

## 2 MODEL Y SUPER-EFEKTIVNOSTI

Pokud referenční množina modelu obalu neobsahuje hodnocenou DMU jednotku, výsledný model nazýváme modelem super-efektivnosti. Těmito modely se zabývali Charnes, Haag, Jaska a Semple (1992) a studovali citlivost klasifikace efektivnosti. Zhu (1996), Seiford a Zhu (1998) vyvinuli mnoho modelů super-efektivnosti, aby definovali oblasti stability efektivnosti. Andersen a Petersen (1993) však používali modely super-efektivnosti především k určení pořadí DMU jednotek a jejich modely super-efektivnosti jsou nejvýznamnější. Nicméně modely super-efektivnosti mohou být také využívány k určení těch pozorování, které ovlivňují celkový výsledek a dále k identifikaci extrémně efektivních DMU jednotek.

Protože modely super-efektivnosti jsou rozšířením základních DEA modelů, můžeme ponechat beze změn dosavadní značení jednotlivých parametrů a další parametry zavedeme.

Necht'  $\theta^{**}$  je zavedená proměnná, která je minimalizována v modelech super-efektivnosti orientovaných na vstupy a  $\phi^{**}$  je zavedená proměnná, která je maximalizována v modelech super-efektivnosti orientovaných na výstupy.

Tab. 2.1 – Modely super-efektivnosti

| Typ<br>hranice<br>efektivnosti | Orientace na <i>vstupy</i>                                                                                                                                                                 | Orientace na <i>výstupy</i>                                                                                                                                                              |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                | $\min \theta^{**}$<br>za podmínek                                                                                                                                                          | $\max \phi^{**}$<br>za podmínek                                                                                                                                                          |
| CRS                            | $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta^{**} x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m,$ $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s,$ $\lambda_j \geq 0 \quad j \neq 0.$ | $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m,$ $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi^{**} y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s,$ $\lambda_j \geq 0 \quad j \neq 0.$ |
| VRS                            | přidáním $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                          |
| NIRS                           | přidáním $\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1$                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                          |
| NDRS                           | přidáním $\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1$                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                          |

V tabulce 2.1 jsou prezentovány základní DEA modely super-efektivnosti vycházející z modelů obalu. Rozdíl mezi modely obalu a modely super-efektivnosti je především v tom, že hodnocená DMU<sub>o</sub> je vyloučena z referenční množiny. Modely super-efektivnosti se opírají o referenční jednotku vytvořenou ze všech ostatních DMU jednotek.

Přestože modely super-efektivnosti mohou rozlišit výkonnost jednotlivých DMU jednotek, efektivnost DMU jednotek není srovnatelná se stejným standardem. Hranice je totiž vytvořena ze zbývajících DMU jednotek a tudíž se mění s každou efektivní hodnocenou DMU jednotkou.

## 2.1 Měření super-efektivnosti a modely DEA

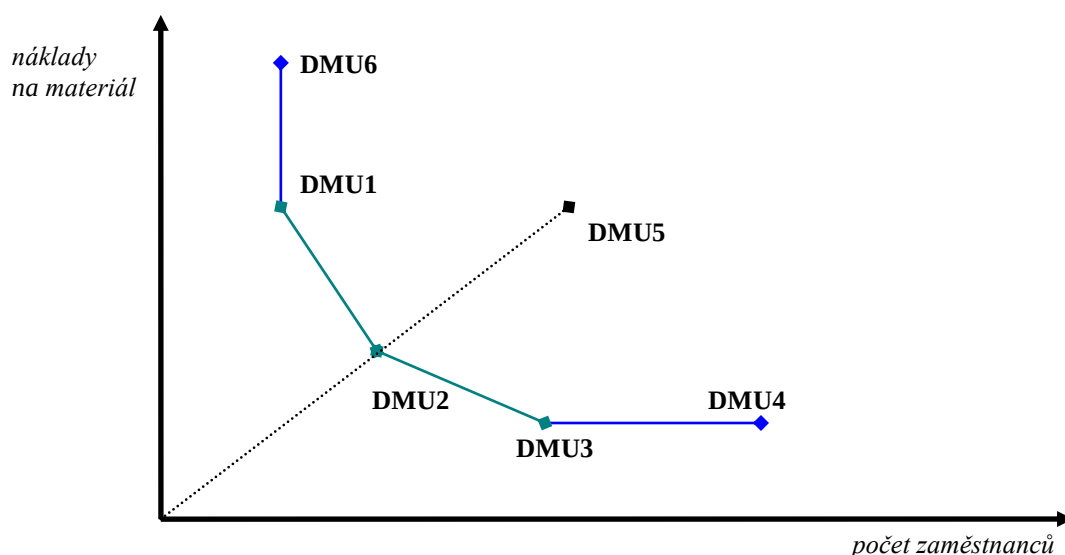
Podobně jako v předchozích kapitolách se jednotlivými modely budeme nejprve zabývat z pohledu modelu orientovaného na výstupy a posléze z pohledu modelu orientovaného na vstupy. Zvláštní pozornost pak budeme věnovat modelu VRS.

Nejprve je nutno definovat základní čtyři kategorie DMU jednotek.

**Klasifikace DMU jednotek** (Charnes, Cooper a Thrall; 1991)

1. **množina  $E$**  – množina extrémně efektivních DMU jednotek
2. **množina  $E'$**  – efektivní DMU jednotky, které nejsou extrémně efektivní (jedná se o lineární kombinace extrémně efektivních DMU jednotek)
3. **množina  $F$**  – množina hraničních bodů s nenulovými přídatnými proměnnými, nazývány též slabě efektivní
4. **množina  $N$**  – množina neefektivních DMU jednotek

Obr. 2.1 – Efektivnost sledovaných jednotek za předpokladu stejného jediného výstupu



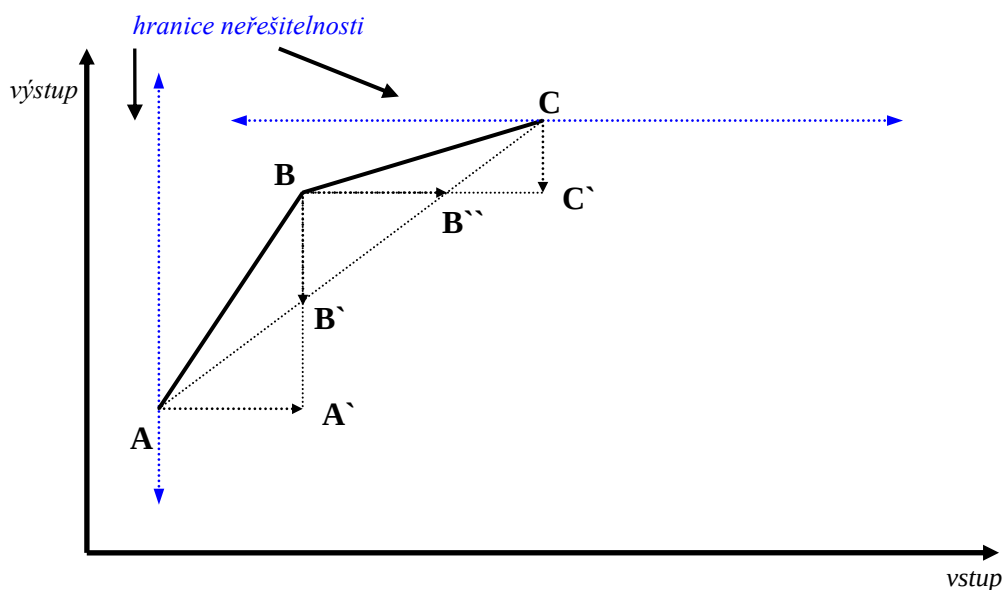
Na obrázku 2.1 je grafické znázornění šesti sledovaných jednotek, které jsou hodnoceny na základě dvou vstupů, náklady na materiál a počet zaměstnanců, a

jednoho výstupu, který je pro všechny jednotky shodný. Sledované jednotky DMU1, DMU2 a DMU3 jsou extrémně efektivní. DMU4 a DMU6 jsou jednotky slabě efektivní. Jednotka DMU5 je neefektivní.

### 2.1.1 Model s variabilními výnosy z rozsahu

U modelů super-efektivnosti se setkáváme s problémem neřešitelnosti. Pro přiblížení otázky výnosů z rozsahu a možné neřešitelnosti předpokládejme jednoduchou situaci, kdy budeme aplikovat model super-efektivnosti VRS na jediný vstup ( $x$ ) a jediný výstup ( $y$ ).

Obr. 2.2 – Neřešitelnost v modelu super-efektivnosti VRS



V obr. 2.2 máme DMU jednotky - body A, B, C. Můžeme říci, že DMU jednotky ležící na úsečce AB vykazují *rostoucí* výnosy z rozsahu a DMU jednotky ležící na úsečce BC vykazují *klesající* výnosy z rozsahu. Dále pak v případě modelu super-efektivnosti orientovaného na vstupy A porovnáváme s A', podobné srovnání ale nemůžeme udělat v případě jednotky C, jelikož jednotka C leží na hranici neřešitelnosti modelu super-efektivnosti orientovaného na vstupy. Řekneme, že model nemá řešení v bodě C. A podobně i v případě modelu super-efektivnosti orientovaného na výstupy.

C srovnáváme s bodem C', ale bod A výstupově srovnat nemůžeme a model nemá řešení v bodě A. Pouze jednotku B lze porovnat v obou modelech super-efektivnosti.

Můžeme tvrdit, že v modelu VRS platí, že sledovaná jednotka je efektivní pouze tehdy a jen tehdy, pokud je daná jednotka efektivní i v modelech NIRS a NDRS.

Předpokládejme, že  $DMU_j$  jednotka ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) spotřebovává vstupy, tedy vektor vstupů,  $x_j$ , aby produkovala výstupy, tedy vektor výstupů,  $y_j$ .

Nechť  $\theta^{***}$  a  $\phi^{***}$  označíme jako optimální hodnoty DEA-modelů super-efektivnosti orientované na vstupy a orientované na výstupy, ve kterých hodnotíme extrémně efektivní  $DMU_o$  jednotku, potom:

- i)  $\theta^{***} > 1$  nebo daný model super-efektivnosti orientovaný na vstupy nemá řešení;
- ii)  $\phi^{***} < 1$  nebo daný model super-efektivnosti orientovaný na výstupy nemá řešení.

### **Řešitelnost modelu super-efektivnosti VRS orientovaného na výstupy**

Model super-efektivnosti VRS orientovaný na výstupy je neřešitelný pro extrémně efektivní  $DMU_o$  jednotku, kde  $DMU_o = (x_o, y_o)$ , pouze a jen tehdy, pokud  $DMU_o$  jednotka, kde  $DMU_o = (x_o, \delta y_o)$ , kde  $\delta$  je zavedená proměnná, pro kterou platí  $0 < \delta \leq 1$ , je efektivní v modelu obalu VRS (Zhu, 2003).

*Důkaz (Cooper, Seiford, Zhu; 2004):* Předpokládejme model super-efektivnosti VRS orientovaný na výstupy, který nemá řešení, a  $(x_o, \delta^o y_o)$  je neefektivní, kde  $0 < \delta^o \leq 1$ . Potom řešením modelu (2.1)

$$\begin{aligned} \phi_o^{***} &= \max \phi_o^{**} \\ \text{za podmínek} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &\leq x_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j &\geq \phi_o^{**} (\delta^o y_o), \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

je  $\lambda_j^*$  ( $j \neq 0$ ),  $\lambda_o^* = 0$ ,  $\phi_o^{***} > 1$ . Pokud  $\lambda_o^* = 0$ , model je shodný s modelem super-efektivnosti VRS orientovaného na výstupy a tedy má řešení (kontradikce – jen tehdy). Pokud model super-efektivnosti VRS orientovaného na výstupy je řešitelný, potom  $\phi^{***} < 1$  je maximálně radiální snížení všech výstupů zajišťující efektivnost DMU<sub>o</sub>. Potom tedy  $\delta$  nemůže být menší než  $\phi^{***}$ . Jinak by totiž DMU<sub>o</sub> nebyla efektivní v modelu obalu VRS orientovaného na výstupy a tedy model super-efektivnosti VRS orientovaný na výstupy by neměl řešení.

Model VRS (model super-efektivnosti) orientovaný na výstupy je neřešitelný pouze a jen tehdy, pokud  $\bar{h}^*$ , kde  $\bar{h}^* > 1$  je optimální hodnota v následujícím modelu (2.2), dále jen **věta 2.1**:

$$\begin{aligned} \bar{h}^* &= \min \bar{h} \\ \text{za podmínek} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &\leq \bar{h} x_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j \neq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

*Důkaz (Cooper, Seiford, Zhu; 2004):* Pro jakékoliv  $\lambda_j$  ( $j \neq 0$ ), a zároveň platí-li  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ , je splněna omezující podmínka ve tvaru  $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq \phi_o^{**} y_o$ . Tedy model super-efektivnosti VRS orientovaný na výstupy nemá řešení, pokud neexistuje  $\lambda_j$  ( $j \neq 0$ ) splňující  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ , které by splňovalo omezení  $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x_o$ . To znamená, že optimální řešení (2.2) je větší než jedna.

Výnosy z rozsahu u DMU<sub>o</sub> jednotky jsou *rostoucí* pouze tehdy a jen tehdy, pokud  $\sum_{j=1}^n \lambda_j^* < 1$  pro všechna optimální řešení v modelech super-efektivnosti s konstantními výnosy z rozsahu a *klesající* pouze tehdy a jen tehdy  $\sum_{j=1}^n \lambda_j^* > 1$  pro všechna optimální řešení v modelech super-efektivnosti s konstantními výnosy z rozsahu.

Pokud DMU<sub>o</sub> vykazuje klesající výnosy z rozsahu, potom model super-efektivnosti VRS orientovaný na výstupy je řešitelný a  $\phi^{**} < 1$ , kde  $\phi^{**}$  je optimální řešení modelu super-efektivnosti VRS orientovaného na výstupy.

Pokud model super-efektivnosti VRS orientovaný na výstupy je neřešitelný, potom DMU<sub>o</sub> vykazuje rostoucí nebo konstantní výnosy z rozsahu.

### **Řešitelnost modelu super-efektivnosti VRS orientovaného na vstupy**

Model super-efektivnosti VRS orientovaný na vstupy je neřešitelný pro extrémně efektivní DMU<sub>o</sub> jednotku, kde DMU<sub>o</sub> =  $(x_o, y_o)$ , pouze a jen tehdy, pokud DMU<sub>o</sub> jednotka, kde DMU<sub>o</sub> =  $(\chi x_o, y_o)$ , kde  $\chi$  je zavedená proměnná, pro kterou platí  $1 < \chi \leq +\infty$ , je efektivní v modelu obalu VRS (Zhu, 2003).

$$\begin{aligned}
& g^* = \max g \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq g y_o, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \geq 0, j \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Model super-efektivnosti VRS orientovaný na vstupy nemá řešení pouze tehdy a jen tehdy, pokud  $g^* < 1$ , kde  $g^*$  je optimální řešení v (2.3). Dále je **věta 2.2**.

Pokud  $DMU_o$  vykazuje rostoucí výnosy z rozsahu, potom model super-efektivnosti VRS orientovaný na vstupy je řešitelný a  $\theta^{**} > 1$ , kde  $\theta^{**}$  je optimální řešení modelu super-efektivnosti VRS orientovaného na vstupy.

Pokud model super-efektivnosti VRS orientovaný na vstupy je neřešitelný, potom  $DMU_o$  vykazuje klesající nebo konstantní výnosy z rozsahu.

### 2.1.2 Model super-efektivnosti s nerostoucími výnosy z rozsahu

#### Řešitelnost modelu super-efektivnosti NIRS orientovaného na výstupy

Model super-efektivnosti orientovaný na výstupy s nerostoucími výnosy z rozsahu (dále jen NIRS, z anglického originálu *non-increasing return to scale*) má řešení, pokud  $\lambda_j = 0$  ( $j \neq 0$ ) a  $\phi^{**} = 0$ . Model super-efektivnosti NIRS orientovaný na výstupy má vždy řešení (Zhu, 2003).

#### Řešitelnost modelu super-efektivnosti NIRS orientovaného na vstupy

Model super-efektivnosti NIRS orientovaný na vstupy má řešení pouze tehdy a jen tehdy, pokud model super-efektivnosti VRS orientovaný na vstupy nemá řešení. Dále jen **věta 2.3**.



O extrémně efektivní  $DMU_o$  jednotce, kde  $DMU_o = (x_o, y_o)$ , řekneme, že:

- i) Model super-efektivnosti NIRS orientovaný na vstupy nemá řešení pouze tehdy a jen tehdy, pokud  $DMU_o$ , kde  $DMU_o = (\chi x_o, y_o)$  je efektivní v modelu obalu VRS pro  $1 < \chi \leq +\infty$ .
- ii) Model super-efektivnosti NIRS orientovaný na vstupy má řešení pouze tehdy a jen tehdy, pokud  $g^* < 1$ , kde  $g^*$  je optimální řešení v (2.3).

Pokud  $DMU_o \in E$  v modelu NIRS, potom  $DMU_o$  vykazuje klesající nebo konstantní výnosy z rozsahu. Můžeme také tvrdit, že  $DMU_o$  leží v oblasti variabilních výnosů z rozsahu, tedy splňují podmínku klesajících či konstantních výnosů z rozsahu a můžeme tedy tvrdit, že modely obalu VRS a NIRS jsou identické pro  $DMU_o$  jednotku. Z toho mimo jiné plyne, že  $DMU_o$ , kde  $DMU_o = (\chi x_o, y_o)$ , je efektivní i v modelu obalu NIRS pro  $1 \leq \chi < +\infty$ .

### 2.1.3 Model super-efektivnosti s neklesajícími výnosy z rozsahu

Definujme si základní věty neřešitelnosti pro modely super-efektivnosti s neklesajícími výnosy z rozsahu (dále jen NDRS, z anglického originálu *non-decreasing returns to scale*).

#### Řešitelnost modelu super-efektivnosti NDRS orientovaného na výstupy

Model super-efektivnosti NDRS orientovaný na výstupy nemá řešení tehdy a jen tehdy, pokud model super-efektivnosti VRS orientovaný na výstupy nemá řešení. Dále jen **věta 2.4**.

O zvláštní extrémně efektivní  $DMU_o$  jednotce, kde  $DMU_o = (x_o, y_o)$ , víme, že:

- i) Model super-efektivnosti NDRS orientovaný na výstupy nemá řešení pouze tehdy a jen tehdy, pokud  $(x_o, \delta y_o)$  je efektivní v modelu obalu VRS pro  $0 < \delta \leq 1$ .
- ii) Model super-efektivnosti NDRS orientovaný na výstupy nemá řešení pouze tehdy a jen tehdy, pokud  $\hat{h}^* > 1$ , kde  $\hat{h}^*$  je optimální hodnota v modelu (2.2).

### **Řešitelnost modelu super-efektivnosti NDRS orientovaného na vstupy**

Model super-efektivnosti NDRS orientovaný na vstupy má vždy řešení (Zhu, 2003).

#### **2.1.4 Problém neřešitelnosti při měření super-efektivnosti v modelech DEA**

V závěru shrneme ještě další poznatky ke kapitole 2.1 a jejím podkapitolám. Na základě věty 2.2, že modely super-efektivnosti VRS orientované na výstupy a na vstupy nemusejí být řešitelné. Tato situace může nastat jen u těch extrémně efektivních jednotek vykazujících rostoucí výnosy z rozsahu (nebo konstantní výnosy z rozsahu), resp. klesající výnosy z rozsahu (nebo konstantní výnosy z rozsahu).

**Věta 2.5** i) Pokud  $DMU_o \in E$  vykazuje klesající výnosy z rozsahu, potom všechny DEA modely super-efektivnosti orientované na výstupy mají řešení.

ii) Pokud  $DMU_o \in E$  vykazuje rostoucí výnosy z rozsahu, potom všechny DEA modely super-efektivnosti orientované na vstupy mají řešení.

V modelu super-efektivnosti VRS bylo řečeno, že neřešitelnost značí, že vstupy extrémně efektivní  $DMU_o$  jednotky mohou proporcionálně vzrůst bez omezení nebo

výstupy mohou proporcionálně kladně klesnout bez omezení, zatímco bude zachována efektivnost DMU<sub>o</sub> jednotky. To tedy říká, že efektivnost DMU<sub>o</sub> jednotky je vždy stabilní i přes proporcionální změnu dat.

Modely (2.2) a (2.3) determinující neřešitelnost používáme při analýze citlivosti klasifikace efektivnosti. V tabulce 2.2 si shrneme vztahy mezi neřešitelností a super-efektivnosti DEA-modelů.

Tab. 2.2 – DEA modely super-efektivnosti a jejich neřešitelnost

| Modely super-efektivnosti    |             | Neřešitelnost      | Výnosy z rozsahu |
|------------------------------|-------------|--------------------|------------------|
| <b>Orientované na výstup</b> | <b>VRS</b>  | věta 2.1           | klesající        |
|                              | <b>NIRS</b> | vždy řešitelný     | věta 2.5 i)      |
|                              | <b>NDRS</b> | věta 2.3, věta 2.1 | vždy řešitelný   |
| <b>Orientované na vstup</b>  | <b>VRS</b>  | věta 2.2           | rostoucí         |
|                              | <b>NIRS</b> | věta 2.3, věta 2.2 | vždy řešitelný   |
|                              | <b>NDRS</b> | vždy řešitelný     | věta 2.5 ii)     |

## 2.2 Měření super-efektivnosti a modely SBM – DEA

V kapitole 1.3 jsme se blíže seznámili s modely SBM a dále jsme se věnovali v podkapitole 1.3.2 modelu SBMT, kde jsme minimalizovali *index*  $\rho$ , který vyjadřoval míru efektivnosti dané DMU jednotky. V této kapitole budeme řešit otázku super-efektivnosti s porovnáním „SBM-efektivnosti“ (Tone; 2001).

### 2.2.1 Index super-efektivnosti

Nejprve definujeme množinu produkčních možností  $P \setminus (x_o, y_o)$ :

$$P \setminus (x_o, y_o) = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x} \geq \sum_{j=1, \neq o}^n \lambda_j x_j, \bar{y} \leq \sum_{j=1, \neq o}^n \lambda_j y_j, \bar{y} \geq 0, \lambda \geq 0 \right\} \quad (2.4)$$

Dále definujeme podmnožinu  $\bar{P} \setminus (x_o, y_o)$  množiny  $P \setminus (x_o, y_o)$  jako:

$$\bar{P} \setminus (x_o, y_o) = P \setminus (x_o, y_o) \cap \{\bar{x} \geq x_o \text{ a } \bar{y} \leq y_o\} \quad (2.5)$$

Pro  $X > 0$  a  $Y > 0$ ,  $\bar{P} \setminus (x_o, y_o)$  není prázdná podmnožina.

Následně definujeme index  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i / x_{io}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \bar{y}_r / y_{ro}} \quad (2.6)$$

Na základě (2.4) můžeme tvrdit, že vzdálenost není menší než 1 a je rovna 1 pouze tehdy a jen tehdy, pokud  $(x_o, y_o) \in \bar{P} \setminus (x_o, y_o)$ , tedy vyjmutí DMU  $(x_o, y_o)$  nemá vliv na původní množinu produkčních možností  $P$ .

Index  $\delta$  můžeme interpretovat následovně. Čitatel je vážená vzdálenost  $l_1$ , tedy vzdálenost od  $x_o$  k  $\bar{x}(\geq x_o)$  a představuje tedy *průměrnou míru růstu*  $x_o$  k  $\bar{x}$ , kde bod  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{P} \setminus (x_o, y_o)$ . Jmenovatelem je potom vážená vzdálenost  $l_2$ , tedy vzdálenost od  $y_o$  k  $\bar{y}(\leq y_o)$ , představuje tedy *průměrnou míru poklesu*  $y_o$  k  $\bar{y}$ , kde bod  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{P} \setminus (x_o, y_o)$ . Čím menší je jmenovatel, tím  $y_o$  leží dále od  $\bar{y}$ . Mohli bychom také říci, že index  $\delta$  se skládá ze dvou indexů – ten první představuje vzdálenost vstupů a ten druhý vzdálenost výstupů. Oba indexy jsou neomezené.

Za pomoci definic na předchozí stránce nyní můžeme sestavit model, ve kterém budeme minimalizovat index  $\delta$ .

$$\min \delta = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i / x_{io}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \bar{y}_r / y_{ro}} = \delta^*$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j x_j &\leq \bar{x}, \\ \sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j y_j &\geq \bar{y}, \\ \bar{x} &\geq x_o \text{ a } \bar{y} \leq y_o, \\ \bar{y} &\geq 0, \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Model (2.7) nazýváme **model SBM super-efektivnosti**, popř. **model super-SBM**.

Index super-efektivnosti  $\delta^*$  je nezávislý na jednotlivých DMU jednotkách, ve kterých jsou poměřovány vstupy a výstupy daných DMU jednotek. Toto tvrzení je platné, pokud účelová funkce i omezující funkce jsou nezávislé na jednotkách.

Nechť  $DMU_o = (\alpha x_o, \beta y_o)$ , kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou zavedené proměnné, pro které platí  $\alpha \leq 1$ ,  $\beta \geq 1$ , je DMU jednotka se sníženým množstvím vstupů pomocí koeficientu  $\alpha$  a se zvýšeným množstvím výstupů pomocí koeficientu  $\beta$ . Potom index super-efektivnosti  $\delta^*$  jednotky  $DMU_o = (\alpha x_o, \beta y_o)$  není menší než index super-efektivnosti  $\delta^*$  jednotky  $(x_o, y_o)$ .

Index super-efektivnosti jednotky  $DMU_o = (\alpha x_o, \beta y_o)$  vypočítáme pomocí následujícího modelu. Nechť  $\hat{x}$  jsou snížené vstupy, pro které platí  $\hat{x} \geq \alpha x_o$ , a  $\hat{y}$  jsou zvýšené výstupy, pro které platí  $0 \leq \hat{y} \leq \beta y_o$ . Dále je zavedena proměnná  $\hat{\delta}$ , která je minimalizována v modelu a její optimální hodnota  $\hat{\delta}^*$ .

$$\hat{\delta}^* = \min \hat{\delta} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{x}_i / \alpha x_{io}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \hat{y}_r / \beta y_{ro}} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{x}_i / x_{io}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \hat{y}_r / y_{ro}}$$

za podmínek  $\sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j x_j \leq \hat{x},$  (2.8)

$$\sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j y_j \geq \hat{y},$$

$$\hat{x} \geq \alpha x_o \text{ a } 0 \leq \hat{y} \leq \beta y_o,$$

$$\lambda \geq 0.$$

Model (2.8) nazýváme **model SBM' super-efektivnosti**, popř. **model super-SBM'**.

Pokud existuje řešení pro jakoukoliv dvojici  $(\hat{x}, \hat{y})$  v (2.8), tak i v modelu (2.7) existuje řešení pro dvojici  $(\hat{x}/\alpha, \hat{y}/\beta)$ . Můžeme říci, že platí:

$$\delta^* \leq \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{x}_i / \alpha) / x_{io}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s (\hat{y}_r / \beta) / y_{ro}} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{x}_i / x_{io}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \hat{y}_r / y_{ro}}, \text{ tedy } \delta^* \leq \hat{\delta}^* \quad (2.9)$$

Z (2.8) a z (2.9) tedy vyplývá, že index  $\hat{\delta}^* (\alpha x_o, \beta y_o)$  není menší než index  $\delta^* (x_o, y_o)$ .

### 2.2.2 Transformace modelu super-SBM

Model (2.7) můžeme přepsat jako model lineárního programování pomocí Charnes-Cooperovy transformace (2.10).

Nechť  $t$  je zavedená proměnná, pro kterou platí  $t > 0$ . Nechť  $\tilde{x}$  je zavedená proměnná, pro kterou platí  $\tilde{x} \geq t x_o$ . Nechť  $\tilde{y}$  je zavedená proměnná, pro kterou platí

$\tilde{y} \leq ty_o$ . Necht'  $\Lambda \geq 0$  je zavedený koeficient, pro který platí  $\Lambda \geq 0$ . Necht'  $\tau$  je zavedená proměnná, která je minimalizována v následujícím modelu a  $\tau^*$  je její optimální hodnota.

$$\begin{aligned} \tau^* = \min \tau &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{x}_i}{x_{io}} \\ \text{za podmínek} \quad 1 &= \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\tilde{y}_r}{y_{ro}}, \\ \sum_{j=1, \neq 0}^n \Lambda_j x_j &\leq \tilde{x}, \\ \sum_{j=1, \neq 0}^n \Lambda_j y_j &\geq \tilde{y}, \\ \tilde{x} &\geq tx_o \text{ a } \tilde{y} \leq ty_o, \\ \Lambda &\geq 0, \tilde{y} \geq 0, t > 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Necht' existuje optimální řešení modelu (2.10),  $(\tau^*, \tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \Lambda^*, t^*)$ , potom existuje vztah optimálního řešení (2.10) s optimálním řešením (2.7) ve tvaru:

$$\delta^* = \tau^*, \lambda^* = \Lambda^* / t^*, \bar{x} = \tilde{x}^* / t^*, \bar{y}^* = \tilde{y}^* / t^* \tag{2.11}$$

### 2.2.3 Model super-efektivnosti SBM orientovaný na vstupy a orientovaný na výstupy

Pokud definujeme model super-efektivnosti SBM orientovaný na vstupy, omezujeme váženou vzdálenost pouze na oblast vstupů a předpokládáme neměnné množství výstupů.

$$\delta^* = \min \delta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_i}{x_{io}}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j x_j &\leq \bar{x}, \\ \sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j y_j &\geq \bar{y}, \\ \bar{x} &\geq x_o \text{ a } \bar{y} = y_o, \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Model (2.12) nazýváme **modelem super-efektivnosti SBM orientovaným na vstupy**, který bývá někdy označován jako **model super-SBM(I)**.

Pokud vstup  $x_o$  klesne na  $x_o - \Delta x$  ( $\geq 0, \Delta x \geq 0$ ), potom optimální řešení pro hodnotu účelové funkce  $\delta_I^*(\Delta x)$  v závislosti na této změně platí:

$$\delta_I^*(\Delta x) \geq \delta_I^*. \quad (2.13)$$

Dále můžeme tvrdit, že rovnost nastává tehdy a jen tehdy, pokud  $\Delta x_i = 0$  nebo  $\bar{x}_i^* = x_{io} - \Delta x_i$  pro všechna  $i(1, 2, \dots, m)$ , kde  $\bar{x}_i^*$  je optimální řešení (2.12).

*Důkaz (Tone; 2001):* Program lineárního programování vysvětlující situaci tvrzení 2.8 zapíšeme jako:

za podmínek

$$\begin{aligned} \delta_I^*(\Delta x) = \min \delta &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_i}{(x_{io} - \Delta x_i)} \\ \sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j x_j &\leq \bar{x}, \\ \sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j y_j &\geq \bar{y}, \\ \bar{x} &\geq x_o - \Delta x_i \text{ a } \bar{y} = y_o, \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$



Pro jakékoliv optimální řešení  $(\bar{x}^*, \bar{y}^* = y_o)$  (2.14) můžeme říci, že pro  $(\bar{x}^* + \Delta x, \bar{y}^* = y_o)$  existuje řešení v (2.12). A tedy platí:

$$\delta_I^* \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_i^* + \Delta x_i}{x_{io}} \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_i^*}{(x_{io} - \Delta x_i)} = \delta_I^*(\Delta x),$$

pokud je splněno, že

$$\frac{\bar{x}_i^*}{x_{io} - \Delta x_i} - \frac{\bar{x}_i^* + \Delta x_i}{x_{io}} = \frac{\Delta x_i (\bar{x}_i^* - x_{io} + \Delta x_i)}{x_{io} (x_{io} - \Delta x_i)} \geq 0$$

Rovnost nastává pouze tehdy, pokud  $\Delta x_i = 0$  nebo  $\bar{x}_i^* = x_{io} - \Delta x_i$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Podobně jako **model super-efektivnosti SBM orientovaný na vstupy**, můžeme zapsat model super-efektivnosti SBM orientovaný na výstupy, který je někdy označován jako **model super-SBM(O)** (viz 2.15).

$$\delta_O^* = \min \delta = \frac{1}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \bar{y}_r / y_{ro}}$$

za podmínek  $\sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j x_j \leq \bar{x},$  (2.15)

$$\sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j y_j \geq \bar{y},$$

$$\bar{x} = x_o \text{ a } 0 \leq \bar{y} \leq y_o,$$

$$\lambda \geq 0.$$

Jelikož se oba modely chovají ve stejných oblastech řešení modelu super-SBM, můžeme říci, že platí:

$$\delta_I^* \geq \delta^* \quad \text{a} \quad \delta_O^* \geq \delta^*.$$

### 2.2.4 Porovnání modelu super-SBM a modelu Andersena-Petersena

Nejprve si připomeňme model super-efektivnosti CCR orientovaný na vstupy z tabulky 2.1 neboli model Andersena-Petersena (2.16).

$$\begin{aligned}
 & \theta^{**} = \min \theta \\
 \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j \neq 0.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pro naše použití do modelu (2.16) zabudujeme možné přebytky a nedostatky.

$$\begin{aligned}
 & \theta^{***} = \min \theta \\
 \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad s_i^- \geq 0, \quad s_r^+ \geq 0 \quad j \neq 0, i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

kde proměnné  $s_i^-$  a  $s_r^+$  představují přebytky a nedostatky. Model (2.17) je též nazýván **modelem super-CCR**.

Řešení modelu (2.17), vyjádřené proměnnou  $\theta$ , bude stejně super-efektivní pro jakoukoliv DMU zapsanou jako  $(x_o - \alpha s_i^{*-} / \theta^{***}, y_o)$  na intervalu  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Dále se budeme zabývat vztahem mezi modely super-efektivnosti (2.17) a (2.12), tedy mezi modelem super-CCR a modelem super-SBM(I).

Nejprve si ale definujeme  $\alpha^*$  jako

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \min_i \left\{ \frac{(\theta^* - 1)x_{io}}{s_i^*} \mid s_i^* > 0 \right\} \\ &= 0 \text{ pokud } s_i^* = 0.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Potom  $(\tilde{x} = \theta^* x_o - \alpha^* s_i^*, \tilde{y} = y_o, \tilde{\lambda} = \lambda^*)$  je řešením modelu super-SBM(I).

Na základě (2.18) můžeme tvrdit, že  $\tilde{x} \geq x_o$  a tedy  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  splňuje omezující podmínky modelu super-SBM(I).

Necht' optimálním řešením modelu super-CCR je  $(\theta^*, \lambda^*, s_i^*, s_r^{+*})$  a optimální hodnotou účelové funkce modelu super-SBM(I) je  $\delta_I^*$  a dále uvažujeme  $\alpha^*$  definované dle (2.18). Potom můžeme tvrdit, že

$$\delta_I^* \leq \theta^{***} - \frac{\alpha^*}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^*}{x_{io}}.\tag{2.19}$$

*Důkaz (Tone; 2001):* Hodnota účelové funkce ve vztahu k  $\tilde{x}$  v modelu super-SBM(I) je dána následujícím vztahem:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{x}_i}{x_{io}} = \theta^{***} - \frac{\alpha^*}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^*}{x_{io}}\tag{2.20}$$

a  $\delta_I^*$  není větší než tato hodnota, pokud  $\delta_I^*$  je optimální řešením modelu super-SBM(I).

## 2.3 Výskyt nulového vstupu a nulového výstupu v DEA

Uvažujme model super-SBM (2.7). Předpokládejme, že vstup  $x_o$  obsahuje nulovou složku, tedy např.  $x_{1o} = 0$ . Tato situace může nastat v následujících dvou případech:

1. DMU jednotka neobsahuje žádný vztah ke vstupu 1. Problém se tedy vyskytne v poměru  $\bar{x}_1/x_{1o}$  v účelové funkci.
2. DMU jednotka obsahuje funkci vztahující se k vstupu 1, ale naměřená hodnota je skutečně rovna nule. V tomto případě tuto hodnotu nahradíme malým kladným číslem  $\varepsilon$  a pokračujeme dále ve výpočtu.

Pokud uvažuje nulové hodnoty ve výstupech, můžeme případy 1 a 2 podobně aplikovat i na nulové hodnoty ve výstupech.

Obě výše zmiňované situace můžeme řešit pomocí modelu super-efektivnosti VRS na základě poměru vstupů a výstupů (Tone, 2001). Nejprve ale definujme axiomy:

- A1 Pro každý vstup  $i$  ( $= 1, 2, \dots, m$ ) alespoň dvě DMU jednotky obsahují kladné hodnoty.
- A2 Pro každý výstup  $r$  ( $= 1, 2, \dots, s$ ) alespoň dvě DMU jednotky obsahují kladné hodnoty.
- A3 Pro každou DMU jednotku platí, že maximální hodnota vstupů a výstupů je kladná.

Z kapitoly 2, tabulky 2.1 dále víme, že k modelu CCR přidáním omezujících podmínky ve tvaru  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  zajistíme variabilitu výnosů z rozsahu.

Přepíšme tedy model (2.7) na:

$$\min \delta = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i / x_{io}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \bar{y}_r / y_{ro}} = \delta^*$$

za podmínek  $\sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j x_j \leq \bar{x},$  (2.21)

$$\sum_{j=1, \neq 0}^n \lambda_j y_j \geq \bar{y},$$

$$\bar{x} \geq x_o \text{ a } \bar{y} \leq y_o,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\bar{y} \geq 0, \lambda \geq 0.$$

S nulovými daty zacházíme podobně jako s daty v případě konstantních výnosů z rozsahu. Přepokládejme, že  $x_o > 0$  a  $y_o > 0$ . Dokažme, že model (2.21) je řešitelný a má konečné řešení. Na základě (A2) víme, že v každém výstupu  $r$  je alespoň jedna kladná složka v množině  $\{y_{rj}\}$ , ( $j=1, \dots, n: j \neq 0$ ). A na základě jistého kladného koeficientu k  $\lambda_j$  kladného výstupu najdeme takové  $\bar{\lambda}$ , pro které platí:

$$\sum_{j=1, \neq 0}^n \bar{\lambda}_j y_{rj} > 0 \quad (\forall r), \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j = 1$$
 (2.22)

a dále platí:

$$\tilde{x}_i = \max \left\{ x_{io}, \sum_{j=1, \neq 0}^n \bar{\lambda}_j x_{ij} \right\} \quad (i = 1, \dots, m)$$
 (2.23)

$$\tilde{y}_r = \min \left\{ y_{ro}, \sum_{j=1, \neq 0}^n \bar{\lambda}_j y_{rj} \right\} \quad (r = 1, \dots, s)$$
 (2.24)

A tedy můžeme říci, že model super-efektivnosti VRS (2.21) má řešení na množině  $(\bar{x} = \tilde{x}, \bar{y} = \tilde{y}, \lambda = \bar{\lambda})$  a je splněna podmínka  $\tilde{x}_i > 0$  a  $\tilde{y}_r$ . Tedy model super-efektivnosti VRS (2.21) má vždy řešení s konečnou optimální hodnotou.

## 2.4 Aplikace modelů super-efektivnosti

Podobně jako v podkapitole 1.4. aplikujeme na stejná data všechny základní modely super-efektivnosti. Byly použity shodné vstupy a výstupy a byly srovnávány stejné společnosti.

vstupy: aktiva celkem, vlastní kapitál, průměrný počet zaměstnanců

výstupy: tržby celkem, provozní zisk

porovnávané společnosti: Daimler, Delphi, Fiat, Ford, General Motors, Harley Davidson, Honda, Hyundai, Isuzu, Lear, Mazda, Mitsubishi, Nissan, Porsche, PSA, Renault, Shanghai Auto, Subaru, Škoda Auto, Toyota, TRW, Valeo, Visteon, Volvo, VW, Yamaha.

Modely super-efektivnosti mají spíše více nevýhod ve srovnání s modely obalu. Modely super-efektivnosti mají tendenci nestabilního řešení. Mnohokrát vykazují super-efektivnost u většiny jednotek. Interpretace výsledků není zcela jednoznačná. Modely jsou doporučovány používat pouze za předpokladu, že sledujeme dostatečné množství jednotek. Zmíněná omezená řešitelnost je další nevýhodou.

Tab. 2.3 – Aplikace modelů super-efektivnosti (dále jen „MSE“)

## A) (Super-)Efektivní společnosti

| DMU <sub>i</sub> | MSE<br>I-<br>orient.<br>CRS | MSE<br>I-<br>orient.<br>VRS | MSE<br>I-<br>orient.<br>NDRS | MSE<br>I-<br>orient.<br>NIRS | MSE<br>O-<br>orient.<br>CRS | MSE<br>O-<br>orient.<br>VRS | MSE<br>O-<br>orient.<br>NDRS | MSE<br>O-<br>orient.<br>NIRS |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Subaru           | 1,0630                      | 1,2805                      | 1,2805                       | 1,0630                       | 0,9407                      | 0,6976                      | 0,6976                       | 0,9407                       |
| Ford             | 1,0676                      | 1,1843                      | 1,1843                       | 1,0676                       | 0,9367                      | xxx                         | xxx                          | 0,9367                       |
| Yamaha           | 1,0804                      | 1,1270                      | 1,0804                       | 1,1270                       | 0,9256                      | 0,9022                      | 0,9256                       | 0,9022                       |
| Hyundai          | 1,1092                      | 1,3798                      | 1,1092                       | 1,3798                       | 0,9016                      | 0,7391                      | 0,9016                       | 0,7391                       |
| Skoda Auto       | 1,1889                      | 1,3582                      | 1,3582                       | 1,1889                       | 0,8411                      | xxx                         | xxx                          | 0,8411                       |
| Lear             | 1,2051                      | 1,2445                      | 1,2051                       | 1,2445                       | 0,8298                      | 0,8179                      | 0,8298                       | 0,8179                       |
| Mazda            | 1,2469                      | 1,4608                      | 1,2469                       | 1,4608                       | 0,8020                      | 0,7248                      | 0,8020                       | 0,7248                       |
| Porsche          | 1,3173                      | 2,1704                      | 1,3173                       | 2,1704                       | 0,7591                      | 0,7259                      | 0,7591                       | 0,7259                       |
| Visteon          | 1,3804                      | 9,2263                      | 9,2263                       | 1,3804                       | 0,7244                      | xxx                         | xxx                          | 0,7244                       |
| GM               | 1,9346                      | xxx                         | 1,9346                       | xxx                          | 0,5169                      | xxx                         | xxx                          | 0,5169                       |
| Harley D.        | 2,2593                      | 2,2756                      | 2,2593                       | 2,2756                       | 0,4426                      | xxx                         | xxx                          | 0,4426                       |

„xxx“ = neřešitelné

## B) Ostatní společnosti

| DMU <sub>i</sub> | MSE<br>I-<br>orient.<br>CRS | MSE<br>I-<br>orient.<br>VRS | MSE<br>I-<br>orient.<br>NDRS | MSE<br>I-<br>orient.<br>NIRS | MSE<br>O-<br>orient.<br>CRS | MSE<br>O-<br>orient.<br>VRS | MSE<br>O-<br>orient.<br>NDRS | MSE<br>O-<br>orient.<br>NIRS |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Renault          | 0,4627                      | 0,5256                      | 0,4627                       | 0,5256                       | 2,1613                      | 1,7575                      | 2,1613                       | 1,7575                       |
| Shanghai A.      | 0,4972                      | 0,5033                      | 0,5033                       | 0,4972                       | 2,0112                      | 1,9233                      | 2,0112                       | 1,9233                       |
| PSA              | 0,5025                      | 0,7203                      | 0,5025                       | 0,7203                       | 1,9899                      | 1,3071                      | 1,9899                       | 1,3071                       |
| VW               | 0,5220                      | 0,7147                      | 0,5220                       | 0,7147                       | 1,9155                      | 1,2916                      | 1,9155                       | 1,2916                       |
| Fiat             | 0,5868                      | 0,8537                      | 0,5868                       | 0,8537                       | 1,7041                      | 1,1283                      | 1,7041                       | 1,1283                       |
| Mitsubishi       | 0,6154                      | 0,6277                      | 0,6154                       | 0,6277                       | 1,6248                      | 1,5843                      | 1,6248                       | 1,5843                       |
| Toyota           | 0,6183                      | xxx                         | 0,6183                       | xxx                          | 1,6175                      | 0,4566                      | 1,6175                       | 0,4566                       |
| Nissan           | 0,6293                      | 1,0495                      | 0,6293                       | 1,0495                       | 1,5892                      | 0,9606                      | 1,5892                       | 0,9606                       |
| Volvo            | 0,6310                      | 0,9543                      | 0,6310                       | 0,9543                       | 1,5848                      | 1,0336                      | 1,5848                       | 1,0336                       |
| Daimler          | 0,6770                      | 0,8844                      | 0,6770                       | 0,8844                       | 1,4770                      | 1,0001                      | 1,4770                       | 1,0001                       |
| TRW              | 0,6977                      | 0,7079                      | 0,7079                       | 0,6977                       | 1,4334                      | 1,4296                      | 1,4334                       | 1,4296                       |
| Valeo            | 0,7029                      | 0,7202                      | 0,7202                       | 0,7029                       | 1,4227                      | 1,4182                      | 1,4182                       | 1,4227                       |
| Honda            | 0,8606                      | 1,2495                      | 0,8606                       | 1,2495                       | 1,1620                      | 0,8280                      | 1,1620                       | 0,8280                       |
| Delphi           | 0,8669                      | 1,0174                      | 0,8669                       | 1,0174                       | 1,1535                      | 0,9867                      | 1,1535                       | 0,9867                       |
| Isuzu            | 0,8827                      | 1,1357                      | 1,1357                       | 0,8827                       | 1,1329                      | 0,6921                      | 0,6921                       | 1,1329                       |

„xxx“ = neřešitelné;

V našem případě byla získána naměřená efektivnost a problém neřešitelnosti se vyskytl pouze u několika sledovaných společností. Super-efektivnost byla naměřena u 11 z 26 sledovaných jednotek ve všech modelech.

super-efektivní společnosti: Subaru, Ford, Yamaha, Hyundai, Škoda Auto, Lear, Mazda, Porsche, Visteon, GM, Harley Davidson.

Nejnižší super-efektivnost byla naměřená u společností Subaru, Ford a Yamaha a nejvyšší super-efektivnost u společnosti Harley Davidson. Mezi neefektivní společnosti se zařadily společnosti PSA, VW či Fiat, z amerických např. Daimler (v té době ještě DaimlerChrysler). Ford byl překvapivě také označen za super-efektivní jednotku. Z nedávného vývoje je ale známo, že skupina Ford je hodnocena jako nejlepší společnost z americké velké trojky.

Výnosy z rozsahu: U modelů super-efektivnosti se dají velmi snadno monitorovat výnosy z rozsahu, pokud nenastane problém neřešitelnosti. U většina společností jsme nenarazili na problém neřešitelnosti. Pokud jsme narazili na neřešitelnost modelu VRS orientovaného na vstupy i výstupy, potom můžeme tvrdit, že výnosy z rozsahu této jednotky by mohly být spíše konstantní neboť nevykazují ani rostoucí, ani klesající výnosy z rozsahu. Pokud se ale neřešitelnost modelu VRS projevila pouze u modelu orientovaného na vstupy či pouze u modelu orientovaného na výstupy, potom nemůžeme s jistotou tvrdit, jaké výnosy z rozsahu sledovaná jednotka vykazuje. Nejjednodušší způsobem by bylo pozměnit vybrané jednotky (např. pouze společnosti vyrábějící motorová vozidla), jejich výstupy či vstupy, popř. provést analýzu citlivosti. Pokud je u společnosti naměřena stejná super-efektivnost u modelu VRS a NIRS, potom společnost vykazuje nerostoucí výnosy z rozsahu (např. Mazda, Porsche). Pokud je u společnosti naměřena stejná super-efektivnost u modelu VRS a NDRS, potom společnost vykazuje neklesající výnosy z rozsahu (např. Škoda Auto, Ford). Pokud jsou naměřené hodnoty shodné nebo jsou téměř stejné, společnosti vykazuje téměř konstantní výnosy z rozsahu (Harley Davidson, Lear), to ale nemůžeme tvrdit, pokud hodnoty nejsou úplně shodné. Konstantní výnosy z rozsahu jsou pro společnost ideálním stavem v automobilovém průmyslu, kde je vysoká konkurence.



V modelech super-efektivnosti se běžně stává, že sledovaná jednotka není efektivní za předpokladu konstantních výnosů z rozsahu, ale je efektivní pokud předpokládáme neklesající výnosy z rozsahu. V tomto případě firma většinou vykazuje klesající výnosy z rozsahu, někdy se však může jednat o jednotku nestabilní, např. o firmu v restrukturalizaci.

### **Rozbor naměřených hodnot míry super-efektivnosti u sledované společnosti VW v modelech super-efektivnosti**

Podobně jako v podkapitole 1.4.1 je uveden rozbor skupiny VW i zde je tato skupina blíže prezentována.

Tab. 2.4 – Přehled naměřených hodnot sledované společnosti VW (dle modelů S-E)

| Tab. 2.1: Přeměna hodnoty efektivnosti sledované společnosti 17. (dle modelu B.2) |                         |                          |                  |                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------|------------------|--------------------------------------------|
|                                                                                   | míra super-efektivnosti | $\sum_{j=1}^n \lambda_j$ | výnosy z rozsahu | referenční množina                         |
| modely orientované na vstupy                                                      |                         |                          |                  |                                            |
| CRS                                                                               | 0,52205                 | 4,61617                  | klesající        | GM (0,121); Mazda (3,234); Subaru (1,261)  |
| VRS                                                                               | 0,71468                 |                          |                  | GM (0,463); Mazda (0,097); Honda (0,439)   |
| NDRS                                                                              | 0,52205                 |                          |                  | GM (0,121); Mazda (3,234); Subaru (1,261)  |
| NIRS                                                                              | 0,71468                 |                          |                  | GM (0,463); Mazda (0,097); Honda (0,439)   |
| modely orientované na výstupy                                                     |                         |                          |                  |                                            |
| CRS                                                                               | 1,91553                 | 8,84239                  | klesající        | GM (0,232); Mazda (6,196); Subaru (2,415)  |
| VRS                                                                               | 1,29157                 |                          |                  | GM (0,628); Nissan (0,268); Toyota (0,104) |
| NDRS                                                                              | 1,91553                 |                          |                  | GM (0,232); Mazda (6,196); Subaru (2,415)  |
| NIRS                                                                              | 1,29157                 |                          |                  | GM (0,628); Nissan (0,268); Toyota (0,104) |

Naměřené hodnoty super-efektivnosti jsou shodné s hodnotami získanými v modelech obalu (viz str. 29-30), jednotka vykazuje shodné výnosy z rozsahu i referenční množinu. Skupina VW se v obou typech modelů chová velmi stabilně.