1 ZÁKLADNÍ DEA MODELY

Jak již bylo řečeno v úvodu, vstupy a výstupy jsou spojovány s výrazem efektivnost. V této kapitole budou postupně představeny základní DEA modely a jejich přístupy při měření efektivnosti. Nejprve je třeba si uvědomit, že na efektivnost můžeme nahlížet z více pohledů – z pohledu vstupů a z pohledu výstupů nebo z pohledu jak vstupů tak i výstupů.

Nechť n je počet jednotek, DMU_j (j = 1, 2, …, n) j-tá jednotka rozhodování (z angl. originálu *decision making unit*), DMU_o reprezentativní jednotka z n-DMU jednotek dána (x_o, y_o).

Nechť X = $\{x_{ij};\ i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n\}$ je matice vstupů, jejíchž prvky představují i-tý vstup j-té DMU jednotky, a $Y = \{ y_{rj}\ ;\ r = 1, 2, \ldots, s, j = 1, 2, \ldots, n\}$ je matice výstupů, jejíchž prvky představují r-tý výstup j-té DMU jednotky.

1.1 Modely obalu

1.1.1 Model obalu s variabilními výnosy z rozsahu

V roce 1984 Banker, Charnes a Cooper navrhli modely s variabilními výnosy z rozsahu. Definujme nyní model obalu s variabilními výnosy z rozsahu orientovaného na ***vstupy***, kde vstupy jsou minimalizovány. Jednotlivé modely obalu s variabilními výnosy z rozsahu budeme všeobecně nazývat modely VRS (z anglického originálu *variable returns to scale*).

Nechť θ je zavedená proměnná, která je minimalizována v modelech orientovaných na vstupy a θ^* je její optimální hodnota, optimální řešení. Dále nechť λ_j je nezáporný vektor j-té DMU jednotky.

$$\theta^* = \min \theta$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io} \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

kde DMU_o reprezentuje jednu z hodnocených n-DMU jednotek, x_{io} a y_{ro} jsou i-tý vstup a r-tý výstup DMU_o jednotky.

Pokud existuje přípustné řešení (1.1), pro které platí $\theta = 1$, potom optimálním řešením (1.1), je $\theta^* \leq 1$. Pokud $\theta^* = 1$, potom stávající úrovně vstupů nemohou být sníženy a DMU_o leží na hranici. Pokud $\theta^* < 1$, potom DMU_o je dominována hranicí. θ^* reprezentuje výslednou efektivnost DMU_o jednotky. Přebytky a nedostatky modelu (1.1) získáme řešením rovnic (1.2).

Nechť s_i^- je nedostatek i-tého vstupu a s_r^+ přebytek r-tého výstupu. Potom platí:

$$s_i^- = \theta^* x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$s_r^+ = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s \tag{1.2}$$

kde s_i^- a s_r^+ reprezentují přídatné proměnné vstupů a výstupů.

Můžeme tedy přímo podmínku možných nulových přídatných proměnných (nedostatků / přebytků) nadefinovat do modelu lineárního programování:

$$
\begin{aligned}
& max \ \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta^* x_{io} && i = 1, 2, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} && r = 1, 2, \ldots, s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j \geq 0 && j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

DMU_o je efektivní pouze a jen tehdy, pokud $\theta^* = 1$ a zároveň $s_i^{-*} = s_r^{+*} = 0$ pro všechna i a r. Řekneme, že DMU_o je slabě efektivní, pokud $\theta^* = 1$ a zároveň $s_i^{-*} \neq 0$ a / nebo $s_r^{+*} \neq 0$ pro některá i a r.

Modely (1.1.) a (1.3) představují dvoufázový proces obsažený v následujícím modelu, resp. **model VRS orientovaný na vstupy**:

$$
\begin{aligned}
& min \ \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \right) \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io} && i = 1, 2, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} && r = 1, 2, \ldots, s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j \geq 0 && j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Přítomností ε v účelové funkci minimalizujeme θ a zároveň optimalizujeme možné nenulové přídatné proměnné, s_i^- a s_r^+. Existence slabě efektivních DMU jednotek znamená pouze to, že neexistuje jen jedno optimální řešení úlohy (1.4). Pokud

ovšem neexistuje slabě efektivní DMU jednotka, potom nám k výpočtu postačí pouze model (1.1). Tuto skutečnost však nikdy nemůžeme potvrdit. Dále můžeme konstatovat, že hranice definovaná v modelu (1.4) vykazuje variabilní výnosy z rozsahu. Model (1.5) dále budeme nazývat modelem VRS orientovaným na vstupy.

Nechť ϕ je zavedená proměnná, která je maximalizována v modelech orientovaných na výstupy a ϕ^* je její optimální hodnota.

Definujme nyní ***model VRS orientovaný na výstupy*** jako

$$
\begin{aligned}
& max \quad \phi - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} && i = 1, 2, \ldots, m; \qquad (1.5) \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi y_{ro} && r = 1, 2, \ldots, s; \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j \geq 0 && j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Podobně jako model VRS orientovaný na vstupy i **model VRS orientovaný na výstupy** bychom mohli rozepsat do dvou fází, ve kterých nejprve hledáme optimální řešení účelové funkce ϕ^* a ignorujeme informaci o nedostatcích / přebytcích a teprve následně optimalizujeme přídatné proměnné za předpokladu známé hodnoty ϕ^* v následujícím modelu.

$$max \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{i=1}^{m} s_r^+$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi^* y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

DMU_o je efektivní pouze a jen tehdy, pokud $\phi^* = 1$ a $s_i^- = s_r^+ = 0$ pro všechna i a r. Řekneme, že DMU_o je slabě efektivní, pokud $\phi^* = 1$ a $s_i^- \neq 0$ a / nebo $s_r^+ \neq 0$ pro některá i a r. A pokud nejsou slabě efektivní DMU jednotky přítomny, potom nemusíme model (1.6) použít a hodnoty přídatných proměnných můžeme získat z rovnic:

$$s_i^- = x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$s_r^+ = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - \phi^* y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s \tag{1.7}$$

Vždy platí $\phi^* \geq 1$. Pro efektivní a slabě efektivní DMU_o platí, že $\phi^* = 1$, pokud $\theta^* = 1$. To znamená, že modely (1.4) a (1.5) identifikují shodnou hranici. V takovém případě platí, že $\theta^* = 1 / \phi^*$.

1.1.2 Výnosy z rozsahu v modelech DEA

Kromě analýzy efektivnosti a možnosti zlepšení na straně vstupů či výstupů u všech sledovaných jednotek DMU můžeme sledovat výnosy z rozsahu, které mají také vypovídající charakter o stabilitě jednotky. Výnosy z rozsahu jsou technickou vlastností produkční funkce v dlouhém období, která je používaná k vyjádření vztahu mezi rozsahem vstupů a efektivností výroby. Charakter výnosů z rozsahu je dán

vztahem mezi změnou celkové produkce, respektive všech výstupů, a proporcionální změnou všech vstupů.

Celková produkce se s proporcionální změnou všech vstupů změní v případě:

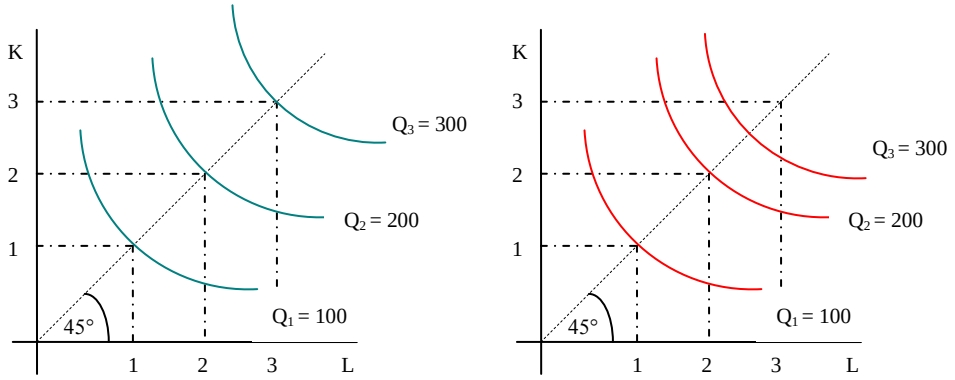
a) *konstantních* výnosů z rozsahu ve *stejné* proporci,
b) *rostoucích* výnosů z rozsahu ve *větší* proporci,
c) *klesajících* výnosů z rozsahu v *menší* proporci.

V reálné produkci si představujeme výnosy z rozsahu jako míru, jakou se zvyšuje výstup, jestliže se všechny vstupy zvyšují stejnou měrou. Při dvojnásobném zvýšení všech vstupů provázeném dvojnásobným zvýšením výstupů se jedná o konstantní výnosy z rozsahu, provázaném méně než 100% nárůstem výstupu o klesající výnosy z rozsahu a více než 100% nárůstem o rostoucí výnosy z rozsahu.

Grafickým vyjádřením různých výnosů z rozsahu je rozdíl ve vzdálenosti mezi izokvantami představujícími proporcionální změnu produktu Q. U konstantních výnosů z rozsahu se vzdálenost mezi izokvantami nemění, u rostoucích se vzdálenost zmenšuje a u klesajících zvětšuje.

Na obrázku 1.1 je zobrazen vztah výnosů z rozsahu mezi prací (*L*) a kapitálem (*K*). Práce a kapitál představují vstupy, množství (*Q*) je výstup výrobního procesu.

Obr. 1.1 Výnosy z rozsahu: konstantní a rostoucí



1.1.3 Ostatní modely obalu

Součet $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ determinuje typ hranice efektivnosti. Pokud toto omezení rovno jedné odstraníme z modelů (1.4) a (1.5), získáme ***modely obalu s konstantními výnosy z rozsahu*** (dále jen modely CRS, z anglického originálu *constant returns to scale*), kde hranice představuje konstantní výnosy z rozsahu. Tyto modely byly představeny již v roce 1978 (Charnes, Cooper a Rhodes) a jsou pilířem analýzy obalu dat.

Pokud nahradíme omezení $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ omezením $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq 1$, obdržíme ***model s neklesajícími výnosy z rozsahu*** (dále jen model NDRS z anglického originálu *non – decreasing returns to scale*). Pokud nahradíme omezení $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ omezením $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1$, obdržíme ***model s nerostoucími výnosy z rozsahu*** (dále jen model NIRS z anglického originálu *non – increasing returns to scale*). V tabulce 1.1 je zobrazen přehled modelů obalu.

Tab. 1.1 – Modely obalu

Typ hranice efektivnosti	Orientace na ***vstupy***	Orientace na ***výstupy***
CRS[1]	$min \quad \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$ za podmínek $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io} \quad i = 1, 2, \ldots m,$ $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \quad r = 1, 2, \ldots, s,$ $\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n.$	$max \quad \phi - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$ za podmínek $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} \quad i = 1, 2, \ldots, m,$ $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi y_{ro} \quad r = 1, 2, \ldots, s,$ $\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n.$
VRS[2]	přidáním $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$	
NIRS[3]	přidáním $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1$	
NDRS[4]	přidáním $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq 1$	
Cíle efektivnosti	$\hat{x}_{io} = \theta^* x_{io} - s_i^{-*}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$ $\hat{y}_{ro} = y_{ro} + s_r^{+*}$ $\quad r = 1, 2, \ldots, s$	$\hat{x}_{io} = x_{io} - s_i^{-*}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$ $\hat{y}_{ro} = \phi^* y_{ro} + s_r^{+*}$ $\quad r = 1, 2, \ldots, s$

<u>Interpretace výsledků modelů obalu</u>:

i) Pokud $\theta^* = 1$ nebo $\phi^* = 1$, hodnocená DMU jednotka je hraničním bodem, tzn. neexistuje jiná DMU, která se chová efektivněji než daná hodnocená DMU jednotka. Jinak je tomu, pokud $\theta^* < 1$ nebo $\phi^* > 1$, kdy hodnocená jednotka je neefektivní, tedy jednotka může buď zvýšit úroveň výstupů nebo snížit úroveň vstupů.

[1] CRS – konstantní výnosy z rozsahu; z angl. originálu *constant returtns to scale*
[2] VRS – variabilní výnosy z rozsahu; z angl. originálu *variable returns to scale*
[3] NIRS - nerostoucí výnosy z rozsahu; z angl. originálu *non-increasing returns to scale*
[4] NDRS - neklesající výnosy z rozsahu; z angl. originálu *non-decreasing returns to scale*

ii) Kladné hodnoty proměnných modelu λ_j j = 1, 2,…,n, určují tzv. referenční jednotky (peers) příslušející dané hodnocené DMU jednotce. Lineární kombinace prvků referenční množiny s váhami λ_j definuje tzv. cíle efektivnosti pro hodnocenou DMU jednotku, které lze interpretovat jako potřebnou změnu vstupů a výstupů hodnocené jednotky tak, aby se tato DMU jednotka stala efektivní.

1.2 Multiplikativní modely

Multiplikativní modely jsou duálními problémy lineárního programování k modelům obalu (viz tabulka 1.2).

Duální proměnné vstupu v_i (i = 1, 2, …, m) a duální proměnné výstupu μ_r (r = 1, 2, …, s) nazýváme multiplikátory. DMU jednotka leží na hranici pouze tehdy a jen tehdy, pokud $\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} + \mu = 1$ (nebo $\sum_{r=1}^{s} v_i x_{io} + v = 1$), v takovém případě je sledovaná jednotka optimální. Konstanta ε v modelu obalu neodmyslitelně vyžaduje, aby v_i a μ_r byly kladné hodnoty v multiplikativním modelu. Omezující podmínku $\sum_{r=1}^{s} v_i x_{io} = 1$ (nebo $\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} = 1$) nazýváme omezením normalizace. V analýze obalu dat vážené vstupy a výstupy ($\sum_{r=1}^{s} v_i x_{io}$ a $\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro}$) nazýváme cílovými hodnotami vstupů a výstupů. Podrobně se těmito modely zabývají Seiford a Thrall (1990).

Podobný přehled multiplikativních modelů jako v předchozí podkapitole nalezneme v tabulce 1.2.

Tab. 1.2 – Multiplikativní modely

Typ hranice efektivnosti	Orientace na ***vstupy***	Orientace na ***výstupy***
max $\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} + \mu$		*min* $\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} + \nu$
za podmínek		*za podmínek*
$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} + \mu \leq 0$		$\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} - \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} + \nu \geq 0$
	$i = 1, 2, \ldots, m,$	$i = 1, 2, \ldots, m,$
$\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} = 1$	$r = 1, 2, \ldots, s$	$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} = 1$ $r = 1, 2, \ldots, s$
$\nu_i, \mu_r \geq 0$	$i = 1, 2, \ldots, m, r = 1, 2, \ldots, s$	$\nu_i, \mu_r \geq 0$ $i = 1, 2, \ldots, m, r = 1, 2, \ldots, s$
CRS	kde $\mu = 0$	kde $\nu = 0$
VRS	kde μ není omezeno	kde ν není omezeno
NIRS	kde $\mu \leq 0$	kde $\nu \geq 0$
NDRS	kde $\mu \geq 0$	kde $\nu \leq 0$

1.3 Aditivní modely (Modely SBM)

Modely analýzy obalu dat uvažují v případě modelu orientovaného na vstupy možné snížení vstupů za předpokladu stabilní úrovně výstupů a podobně v případě modelu orientovaného na výstupy možné zvýšení výstupů za předpokladu stabilní úrovně vstupů. Je třeba se zmínit o aditivním modelu (Charnes, Cooper, Golany, Seiford a Stutz, 1985), který uvažuje možné snížení úrovně vstupů i možné zvýšení úrovně výstupů. Aditivní model neboli model SBM (z anglického originálu *Slack-Based Model*) spočívá v zavedení přídatných proměnných vstupů a výstupů.

1.3.1 Základní aditivní model (Model SBM)

Aditivní model (Charnes, Cooper, Golany, Seiford, Stutz; 1985) nám umožňuje optimalizovat sledovanou jednotku z pohledu přebytků i nedostatků ve stejný okamžik. Definujme ***aditivní model*** v následujícím tvaru:

$$max \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n, r = 1, 2, \ldots, s.$$

Model SBM předpokládá srovnatelné hodnoty vstupů a výstupů. A právě z toho důvodu, že vstupy a výstupy mohou být měřeny v různých jednotkách, by mělo být zváženo užití (1.8). V některých případech je třeba brát i v úvahu apriorní informace z důvodu chybného sčítání nesrovnatelných jednotek. Je tedy výhodné model modifikovat na ***vážený aditivní SBM model*** (Ali, Lerme a Seiford, 1995; Thrall, 1996).

Nechť w_i^- je váhový koeficient přídatné proměnné *i*-tého vstupu a w_r^+ váhový koeficient přídatné proměnné *r*-tého výstupu.

DMU_o jednotka je efektivní pouze tehdy a jen tehdy, pokud hodnoty všech přídavných proměnných jsou rovny nule. V opačném případě, nenulová hodnota proměnné s_i^{-*} značí přebytek *i*-tého vstupu a s_r^{+*} deficit *r*-tého výstupu. Řešení modelu (1.9) nám poskytuje informaci o možném přizpůsobení jednotlivého vstupu či výstupu dané DMU jednotky zohledňující váhové koeficienty.

$$max \quad \sum_{i=1}^{m} w_i^- \, s_i^- + \sum_{r=1}^{s} w_r^+ \, s_r^+$$

za podmínek $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m,$ (1.9)

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n, r = 1, 2, \ldots, s.$$

kde w_i^- a w_r^+ jsou váhy specifikované uživatelem na základě vlastního posouzení.

Tab. 1.3 – Aditivní modely

Typ hranice efektivnosti	Aditivní modely
CRS	$max \quad \sum_{i=1}^{m} w_i^- \, s_i^- + \sum_{r=1}^{s} w_r^+ \, s_r^+$ za podmínek $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m,$ $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}$ $\quad r = 1, 2, \ldots, s,$ $\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n, r = 1, 2, \ldots, s.$
VRS	přidáním $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$
NIRS	přidáním $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1$
NDRS	přidáním $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq 1$

Výsledky aplikace modelů (1.8) a (1.9) nemusí být vždy shodné. Nenastává ale situace, aby se měnil status efektivnosti u zkoumané DMU jednotky. Model (1.9) identifikuje hranici konstantních výnosů z rozsahu a proto jej nazýváme modelem SBM s konstantními výnosy z rozsahu, popř. jen CRS-SBM model. V tabulce 1.3 je zobrazen přehled aditivních modelů.

1.3.2 Model SBM s poměrovým indexem ρ

Model SBM s poměrový indexem ρ byl prezentován Tonem v roce 2001. Jak již bylo zmíněno v předchozích kapitolách, s_i^- a s_r^+ představují přídatné proměnné, přebytky vstupů a nedostatky výstupů. Dále platí, že hodnota přebytku vstupů nemůže být větší než hodnota vstupu, tzn. $x_o \geq s^-$. Pomocí s_i^- a s_r^+ definujme index ρ:

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^- / x_{io}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^+ / y_{ro}} \tag{1.10}$$

Míra efektivnosti ρ je nezávislá na jednotkách použitých pro vyjádření vstupů a výstupů a monotónně klesající v závislosti na přebytcích a nedostatcích, tzn. každé zlepšení / zhoršení jakéhokoliv vstupu i výstupu vede ke zvýšení / snížení míry efektivnosti dané jednotky. S předchozího tvrzení může dále říci, že platí $0 < \rho \leq 1$.

Nyní zapíšeme ***model SBM založeného na poměrovém indexu*** ρ:

$$min\ \rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^- / x_{io}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^+ / y_{ro}}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n, r = 1, 2, \ldots, s.$$

Můžeme tedy tvrdit, že DMU jednotka je SBM-efektivní, pokud $\rho^* = 1$ a to je tehdy, pokud $s_i^- = 0$ a $s_r^+ = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $r = 1, 2, \ldots, s$, tedy tehdy, kdy neexistují ani přebytky a ani nedostatky.

1.4 Aplikace základních DEA modelů

Pro tuto aplikaci jsou zvoleny tradiční vstupy a výstupy reprezentující firmy především z účetního hlediska, které jsou typické pro produkční funkce. Za tradiční a často používané vstupy považujeme účetní položky, jakými jsou **aktiva celkem** a **vlastní kapitál**. U výstupů nás zajímají nejvíce hodnoty položek, které nalezneme ve výkazu zisků a ztrát. V našem případě uvažujeme položky **tržby celkem** a **provozní zisk**. Srovnání je provedeno u 26 sledovaných jednotek, jejichž hlavní činnost je zařazena do automobilového průmyslu. Jedná se v tomto případě o společnosti vyrábějící motorová vozidla dvoukolá, čtyřkolá a vícekolá a o společnosti zajištující výrobu jednotlivých částí motorového vozidla. Použitá data jsou dostupná ve výročních zprávách srovnávaných podnikových skupin.

vstupy: aktiva celkem, vlastní kapitál (účetní období: 2005/2006)

výstupy: tržby celkem, provozní zisk (účetní období: 2005/2006)

porovnávané společnosti: Daimler, Delphi, Fiat, Ford, General Motors, Harley Davidson, Honda, Hyundai, Isuzu, Lear, Mazda, Mitsubishi, Nissan, Porsche, PSA, Renault, Shanghai Auto, Subaru, Škoda Auto, Toyota, TRW, Valeo, Visteon, Volvo, VW, Yamaha.

Výsledky základních DEA modelů prezentovaných v první kapitole nejsou vždy shodné v hodnotách naměřených pro jednotlivé efektivnosti a ne vždy se shodují v samotné klasifikaci sledovaných jednotek.

1.4.1 Aplikace modelů obalu

Nejprve zjistíme efektivnost sledovaných jednotek aplikací modelů obalu, orientovaných na vstupy („I-orient.“) a orientovaných na výstupy („O-orient.“).

Jedenáct z 26 sledovaných jednotek jsou stabilně efektivní (viz tabulka 1.4 bod A). Mezi efektivní jednotky řadíme i dalších pět z tabulky 1.4 B – Toyota, Nissan, Honda, Delphi, Isuzu, které jsou efektivní za omezující podmínky variabilních výnosů z rozsahu. Nemůžeme zcela tvrdit, že jsou neefektivní, jelikož nedosáhli optimální křivky produkční hranice v případě konstantních výnosů z rozsahu. Jsou efektivní za podmínky neklesajících, resp. nerostoucích (např. Isuzu), výnosů z rozsahu.

Multiplikativní modely jsou duálním problémem k modelům obalu. Z tohoto důvodu musíme získat stejné výsledky, jaké jsme získali v předchozí podkapitole. Výsledky získané v těchto modelech jsou shodné s výsledky v tabulkách 1.4 A) a 1.4 B) pro modely orientované na vstupy i výstupy a i pro jednotlivé specifika výnosů z rozsahu.

Tab. 1.4 – Přehled srovnání naměřené efektivnosti pro jednotlivé základní DEA modely
A) efektivní jednotky

	MO I-orient. CRS	MO I-orient. VRS	MO I-orient. NIRS	MO I-orient. NDRS	MO O-orient. CRS	MO O-orient. VRS	MO O-orient. NIRS	MO O-orient. NDRS
Ford	1,0							
General Motors								
Harley D.								
Hyundai								
Lear								
Mazda								
Porsche								
Skoda Auto								
Subaru								
Visteon								
Yamaha								

B) neefektivní a slabě efektivní jednotky

	MO I-orient. CRS	MO I-orient. VRS	MO I-orient. NIRS	MO I-orient. NDRS	MO O-orient. CRS	MO O-orient. VRS	MO O-orient. NIRS	MO O-orient. NDRS
Renault	0,46268	0,52562	0,52562	0,46268	2,16130	1,75752	1,75752	2,16130
Shanghai Auto	0,49722	0,50335	0,49722	0,50335	2,01117	1,92329	1,92329	2,01117
PSA	0,50255	0,72031	0,72031	0,50255	1,98987	1,30709	1,30709	1,98987
VW	0,52205	0,71468	0,71468	0,52205	1,91553	1,29157	1,29157	1,91553
Fiat	0,58682	0,85372	0,85372	0,58682	1,70410	1,12832	1,12832	1,70410
Mitsubishi	0,61545	0,62775	0,62775	0,61545	1,62484	1,58434	1,58434	1,62484
Toyota	0,61825	1,0	1,0	0,61825	1,61746	1,0	1,0	1,61746
Nissan	0,62926	1,0	1,0	0,62926	1,58916	1,0	1,0	1,58916
Volvo	0,63098	0,95431	0,95431	0,63098	1,58483	1,03361	1,03361	1,58483
Daimler	0,67704	0,88441	0,88441	0,67704	1,47702	1,00011	1,00011	1,47702
TRW	0,69765	0,70793	0,69765	0,70793	1,43338	1,42963	1,42963	1,43338
Valeo	0,70289	0,72017	0,70289	0,72017	1,42269	1,41823	1,42269	1,41823
Honda	0,86057	1,0	1,0	0,86057	1,16202	1,0	1,0	1,16202
Delphi	0,86692	1,0	1,0	0,86692	1,15350	1,0	1,0	1,15350
Isuzu	0,88266	1,0	0,88266	1,0	1,13294	1,0	1,13294	1,0

Rozbor naměřených hodnot míry efektivnosti u sledované společnosti VW v základních modelech DEA

Pro názornou ukázku je uveden příklad finanční skupiny VW.

Tab. 1.5 – Přehled naměřených hodnot sledované společnosti VW

	míra efektivnosti	$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$	**výnosy z rozsahu**	**referenční množina**
modely orientované na vstupy				
CRS	0,52205	4,61617	klesající	GM (0,121); Mazda (3,234); Subaru (1,261)
VRS	0,71468			GM (0,463); Mazda (0,097); Honda (0,439)
NDRS	0,52205			GM (0,121); Mazda (3,234); Subaru (1,261)
NIRS	0,71468			GM (0,463); Mazda (0,097); Honda (0,439)
modely orientované na výstupy				
CRS	1,91553	8,84239	klesající	GM (0,232); Mazda (6,196); Subaru (2,415)
VRS	1,29157			GM (0,628); Nissan (0,268); Toyota (0,104)
NDRS	1,91553			GM (0,232); Mazda (6,196); Subaru (2,415)
NIRS	1,29157			GM (0,628); Nissan (0,268); Toyota (0,104)

Jednotka je neefektivní ve všech modelech a vykazuje klesající výnosy z rozsahu. Výnosy z rozsahu jsou zcela zřetelné v modelech CRS a pokud máme naměřené míry efektivnosti z ostatních základních modelů obalu (VRS, NIRS a NDRS), potom je lze také určit. V tomto případě se shodují hodnoty míry efektivnosti naměřené v modelech VRS a NIRS. Tato shoda indikuje klesající výnosy z rozsahu. Pro oba modely je shodná i referenční množina, tvořená ze společností GM, Mazda a Honda, resp. GM, Nissan a Toyota. Dále stojí za zmínku stabilita výnosů z rozsahu z pohledu použitého modelu dle orientace. Jak v modelech orientovaných na vstupy, tak na výstupy jsou výnosy z rozsahu klesající. Přestože skupina VW je neefektivní, je ve sledovaném období stabilní z pohledu výnosů z rozsahu.

1.4.2 Aplikace aditivních modelů SBM

V aditivních modelech je cílem aplikace zjistit hodnotu daného vstupu či výstupu pomocí přebytků a nedostatků. Jedná se o zavedené proměnné, které představují zbytkovou hodnotu do „ideální“ hodnoty daného vstupu (resp. výstupu) sledované jednotky. Pokud tyto zbytkové hodnoty představující přebytek či nedostatek jsou nulové, sledovaná jednotka je efektivní. Vzhledem k rozsáhlosti řešení aplikujeme pouze jeden z aditivních modelů, model CRS.

Je možné se rozhodnout, zda bude použit vážený model. Váženého modelu v praxi je používáno častěji za předpokladu, že je očekávaná spolupráce s managementem společnosti, který je ochoten zohlednit strategii firmy. V různých fází vývoje produktu má firma svou strategii, ne vždy je jejím hlavním cílem zisk. Může přikládat větší váhu prodejům nežli samotnému zisku, může se ale také jednat o mix několika produktů, kde je těžké přiřadit váhy. Nicméně, toto rozšíření aditivního modelu bylo právě žádáno spíše managementem a aplikací aditivních modelů.

Pro jednoduchou prezentaci váženého aditivního modelu SBM byl zvolen vstup „počet zaměstnanců“. Tomuto vstupu byla přiřazena dvojnásobná váha (viz tabulka 1.6) nežli ostatním vstupům. Hlavním důvodem je běžná skutečnost, že manažeři musí

snížení počtu zaměstnanců složitě vyjednávat nejprve s odbory. Zároveň na straně výstupů byla přiřazena dvojnásobná váha tržbám. Přiřazení vah nemá vliv na samotném určení, zda-li je sledovaná jednotka efektivní či není. Váhy ovlivňují pouze přebytek a zároveň cílovou hodnotu daného vstupu.

Tab. 1.6 – Přehled vah aplikovaných v aditivním SBM modelu váženého CRS

vstupy	**váhy**	**výstupy**	**váhy**
Aktiva celkem	10	Tržby	50
Počet zaměstnanců	20	Provozní zisk	25
Vlastní kapitál	10		

Sledované jednotky, které jsou hodnoceny jako efektivní v obou modelech, jsou zvýrazněny tučně. Jednotky s optimálním nastavením počtu zaměstnanců jsou zvýrazněny kurzivou (pouze v aditivním modelu SBM váženém).

Efektivní jednotky (v obou modelech): GM, Harley Davidson, Hyundai, Isuzu, Lear, Mazda, Porsche, Škoda Auto, Subaru, Visteon

Efektivní jednotky v aditivním modelu SBM váženém: Daimler, Ford, Honda, Mitsubishi, Nissan, Renault, Toyota

Aditivní modely jsou v praxi velmi oblíbené právě proto, jelikož jejich interpretace je snadná a managementu firmy poukáže přímo na určité slabosti produkce. I přesto, že později byl prezentován poměrový model SBM (viz podkapitola 1.3.1), používá se především jako možné srovnání s aditivním modelem SBM.

Tab. 1.7 – Aditivní SBM model CRS a Aditivní SBM model vážený CRS – aplikace; zobrazení výsledných přebytků u vstupu „počet zaměstnanců“, původních hodnot a zavedené proměnné λ; a výnosy z rozsahu sledované jednotky.

DMU_j	Aditivní model SBM			Aditivní model SBM vážený			Výnosy z rozsahu DMU_j
	přebytek počet zam.	$\Sigma\lambda_j$	původní hodnota	přebytek počet zam.	$\Sigma\lambda_j$	původní hodnota	
Daimler	*89 692*	*5,3329*	*360 385*	*0*	*5,5991*	*360 385*	*klesající*
Delphi	124 404	1,4201	171 400	113 372	2,0508	171 400	klesající
Fiat	80 400	1,9382	172 012	24 585	2,1039	172 012	klesající
Ford	*23 630*	*1,0555*	280 000	*0*	*1,1256*	*280 000*	*klesající*
GM	**0**	**1,0**	**335 000**	**0**	**1,0**	**335 000**	**konstantní**
Harley D.	**0**	**1,0**	**10 000**	**0**	**1,0**	**10 000**	**konstantní**
Honda	*3 063*	*3,6443*	*96 800*	*0*	*3,6339*	*96 800*	*klesající*
Hyundai	**0**	**1,0**	**54 115**	**0**	**1,0**	**54 115**	**konstantní**
Isuzu	**0**	**1,0**	**22 536**	**0**	**1,0**	**22 536**	**konstantní**
Lear	**0**	**1,0**	**115 000**	**0**	**1,0**	**115 000**	**konstantní**
Mazda	**0**	**1,0**	**38 004**	**0**	**1,0**	**38 004**	**konstantní**
Mitsubishi	*17 287*	*2,0489*	*50 702*	*0*	*1,9902*	*50 702*	*klesající*
Nissan	*68 172*	*4,1637*	*183 500*	*0*	*4,1243*	*183 500*	*klesající*
Porsche	**0**	**1,0**	**11 384**	**0**	**1,0**	**11 384**	**konstantní**
PSA	111 958	2,4577	208 500	31 725	2,6959	208 500	klesající
Renault	*71 050*	*3,5655*	128 893	*0*	*3,3388*	*128 893*	*klesající*
Shanghai Autom.	53 554	1,1772	68 726	31 847	1,1105	68 726	klesající
Skoda Auto	**0**	**1,0**	**27 639**	**0**	**1,0**	**27 639**	**konstantní**
Subaru	**0**	**1,0**	**13 111**	**0**	**1,0**	**13 111**	**konstantní**
Toyota	*111 047*	*9,7031*	*280 000*	*0*	*9,3262*	*280 000*	*klesající*
TRW	44 409	0,9994	63 800	38 694	0,9849	63 800	rostoucí
Valeo	50 246	0,9754	69 800	48 815	0,9658	69 800	rostoucí
Visteon	**0**	**1,0**	**47 800**	**0**	**1,0**	**47 800**	**konstantní**
Volvo	40 303	1,8839	83 187	4 980	1,8269	83 187	klesající
VW	161 543	4,1657	344 902	2 189	4,6388	344 902	klesající
Yamaha	8 222	1,0339	39 300	8 129	1,0341	39 300	klesající