1 SUPER EFEKTIVNOST	20
3.2 CROSS EFEKTIVNOST	21
3.3 PŘEHLED	23
4 VÝPOČETNÍ EXPERIMENTY.....	24
5 ZÁVĚR.....	29
LITERATURA	30
PŘÍLOHY	31

1 Úvod

Analýze obalu dat (DEA) se dostává stále větší pozornosti jako nástroje pro hodnocení efektivnosti a zlepšování výkonnosti výroby a různých procesů napříč všemi odvětvími. Například v hodnocení výkonnosti a srovnávání škol, nemocnic, bankovních poboček, výrobních závodů, letišť, neziskových organizací apod.

Tato metoda formuluje váhy ke každému vstupu a výstupu za pomoci lineárního programování, způsobem, který umožňuje každé produkční jednotce (DMU) „ukázat“ se v nejlepším světle (tedy maximalizovat míru efektivnosti dané jednotky ve vztahu k ostatním). Hlavní výhodou této techniky je, že pro výpočet nepotřebujeme znát produkční funkci, ale protože se jedná o neparametrickou metodu, stačí nám získaná data. Dalším plusem je možnost dopočítání potřebných vstupů a výstupů pro dosažení efektivnosti u neefektivních jednotek. Naopak nevýhodou je podmínka, že hodnocené jednotky musí být homogenní, tedy musí mít stejné vstupy a produkovat stejné výstupy.

Základní modely analýzy obalu dat rozdělují produkční jednotky na dvě skupiny. Na efektivní a neefektivní. Každé DMU jsou přiřazeny váhy vstupů a výstupů tak, aby její relativní účinnost byla rovna maximálně jedné. V tomto případě by byla daná jednotka efektivní. Pokud je hodnota míry efektivnosti menší než jedna, pak se jedná o neefektivní jednotku a hodnota nám udává potřebnou míru zlepšení k dosažení efektivnosti. Ovšem tato základní metoda může označit více jednotek jako efektivních, ale zároveň neposkytuje dostatek informace na jejich uspořádání a je proto nutné použití dalších technik pro získání jejich pořadí. A právě tyto techniky jsou cílem mé práce.

Zaměřuji se na vysvětlení základních pojmů a definic, objasnění a grafické znázornění funkce metody DEA při různých variantách počtů vstupů a výstupů a poté matematickou formulaci základních modelů. V následujících krocích se věnuji vybraným metodám pro uspořádání efektivních jednotek, zejména metodě super efektivnosti a cross efektivnosti a nakonec se pokusím tyto techniky porovnat na praktickém příkladě.

2 Modely analýzy obalu dat

Pojem analýza obalu dat, anglicky Data Envelopment Analysis (DEA), poprvé použili Charnes, Cooper a Rhodes ve svém článku [4]. Tam definovali míru efektivnosti pomocí lineárního programování a využili modely DEA ke srovnání efektivnosti či produktivity homogenních produkčních jednotek (Decision Making Units - DMU).

Nejdříve je potřeba objasnit pojem efektivnost (efficiency). V nejjednodušším případě je efektivnost definována jako poměr jednoho výstupu vůči jednomu vstupu. Pojmem výstup chápeme cílenou produkci nebo činnost dané jednotky. V praxi to může být například počet vyrobených výrobků nebo počet obslužených zákazníků apod. Výstupy se snažíme maximalizovat. Naopak u vstupů je naším cílem je minimalizovat, protože to jsou „náklady“ k dané produkci či činnosti. V této situaci by tedy zápis vypadal takto:

$$\frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}$$

V takovéto podobě ale jednotlivé ukazatele nejsou reálně použitelné, protože jich můžeme vytvořit mnoho a ve výsledku nebudou porovnatelné. Je tedy potřeba zohlednit jak větší počet vstupů, tak i výstupů:

$$\frac{\sum_i u_i y_{ik}}{\sum_j v_j x_{jk}} \quad (2.1)$$

Toto je zápis poměru váženého součtu výstupů vůči váženému součtu vstupů, kde u_i , $i = 1, 2, 3, \dots, r$, označuje jednotlivé váhy výstupů a v_j , $j = 1, 2, 3, \dots, m$, reprezentuje váhy jednotlivých vstupů. Prvky y_{ik} a x_{jk} jsou hodnoty prvků matic výstupů a vstupů.

Nyní se vrátím k DEA modelům a DMU. Stejně jako u základního matematického modelování se zde vychází z předpokladu, že existuje množina všech přípustných řešení (production possibility set), která obsahuje všechny možné kombinace vstupů a výstupů. Tato množina obsahuje tzv. efektivní hranici, na které leží efektivní jednotky. Efektivní jednotka je jednotka, která za daných vstupů dosahuje maximálních výstupů, respektive, která za daných výstupů dosahuje minimálních vstupů.

2.1 Příklad jednoho vstupu a jednoho výstupu

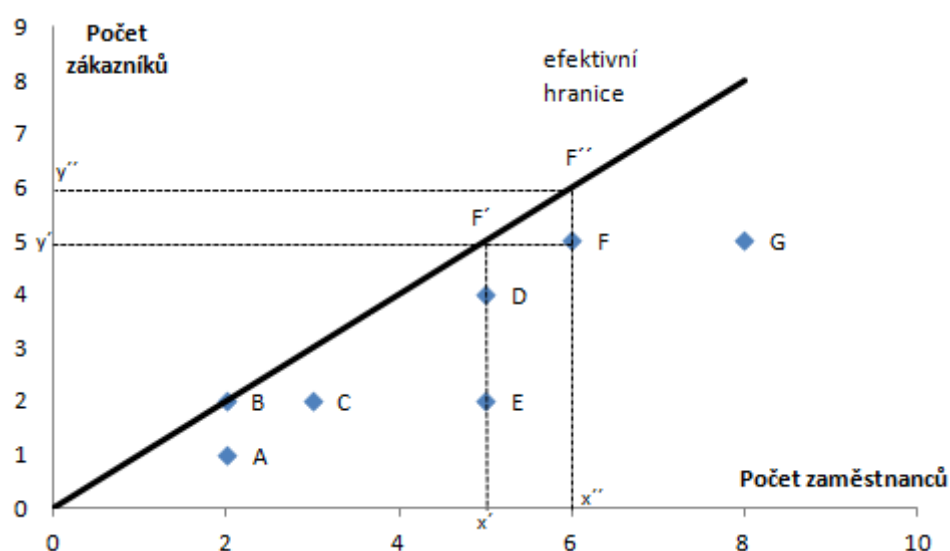
Definujme si jednoduchou numerickou úlohu. Porovnáme efektivnost 7 poboček stavební spořitelny. Každou pobočku máme charakterizovanou jedním vstupem – počet pracovníků a jedním výstupem – průměrný počet obloužených zákazníků v desítlách za měsíc.

Pobočka	A	B	C	D	E	F	G
Počet zaměstnanců (x)	2	2	3	5	5	6	8
Počet zákazníků (y)	1	2	2	4	2	5	5
Zák./počet zaměst. (y/x)	0,500	1,000	0,667	0,800	0,400	0,833	0,625

Tab. 2.1: Zadání dat s jedním vstupem a výstupem

Nyní je ještě nutné rozlišit dvě varianty výnosů z rozsahu. Konkrétně konstantní výnosy z rozsahu (CRS – Constant Returns to Scale) a variabilní výnosy z rozsahu (VRS – Variable Returns to Scale). Tato charakteristika ovlivňuje podobu efektivní hranice.

Předpoklad konstantních výnosů z rozsahu znamená, že pokud jednotka se souřadnicemi $[x, y]$ leží na efektivní hranici, je tedy efektivní jednotka, pak jakákoli další jednotka, která bude mít obě souřadnice $[x, y]$ vynásobené konstantou k bude také efektivní. Neboli $U_1[x, y] \in EH \Rightarrow U_2[kx, ky] \in EH$, kde EH je označení pro efektivní hranici. V našem konkrétním případě je efektivní pouze pobočka B, protože má nejvyšší poměr obsloužených zákazníků na jednoho pracovníka – viz obr. 2.1



Obr. 2.1: Efektivní hranice a množina přípustných možností v případě CRS

Na obrázku lze vidět, že pobočky A, C, D, E, F, G se nachází pod efektivní hranicí, jsou tedy neefektivní. Nutné změny vstupů a výstupů, aby se staly efektivními, lze ukázat například na jednotce F. Existují tři možnosti řešení:

1. Hodnoty jednotky F jsou (6;5). Pokud bychom zvýšili hodnotu výstupu na hranici y'' a současně bychom zachovali stejnou hodnotu vstupu, pak dostaneme tzv. virtuální jednotku F'' se souřadnicemi $(x'', y'') = (6;6)$. Obecně je tedy cílem maximalizovat hodnoty výstupů při zachování stejné úrovně vstupů. Modely zaměřené na tento způsob odstranění neefektivnosti se nazývají modely orientované na výstupy, anglicky pak output oriented.
2. V případě, že se zaměříme na stránku vstupů, je nutné vstup u jednotky F snížit na úroveň x' při zachování hodnoty výstupu. Výsledkem je virtuální jednotka F' s virtuálním vstupem a výstupem $(x', y') = (5;5)$. Zde je obecně cílem minimalizace hodnot vstupů při zachování stejné úrovně výstupů. Modely, které se zaměřují na tuto metodu odstranění neefektivnosti se označují jako modely orientované na vstupy, anglicky pak input oriented.
3. Třetí možností je kombinace obou předcházejících metod. Modely využívající tento princip se označují jako aditivní nebo odchylkové modely, anglicky additive models a slack-based models).

V našem zjednodušeném případě je efektivní pouze jednotka B. Míru neefektivnosti ostatních poboček získáme porovnáním jejich počtu obslužených zákazníků na zaměstnance s počtem obslužených zákazníků na zaměstnance u pobočky B.

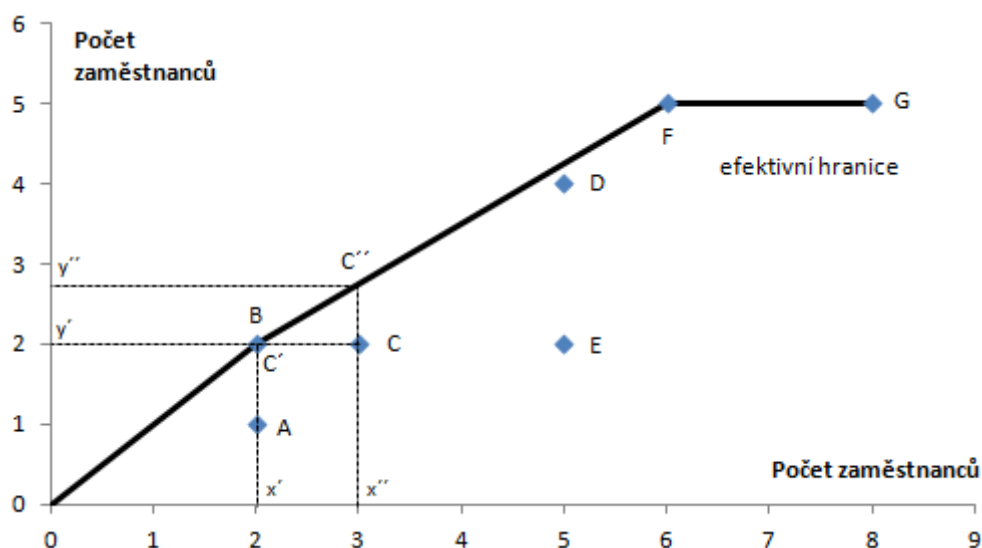
$$0 \leq \frac{\text{tržba na zaměstnance hodnocené jednotky}}{\text{tržba na zaměstnance jednotky B}} \leq 1$$

Je nutné podotknout, že tímto způsobem získáme relativní míru efektivnosti, protože hodnota závisí na všech ostatních jednotkách. Pokud bychom přidali do souboru jednotku, která by změnila efektivní hranici, změnily by se i relativní míry efektivnosti ostatních jednotek. Míra efektivnosti pobočky F je tedy $0,833/1 = 0,833$. Tuto hodnotu je také možno odvodit z obr. 2.1:

1. V případě modelu orientovaném na výstupy se efektivnost rovná podílu tržby pobočky F a tržbou virtuální jednotky F' tedy $y'/y'' = 5/6 = 0,833$. Avšak u modelů zaměřených na výstupy je vhodnější převrácená hodnota tohoto podílu $y''/y' = 6/5 = 1,2$. Tato hodnota udává potřebnou míru navýšení tržeb (obecně výstupu), aby se jednotka stala efektivní.
2. U modelu zaměřeného na vstupy se efektivnost rovná podílu počtu zaměstnanců virtuální jednotky F' a počtu zaměstnanců jednotky F. $x'/x'' = 5/6 = 0,833$. Tento ukazatel interpretujeme jako nutnou úroveň redukce počtu zaměstnanců (obecně vstupu), aby se jednotka stala efektivní.

Ve všech třech možnostech efektivnost vychází stejně 0,833. To je zapříčiněno předpokladem konstantních výnosů z rozsahu (CRS).

Pro předpoklad variabilních výnosů z rozsahu (VRS) již neplatí podmínka, že k dosažení efektivnosti musí jednotka mít obě souřadnice jednotky efektivní vynásobené konstantou k . Tato skutečnost změní tvar efektivní hranice z přímky na konvexní obal dat. Jinými slovy, jednotka bude efektivní i za situace, kdy poměrný nárůst výstupů nebude odpovídat nárůstu vstupů. Obecně v případě variabilních výnosů z rozsahu není míra efektivnosti nižší než v případě konstantních výnosů z rozsahu. U našeho příkladu byla při CRS efektivní pouze pobočka B. Nyní jsou efektivní tři – B, F, G viz obr. 2.2.



Obr. 2.2: Efektivní hranice a množina přípustných možností v případě VRS

Za předpokladu VRS a orientace na vstupy bude míra efektivnosti jednotky C rovna $x'/x'' = 2/3 = 0,667$. Pokud se zaměříme na výstupy, bude míra efektivnosti dána podílem $y'/y'' = 2/2,73 = 0,733$ respektive $y''/y' = 2,73/2 = 1,365$. Za předpokladu CRS by míra efektivnosti pobočky C byla $0,667/1 = 0,667$. Obecně nám tyto výpočty ukazují, že v případě variabilních výnosů z rozsahu již neplatí rovnost míry efektivnosti u modelů orientovaných na vstupy a na výstupy, ale že se jejich výsledky mohou lišit. Zároveň také dokazují, že míry efektivnosti v případě VRS budou stejné nebo vyšší než za předpokladu CRS.

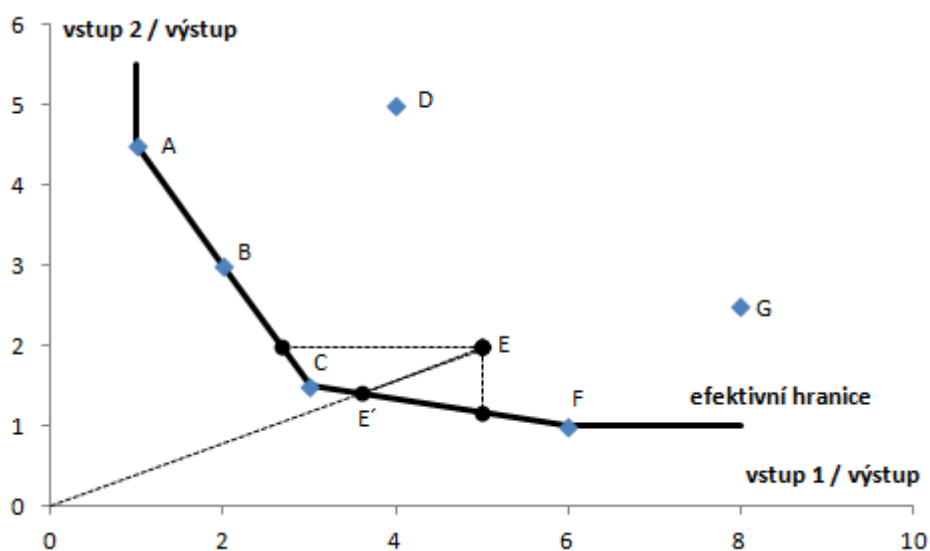
2.2 Příklad dvou vstupů a jednoho výstupu

Za situace, kdy máme jednotky, které jsou charakterizované dvěma vstupy a jedním výstupem, zavedeme předpoklad rovnosti výstupů u všech jednotek. Konkrétně budou jednotkové. Tato situace je nereálná, ale umožní nám tento případ přehledně znázornit v grafu. Pokud oba dva vstupy nahradíme hodnotami podílů těchto vstupů výstupem, tzn. Vstup 1 / Výstup a Vstup 2 / Výstup (například počet zaměstnanců na počet obslužených zákazníků a výměra pobočky na počet obslužených zákazníků), dostaneme poměr vstupů na jednotku výstupu. Data pro náš příklad jsou zadána v tabulce 2.2.

Jednotka	A	B	C	D	E	F	G
Vstup 1 (x^1)	1	2	3	4	5	6	8
Vstup 2 (x^2)	4,5	3	1,5	5	2	1	2,5
Výstup (y^1)	1	1	1	1	1	1	1

Tab. 2.2: Zadání dat pro příklad dvou vstupů a jednoho výstupu

Jelikož se jedná o podíly vstupů výstupem, budou nyní k vyšší efektivnosti blíže nižší hodnoty. Výsledkem je nyní graf znázorněný na obr. 2.3. Je patrné, že efektivními jednotkami jsou A, B, C a F. Znamená to, že v tomto příkladě neexistují jednotky, které by měly lepší hodnoty obou vstupů na jednotku výstupu a zároveň ani neexistuje žádná lineární kombinace ostatních jednotek s lepšími (ne horšími) hodnotami pozorovaných charakteristik.



Obr. 2.3: Efektivní hranice a množina produkčních možností v případě dvou vstupů

Zaměříme se na neefektivní jednotku E a porovnáme ji s efektivní hranicí. Způsob měření efektivnosti je u různých DEA modelů odlišný. Jde o to, jakým způsobem měří vzdálenost od efektivní hranice. Tato vzdálenost je mírou efektivnosti dané jednotky, tedy jednotky E. Základní DEA modely měří vzdálenost radiálně a kombinují redukci obou vstupů, dokud nedosáhnou efektivní hranice. Po jejím dosažení získáme virtuální jednotku E' . Míru efektivnosti stanovíme podílem $|OE'|/|OE|$. V našem příkladě jsou vstupy na jednotku výstupu virtuální jednotky $E' = (3,5; 1,4)$. Pak míra efektivnosti jednotky E je $3,78/5,39 = 0,701$ (vzdálenosti jsem zaokrouhlil na dvě desetinná místa). To znamená, že při zachování stejné úrovně výstupu by musela jednotka E snížit oba vstupy na 70% původních hodnot.

Z dalších možností k dosažení efektivní hranice jsou na grafu znázorněny dvě. Jsou to případy, kdy se zaměříme vždy pouze na jeden vstup. To znamená, že za jinak stejných podmínek by jednotka E musela snížit Vstup 1 z 5 na 2,7 a vznikla by virtuální jednotka se

vstupy (2,7;2) nebo snížit Vstup 2 z hodnoty 2 na 1,2 a vznikla by virtuální jednotka se vstupy (5;1,2). Obě tyto virtuální jednotky již leží na efektivní hranici.

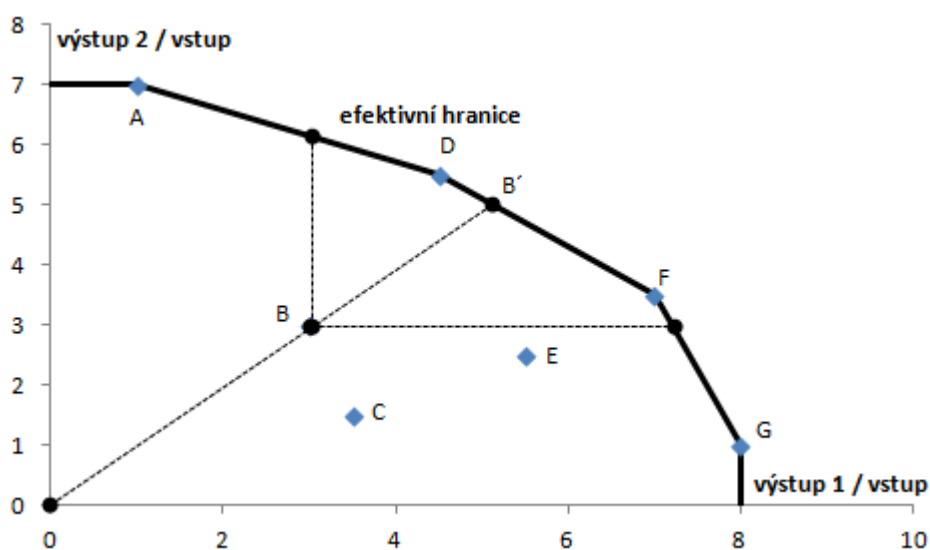
2.3 Příklad jednoho vstupu a dvou výstupů

Následující situace je opak předchozího příkladu. Analogicky zde uvažujeme jednotkové vstupy a podíl Výstup 1 / Vstup respektive Výstup 2 / Vstup (například obslužení zákazníků na zaměstnance a objem transakcí na zaměstnance). Data pro tento příklad jsou zadána v tabulce 2.3.

Jednotka	A	B	C	D	E	F	G
Vstup (x^1)	1	1	1	1	1	1	1
Výstup 1 (y^1)	1	3	3,5	4,5	5,5	7	8
Výstup 2 (y^2)	7	3	1,5	5,5	2,5	3,5	1

Tab. 2.3: Zadání dat pro případ jednoho vstupu a dvou výstupů

Výsledný graf je znázorněn na obr. 2.4. Je patrné, že efektivními jednotkami jsou A, D, F, G a tvoří efektivní hranici. V tomto případě zvýšením výstupů docílíme zvýšení efektivnosti. Opět můžeme nalézt virtuální efektivní jednotky k jednotkám neefektivním. Stejně jako v minulém příkladě to lze radiálním způsobem, který využívají DEA modely. Projekcí jednotky B na efektivní hranici, získáme virtuální jednotku B'. Výstupy jednotky B' jsou (5;5). V tomto případě určíme míru efektivnosti opět podílem vzdálenosti virtuální jednotky B' a vzdálenosti neefektivní jednotky B, tedy $|OB'|/|OB|$. S pomocí Pythagorovy věty dojdeme k podílu $7,07/4,24 = 1,68$. Z výsledku plyne, že jednotka B se stane efektivní, pokud zvýší oba výstupy o 68%.



Obr. 2.4: Množina produkčních možností a efektivní hranice v případě dvou výstupů

Hlavní rozdíl mezi tímto případem a případem dvou vstupů je v tom, že nyní je naopak míra efektivnosti u neefektivních jednotek vyšší než jedna. U minulého příkladu jsme totiž zjišťovali potřebnou redukci vstupů, využívali jsme tedy model orientovaný na vstupy, zatímco v tomto příkladě se jedná o potřebné navýšení výstupů, jedná se tedy o model orientovaný na výstupy.

Analogicky můžeme také dosáhnout efektivní hranice způsoby, kdy se zaměříme pouze na jeden výstup. Pokud Výstup 2 a Vstup zůstanou nezměněny, musíme Výstup 1 navýšit z hodnoty 3 na 7,2 a vznikne virtuální jednotka s hodnotami výstupů (7,2;3). Změnou Výstupu 2, při stejné úrovni Výstupu 1 a Vstupu, docílíme virtuální efektivní jednotky s výstupy (3;6,1).

2.4 Základní DEA modely

Následující podkapitoly čerpají z knihy Jablonský a Dlouhý, 2004 [1].

2.4.1 CCR model

Model CCR nese název po svých autorech (Charnes et al., 1978). Účelem je maximalizovat míru efektivnosti dané jednotky U_q . Jak je zmíněno na začátku kapitoly, tato jednotka je rovna podílu vážených výstupů a vážených vstupů přičemž váhy pro výstupy označíme $u_i, i = 1, 2, \dots, r$ a váhy pro vstupy $v_j, j = 1, 2, \dots, m$. Za předpokladu splnění podmínky, že všechny ostatní jednotky mají míru efektivnosti menší nebo rovno jedné, získáme virtuální výstup a virtuální vstup:

$$\begin{aligned} \text{virtuální výstup} &= u_1 y_{1q} + u_2 y_{2q} + \dots + u_r y_{rq}, \\ \text{virtuální vstup} &= v_1 x_{1q} + v_2 x_{2q} + \dots + v_m x_{mq}. \end{aligned}$$

Jestliže maximalizuje míru efektivnosti, znamená to, že počítá váhy tak, aby situace byla pro danou jednotku co nejlepší. Pokud stále dodržíme podmínku pro efektivnosti ostatních jednotek, můžeme model formulovat jako úlohu lineárního lomeného programování:

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = \frac{\sum_i^r u_i y_{iq}}{\sum_j^m v_j x_{jq}}, \\ \text{za podmínek} \quad & \frac{\sum_i^r u_i y_{ik}}{\sum_j^m v_j x_{jk}} \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ & u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ & v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde z je míra efektivnosti jednotky U_q . Aby do modelu byly zahrnuty všechny váhy vstupů a výstupů, musí být kladné a nenulové. To obstarají poslední dvě podmínky, kde ε je infinitezimální konstanta. Jednotka $U_k, k = 1, 2, \dots, n$, má hodnotu vstupu $x_{jk}, j = 1, 2, \dots, m$ a hodnotu výstupu $y_{ik}, i = 1, 2, \dots, r$. Hodnoty jsou uspořádány do matice vstupů $\mathbf{X}$ o rozměru $(m \times n)$ a matice výstupů $\mathbf{Y}$ o rozměru $(r \times n)$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \cdots & y_{rn} \end{bmatrix}.$$

Pomocí Charnesovy-Cooperovy transformace převedeme úlohu (2.2) na úlohu lineárního programování, která bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} &\text{maximalizovat} && z = \sum_i^r u_i y_{iq}, \\ &\text{za podmíněk} && \sum_i^r u_i y_{ik} \leq \sum_j^m v_j x_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ &&& \sum_j^m v_j x_{jq} = 1, \\ &&& u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ &&& v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Takto definovaný model (2.3) označujeme jako primární CCR model orientovaný na vstupy (primární CCR-I model). Pokud optimální řešení modelu, tedy míra efektivnosti jednotky U_q bude rovna jedné, tzn. $z^* = 1$, pak hodnocenou jednotku označíme jako CCR efektivní. Všechny neefektivní jednotky mají míru efektivnosti menší než jedna, tj. $z^* < 1$.

Výpočet a interpretaci lze zjednodušit použitím duálně sdruženého modelu k modelu (2.3). Nazývá se duální CCR model orientovaný na vstupy (duální CCR-I model). Vypadá takto:

$$\begin{aligned} &\text{minimalizovat} && \theta_q, \\ &\text{za podmíněk} && \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_q x_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ &&& \sum_{j=1}^n y_{ij} \lambda_j \geq y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ &&& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Kde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ je vektor vah jednotlivých jednotek. Společně s θ_q tvoří proměnné tohoto modelu. Proměnná θ_q souvisí s mírou efektivnosti dané jednotky a interpretuje se jako nutné snížení vstupů, aby jednotka dosáhla efektivní hranice. Nabývá hodnot menší nebo rovno jedné.

Výpočet hodnocení jednotky U_q vede k nalezení virtuální jednotky, která je dána vstupy $\mathbf{X}\lambda$ a výstupy $\mathbf{Y}\lambda$. Tyto charakteristiky jsou lineární kombinací vstupů a výstupů ostatních lepších (přesněji ne horších) jednotek ze souboru než hodnocená jednotka U_q . Vektor vstupů $\mathbf{x}_q$ a vektor výstupů $\mathbf{y}_q$ jednotky U_q musí splňovat následující podmínky pro virtuální jednotku: $\mathbf{X}\lambda \leq \theta_q \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_q$. Pokud takováto virtuální jednotka neexistuje, to znamená, že je shodná s jednotkou U_q , tedy platí $\mathbf{X}\lambda = \theta_q \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{Y}\lambda = \mathbf{y}_q$, pak je hodnocená jednotka označena za efektivní. To odpovídá případu $\theta_q = 1$. Za jiné situace bude jednotka U_q neefektivní. Zahrneme-li toto do modelu (2.4), získáme následující tvar:

$$\begin{aligned}
&\text{minimalizovat} && z = \theta_q - \varepsilon(\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-), \\
&\text{za podmínek} && \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^- = \theta_q \mathbf{x}_q, \\
& && \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_q, \\
& && \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

kde ε je opět infinitezimální konstanta (používá se hodnota 10^{-8}), $\mathbf{s}^+$ a $\mathbf{s}^-$ jsou vektory přídatných proměnných v omezeních pro vstupy a výstupy a $\mathbf{e}^T$ je jednotkový vektor. Pokud optimální hodnota proměnné θ_q^* se rovná jedné a zároveň optimální hodnoty všech přídatných proměnných jsou nulové, pak je hodnocená jednotka U_q efektivní. Počítáme-li tedy, že ε je velmi malá hodnota, znamená to, že θ_q^* se v podstatě rovná účelové funkci z^* , která se označuje jako míra efektivnosti dané jednotky. V případě, že účelová funkce modelu (2.5) se rovná jedné, je hodnocená jednotka U_q CCR efektivní. Za jiných okolností je CCR neefektivní. Velikost účelové funkce je přímo úměrná úrovni efektivnosti jednotky v daném souboru a její hodnota nám udává potřebnou redukci vstupů k dosažení efektivní hranice. S pomocí modelů analýzy obalu dat lze tedy snadno zjistit informace o potřebném zlepšení daných jednotek tak, aby dosáhly efektivnosti. Tyto informace lze dopočítat dvěma následujícími způsoby:

1. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}^*$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}^*$, kde $\mathbf{x}_q'$ a $\mathbf{y}_q'$ jsou hodnoty virtuálního vstupu a výstupu a $\boldsymbol{\lambda}^*$ je vektor vah vypočítaný modelem (2.5).
2. $\mathbf{x}_q' = \theta_q^* \mathbf{x}_q - \mathbf{s}^-$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^+$, kde symboly označené „*“ jsou vektory optimálních hodnot proměnných modelu (2.5)

Alternativou pro CCR-I model (zaměřený na vstupy) je model CCR-O neboli model CCR zaměřený na výstupy. Primární CCR model zaměřený na výstupy vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
&\text{minimalizovat} && g = \sum_j^m v_j x_{jq}, \\
&\text{za podmínek} && \sum_i^r u_i y_{ik} \leq \sum_j^m v_j x_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
& && \sum_i^r u_i y_{ik} = 1, \\
& && u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
& && v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Stejně jako pro model orientovaný na vstupy můžeme i v tomto případě formulovat duálně sdružený model. Duální CCR model orientovaný na výstupy má následující podobu:

$$\begin{aligned}
&\text{maximalizovat} && g = \phi_q + \varepsilon(\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-), \\
&\text{za podmínek} && \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^- = \mathbf{x}_q, \\
& && \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}^+ = \phi_q \mathbf{y}_q, \\
& && \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Interpretace výsledků CCR modelu zaměřeného na výstupy je obdobná jako u orientace na vstupy. U obou případů je hodnocená jednotka U_q efektivní, když hodnota účelové funkce je rovna jedné (u CCR-O modelu $g^* = 1$). Hlavní rozdíl je, že u modelů (2.3) a (2.5) je jednotka neefektivní, pokud je hodnota účelové funkce z^* menší než jedna, zatímco u modelů (2.6) a (2.7) je hodnocená jednotka neefektivní, jestliže hodnota účelové funkce g^* je větší než jedna. Interpretujeme ji jako potřebné navýšení výstupů k dosažení efektivní hranice. Vstupy a výstupy virtuálních jednotek lze opět získat dvěma způsoby:

1. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}^*$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}^*$, kde $\mathbf{x}_q'$ a $\mathbf{y}_q'$ jsou hodnoty virtuálního vstupu a výstupu a $\boldsymbol{\lambda}^*$ je vektor vah vypočítaný modelem (2.7).
2. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{x}_q - \mathbf{s}^{*-}$, $\mathbf{y}_q' = \phi_q^* \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^{*+}$, kde symboly označené „ $*$ “ jsou vektory optimálních hodnot proměnných modelu (2.7)

Pro optimální hodnoty účelových funkcí obou modelů platí, že jejich míry efektivnosti jsou převrácené hodnoty, tzn. $z^* = 1 / g^*$.

2.4.2 BCC model

V roce 1984 Banker, Charnes a Cooper modifikovali model CCR pro případ variabilních výnosů z rozsahu a formulovali model BCC, který je označen podle jejich jmen a není omezen předpokladem konstantních výnosů z rozsahu. Změnou tohoto fundamentu dochází ke změně kónického obalu dat (CRS) na konvexní obal dat (VRS). Tato změna způsobí označení více jednotek jako efektivních a lze ji vidět na obr. 2.1 a 2.2. Pro zahrnutí předpokladu VRS stačí rozšířit modely (2.5) a (2.7) doplnit o jednu podmínku, konkrétně o podmínku konvexnosti $\mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$. Duální BCC model orientovaný na vstupy je pak formulován takto:

$$\begin{aligned}
 \text{minimalizovat} \quad & z = \theta_q - \varepsilon(\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-), \\
 \text{za podmínky} \quad & \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^- = \theta_q \mathbf{x}_q, \\
 & \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_q, \\
 & \mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} = 1, \\
 & \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

kde význam všech symbolů je totožný s modelem (2.5). Stejným postupem dostaneme cílové hodnoty vstupů a výstupů pro neefektivní jednotky a pro identifikaci BCC efektivnosti platí stejné podmínky (hodnota radiální proměnné je jedna, hodnoty přídatných proměnných jsou nula). Z toho plyne, že pokud hodnota účelové funkce $z^* = 1$, hodnocená jednotka je BCC efektivní. V případě neefektivních jednotek je hodnota účelové funkce menší než jedna. Interpretace duálního BCC modelu orientovaného na výstupy je totožná jako u modelu (2.7).

Analogicky je možné formulovat primární BCC model orientovaný na vstupy:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximalizovat} && z = \sum_i^r u_i y_{iq} + \mu, \\
 &\text{za podmínek} && \sum_i^r u_i y_{ik} + \mu \leq \sum_j^m v_j x_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
 & && \sum_j^m v_j x_{jq} = 1, \\
 & && u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 & && v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m. \\
 & && \mu - \text{jakékoli}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

V tomto modelu se vyskytuje proměnná μ , která nahrazuje podmínku $e^T \lambda = 1$ v duálně sdruženém modelu (2.8). Tyto modely ((2.8) a (2.9)) se interpretují naprosto shodně. Při porovnání modelu (2.3) s modelem (2.9) můžeme vidět, že se liší v hodnotách proměnné μ . V CCR modelu nabývá pouze hodnoty 0, zatímco v BCC modelu je její hodnota libovolná. Tuto situaci můžeme ještě ukázat na primárním BCC modelu orientovaného na výstupy, který má následující podobu:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimalizovat} && g = \sum_j^m v_j x_{jq} + v, \\
 &\text{za podmínek} && \sum_i^r u_i y_{ik} \leq \sum_j^m v_j x_{jk} + v, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
 & && \sum_i^r u_i y_{iq} = 1, \\
 & && u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 & && v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m. \\
 & && v - \text{jakékoli}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

kde podmínku $e^T \lambda = 1$ z duálně sdruženého modelu v tomto případě reprezentuje proměnná v . Pokud $g^* = 1$, je hodnocená jednotka efektivní. Pro neefektivní jednotky nabývá účelová funkce hodnot větších než jedna a touto hodnotou udává potřebné navýšení výstupů, aby se jednotka stala efektivní.

Různými modifikacemi podmínek pro modely s konstantními a variabilními výnosy z rozsahu získáme další dvě adaptace – neklesající výnosy z rozsahu (NDRS – Non-Decreasing Return to Scale) a nerostoucí výnosy z rozsahu (NIRS – Non-Increasing Return to Scale). Podrobnosti jsou v následující tabulce 2.4.

Výnosy z rozsahu	primární model vstupy	primární model výstupy	duální model vstupy i výstupy
CRS	$\mu = 0$	$\nu = 0$	$\mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda}$ - libovolné
VRS	μ - libovolné	ν - libovolné	$\mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$
NIRS	$\mu \leq 0$	$\nu \geq 0$	$\mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} \leq 1$
NDRS	$\mu \geq 0$	$\nu \leq 0$	$\mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} \geq 1$

Tab. 2.4: Typy podmínek pro různé výnosy z rozsahu

2.4.3 SBM model

SBM model (z anglického slack based measure) nebo také aditivní model se od výše zmíněných modelů podstatně liší. CCR a BCC modely jsou radiální, tedy obsahují radiální proměnné orientované na vstupy (θ) nebo na výstupy (ϕ). Z toho důvodu se tyto modely musí třídit podle orientace na vstupy nebo výstupy. SBM model počítá efektivnost přímo na základě přídatných proměnných s_i^+ , $i = 1, 2, \dots, r$ a s_k^- , $k = 1, 2, \dots, m$, takže již není třeba ho dále rozlišovat. Je definován takto:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximalizovat} && z = \mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-, \\
 &\text{za podmíněk} && \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^- = \mathbf{x}_q, \\
 & && \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_q, \\
 & && \mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} \leq 1, \\
 & && \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Relační znaménko u třetí podmínky se upraví podle charakteru výnosů z rozsahu. Pro VRS je „=“, pro NIRS je „ $\leq$ “ a pro NDRS bude „ $\geq$ “.

Pouze v případě, že všechny hodnoty přídatných proměnných jsou rovny nule, bude daná jednotka U_q označena jako ADD efektivní. Za jiných okolností bude neefektivní. Mezi SBM modelem a modely CCR a BCC platí souvislost, že hodnocená jednotka může být ADD efektivní pouze v případě, kdy je označena za CCR efektivní při konstantních výnosech z rozsahu nebo jako BCC efektivní při uvažování variabilních výnosů z rozsahu. Existují dva způsoby pro získání cílových hodnot pro dosažení efektivní hranice:

1. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}^*$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}^*$, proměnná $\boldsymbol{\lambda}^*$ je vektor optimálních vah.
2. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{x}_q - \mathbf{s}^{*-}$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^{*+}$, symboly $\mathbf{s}^{*-}$, $\mathbf{s}^{*+}$ označují optimální hodnoty proměnných.

Model SBM má jednu nevýhodu. Při jeho použití je míra efektivnosti závislá na použitých jednotkách k vyjádření vstupů a výstupů. Tento problém vyřešil Tone (2001), když modifikoval SBM model na následující podobu:

minimalizovat

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(\frac{s_k^-}{x_{kq}} \right)}{1 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left(\frac{s_i^+}{y_{iq}} \right)},$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{kj} \lambda_j + s_k^- &= x_{kq}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} \lambda_j - s_i^+ &= y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \lambda_j, s_i^+, s_k^- &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Vzdálenost vstupů a výstupů virtuální jednotky od hodnocené jednotky počítá pomocí proměnných s_i^+ a s_i^- . Výrazy v čitateli a jmenovateli počítají průměrnou vzdálenost vstupů a výstupů od efektivní hranice. Rovná-li se hodnota účelové funkce, je hodnocená jednotka efektivní, pokud její hodnota bude menší než jedna, daná jednotka efektivní není. Model (2.12) je pro konstantní výnosy z rozsahu. Pro převedení na variabilní stačí přidat podmínku $\mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$.

3 Uspořádání efektivních jednotek v DEA modelech

Použitím základních DEA modelů (CCR nebo BCC) rozdělíme hodnocené jednotky na dvě skupiny: efektivní a neefektivní. Ale toto dichotomické rozdělení hodnocených jednotek uživateli většinou nepostačuje a vyžaduje kompletní hodnocení od nejvíce efektivní po nejméně efektivní jednotku. Vzhledem k tomu, že základní modely (obzvláště BCC) mohou označit a zpravidla označují více jednotek jako efektivní, byly navrženy různé metody a modely pro kompletní klasifikaci DMU. Dvě metody uspořádání jednotek jsou popsány v následujících částech této práce.

3.1 Super efektivnost

Princip všech modelů super efektivnosti je vyjmutí hodnocené jednotky ze souboru jednotek. To znamená, že váha původní efektivní jednotky se položí rovna nule. To má za následek změnu původní efektivní hranice, načež model počítá vzdálenost vstupů a výstupů hodnocené jednotky od nové efektivní hranice. Použijeme-li tedy model na efektivní jednotku (podle základních modelů), dostaneme hodnotu účelové funkce vyšší než jedna, podle které již můžeme hodnocené efektivní jednotky seřadit. Použijeme-li ho na neefektivní jednotku, získáme její hodnotu míry efektivnosti, která bude stejná jako u základních modelů (neplatí pro model (3.3)).

První model (Andersen and Petersen, 1993) využívající tuto metodu, který předpokládá konstantní výnosy z rozsahu (CCR) má podobu:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimalizovat} && \theta_q, \\
 &\text{za podmíněk} && \sum_{j=1, \neq q}^n x_{kj} \lambda_j + s_k^- = \theta_q x_{kq}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\
 & && \sum_{j=1, \neq q}^n y_{ij} \lambda_j - s_i^+ = y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 & && \lambda, s_i^+, s_k^- \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Za situace variabilních výnosů z rozsahu (BCC) je formulace následovná:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimalizovat} && \theta_q, \\
 &\text{za podmíněk} && \sum_{j=1, \neq q}^n x_{kj} \lambda_j + s_k^- = \theta_q x_{kq}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\
 & && \sum_{j=1, \neq q}^n y_{ij} \lambda_j - s_i^+ = y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & && \lambda, s_i^+, s_k^- \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Další model vychází z SBM modelu (2.12). SBM model odstraní hodnocenou jednotku U_q a poté hledá virtuální jednotku U^* , která má vstupy $\mathbf{x}^*$ a výstupy $\mathbf{y}^*$ a bude efektivní. Míra super efektivnosti je poté formulována jako vzdálenost vstupů a výstupů mezi jednotkami U^* a U_q .

Model super SBM (Tone, 2002) je úlohou lineárně lomeného programování. Při použití Charnesovy-Cooperovy transformace se převede na úlohu lineárního programování, avšak již bude orientovaný na vstupy. Značí se jako super SBM-I model a vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimalizovat} && \delta_I = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(\frac{x_k^*}{x_{kq}} \right), \\
 &\text{za podmíněk} && \sum_{j=1, \neq q}^n x_{kj} \lambda_j + s_k^- = x_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\
 & && \sum_{j=1, \neq q}^n y_{ij} \lambda_j - s_i^+ = y_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 & && x_k^* \geq x_{kq}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\
 & && y_i^* = y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 & && \lambda_j, s_i^+, s_k^- \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Stejně jako u modelů (3.1) a (3.2) platí, že účelová funkce pro ADD efektivní jednotku je větší než 1, tj. $\delta_I > 1$ a čím vyšší hodnota, tím vyšší míra super efektivnosti. Ale na rozdíl od předchozích modelů, pro ADD neefektivní jednotky je hodnota účelové funkce rovna jedné, tj. $\delta_I = 1$. To znamená, že pro celkové uspořádání jednotek pomocí modelu SBM má dvě fáze:

1. Použití SBM modelu (2.12) pro rozdělení jednotek na efektivní a neefektivní. Uspořádání jednotek dle míry efektivnosti.
2. Použití super SBM-I modelu (3.3) pro efektivní jednotky z první fáze. Uspořádání efektivních jednotek podle míry super efektivnosti.

3.2 Cross efektivnost

Metodu cross efektivnosti navrhli Sexton, Silkman a Hogan v roce 1986, později ji upravili Doyle a Green (1994) a poté Anderson, Hollingsworth a Inman (2002). Cross efektivnost hodnotí „výkon“ dané jednotky s ohledem na optimální hodnoty vah ostatních jednotek. Jinak řečeno tato metoda počítá míru efektivnosti hodnocené jednotky tolikrát, kolik je v souboru všech DMU a pokaždé s vahami vstupů a výstupů jiné DMU. Z těchto výsledků se poté vytvoří matice, kterou označujeme CEM (Cross Efficiency Matrix). Prvek h v k -tém řádku a v j -tém sloupci v matici CEM lze interpretovat jako efektivnost jednotky j , která je hodnocena s optimálními vahami jednotky k . Je zřejmé, že jednotka, která je obecně „výkonnější“, má ve svém sloupci více vysokých hodnot efektivnosti a naopak výkonnostně slabší jednotka má ve svém sloupci více nízkých hodnot efektivnosti. Model pro výpočet prvků matice CEM je následující:

$$h_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

kde u_{rk} , $r = 1, 2, \dots, s$, $k = 1, 2, \dots, n$ je vektor vah výstupů k -té jednotky, v_{ik} , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ jsou váhy vstupů k -té jednotky. Proměnné y_{rj} , $r = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, 2, \dots, n$ a x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ jsou vektory výstupů a vstupů j -té jednotky. Všechny prvky v matici CEM nabývají hodnot mezi nulou a jedničkou, tzn. $0 \leq h_{kj} \leq 1$ a prvky na hlavní diagonále h_{kk} reprezentují míru efektivnosti standardních DEA modelů.

Hodnoty cross efektivnosti se poté vypočítají jako průměr hodnot ve sloupcích pro určité DMU, tedy:

$$\bar{h}_k = \frac{\sum_{j=1}^n h_{kj}}{n}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5)$$

čímž vznikne vektor $\bar{\mathbf{h}}$ reprezentující jednotlivé míry cross efektivnosti pro jednotlivé jednotky. Každá proměnná $\bar{h}_k$ může nabývat hodnot pouze menších nebo rovno jedné. Je zřejmé, že pokud $\bar{h}_k = 1$, pak všechny řádky k -tého sloupce jsou rovny jedné, to znamená, že jednotka k je efektivní s optimálními vahami jakékoli jiné DMU ze souboru. Podle hodnot vektoru $\bar{\mathbf{h}}$ je již možné hodnocené jednotky kompletně uspořádat.

Doyle a Green (1994) přišli s myšlenkou tzv. „maverick“ indexu. S pomocí tohoto indexu (M_k) chtěli odhalit nekonformní (individualistické) jednotky. Index počítá odchylky mezi sebehodnotícími mírami efektivnosti h_{kk} a ostatními mírami efektivnosti, které jsou hodnocené podle vah jiných jednotek h_{kj} , $j \neq k$. Postup je následující:

$$M_k = \frac{h_{kk} - e_k}{e_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

kde

$$e_k = \frac{1}{(n-1)} \sum_{j \neq k}^n h_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n.$$

Čím vyšší je hodnota ukazatele M_k , tím více je jednotka k nekonformní. Jinak řečeno, jednotka, která při hodnocení s vlastními vahami vstupů a výstupů bude efektivní, nebo nebude tolik neefektivní, ale přitom při hodnocení s vahami jiných jednotek bude „slabá“, bude mít relativně vysoký ukazatel M_k .

Maverick index neslouží jako přímý nástroj pro uspořádání jednotek, nýbrž jako ukazatel, který nám vyjadřuje spolehlivost vypočítané hodnoty efektivnosti. Nejvíce nás zajímá u jednotek, které byly označeny jako efektivní. Jednotka, která má maverick index minimální, je opravdu efektivní jednotka, protože obstála i při výpočtu s vahami ostatních jednotek. Naopak efektivní jednotka s maximálním indexem M_k je efektivní jenom se svými specifickými vahami a při výpočtu s ostatními vahami bude v efektivnosti zaostávat.

3.3 Přehled

Adler et al. v [2] popisují alternativní metody uspořádání k DEA. Místo lineárního programování se jedná o řešení pomocí regrese a vícerozměrných statistik. Hlavním rozdílem je, že DEA se zaměřuje na výpočet efektivní hranice, tedy top jednotek. Ovšem regrese se prokládá středem dat. Regrese je také na rozdíl od DEA parametrická metoda, která na základě průměrného chování jednotek přiřazuje k datům jednu funkci dle předem specifikované produkční formy. Pro více informací doporučuji článek [2].

Ertay et al. (2006) sjednotili DEA a metodu AHP (Analytic Hierarchy Process) a zároveň rozšířili minimaximální DEA model pro nalezení nejefektivnější DMU. Jejich práci doplnili Amin a Toloo (2007) a navrhli integrovaný DEA model pro zjištění CCR nejefektivnější jednotky. Navíc tento model není nutné řešit n -krát jako standardní modely (zvláště pro každou DMU) a tím umožnili získat rychlejší výsledky. Pro více informací doporučuji [3].

4 Výpočetní experimenty

Výše uvedené postupy budeme ilustrovat na příkladu hodnocení efektivnosti poboček společnosti Raiffeisen stavební spořitelna a.s. Každá pobočka je charakterizována třemi vstupy a dvěma výstupy. Vstupy jsou – plocha pobočky v metrech čtverečních, náklady na provoz (nájem + energie) a počet pracovníků. Výstupy jsou – počet uzavřených smluv a objem transakcí (v mil. Kč). Data jsou uvedena v následující tabulce 4.1.

Označení	Vstupy			Výstupy	
	Výměra [m ²]	Náklady	Počet lidí	Počet smluv	Objem trans. [mil. Kč]
A	25,00	7 000	8	196	78,959
B	50,00	10 230	13	853	198,052
C	33,10	10 502	2	332	222,43
D	39,85	12 000	1	542	116,692
E	61,00	6 683	2	453	91,978
F	20,00	16 000	6	175	37,088
G	18,73	10 583	3	386	83,154
H	39,00	3 000	10	315	111,286
I	30,00	9 400	2	404	60,653
J	24,26	3 183	6	293	73,789
K	88,00	9 000	8	350	63,95
L	12,00	3 800	10	863	202,399
M	21,00	7 000	4	247	71,429
N	14,50	2 500	7	261	51,346
O	18,00	4 500	3	425	78,037
P	18,00	4 600	6	316	43,338
Q	26,20	9 214	1	169	26,441
R	22,20	9 336	13	388	88,437
S	24,40	8 798	1	124	24,681
T	39,80	11 144	6	201	47,582

Tab. 4.1: Vstupní data

Pomocí základních modelů CCR (2.4) a BCC (2.8) orientovaných na vstupy vypočítáme základní míry efektivnosti daných poboček a poté u efektivních jednotek pomocí modelu (3.1) a (3.2) vypočteme míry super efektivnosti – viz tabulka 4.2.

Pobočka	CCR-I model	CCR-I super efekt.	BCC-I model	BCC-I super efekt.
A	0,3347		0,6449	
B	0,6342		0,7476	
C	1,0000	1,8996	1,0000	NFS
D	1,0000	2,4156	1,0000	3,7470
E	1,0000	1,0776	1,0000	1,1047
F	0,2617		0,8167	
G	0,8827		0,9891	
H	0,6965		1,0000	1,0053
I	0,8112		0,9155	
J	0,5427		1,0000	1,0136
K	0,3553		0,4615	
L	1,0000	3,4776	1,0000	NFS
M	0,4994		0,8418	
N	0,4597		1,0000	1,3636
O	1,0000	1,0769	1,0000	1,4517
P	0,4996		0,8871	
Q	0,4435		1,0000	1,0000
R	0,3234		0,6155	
S	0,3446		1,0000	1,0632
T	0,2340		0,4678	

Tab. 4.2: Míry efektivity a super efektivity (CCR a BCC)

Na první pohled je zřejmé, že pobočky označené jako CCR efektivní jsou zároveň i BCC efektivní, ale ne naopak. Ve druhém a čtvrtém sloupci se pak nachází míry super efektivity, kde platí, že u BCC modelu jsou vyšší než u CCR. Vynechané hodnoty ve čtvrtém sloupci znamenají, že je nelze daným modelem spočítat, protože úloha nemá přípustné řešení.

V následující tabulce 4.3 je znázorněno porovnání CCR a SBM výsledků super efektivity. Oba modely jsou orientované na vstupy.

Pobočka	C	D	E	L	R
CCR-I super efekt.	1,8996	2,4156	1,0776	3,4776	1,0769
super SBM-I model	1,8117	1,6370	1,0412	2,4608	1,0472

Tab. 4.3: Porovnání CCR-I super efektivity s výsledky modelu super SBM-I.

Je patrné, že všechny hodnoty splňují pravidlo, že hodnoty z modelu super SBM-I jsou vždy menší nebo rovné hodnotám z modelu (3.1).

Nyní se dostáváme k výpočtům cross efektivnosti. V tabulce 4.4 jsou zobrazené optimální hodnoty vah jednotlivých jednotek vypočtené CCR-I modelem.

Pobočka	Váhy vstupů			Váhy výstupů	
A	0,00000000	0,00007918	0,05571531	0,00000000	0,00423938
B	0,00053439	0,00002731	0,05337517	0,00048089	0,00113115
C	0,00129941	0,00006641	0,12978541	0,00116931	0,00275048
D	0,00159047	0,00006640	0,13983618	0,00125018	0,00276286
E	0,00193852	0,00008093	0,17043780	0,00152377	0,00336748
F	0,01763140	0,00000000	0,10789532	0,00149540	0,00000000
G	0,02696254	0,00000000	0,16499720	0,00228682	0,00000000
H	0,00000000	0,00033333	0,00000000	0,00000000	0,00625827
I	0,02367481	0,00000000	0,14487791	0,00200797	0,00000000
J	0,00000000	0,00007727	0,12567284	0,00103984	0,00322623
K	0,00000000	0,00005019	0,06854096	0,00101520	0,00000000
L	0,00000000	0,00005728	0,07823277	0,00115875	0,00000000
M	0,02155487	0,00000000	0,13683696	0,00129932	0,00249861
N	0,00000000	0,00040000	0,00000000	0,00176130	0,00000000
O	0,00000000	0,00011632	0,15885854	0,00235294	0,00000000
P	0,00000000	0,00007816	0,10674490	0,00158106	0,00000000
Q	0,03094108	0,00000000	0,18934383	0,00262425	0,00000000
R	0,00982767	0,00000000	0,06014043	0,00083353	0,00000000
S	0,03276594	0,00000000	0,20051108	0,00277903	0,00000000
T	0,00280215	0,00003471	0,08360837	0,00077262	0,00165436

Tab. 4.4: Váhy vstupů a výstupů jednotlivých poboček vypočtené CCR-I modelem

Pomocí modelu (3.4) z těchto hodnot a dat z tab. 4.1 vypočteme jednotlivé míry efektivnosti a z nich můžeme sestavit matici CEM (viz příloha 4). Zprůměrováním jednotlivých sloupců matice CEM (3.5) získáme hodnoty měr cross efektivnosti. Dále pomocí (3.6) vypočteme hodnotu „maverick“ indexu – viz tabulka 4.5.

Pobočka	CCR-I	Cross efektivnost	Maverick - M_k
H	0,6965	0,3889	0,8684
F	0,2617	0,1795	0,4938
C	1,0000	0,7147	0,4293
G	0,8827	0,6309	0,4290
E	1,0000	0,7301	0,3968
A	0,3347	0,2458	0,3884
Q	0,4435	0,3365	0,3406
K	0,3553	0,2719	0,3282
S	0,3446	0,2679	0,3058
I	0,8112	0,6526	0,2593
M	0,4994	0,4237	0,1900
D	1,0000	0,8499	0,1876
P	0,4996	0,4367	0,1527
J	0,5427	0,4747	0,1521
N	0,4597	0,4039	0,1464
T	0,2340	0,2060	0,1442
R	0,3234	0,2910	0,1180
B	0,6342	0,5715	0,1162
O	1,0000	0,9107	0,1037
L	1,0000	0,9981	0,0020

Tab. 4.5: Hodnoty cross efektivnosti a maverick indexu.

V tab. 4.5 jsou pobočky seřazeny podle jejich maverick indexu od nejvyššího po nejnižší. Na první pohled si lze všimnout CCR efektivních poboček L a O. Tyto dvě pobočky jsou opravdu efektivní, což dokazují nejnižší maverick indexy a potvrzují nejvyšší hodnoty cross efektivnosti. Na druhou stranu pobočky C, D a E jsou také CCR efektivní, ale již tolik neobstály při hodnocení s vahami ostatních poboček. To lze vidět na nižších hodnotách cross efektivnosti a analogicky na vyšších hodnotách maverick indexu. U pobočky C je dokonce třetí nejvyšší.

Jako poslední krok uvádíme tabulku 4.6, ve které je k jednotlivým pobočkám A-T přiřazeno pořadí podle CCR a BCC modelů super efektivnosti orientovaných na vstupy, super SBM-I modelu a podle cross efektivnosti.

Pobočka	Pořadí			
	CCR super efekt.	BCC super efekt.	super SBM-I model	Cross efektivnost
A	17	15	17	18
B	9	14	9	8
C	3	20	2	5
D	2	1	3	3
E	4	4	5	4
F	19	13	19	20
G	6	9	6	7
H	8	7	8	13
I	7	10	7	6
J	10	6	10	9
K	15	18	15	16
L	1	19	1	1
M	12	12	12	11
N	13	3	13	12
O	5	2	4	2
P	11	11	11	10
Q	14	8	14	14
R	18	16	18	15
S	16	5	16	17
T	20	17	20	19

Tab. 4.6: Pobočky seřazené podle jednotlivých metod.

V první řadě je nutné říci, že v případě BCC super efektivnosti jsou na posledních místech pobočky L a C, protože daná situace nemá přípustné řešení – viz tab. 4.2 a z důvodu chybějící hodnoty jsou řazeny úplně na konec. Další rozdíly jsou na první pohled patrné a jasné z tabulky. Zajímavý je rozdíl v pořadí pobočky C a H mezi CCR a BCC super efektivností a cross efektivností. Právě u cross efektivnosti je C až 5. a H dokonce 13. Je to z důvodu zohlednění maverick indexu, který je u pobočky H nejvyšší ze všech. Největší rozdíl lze nalézt u pobočky N. U všech způsobů, kromě BCC super efektivnosti se nachází na 12.-13. místě, ale za předpokladu variabilní výnosů z rozsahu (tedy BCC super efektivnost) se dostane na místo 3. Podobné případy lze spatřit ještě u poboček F, J, Q a S. U jednotek B a I je ve stejném porovnání situace opačná.

5 Závěr

Cílem práce nebylo získání informace o efektivnosti nebo pořadí jednotlivých poboček stavební spořitelny, nýbrž zhodnocení různých výsledků k jednotlivým postupům jejich řešení. Z tohoto důvodu jsem se v práci příliš nezabýval určením jednotlivých vstupů a výstupů, ale použil jsem aktuální dostupná data. Zpracoval jsem základní informace o způsobu hodnocení efektivnosti homogenních jednotek pomocí analýzy obalu dat (DEA), aby bylo možné objasnit základní principy fungování této metody obecně a přiblížit řešení pomocí konkrétních matematických modelů za pomoci lineárního programování (CCR, BCC, SBM). Po seznámení s těmito fundamentálními informacemi jsem navázal na techniky, které tyto modely rozšiřují o možnosti kompletního uspořádání hodnocených jednotek.

Za několik desetiletí existence metody DEA bylo vytvořeno mnoho modelů a způsobů na celkové hodnocení efektivnosti a řada z nich procházela dalším vývojem, úpravami a modifikacemi. Proto se začaly objevovat práce vždy zaměřené na přehled několika různých technik. V této práci jsem se zaměřil na metodu super efektivnosti a metodu cross efektivnosti.

Z výsledků, ke kterým jsem dospěl, je zřejmé, že v některých případech jsou hodnoty efektivnosti velmi podobné jako například v porovnání výsledků modelu CCR-I pro super efektivnost a super SBM modelu. Při závěrečném seřazení jednotek od nejefektivnější po nejméně efektivní podle různých způsobů řešení jsou ovšem patrné rozdíly na první pohled. Z konečných výsledků usuzuji, že největší rozdíly vytvoří předpoklad variabilních výnosů z rozsahu.

Literatura

- [1] JABLONSKÝ, J., DLOUHÝ, M.: *Modely hodnocení efektivnosti produkčních jednotek*. Professional Publishing Praha, 2004. ISBN 80-86419-49-5.
- [2] ADLER, N., FRIEDMAN, L., SINUANY-STERN, Z.: Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European Journal of Operational Research*, 2002, No. 140, str. 249–265.
- [3] AMIN, R., TOLOO, M. Finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated model. *Computers & Industrial Engineering*, 2007, No. 52, str. 71-77.
- [4] CHARNES, A., COOPER, W.W., RHODES, E.: Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 1978, No. 2, str. 429–444.
- [5] DOYLE, J., GREEN, R.: Efficiency and Cross-Efficiency in DEA: Derivations, Meanings and Uses. *The Journal of the Operational Research Society*, 1994, Vol. 45, No. 5, str. 567-578.
- [6] LOFTI, F., ESHLAGHY, T., SHAFIEE, M.: Providers Ranking Using Data Envelopment Analysis Model, Cross Efficiency and Shannon Entropy. *Applied Mathematical Sciences*, 2012, Vol. 6, No. 4, str. 153 – 161.

Přílohy

```
Title CCRvstupy;

Options
    Excelworkbook="data_pracovni.xlsx";

Index
    i:=excelrange("i");
    j:=excelrange("j");
    r:=excelrange("r");

Data
    y[r,j]=excelrange("vystupy");
    x[i,j]=excelrange("vstupy");
    q=1;
    epsilon=0.00000001;

Decision variables
    theta;
    lambda[j];
    splus[r];
    sminus[i];

Model
    min z export to excelrange("ufc") = theta-epsilon*(sum(i:splus[r])+sum(j:sminus[i]));

Subject to
    omez[i]: sum(j:y[r,j]*lambda[j])-splus[r]=y[r,j:=q];
    omez[r]: sum(j:x[i,j]*lambda[j])+sminus[i]=theta*x[i,j:=q];

End
```

Příloha 1: Zdrojový kód pro CCR-I model v MPL for Windows.

```
Title BCCvstupy;

Options
    Excelworkbook="data_pracovni.xlsx";

Index
    i:=excelrange("i");
    j:=excelrange("j");
    r:=excelrange("r");

Data
    y[r,j]=excelrange("vystupy");
    x[i,j]=excelrange("vstupy");
    q=1;
    epsilon=0.00000001;

Decision variables
    theta;
    lambda[j];
    splus[r];
    sminus[i];

Model
    min z export to excelrange("ufc") = theta-epsilon*(sum(i:splus[r])+sum(j:sminus[i]));

Subject to
    omez[r]: sum(j:y[r,j]*lambda[j])-splus[r]=y[r,j:=q];
    omez[i]: sum(j:x[i,j]*lambda[j])+sminus[i]=theta*x[i,j:=q];
    sum(j:lambda[j])=1;

End
```

Příloha 2: Zdrojový kód pro BCC-I model v MPL for Windows.


```

Title SSBMvstupy;

Options
    Excelworkbook="data_pracovni.xlsx";

Index
    i:=excelrange("i");
    j:=excelrange("j");
    r:=excelrange("rr");

Data
    y[r,j]=excelrange("vystupy");
    x[i,j]=excelrange("vstupy");
    q=20;
    m=3;

Decision variables
    lambda[j];
    splus[r];
    sminus[i];
    xs[i];
    ys[r];

Model
    min z export to excelrange("ufc") = 1/m * sum(i:xs[i] / x[i,q]);

Subject to
    omez1[r]: sum(j:y[r,j]*lambda[j])-splus[r]=ys[r];
    omez[i]: sum(j:x[i,j]*lambda[j])+sminus[i]=xs[i];
    omez2[i]: xs[i] >= x[i,q];
    omez3[r]: ys[r] = y[r,q];
    lambda[q]=0;

End

```

Příloha 3: Zdrojový kód pro super SBM-I model v MPL for Windows.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,3347	0,5472	1	0,4918	0,6087	0,0982	0,3507	0,5937	0,3005	0,5335	0,234	1	0,3897	0,3702	0,632	0,263	0,1427	0,2562	0,1391	0,1658
2	0,2907	0,6342	1	0,9757	1	0,1642	0,6091	0,4357	0,6927	0,534	0,3343	1	0,4799	0,4083	1	0,4412	0,3485	0,2983	0,2854	0,233
3	0,2907	0,6342	1	0,9757	1	0,1642	0,6091	0,4357	0,6927	0,534	0,3343	1	0,4799	0,4083	1	0,4412	0,3485	0,2983	0,2854	0,233
4	0,2853	0,6262	1	1	1	0,1662	0,6183	0,4226	0,7069	0,5236	0,3309	0,981	0,4786	0,4009	1	0,4388	0,3584	0,2949	0,2926	0,2331
5	0,2853	0,6262	1	1	1	0,1662	0,6183	0,4226	0,7069	0,5236	0,3309	0,981	0,4786	0,4009	1	0,4388	0,3584	0,2949	0,2926	0,2331
6	0,2248	0,5584	0,6211	1	0,5246	0,2617	0,8827	0,2666	0,8112	0,4075	0,2167	1	0,4606	0,3861	0,9914	0,4898	0,4435	0,3234	0,3446	0,2228
7	0,2248	0,5584	0,6211	1	0,5246	0,2617	0,8827	0,2666	0,8112	0,4075	0,2167	1	0,4606	0,3861	0,9914	0,4898	0,4435	0,3234	0,3446	0,2228
8	0,2118	0,3635	0,3977	0,1826	0,2584	0,0435	0,1475	0,6965	0,1211	0,4352	0,1334	1	0,1916	0,3856	0,3256	0,1769	0,0539	0,1778	0,0527	0,0802
9	0,2248	0,5584	0,6211	1	0,5246	0,2617	0,8827	0,2666	0,8112	0,4075	0,2167	1	0,4606	0,3861	0,9914	0,4898	0,4435	0,3234	0,3446	0,2228
10	0,2965	0,6294	1	0,8928	1	0,1515	0,5605	0,4612	0,6298	0,5427	0,3353	1	0,4669	0,4074	0,9572	0,4222	0,3116	0,2924	0,2589	0,2244
11	0,2212	0,6166	0,5075	0,8203	0,9733	0,1463	0,5319	0,3825	0,6737	0,5209	0,3553	1	0,4009	0,4378	1	0,4996	0,3231	0,2897	0,2468	0,2103
12	0,2212	0,6166	0,5075	0,8203	0,9733	0,1463	0,5319	0,3825	0,6737	0,5209	0,3553	1	0,4009	0,4378	1	0,4996	0,3231	0,2897	0,2468	0,2103
13	0,2767	0,5612	1	1	0,5152	0,2556	0,8711	0,3112	0,735	0,4204	0,2054	1	0,4994	0,3679	0,9357	0,4292	0,4072	0,3212	0,3361	0,2264
14	0,1233	0,3672	0,1392	0,1989	0,2985	0,0482	0,1606	0,4623	0,1892	0,4053	0,1712	1	0,1554	0,4597	0,4159	0,3025	0,0808	0,183	0,0621	0,0794
15	0,2212	0,6166	0,5075	0,8203	0,9733	0,1463	0,5319	0,3825	0,6737	0,5209	0,3553	1	0,4009	0,4378	1	0,4996	0,3231	0,2897	0,2468	0,2103
16	0,2212	0,6166	0,5075	0,8203	0,9733	0,1463	0,5319	0,3825	0,6737	0,5209	0,3553	1	0,4009	0,4378	1	0,4996	0,3231	0,2897	0,2468	0,2103
17	0,2248	0,5584	0,6211	1	0,5246	0,2617	0,8827	0,2666	0,8112	0,4075	0,2167	1	0,4606	0,3861	0,9914	0,4898	0,4435	0,3234	0,3446	0,2228
18	0,2248	0,5584	0,6211	1	0,5246	0,2617	0,8827	0,2666	0,8112	0,4075	0,2167	1	0,4606	0,3861	0,9914	0,4898	0,4435	0,3234	0,3446	0,2228
19	0,2248	0,5584	0,6211	1	0,5246	0,2617	0,8827	0,2666	0,8112	0,4075	0,2167	1	0,4606	0,3861	0,9914	0,4898	0,4435	0,3234	0,3446	0,2228
20	0,2873	0,6237	1	1	0,8808	0,1766	0,6498	0,4073	0,7142	0,5123	0,3064	1	0,4857	0,4021	1	0,4438	0,3656	0,3028	0,2987	0,234

Příloha 4: CEM matice k metodě cross efektivity.