

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY



Název diplomové práce:

**Modely vícekritériálního rozhodování
v analýze obalu dat**

Autor: **Martin Mec**

Katedra: **Katedra ekonometrie**

Obor: **Matematické metody v ekonomii**

Vedoucí práce: **prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.**

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Modely vícekritériálního rozhodování v analýze obalu dat“ zpracoval samostatně. Veškerou použitou literaturu a další podkladové materiály uvádím v seznamu použité literatury.

V Praze dne 10. ledna 2011

.....

Martin Mec

Poděkování:

Rád bych na tomto místě poděkoval prof. Ing. Josefu Jablonskému, CSc. za vedení mé diplomové práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily. Rovněž děkuji panu Ondřeji Smrčkovi, zástupci společnosti, která mi poskytla reálná data pro aplikační část této práce.

Abstrakt

Název práce: Modely vícekritériálního rozhodování v analýze obalu dat

Autor: Martin Mec

Katedra: Katedra ekonometrie

Vedoucí práce: prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.

Analýza obalu dat je nástrojem vícekritériálního hodnocení produkčních jednotek podle množiny minimalizačních kritérií (vstupů) a množiny maximalizačních kritérií (výstupů). V aplikacích této metody dochází k problémům v oblasti přiřazování vah vstupům a výstupům, kdy benevolentní formulace základních modelů umožňuje hodnocení jednotek na základě značně nerovnoměrně rozdělených váhových vektorů. Výstupem základních modelů analýzy obalu dat je dichotomické rozdělení množiny hodnocených jednotek na efektivní a neefektivní. Množina efektivních jednotek je často velmi rozsáhlá, což způsobuje potíže při nutnosti vybrat jednu nebo menší počet efektivních jednotek. Nezřídka se tyto jevy vyskytují současně. Implementace modelů vícekritériálního rozhodování do analýzy obalu dat byly provedeny za účelem omezení těchto v praxi nežádoucích jevů.

Klíčová slova: analýza obalu dat, DEA, vícekritériální rozhodování, AHP/DEA, MCDEA

Abstract

Title: Multi-Criteria Decision Making in Data Envelopment Analysis

Author: Martin Mec

Department: Department of Econometrics

Supervisor: prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.

Data Envelopment Analysis is a multi-criteria decision making tool employing set of minimizing criteria (inputs) and set of maximizing criteria (outputs) for evaluating decision making unit efficiency. This method is accompanied by problems in field of input and output weight assignment, whereas benevolent basic model formulation enables decision making unit evaluation to be based on far unevenly distributed weight vector. Furthermore, data envelopment analysis basic model produces dichotomized dividing in form of efficient and inefficient decision making unit sets. Extensive set of efficient units occurs frequently and this causes difficulties in choosing one or less number efficient units. These phenomena appear often simultaneously. An implementation of multi-criteria decision making models into data envelopment analysis is exercised in order to reduce these undesired effects in applications.

Keywords: Data Envelopment Analysis, DEA, multi-criteria decision making, AHP/DEA, MCDEA

Úvod	1
1. Analýza obalu dat	3
1.1 Efektivnost.....	3
1.2 Produkční jednotky	4
1.3 Principy měření efektivnosti.....	4
1.4 Výnosy z rozsahu v kontextu DEA.....	5
1.5 Principy DEA – příklad jednoho vstupu a jednoho výstupu	6
1.6 Formulace základních DEA modelů	7
1.7 Model křížové efektivnosti	13
1.8 Aspekty použití DEA v praxi.....	17
2. Vícekriteriální modely teorie rozhodování	18
2.1 Vícekriteriální diskrétní modely rozhodování	19
2.1.1 Preference rozhodovatele	20
2.1.2 Výčet některých metod diskrétního vícekriteriálního rozhodování	20
2.1.3 Analytic Hierarchy Process.....	21
2.1.4 Ilustrativní případ výpočtu Saatyho matice v AHP	24
2.2 Vícekriteriální spojité modely rozhodování	26
3. DEA a vícekriteriální rozhodování	28
3.1 Metoda AHP/DEA	28
3.1.1 Fáze 1 – párová srovnání prostřednictvím DEA	29
3.1.2 Fáze 2 – uspořádání jednotek: AHP	31
3.1.3 Ilustrace AHP/DEA na konkrétním případě	31

3.1.4	Praktické aspekty AHP/DEA	32
3.2	Vícekriteriální DEA model.....	33
3.2.1	Formulace vícekriteriálního DEA modelu	34
3.2.2	Praktické aspekty vícekriteriálního DEA modelu	37
4.	Aplikace metod AHP/DEA a MCDEA.....	39
4.1	Charakteristika použitých dat	39
4.2	Aplikace metody AHP/DEA.....	41
4.2.1	Fáze 1 – párová srovnání	42
4.2.2	Fáze 2 – AHP	43
4.2.3	Konzistence párových srovnání.....	44
4.2.4	Porovnání výsledků metod DEA a AHP/DEA.....	44
4.3	Aplikace vícekriteriálního DEA modelu	45
4.4	Souhrn praktických poznatků o metodách AHP/DEA a MCDEA	50
	Závěr	52
	Reference	54
	Přílohy.....	56

Úvod

Ekonomika, která popisuje využívání disponibilních zdrojů jednotlivými subjekty, se skládá z procesů, které jsou na sobě často závislé. Tyto vzájemné všesměrné interakce vedou k tomu, že se stírají rozdíly mezi příčinou a následkem a identifikace kauzality se jeví jako čím dál obtížnější. Příčiny a následky ekonomického jednání pak tvoří jakýsi uzavřený kruh, na který intenzivně působí široká škála faktorů. Tyto faktory ovlivňují další ekonomické procesy, jednotlivý vliv těchto faktorů je pak při snaze o kvalitní modelování reality nesnadno rozpoznatelný.

Ekonomické rozhodování je mnohdy vloženo do rukou osob, o kterých společnost naivně předpokládá, že mají jakousi zázračnou schopnost identifikovat ty zásadní vlivy, které jsou podstatné pro použití právě těch správných informací v procesu činění těch správných rozhodnutí. Při dodržování pravidel logiky pak tyto osoby mají dospět k nalezení správných odpovědí na položené otázky, či obecněji mají dospět k nalezení „pravdy“.

Je zřejmé, že takovéto chování společnosti je do značné míry idealistické, a ekonomická rozhodnutí mají ve většině případů velmi daleko k dosažení racionality jako ideálního stavu. Postupy reálných rozhodovatelů jsou ve skutečnosti založeny daleko více na obecných znalostech a zkušenostech než na dokonalém poznání příčinných vlivů.

Být úspěšný v dnešním světě však znamená nepředjímat zásadní rozhodnutí pouze na základě nahodilých jevů či snadno dostupných zdrojů informací. Protože dokonale a racionálně se rozhodující génus neexistuje a jeho schopnosti jsou pouze produktem lidské fantazie, je velmi užitečné zabývat se teorií rozhodování jako vědou, která formuluje principy ekonomického chování skutečných jednotlivců tak, aby tito dosahovali co možná nejlepších výsledků ve snaze docílení racionálního chování.

Modely vícekriteriálního rozhodování napomáhají řešení reálných rozhodovacích problémů, kdy se rozhodující subjekt snaží o racionální jednání, a to na základě rozsáhlejšího souboru faktorů. Modely analýzy obalu dat, přestože stojí jakoby stranou, jsou de facto nástrojem vícekriteriálního hodnocení diskrétní množiny variant. Přístupy k hodnocení ekonomických jednotek, které čerpají jak z teorie rozhodování, tak z analýzy obalu dat, jsou náplní této diplomové práce.

V první kapitole jsou popsány základní principy analýzy obalu dat, požadavky a předpoklady jejího použití i základní formulace modelů. Druhá kapitola zevrubně

charakterizuje teorii rozhodování jako proces hodnocení či výběru z množiny variant na základě množiny stanovených kritérií. Ve třetí kapitole jsou pak nastíněny dva syntetické modely založené na principech analýzy obalu dat i na specifických modelech vícekriteriálního rozhodování. Jedná se o model „Analytic Hierarchy Process / Data Envelopment Analysis“ a o model „Multicriteria Data Envelopment Analysis“. Čtvrtá kapitola pak obsahuje aplikaci obou výše zmíněných modelů na reálná data.

Cílem této práce je tedy nejprve metodou deskripce a kompilace podat obecný přehled poznatků jak analýzy obalu dat, tak teorie rozhodování. Na těchto stavebních kamenech pak lze představit modely, které čerpají z obou oblastí, a deduktivní metodou vystavět teze pro použití při aplikaci na reálný datový soubor.

Bylo vydáno nesčetně publikací zabývajících se analýzou obalu dat, a to jak v teoretické, tak i v aplikační rovině. Publikace pojednávající o propojení s modely vícekriteriálního rozhodování však lze počítat na desítky a práce, které by se pokusily o obecnější přehled v této problematice, vysloveně chybí. Toto je jedním z hlavních motivů zkoumání zde představeného tématu.

1. Analýza obalu dat

Měření výkonnosti produkčních jednotek je velmi častým požadavkem podnikové praxe. Odrazem tohoto požadavku na poli operačního výzkumu je vznik relativně mladé techniky, která přistupuje k této problematice prostřednictvím modelů analýzy obalu dat (Data Envelopment Analysis, DEA). Základním zacílením metod DEA je soubor produkčních jednotek (Decision Making Units, DMUs). To je soubor relativně *homogenních prvků*, charakterizovaný množinou spotřebovávaných *vstupů* a vytvářených *výstupů*. Produktem aplikace této metody je *efektivnost* jako informace přiřazená jednotlivým DMUs.

1.1 Efektivnost

DEA pracuje s pojmem efektivnost. Stejně tak efektivnost definuje mikroekonomická teorie. Ta považuje za efektivní situaci, kdy jednotka produkce (výstupu) je vytvořena s minimálními náklady (vstupy). Ekonomie obecněji rozšiřuje definici efektivnosti jako stav, kdy není možné při použití dané úrovně zdrojů zvýšit objem výstupu, aniž by bylo nutné snížit objem vstupu. Jedná se o přístup tzv. Pareto-efektivity (HOŘEJŠÍ, 2010). Naopak teorie operačního výzkumu rozumí pod pojmem efektivnost produkční jednotky poměr jejích výstupů ke vstupům. Zde se uvolňuje předpoklad mikroekonomické i Pareto racionality, tím pádem lze uvažovat i jednotky, které nejsou Pareto-efektivní. Tímto se vymezený prostor přibližuje reálné situaci, kde je nutné uvažovat jak jednotky efektivní, tak i jednotky, které efektivní nejsou (JABLONSKÝ – DLOUHÝ, 2004).

Efektivnost je tedy ve smyslu DEA relativní mírou, jejíž hodnota se pohybuje v intervalu $\langle 0;1 \rangle$ neboli 0 až 100%. Tuto míru nazýváme technickou efektivností. Za technicky efektivní se považuje taková jednotka, která dosáhla hodnoty 1, neboli 100%. Všechny jednotky s hodnotou ostře menší než 1 se označují jako neefektivní.

Na rozdíl od relativní efektivnosti, efektivnost ve smyslu objektivním lze uvažovat jako teoretický koncept. Pokud je produkční funkce a priori determinovaná zřejmými funkčními vztahy, pak je možné hovořit o absolutní efektivnosti. Pokud by bylo možné odhadnout „ideální produkční funkci“, je možné v souvislosti s ní hodnotit efektivnost absolutní. Prvek odhadu však vnáší do tohoto konceptu opět jistou míru subjektivity.

1.2 Produkční jednotky

Analýza obalu dat hodnotí množinu produkčních jednotek. Jako příklady produkčních jednotek bývají často uváděny banky, školy, nemocnice, ale mohou jimi být stejně tak motory, automobily atd. (COOPER et al., 1999). Výstupem DEA analýzy je informace o tom, zda je jednotka z množiny hodnocených efektivní, či nikoliv. Primárně jde tedy o dichotomické rozdělení množiny na jednotky označené jako efektivní a na ostatní, které jsou označeny jako neefektivní.

Konstrukce modelů DEA požaduje jako vstupní hodnoty pro výpočet vektor vstupů a vektor výstupů pro každou jednotlivou DMU. S tím souvisí požadavek na homogenitu DMUs. Homogenita vymezuje požadavek shodných vstupů a výstupů pro každou hodnocenou jednotku. Jedná se tedy de facto o vnější podobnost srovnávaných jednotek ve smyslu spotřebovávaných vstupů a vytvářených výstupů, a také o vnitřní souvislost srovnávaných jednotek ve smyslu obdobné transformace vstupů na výstupy probíhající jakoby uvnitř DMU.

Vstupy a výstupy jsou vlastnostmi produkčních jednotek. Na základě mikroekonomické teorie považujeme vstupy za minimalizační a naopak výstupy za maximalizační. Lze uvažovat i maximalizační vstupy a minimalizační výstupy (ZHU, 2003). Tyto nestnadradní situace se v reálné situaci mohou vyskytnout, je pak ale nutné se s nimi patřičnými přístupy vyrovnat. Jedná se například o žádoucí vstupy typu *počet handicapovaných zaměstnanců* nebo nežádoucí výstupy typu *nebezpečný odpad*.

1.3 Principy měření efektivnosti

Efektivnost lze za předpokladu jednoho vstupu a jednoho výstupu vyjádřit jednoduchým poměrovým ukazatelem

$$\frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}. \quad (1.1)$$

Problémem poměrového ukazatele (1.1) je jeho předpoklad, tedy připuštění jen jednoho vstupu a jednoho výstupu. V reálných situacích při hodnocení efektivnosti je nutno brát v úvahu jak větší množství vstupů, tak i větší množství výstupů. Zde lze použít přístup v podobě podílu váženého součtu výstupů k váženému součtu vstupů.

JABLONSKÝ – DLOUHÝ (2004) uvádí následující definici efektivnosti hodnocené jednotky: Mějme soubor n homogenních jednotek U . Pro každou jednotku U uvažujeme

r výstupů a m vstupů, matici vstupů $\mathbf{X} = \{x_{jk}, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n\}$ a matici výstupů $\mathbf{Y} = \{y_{ik}, i = 1, 2, \dots, r, k = 1, 2, \dots, n\}$. Pak míru efektivnosti hodnocené jednotky q E_q můžeme obecně vyjádřit jako

$$E_q = \frac{\sum_{i=1}^r u_i y_{iq}}{\sum_{j=1}^m v_j x_{jq}}, \quad (1.2)$$

kde $v_j, j = 1, 2, \dots, m$, jsou váhy přiřazené j -tému vstupu a $u_i, i = 1, 2, \dots, r$, jsou váhy přiřazené i -tému výstupu. Z této definice vyplývá problém v podobě otázky, jak určit či přiřadit váhy vstupům a výstupům. Pokud by bylo přijatelné přiřadit subjektivní preference jednotlivým prvkům v množině vstupů a výstupů, pak by bylo možné hodnotu subjektivní míry výkonnosti snadno získat. Jak je ale patrné, subjektivní vyjádření preferencí je použitelné pouze v omezených případech. Princip DEA se snaží o přiřazení „objektivních vah“ všem prvkům v množině vstupů a výstupů, jak bude ukázáno dále.

1.4 Výnosy z rozsahu v kontextu DEA

Modely analýzy obalu dat předpokládají apriorní určení charakteru výnosů z rozsahu jako vlastnosti produkční funkce neboli přeměny vstupů na výstupy. Modely DEA specifikujeme podle toho, zda předpokládáme vlastnost konstantních výnosů z rozsahu (Constant Returns to Scale – CRS) nebo variabilních výnosů z rozsahu (Variable Returns to Scale – VRS).

CRS vlastnost je definována takto: Změní-li se všechny vstupy m -krát, pak se změní i všechny výstupy m -krát. Z toho lze vyvodit následující tvrzení: Je-li jednotka $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ efektivní, pak také jednotka, která je její lineární kombinací $(m\mathbf{x}, m\mathbf{y})$, je efektivní ($m > 0$).

VRS vlastnost produkční funkce může mít různý charakter - klesající výnosy z rozsahu, nerostoucí výnosy z rozsahu, neklesající výnosy z rozsahu či rostoucí výnosy z rozsahu.

DEA model pak na základě specifikace charakteru výnosů z rozsahu určuje prostřednictvím všech realizovatelných kombinací vstupů a výstupů množinu produkčních možností (Production Possibility Set, PPS) (HOŘEJŠÍ, 2010). Množina přípustných možností je omezena tzv. efektivní hranicí. Efektivní produkční jednotky se nacházejí právě na efektivní hranici.

1.5 Principy DEA – příklad jednoho vstupu a jednoho výstupu

Pro ilustraci metody DEA je zde uveden modelový případ jednoho vstupu a jednoho výstupu. V něm jsou uvažovány obchodní pobočky s jedním vstupem x počet pracovníků a jedním výstupem y tržby v tisících. Hodnoty vstupů a výstupů udává tabulka 1.1.

Jednotka	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9
Počet pracovníků (x)	8	7	14	6	4	10	13	9	11
Tržby (y)	5	2	12	8	4	9	6	11	3
y / x	0,63	0,29	0,86	1,33	1,00	0,90	0,46	1,22	0,27

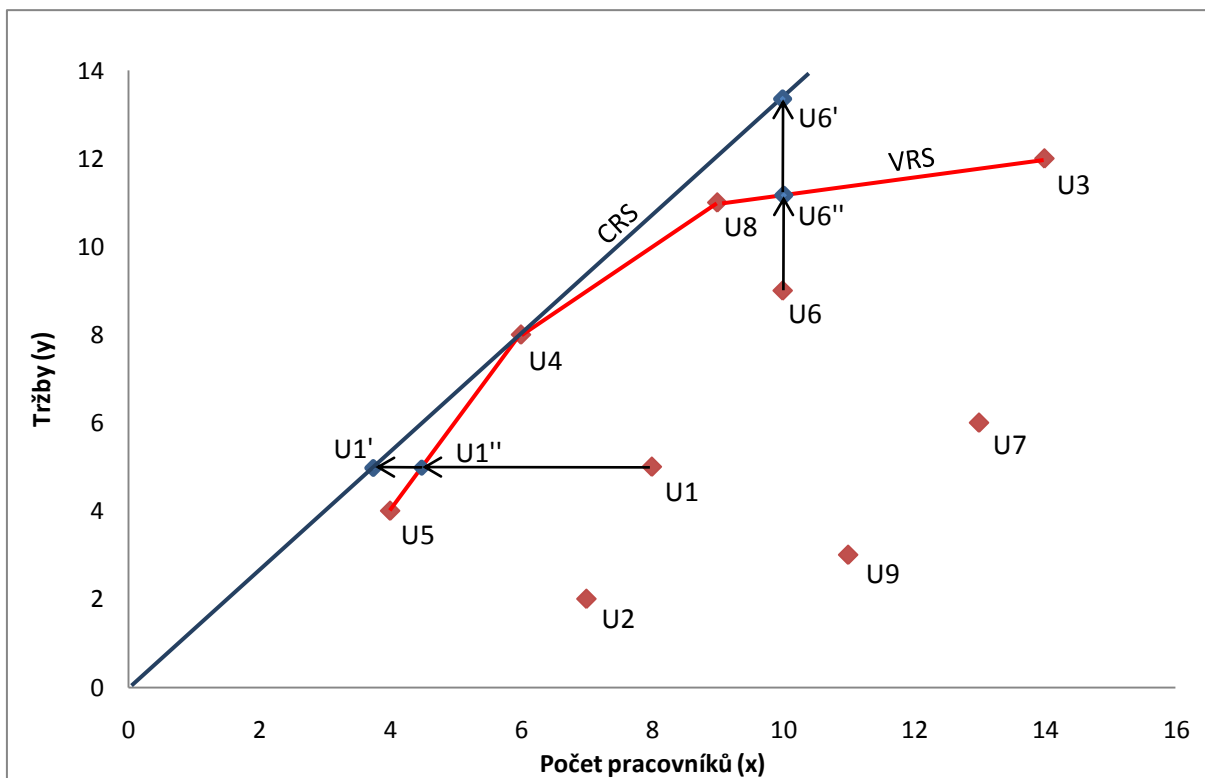
Tab. 1.1: Vstupní data pro příklad jednoho vstupu a jednoho výstupu

Efektivní hranice pro tento případ je tvořena jednotkou U4 v případě předpokladu CRS (efektivní hranicí je přímka určená počátkem a efektivní jednotkou U4) a jednotkami U5 – U4 – U8 – U3 v případě předpokladu VRS (efektivní hranicí je lineární spojnice efektivních jednotek) jak je znázorněno na obrázku 1.1. Efektivní hranice vytváří obal dat. V případě CRS je obal dat kónický, v případě VRS se jedná o obal konvexní (JABLONSKÝ, 2007a).

Předpoklad VRS je pro množinu hodnocených jednotek více striktní – v ilustrativním případě je efektivní pouze jedna jednotka. Naopak předpoklad CRS není pro hodnocené jednotky ve smyslu jejich efektivnosti tolik omezující, počet efektivních jednotek je 4.

Neefektivní jednotkou v modelu CRS je například jednotka U1 s úrovní vstupu $x = 9$ a úrovní výstupu $y = 5$. Aby se tato jednotka stala v CRS efektivní, musela by snížit vstup na úroveň $x = 3,75$ při zachování úrovně výstupu $y = 5$ (U1'). V modelu VRS by se U1 stala efektivní, kdyby při zachování úrovně výstupu $y = 5$ snížila vstup na $x = 4,25$ (U1'').

Modely, které zjišťují neefektivnost jednotek minimalizací jejich vstupů, se nazývají modely *orientované na vstupy*. Takové jednotky mohou dosáhnout efektivní hranice redukcí svých vstupů.



Obr. 1.1: *Množina produkčních možností*

Neefektivní jednotkou v modelu CRS je také jednotka U6 s úrovní vstupu $x = 10$ a úrovní výstupu $y = 9$. Aby se tato jednotka stala v CRS efektivní, musela by při zachování úrovně vstupu $x = 10$ zvýšit výstup na $y = 13,33$ (U6'). V modelu VRS by se U6 stala efektivní, kdyby při zachování úrovně vstupu $x = 10$ zvýšila svůj výstup na $y = 11,2$ (U6'').

Modely, které zjišťují neefektivnost jednotek maximalizací jejich výstupů, se nazývají modely *orientované na výstupy*. Takové jednotky mohou dosáhnout efektivní hranice expanzí svých výstupů.

Modely, které kombinují při měření neefektivnosti oba výše uvedené přístupy, tzn. současně snižují vstupy a zvyšují výstupy jednotek, se označují jako *aditivní* nebo *odchylkové modely*. Při aditivním přístupu může neefektivní jednotka dosáhnout efektivní hranice současnou redukcí vstupů a expanzí výstupů (JABLONSKÝ – DLOUHÝ, 2004).

1.6 Formulace základních DEA modelů

Princip DEA modelů lze vyjádřit následnou formulací: Pro každou hodnocenou jednotku DEA maximalizuje její efektivnost, kterou se rozumí podíl vážených výstupů a vážených vstupů, za předpokladu, že míry efektivnosti všech ostatních jednotek jsou menší nebo rovny jedné. DEA tedy počítá pro každou hodnocenou jednotku jedinečné váhy vstupů

a výstupů tak, aby to bylo v každém jednotlivém případě co nejpříznivější pro danou hodnocenou jednotku ve smyslu maximalizace její efektivity. Výše uvedené lze zformulovat do úlohy lineárního lomeného programování, kde jak v účelové funkci, tak i v omezení existují podíly proměnných. Proměnnými jsou nikoliv vstupy x a výstupy y , ale jim příslušející váhy u a v .

$$\text{Maximalizovat} \quad z = \frac{\sum_{i=1}^r u_i y_{iq}}{\sum_{j=1}^m v_j x_{jq}}, \quad (1.3)$$

$$\text{za podmínek} \quad \frac{\sum_{i=1}^r u_i y_{ik}}{\sum_{j=1}^m v_j x_{jk}} \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Infinitezimální konstanta ε v modelu (1.3) slouží jako dolní mez pro váhy a zaručuje, že všechny vstupy i všechny výstupy budou alespoň minimální měrou v modelu zastoupeny. Pro výpočetní účely se hodnota ε udává přibližně 10^{-8} .

Takovouto úlohu lze snadno převést na standardní model lineárního programování. To lze provést pomocí Charnes-Cooperovy transformace. Výsledný model je primárním modelem CCR orientovaným na vstupy (1.4).

Původnímu DEA modelu dala vznik trojice autorů Charnes, Cooper a Rhodes na konci 70. let 20. století. Model uvažuje konstantní výnosy z rozsahu (CRS) a je formulován jak ve variantě orientace na vstupy, tak ve variantě orientace na výstupy. Označuje se zkratkou CCR podle uvedených autorů.

Autoři Banker, Charnes a Cooper modifikovali klasický model CCR. Uvažovali totiž variabilní výnosy z rozsahu (VRS) a formulovali taktéž jak model orientovaný na vstupy, tak i model orientovaný na výstupy. Tento model se označuje zkratkou BCC.

K modelům CCR i BCC lze formulovat i duálně sdružený model, který je z výpočetního hlediska méně náročný a také implicitně zahrnuje podstatné informace pro postoptimalizační analýzu zkoumaných jednotek (THANASSOULIS, 2001).

Primární model CCR orientovaný na vstupy (CCR input – CCR-I):

maximalizovat
$$z = \sum_{i=1}^r u_i y_{iq} , \quad (1.4)$$

za podmínek
$$\sum_{i=1}^r u_i y_{ik} \leq \sum_{j=1}^m v_j x_{jk} , \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^m v_j x_{jq} = 1 ,$$

$$u_i \geq \varepsilon , \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$v_j \geq \varepsilon , \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

V modelu (1.4) je q index hodnocené jednotky. Je-li hodnota účelové funkce rovna jedné, pak lze označit jednotku q za efektivní. Pokud bychom místo podmínek pro váhy u a v uvažovali pouze podmínky jejich nezápornosti (COOPER et al., 2000), platilo by pro efektivní jednotku toto: Jednotka q je efektivní, je-li hodnota účelové funkce rovna jedné a zároveň existuje alespoň jedna dvojice nenulových vah u a v . Je-li hodnocená jednotka q neefektivní, je hodnota účelové funkce ostře menší než jedna. V případě neefektivních jednotek lze hodnotu účelové funkce interpretovat jako nutnou míru redukce všech vstupů při zachování úrovně výstupů, aby se hodnocená jednotka stala efektivní.

Primární model CCR orientovaný na výstupy (CCR output – CCR-O):

Minimalizovat
$$g = \sum_{j=1}^m v_j x_{jq} , \quad (1.5)$$

za podmínek
$$\sum_{i=1}^r u_i y_{ik} \leq \sum_{j=1}^m v_j x_{jk} , \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^r u_i y_{iq} = 1 ,$$

$$u_i \geq \varepsilon , \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$v_j \geq \varepsilon , \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

V modelu (1.5) je q -tá hodnocená jednotka efektivní při hodnotě účelové funkce rovné jedna. Účelová funkce je minimalizační, proto neefektivní jednotky budou mít hodnotu

účelové funkce ostře větší než jedna. V případě neefektivních jednotek lze hodnotu účelové funkce interpretovat jako nutnou míru expanze všech výstupů při zachování úrovně všech vstupů, aby se hodnocená jednotka stala efektivní.

Duální model CCR orientovaný na vstupy (dual CCR-I):

$$\text{Minimalizovat} \quad z = \theta_q - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^r s_i^+ + \sum_{j=1}^m s_j^- \right), \quad (1.6)$$

$$\text{za podmínek} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{jk} + s_j^- = \theta_q x_{jq}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{ik} - s_i^+ = y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$s_i^+, s_j^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Duálně sdružený model je také nazývaný „Envelopment model“ (THANASSOULIS, 2001), a to proto, že měří efektivnost přímo ve vztahu k hranici produkčních možností, která jakoby obaluje množinu přípustných produkčních jednotek. Tento duálně sdružený model je výhodnější z hlediska výpočetního a také implicitně obsahuje užitečné informace pro interpretaci. Proměnná $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ je vektor vah, které jsou přiřazené každé hodnocené jednotce. Proměnná ϕ je mírou efektivnosti hodnocené jednotky q . Proměnné s_i^+ a s_j^- jsou přidatné proměnné, které převádějí nerovnice základní formulace modelu na rovnice.

Duální model se při hodnocení q -té jednotky pokouší najít virtuální jednotku se vstupy $\mathbf{X}\lambda$ a s výstupy $\mathbf{Y}\lambda$. Virtuální jednotka je de facto lineární kombinací všech vstupů a výstupů hodnocených jednotek. Vektorem λ se pokoušíme najít takovou lineární kombinaci hodnocených jednotek, aby virtuální jednotka neměla horší velikosti vstupů a výstupů než hodnocená jednotka. Pokud taková virtuální jednotka neexistuje, je hodnocená jednotka označena za efektivní. Pak je totiž hodnocená jednotka q totožná s virtuální jednotkou, ϕ_q je rovno jedné, a platí $\mathbf{X}\lambda = \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{Y}\lambda = \mathbf{y}_q$.

Hodnocená jednotka je tedy v duálním CCR-I modelu efektivní, pokud jsou splněny obě následující podmínky: optimální hodnota proměnné ϕ je rovna jedné, optimální hodnoty přidatných proměnných s_i^+ a s_j^- jsou rovny nule.

Duální model CCR orientovaný na výstupy (dual CCR-O):

$$\text{Maximalizovat} \quad g = \phi_q + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^r s_i^+ + \sum_{j=1}^m s_j^- \right), \quad (1.7)$$

$$\text{za podmínek} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{jk} + s_j^- = x_{jq}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{ik} - s_i^+ = \phi_q y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$s_i^+, s_j^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Duální CCR-O model (1.7) označí hodnocenou jednotku q jako efektivní pro ϕ_q rovno jedné a pro nulový součet přídatných proměnných. V případě, že hodnocená jednotka q není efektivní, je hodnota účelové funkce větší než jedna. Pak tato hodnota účelové funkce udává potřebnou míru expanze všech výstupů při zachování úrovně vstupů, aby se hodnocená jednotka stala efektivní.

V modelu navrženém v roce 1984 modifikovali autoři Banker, Charnes a Cooper základní model CCR. Pro produkční jednotky totiž předpokládají variabilní výnosy z rozsahu (VRS). Model je podle autorů označován jako BCC. Jednotky v klasickém CCR modelu vytvářejí kónický obal dat, v modelu BCC jde o obal dat konvexní. Podmínka konvexnosti je pro model do značné míry uvolňující, vede totiž k tomu, že počet jednotek označených jako efektivní je v porovnání s modelem CCR větší (viz. obrázek 1.1).

Formulace BCC modelů je pouze rozšířením modelů CCR o podmínku konvexnosti. V duálním modelu se jedná o podmínku jednotkového součtu vah proměnných λ_k , tj.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1.$$

V primárním modelu se jedná o rozšíření účelové funkce a omezení o proměnnou μ resp. ν . Níže jsou pro úplnost uvedeny čtyři varianty modelů BCC, analogické k předchozím formulacím modelů CCR:

Primární model BCC orientovaný na vstupy (BCC-I):

maximalizovat
$$z = \sum_{i=1}^r u_i y_{iq} + \mu , \quad (1.8)$$

za podmínek
$$\sum_{i=1}^r u_i y_{ik} + \mu \leq \sum_{j=1}^m v_j x_{jk} , \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^m v_j x_{jq} = 1 ,$$

$$u_i \geq \varepsilon , \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$v_j \geq \varepsilon , \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

μ - libovolné.

Primární model BCC orientovaný na výstupy (BCC-O):

minimalizovat
$$g = \sum_{j=1}^m v_j x_{jq} + \nu , \quad (1.9)$$

za podmínek
$$\sum_{i=1}^r u_i y_{ik} \leq \sum_{j=1}^m v_j x_{jk} + \nu , \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^r u_i x_{iq} = 1,$$

$$u_i \geq \varepsilon , \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$v_j \geq \varepsilon , \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

ν - libovolné.

Duální model BCC orientovaný na vstupy (dual BCC-I):

minimalizovat
$$z = \theta_q - \varepsilon \cdot \left(\sum_{i=1}^r s_i^+ + \sum_{j=1}^m s_j^- \right) , \quad (1.10)$$

za podmínek
$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{jk} + s_j^- = \theta_q x_{jq} , \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{ik} - s_i^+ = y_{iq} , \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$s_i^+, s_j^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1.$$

Duální model BCC orientovaný na výstupy (dual BCC-O):

$$\text{maximalizovat} \quad g = \phi_q + \varepsilon \cdot \left(\sum_{i=1}^r s_i^+ + \sum_{j=1}^m s_j^- \right), \quad (1.11)$$

$$\text{za podmínek} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{jk} + s_j^- = x_{jq}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{ik} - s_i^+ = \phi_q y_{iq} \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$s_i^+, s_j^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1.$$

1.7 Model křížové efektivity

Model křížové efektivity (Cross-Efficiency Model) vznikl jako specifická modifikace klasických DEA přístupů k hodnocení DMUs, přestože svým způsobem zobecňuje pojetí efektivity v rámci analýzy obalu dat. Vyrovnává se s nevýhodou standardních DEA modelů, a to s nedostatečnou schopností těchto modelů vzájemně porovnat jednotlivé DMUs mezi sebou. Přibližuje se tak značně nástrojům používaným v oblasti vícekritériálního hodnocení variant, jak bude popsáno v dalších kapitolách.

Model křížové efektivity definuje množinu hodnocených DMUs jako množinu variant porovnávaných podle množiny výstupů jako maximalizačních kritérií a podle množiny vstupů jako minimalizačních kritérií s tím, že pro všechny dvojice DMUs párově hodnotí jejich efektivity podle vah získaných specifickým způsobem. Základní vztah párového hodnocení efektivity,

$$E_{kq} = \frac{\sum_{i=1}^r u_{ik} y_{iq}}{\sum_{j=1}^m v_{jk} x_{jq}}, \quad (1.12)$$

určuje E_{kq} jako hodnotu efektivnosti jednotky q za použití optimálních vah CCR-I modelu hodnotícího jednotku k , kde y_{iq} jsou hodnoty výstupů DMU q , x_{jq} jsou hodnoty vstupů DMU q , v_{jk} jsou optimální váhy CCR přiřazené vstupům DMU k , u_{ik} jsou optimální váhy CCR přiřazené výstupům DMU k .

Efektivnost jednotky k ze základního modelu CCR je používána jako benchmark pro hodnocení ostatních jednotek. Formulace modelu pro výpočet efektivnosti jednotky k je následující:

$$\text{Maximalizovat} \quad E_{kk} = \frac{\sum_{i=1}^r u_{ik} y_{ik}}{\sum_{j=1}^m v_{jk} x_{jk}}, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \text{za podmínek} \quad & E_{kq} \leq 1, & k = 1, 2, \dots, n, \\ & u_{ik} \geq 0, & i = 1, 2, \dots, r, \\ & v_{jk} \geq 0, & j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Model (1.13) je možno snadno převést na úlohu lineárního programování, jak bylo uvedeno výše. Hodnotu E_{kk} označujeme jako prostou nebo technickou míru efektivnosti (DOYLE – GREEN, 1994) a je totožná s mírou efektivnosti jednotky k základního CCR-I modelu.

SEXTON et al. (1986) představili následující techniku vzájemného srovnání DMUs mezi sebou pomocí párového hodnocení efektivnosti. Definují matici křížových efektivností (Cross-Efficiency Matrix, CEM), která obsahuje informace o efektivnosti hodnocené DMU q (1.12) za použití optimálních vah z modelu (1.13) DMU k , která slouží jako benchmark.

Obecně je tedy $\mathbf{E} = (E_{kq})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $q = 1, 2, \dots, n$, matice párových efektivností, kde k je benchmark, neboli jednotka poskytující váhy pro hodnocení, a q je jednotka hodnocená ve vztahu k DMU k , neboli hodnocená prostřednictvím optimálních vah jednotky k z modelu prosté efektivnosti, n je počet srovnávaných DMUs. Na hlavní diagonále matice

CEM jsou hodnoty prostých efektivností základního CCR-I modelu (1.4). Obecná forma CEM je znázorněna v matici $\mathbf{E}$ (1.14).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & \dots & E_{2n} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & \dots & E_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & E_{n3} & \dots & E_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

DOYLE – GREEN (1994) formulovali model (1.16), který maximalizuje efektivnost hodnocené jednotky za podmínky použití optimálních vah jednotky označené jako benchmark. Model nepožaduje jako vstupní informaci hodnoty optimálních vah z modelu (1.14), vstupní hodnotou je naopak hodnota prosté efektivnosti E_{kk} . Je to důsledkem často se vyskytujícího jevu alternativního optimálního řešení v modelu (1.13), který zapříčiňuje nejednoznačnost optimálních vektorů vah potřebných pro výpočet modelu křížové efektivnosti (1.15). Hodnoty křížových efektivností E_{kq} pro všechny uspořádané dvojice (k, q) se potom vypočtou následujícím způsobem:

$$\text{Extremalizovat} \quad E_{kq} = \sum_{i=1}^r u_{ik} y_{iq}, \quad (1.15)$$

$$\text{za podmínek} \quad \sum_{j=1}^m v_{jk} x_{jq} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^r u_{ik} y_{ik} - E_{kk} \sum_{j=1}^m v_{jk} x_{jk} = 0,$$

$$E_{kq} \leq 1, \quad q = 1, 2, \dots, n, q \neq k,$$

$$u_{ik} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$v_{jk} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Model (1.15) extremalizuje efektivnost hodnocené jednotky q za podmínky, že efektivnost jednotky k je rovna E_{kk} . E_{kq} je tedy efektivnost hodnocené jednotky q za použití optimálních vah jednotky k . Vektor vstupů hodnocené jednotky q je x_{jq} , vektor výstupů hodnocené jednotky q je y_{iq} , optimální vektor vah vstupů jednotky k je v_{jk} , optimální vektor vah výstupů jednotky k je u_{ik} . E_{kk} je technická efektivnost jednotky k z modelu (1.13).

Jako extrém v modelu (1.15) zvolíme maximum, čímž formulujeme tzv. benevolentní vztahy mezi srovnávanými jednotkami, nebo minimum, které navozuje v modelu (1.15) tzv. agresivní hodnocení jednotek. Vysvětlení je následující. Zvolíme-li agresivní formulaci, je možné ji interpretovat takto: je třeba nejen dosáhnout dobrého hodnocení sebe sama ($\max E_{kk}$), ale je také nutné překonat ostatní ($\min E_{kq}$); interpretace benevolentní formulace je pak zřejmá – nezáleží jen na hodnocení sebe sama ($\max E_{kk}$), ale i na hodnocení ostatních ($\max E_{kq}$).

Pro sestavení matice CEM je tedy nutné postupovat ve dvou fázích: v první fázi je třeba z modelu (1.13) získat hodnoty technických efektivností souboru hodnocených DMUs, ve druhé fázi pak tyto hodnoty použít ve výpočtu hodnot křížových efektivností (1.15), neboli párových srovnání efektivností všech uspořádaných dvojic hodnocených jednotek. Jedná se o značné množství optimalizačních úloh rostoucí se čtvercem počtu hodnocených jednotek.

Střední hodnotu sloupcových vektorů s vyloučením diagonálního prvku v matici CEM, neboli průměrné vzájemné hodnocení jednotky q podle k různých vah, lze použít jako nástroj diskriminační analýzy hodnocených jednotek, který již umožní srovnávat hodnocené DMUs sestupně podle dosažené hodnoty. Touto diskriminační analýzou se vyloučí z efektivní množiny například tzv. Maverick DMUs (DOYLE – GREEN, 1994), které mají velmi dobré hodnoty jednoho nebo několika málo vstupů a jednoho nebo několika málo výstupů, avšak ostatní hodnoty vstupů a výstupů jsou relativně velmi špatné. Takovéto Maverick DMUs standardní DEA model označí za efektivní, protože přiřadí významné váhy pouze některým vstupům a výstupům (v extrémní situaci jednomu vstupu a jednomu výstupu), ostatním vahám však přiřadí minimální hodnoty. V matici CEM jsou této Maverick DMU přiřazeny různé vektory vah, proto je možné tyto jednotky tímto způsobem zřetelně identifikovat.

Střední hodnota řádkových vektorů s vyloučením diagonálního prvku v matici CEM nemá již takto zřejmou interpretaci. Tuto hodnotu lze označit za průměrné vzájemné hodnocení všech jednotek q podle jednotných vah jednotky k . Jak bylo již zmíněno, v případě agresivní formulace modelu (1.15) a tomu příslušné interpretace je pak střední hodnota řádkových vektorů matice CEM minimalizační a hodnoty k jednotek se pak uspořádají vzestupně. Místo střední hodnoty je možné použít řádkové minimum či medián, využitelné jsou také charakteristiky rozptylu či rozpětí, ale již s významným vlivem na interpretaci.

1.8 Aspekty použití DEA v praxi

Analýza obalu dat, jako neparametrická metoda analýzy produkční hranice, je výhodná hned v několika ohledech. Přestože vychází z teorie produkční funkce, nevyžaduje a priori informaci o její funkční specifikaci. Je založena na jednoduché funkční závislosti pro relativní efektivnost v podobě poměrového ukazatele vážených vstupů a výstupů.

Dále, DEA výpočetně akceptuje velké množství proměnných a vstupních dat. Prakticky je omezena výpočetními limity optimalizačního software za podmínky lineárních závislostí. Avšak jak uvádí STEWART (1996), počet vstupů a výstupů (počet základních proměnných v primárním modelu) by neměl přesáhnout počet hodnocených jednotek dělený třemi, neboli $m + s \cong n / 3$.

Další nespornou, ale kontroverzní výhodou je fakt, že DEA nepožaduje a priori informace o vahách jednotlivých vstupů a výstupů. Ty lze jinak získat vnější implementací do modelu, a to jako subjektivní odhady s vazbou na konkrétního rozhodovatele nebo skupinu rozhodovatelů. Tam se de facto rozhoduje o výsledné hodnotě efektivnosti souboru hodnocených jednotek. Skutečnost, že si každá jednotka může vybrat své vlastní váhy tak, aby jí to vyhovovalo co nejlépe, tzn. aby váhy maximalizovaly její efektivnost, je na první pohled velmi atraktivní. Tento liberalizmus však způsobuje nemálo potíží při aplikaci a interpretaci této metody. Problematika stanovení vah prostupuje i dále následujícím textem.

2. Vícekriteriální modely teorie rozhodování

Rozhodování je činnost, při které rozhodující subjekt (rozhodovatel) vybírá z množiny variant podle předem stanovených kritérií za účelem dosažení stanovených cílů. O rozhodování se jedná pouze tehdy, když množina variant obsahuje alespoň dva prvky. Vícekriteriální rozhodování je charakteristické víceprvkovou množinou kritérií (alespoň dvě).

Kritérium je vlastnost, která je společná všem rozhodovacím variantám, a lze podle něj varianty vzájemně porovnat.

Množina rozhodovacích variant může být diskrétní nebo spojitá. Diskrétní množina variant se vyznačuje výčtem konečného počtu prvků. Spojitá množina variant není vyjádřena přímo konečným seznamem prvků, ale prostřednictvím soustavy omezujících podmínek. Soustava omezujících podmínek neboli množina přípustných řešení je tvořena konečným počtem proměnných nabývajících spojitých hodnot. Z tohoto důvodu může být rozhodovacích variant nekonečně mnoho.

V monokriteriálních úlohách je možné použít pro nalezení ideální varianty princip optimality. Tento princip aplikovaný na vícekriteriální úlohu ovšem může ztroskotat na skutečnosti, že taková optimální varianta (varianta, která dosahuje nejlepších hodnot podle všech stanovených kritérií) většinou není přípustná, tedy není obsažena v množině přípustných variant. Proto se ve vícekriteriálních úlohách používá místo principu optimality princip nedominovanosti. Nedominovaná varianta je taková, ke které v množině variant neexistuje varianta lépe hodnocená alespoň podle jednoho kritéria a stejně hodnocená podle všech ostatních kritérií. Naopak dominovaná varianta je taková, ke které existuje varianta lépe hodnocená podle alespoň jednoho kritéria a stejně hodnocená podle všech ostatních kritérií.

Úlohy vícekriteriálního hodnocení variant tedy hledají nikoliv optimální variantu, ale kompromisní variantu. Jak bylo ukázáno v předchozím textu, při hledání kompromisní varianty je postačující omezit se na prozkoumávání množiny nedominovaných variant. Toto omezení však nemusí být postačující pro řešení úlohy nalézt kompromisní variantu, protože i množina nedominovaných variant může obsahovat značný počet prvků, mezi kterými je nutné dále vybírat. Cílem vícekriteriální analýzy však může být mimo označení kompromisní varianty také uspořádání variant od nejvíce přijatelné po nejméně přijatelnou nebo rozdělení variant do několika ekvivalentních skupin. Časté je i dichotomické dělení variant na akceptovatelné a neakceptovatelné.

Zásadní potíží vícekriteriálních úloh je agregace dílčích kritérií do jednoho. Tato skutečnost většinou vyžaduje subjektivní ohodnocení kritérií rozhodovatelem co do jejich důležitosti. Důležitost jednotlivých kritérií může být rozhodovatelem vyjádřena ordinálně (pořadím kritérií), kardinálně (vahami kritérií) nebo v podobě aspiračních úrovní (FIALA, 2008).

2.1 Vícekriteriální diskrétní modely rozhodování

Vícekriteriální diskrétní rozhodovací problém je charakterizován diskrétní množinou variant, množinou kritérií a dále ohodnocením variant podle jednotlivých kritérií. Výstupem vícekriteriální analýzy může být dichotomické rozdělení variant na akceptovatelné a neakceptovatelné, nalezení kompromisní varianty nebo prosté uspořádání variant.

Pro model vícekriteriálního hodnocení variant je jako vstupní informace požadována kritériální matice. Kritériální matice obsahuje hodnocení variant $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ podle jednotlivých kritérií $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ a má následující podobu:

$$\mathbf{Y} = \begin{array}{c|cccc} & f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ \hline a_1 & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k} \\ a_2 & y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p & y_{p1} & y_{p2} & \dots & y_{pk} \end{array} \quad (2.1)$$

Kritériální matice $\mathbf{Y}$ (2.1) připouští různou formu prvků y_{ij} . Ty mohou vyjadřovat skutečné ohodnocení varianty podle daného kritéria (kardinální informace) nebo určují pořadí variant podle daného kritéria (ordinální informace).

Kritéria lze považovat za maximalizační. V případě minimalizačních kritérií je možné převést je standardním způsobem na maximalizační, pokud to vybraná metoda vyžaduje.

Prvky kritériální matice mohou být obecně v různých jednotkách. Jsou tedy vzájemně neporovnatelné. Z tohoto důvodu je v těchto případech nutné uvažovat o normalizaci kritériální matice. Často používaná lineární normalizace $\mathbf{U}$ kritériální matice $\mathbf{Y}$ vyhovuje pro maximalizační kritéria vztahu

$$u_{ij} = \frac{y_{ij} - d_j}{h_j - d_j}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2.2)$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_k)$ je vektor ideální varianty (dosahuje maximálních hodnot podle všech kritérií) a $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ je vektor bazální varianty (dosahuje minimálních hodnot podle všech kritérií). Všechny hodnoty prvků normalizované kritériální matice $\mathbf{U}$ spadají do intervalu od nuly do jedné, kde hodnota nula reprezentuje bazální variantu a hodnota jedna reprezentuje ideální variantu.

2.1.1 Preference rozhodovatele

V průběhu řešení rozhodovacího problému je nutné, aby rozhodovatel vyjádřil svoje preference. Nejčastěji jde o vyjádření preferencí na množině kritérií, může jít ale stejně tak o vyjádření preferencí na množině variant podle jednotlivých kritérií. Pro modelování preferencí rozhodovatele mohou být použity různé přístupy. Nejčastěji se používají tyto: aspirační úrovně, ordinální informace o kritériích a kardinální informace o kritériích (váhy).

Aspirační úrovně vyjadřují minimální hodnoty, kterých by měla varianta podle daných maximalizačních kritérií dosáhnout. V případě minimalizačních kritérií vyjadřují aspirační úrovně maximální hodnoty, kterých by měla varianta dosáhnout. Tato metoda negeneruje ordinální ani kardinální informaci o důležitosti kritérií pro rozhodovatele, pouze dichotomicky dělí varianty na akceptovatelné a neakceptovatelné. Interaktivní metodou zpřesňování aspiračních úrovní pro počty akceptovatelných a neakceptovatelných variant tato metoda může postupně zpřesňovat preference rozhodovatele na množině variant.

Ordinální informace o preferencích rozhodovatele na množině kritérií se jednoduše rozumí pořadí uspořádání kritérií podle jejich důležitosti.

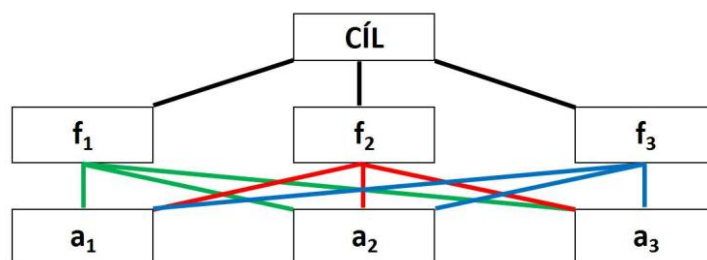
Kardinální informace o preferencích rozhodovatele jsou vyjádřeny pomocí vektoru vah kritérií. Normalizovaný vektor vah obsahuje nezáporné hodnoty s jednotkovým součtem. Čím větší je důležitost kritéria, tím větší je i hodnota jeho váhy.

2.1.2 Výčet některých metod diskrétního vícekritériálního rozhodování

Pro ucelení je zde uveden výčet často používaných diskrétních metod vícekritériálního hodnocení variant. S aspiračními úrovněmi pracují například konjunktivní a disjunktivní metoda nebo metoda PRIAM. Ordinální informace používají metody ORESTE, lexikografická metoda či permutační metoda. S kardinálními informacemi pracují metody WSA, AHP, TOPSIS, AGREPREF, ELECTRE, PROMETHEE nebo MAPPAC (FIALA, 2008).

2.1.3 Analytic Hierarchy Process

Thomas L. Saaty navrhl v roce 1980 efektivní metodu Analytic Hierarchy Process (AHP) pro modelování víceúrovňových rozhodovacích procesů. Tato metoda pracuje s kardinálními informacemi o vahách jednotlivých prvků systému, nepožaduje však od rozhodovatele jejich explicitní vyjádření. Princip této metody je založen na párovém srovnávání prvků v jednotlivých úrovních systému a finální agregaci stanovených priorit mezi úrovněmi (SAATY, 2006).



Obr. 2.1: Schéma hierarchické struktury pro 3 kritéria a 3 varianty

Na obrázku 2.1 je znázorněna hierarchická struktura rozhodovacího problému se třemi variantami a třemi kritérii. Saatyho metoda postupuje třemi fázemi řešení. V první fázi vytváří hierarchickou strukturu cílů, kritérií a rozhodovacích variant, kdy na každé úrovni systému je možné párově porovnat jednotlivé části. Ve druhé fázi se provede vlastní párové srovnání částí systému, a to tak, že se postupuje od vrcholové až po nejnižší úroveň. Třetí fáze pak agreguje dílčí odhady vah částí systému do agregovaných vah celé hierarchické struktury (FIALA, 2008).

V každé části systému vzniká matice párových srovnání prvků stejné úrovně. Z této matice je odvozen vektor vah částí systému. Agregací vektorů vah všech částí hierarchického systému získáváme informaci o agregovaných vahách jednotlivých variant, podle které je možné varianty ohodnotit i uspořádat.

Pro odhad vah v jednotlivých částech hierarchického systému Saaty navrhl metodu kvantitativního párového srovnávání. Ta používá čtvercovou reciprokovou matici $S = (s_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Prvky matice S jsou interpretovány jako odhady podílu vah prvku i a prvku j . Hodnoty prvků matice S jsou navrženy ve stupnici 1, 2, ..., 9, a v převrácených hodnotách 1, 1/2, ..., 1/9. Zvolený rozsah matice S elegantně podporuje její následné matematické úpravy. Saaty navrhl také odpovídající verbální interpretaci prvků matice S :

s_{ij}	interpretace
1	i a j rovnocenné
3	slabě preferované i před j
5	silně preferované i před j
7	velmi silně preferované i před j
9	absolutně preferované i před j
2, 4, 6, 8	přechodné hodnoty

Tab. 2.1: Interpretace hodnot prvků Saatyho matice

Matice **S** obsahuje vyjádření preferencí rozhodovatele mezi prvky dané úrovně podle úrovně vyšší. V situaci znázorněné na obr. 2.1 by tomuto odpovídalo na první úrovni vyjádření preferencí mezi jednotlivými kritérii f_1, f_2, f_3 , ve smyslu dosažení stanoveného cíle, na druhé úrovni by se jednalo o vyjádření preferencí mezi jednotlivými variantami a_1, a_2, a_3 , podle jednotlivých tří kritérií. Na první úrovni by tímto vznikla jedna matice **S**, na druhé úrovni vznikají už tři matice párových srovnání.

Zásadním bodem metody AHP je převedení preferencí obsažených v matici **S** na vektor vah prvků na dané úrovni. Problémem se zde jeví nutnost konzistence vyjádření preferencí rozhodovatele. Vlastnost konzistence matice **S** je definována jako vlastnost tranzitivnosti jejích prvků s_{ij} ,

$$s_{ik} = s_{ij} s_{jk}, \quad (2.3)$$

neboli pro podíl odhadu vah prvků (i,k) musí platit, že je stejný jako součin podílů odhadu vah prvků (i, j) a (j, k) . Při odhadování podílu vah se jeví splnění této podmínky pro rozhodovatele jako obtížné, pro rozsáhlejší matice **S** je subjektivní stanovení konzistentních odhadů podílů vah nemožné.

Saaty navrhl postup odvození vah pomocí charakteristického vektoru matice **S**. Pro charakteristický vektor **v** matice **A** a jejího charakteristického čísla λ platí vztah

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Váhy kritérií lze podle Saatyho odvodit jako charakteristický vektor **v** matice **S** příslušející jejímu největšímu vlastnímu číslu λ_{max} . Platí tedy vztah

$$\mathbf{S}\mathbf{v} = \lambda_{\max} \mathbf{v}. \quad (2.5)$$

V případě, že matice $\mathbf{S}$ je plně konzistentní, platí, že největší charakteristické číslo matice $\mathbf{S}$ je rovno řádu této matice, neboli $\lambda_{\max} = n$, kde n je počet prvků párově porovnávaných na dané úrovni. Matice $\mathbf{S}$ založené na lidském úsudku generují hodnoty s_{ij} tak, že matice $\mathbf{S}$ v menší či větší míře vždy porušuje podmínku konzistence $s_{ik} = s_{ij}s_{jk}$. Charakteristický vektor odvozený z takovéto nekonzistentní matice pak splňuje vztah $\mathbf{S}\mathbf{v} = \lambda_{\max} \mathbf{v}$, kde $\lambda_{\max} \geq n$. Platí, že čím více je konzistence matice $\mathbf{S}$ porušena, tím je rozdíl $(\lambda_{\max} - n)$ větší. Lze pak definovat index konzistence (Consistency Index, CI) jako poměr

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - k}{k - 1}. \quad (2.6)$$

Na základě indexu konzistence (2.6) je možné konstruovat obecný poměr konzistence, (Consistency Ratio, CR), který porovnává index konzistence CI s hodnotou indexu konzistence matic párových srovnání vytvořených na základě náhodných úsudků (Random Index, RI).

$$CR = \frac{CI_n}{RI_n}. \quad (2.7)$$

Takovéto matice různých řádů n konstruoval Saaty a současně navrhuje kritickou hodnotu pro poměr konzistence 0,1. Tuto hodnotu lze interpretovat jako 10%-ní podíl náhody obsažený v matici $\mathbf{S}$. Je tedy možné říci, že matice, které dosahují hodnot poměru konzistence menšího než 0,1, lze považovat za ještě přijatelně konzistentní, a naopak matice párových srovnání, jejichž poměr konzistence značně převyšuje hodnotu 0,1, je nutné považovat za nedůvěryhodné a patrně byly vytvořeny na základě náhodných úsudků.

Pro odhad vektoru vah z matice párových srovnání je často používaná metoda geometrického průměru. Ta vychází z neznámé matice $\mathbf{V} = (v_{ij})$, jejíž prvky jsou skutečné podíly vah $v_{ij} = v_i/v_j$. Prvky matice $\mathbf{V}$ můžeme odhadnout z podmínky, že matice $\mathbf{S}$ se má od matice $\mathbf{V}$ co nejméně lišit. „Interpretujeme-li výraz ‚co nejméně lišit‘ v obvyklém slova smyslu minimalizace součtu čtverců rozdílu stejnohlých prvků obou matic, dostáváme úlohu

$$\text{Minimalizovat} \quad F = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(s_{ij} - \frac{v_i}{v_j} \right)^2 \quad (2.8)$$

za podmínky
$$\sum_{i=1}^k v_i = 1, v_i \geq 0,$$

která vede na nekonvexní kvadratické programování, kde vznikají časté potíže při výpočtech“ (FIALA, 2008). Metoda geometrického průměru – metoda logaritmických nejmenších čtverců určuje odhady vah řešením úlohy

minimalizovat
$$F = \sum_i \sum_{j>i} (\ln s_{ij} - (\ln v_i - \ln v_j))^2 \quad (2.9)$$

za podmínky
$$\sum_{i=1}^k v_i = 1, v_i \geq 0.$$

Řešení této úlohy vede na výpočet normalizovaného geometrického průměru řádků matice **S**:

$$v_i = \frac{\left[\prod_{j=1}^k s_{ij} \right]^{1/k}}{\sum_{i=1}^k \left[\prod_{j=1}^k s_{ij} \right]^{1/k}}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.10)$$

Metoda odhadu vektoru vah logaritmickými nejmenšími čtverci resp. výpočet normalizovaných geometrických průměrů se jeví jako velmi schůdná. Je však nutné ověřit konzistenci matice **S**, ze které byly odhady vah vypočteny. FIALA (2008) ukazuje následující test prostřednictvím odhadu rozptylu σ^2 matice **S**. Platí $\sigma^2 = F/d$, kde F je minimální hodnota kvadratické formy F a d je počet nezávislých srovnání minus počet lineárně nezávislých váhových parametrů, $d = k \cdot (k-1)/2 - (k-1) = (k-1) \cdot (k-2)/2$. Kritické hodnoty pro parametr σ^2 se liší podle řádu matice **S**. Jestliže je $\sigma^2 < 0,1$ pro $k = 3$, $\sigma^2 < 0,2$ pro $k = 4, 5, 6$, 7 , a $\sigma^2 < 0,3$ pro $k > 7$, potom jsou prvky matice **S** považovány za konzistentní.

Pro odhad charakteristického vektoru Saatyho matice párových srovnání existují i jiné přístupy, mnoho z nich je založeno na optimalizačních výpočtech (CHANDRAN et al., 2005).

2.1.4 Ilustrativní případ výpočtu Saatyho matice v AHP

Uvažujme úlohu o nalezení kompromisní varianty mezi variantami a_1, a_2, a_3, a_4 , na základě posuzování kritérií f_1, f_2, f_3 . Rozhodovatel vyjádřil svoje preference mezi kritérii takto: Kritérium f_1 je slabě preferováno před kritériem f_2 , kritérium f_1 je velmi silně preferováno před kritériem f_3 , kritérium f_2 je velmi slabě preferováno před kritériem f_3 . Na základě těchto preferencí byla sestavena matice **S** takto:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Odhad vah $\mathbf{v}$ kritérií f_1, f_2, f_3 byl vypočten jako normalizovaný geometrický průměr řádků matice $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{v} = (0,68; 0,22; 0,10)^T.$$

Nyní ověříme konzistenci matice $\mathbf{S}$. Ze vztahu pro charakteristický vektor $\mathbf{v}$ matice $\mathbf{S}$ (2.5) lze získat pro matici třetího řádu tři odhady pro hodnotu $\lambda_{\max}$, pro které musí platit $\lambda_{\max} \geq n$. Odhad největšího charakteristického čísla matice $\mathbf{S}$ je $\lambda_{\max} = 3,002641$. Pro index konzistence CI (2.6) matice $\mathbf{S}$ potom platí

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3,002641 - 3}{2} = 0,00132.$$

Pro náhodné matice třetího řádu poskytuje Saaty hodnotu $RI_3 = 0,58$. Spočteme tedy hodnotu poměru konzistence CR (2.7):

$$CR = \frac{CI_3}{RI_3} = \frac{0,00132}{0,58} = 0,002277.$$

Hodnota poměru konzistence $CR < 0,1$, je tedy možné označit preference rozhodovatele vyjádřené v matici párových srovnání kritérií $\mathbf{S}$ za konzistentní. A to i přes skutečnost, že matice $\mathbf{S}$ není plně konzistentní, což dokazuje například nerovnost $s_{13} \neq s_{12}s_{23}$.

Předpokládejme, že stejným postupem získáme postupně odhady vah jednotlivých variant a_1, a_2, a_3, a_4 podle kritérií f_1, f_2, f_3 . Získáváme tímto matici $\mathbf{W} = (w_{ij})$, která vyjadřuje váhu varianty a_j podle kritéria f_i . I zde je nutné provádět dílčí testy konzistence párových srovnání. Vektor agregovaných vah w_j varianty a_j podle všech kritérií současně pak získáme ze vztahu

$$w_j = \sum_{i=1}^n v_i w_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (2.11)$$

Pro úplnost uvedeného příkladu předpokládejme, že jsme prostřednictvím vyjádření preferencí rozhodovatele získali matici $\mathbf{W}$ a z něj pak vektor agregovaných vah variant w_j :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = (0,52; 0,17; 0,21; 0,1).$$

Lze tedy interpretovat, že varianta a_1 je podle preferencí rozhodovatele silně preferována před ostatními, které jsou téměř rovnocenné, nicméně lze je podle dosažené hodnoty w_j sestupně uspořádat.

2.2 Vícekriteriální spojité modely rozhodování

Vícekriteriální spojité modely rozhodování jsou rozšířením klasického modelu matematického programování, který je uveden například v (JABLONSKÝ, 2007b). Klasický model matematického programování uvažuje kritérium, kterým je jediná účelová funkce. Modely vícekriteriálního programování uvažují naopak alespoň dvě kritéria. Lze tedy formulovat úlohu vícekriteriálního lineárního programování (2.12):

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \mathbf{c}^{(1)} \mathbf{x} \\ z_2 = \mathbf{c}^{(2)} \mathbf{x} \\ \vdots \\ z_k = \mathbf{c}^{(k)} \mathbf{x} \end{array} \right\} \rightarrow \text{"max"} \quad \text{za podmíněk} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

kde $z_1, z_2, \dots, z_k$, jsou hodnoty k účelových funkcí, $\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, \dots, \mathbf{c}^{(k)}$, jsou řádkové vektory cenových koeficientů příslušejících k účelovým funkcím, $\mathbf{x}$ je vektor n proměnných modelu, $\mathbf{A}$ je matice strukturních koeficientů a $\mathbf{b}$ je vektor pravých stran.

Řešením modelu je takový vektor $\mathbf{x}$, který na množině přípustných řešení současně maximalizuje všech k účelových funkcí. Zde je nutné zdůraznit, že není definováno, co se rozumí současnou maximalizací k účelových funkcí. Metody vícekriteriálního lineárního programování tedy nehledají optimální řešení (pozn.: optimum by nastalo v případě, že bod maximalizující současně všechny účelové funkce by byl uvnitř množiny přípustných řešení), ale hledají řešení kompromisní. Současnou maximalizaci lze v modelu předpokládat bez újmy na obecnosti, neboť minimalizační funkce je možné standardním způsobem přeformulovat na maximalizační (JABLONSKÝ, 2007a).

Základním pojmem teorie vícekriteriálního programování, podobně jako v diskrétních modelech, je pojem nedominované řešení (FIALA, 2008). $\mathbf{x}_N$ je nedominované řešení úlohy

vícekriteriálního programování, pokud neexistuje jiné řešení, které by jej dominovalo. Neboli $\mathbf{x}_N$ je nedominované řešení, pokud k němu neexistuje jiné řešení lepší podle alespoň jednoho kritéria a ne horší podle všech ostatních kritérií.

Podobně jako v diskrétních modelech i spojité vícekriteriální metody požadují od rozhodovatele vyjádření jeho preferencí na množině kritérií. Rozhodovatel může preference vyjádřit v podobě aspiračních úrovní, v podobě cílových hodnot kritérií, ordinálně jako pořadí důležitosti kritérií a nakonec a nejčastěji v podobě vah kritérií. Pokud rozhodovatel neumí nebo si nepřeje vyjádřit své preference, může být výstupem úlohy vícekriteriálního programování úplný popis množiny nedominovaných řešení $\mathbf{X}_N$. Častější je ovšem situace, kdy rozhodovatel požaduje pro implementaci jediné řešení, které bývá řešením kompromisním.

Metody řešení úloh vícekriteriálního programování

Metody řešení úloh vícekriteriálního programování lze rozlišit podle toho, v jaké fázi se do modelu zahrnou dodatečné informace od rozhodovatele. *Metody s informací a priori* požadují informace od rozhodovatele před vlastním výpočtem kompromisního řešení. *Metody s průběžnou informací*, také označované jako interaktivní metody, vyžadují intenzivnější spolupráci analytika a rozhodovatele. Analytik hledá průběžné řešení, které rozhodovatel buď označí za vyhovující, nebo poskytne dodatečnou lokální informaci o svých preferencích. *Metody s informací a posteriori* hledají nejprve množinu nedominovaných řešení, na které může posléze rozhodovatel vyjádřit své preference a označit jediné řešení za kompromisní.

Konkrétní metody pro řešení úloh vícekriteriálního lineárního programování jsou popsány v FIALA (2008). Metody s apriorní informací o důležitosti kritérií pracují s normalizovaným vektorem vah. Jedná se například o lexikografické kompromisní řešení, kompromisní řešení podle minimální komponenty, metodu vícekriteriální funkce užitku, metodu minimalizace vzdálenosti od ideální varianty či cílové programování.

3. DEA a vícekriteriální rozhodování

Metody analýzy obalu dat a metody vícekriteriálního rozhodování, jak byly popsány v předchozích kapitolách, jsou zacílené na řešení relativně velmi podobných úloh. A to i přes skutečnost, že se po dlouhou dobu obě metody vyvíjely nezávisle na sobě a také stojí na poněkud jiných principech. Obě jsou motivovány ne zcela stejnými cíli. Přesto je možné v nich najít metodologické souvislosti.

DEA je zaměřena na porovnání organizačních jednotek dle jejich relativní efektivnosti se zřetelem na hodnoty jejich vstupů a výstupů. Cílem DEA není obecně vybrat jednu DMU jako kompromisní, ale určit množinu efektivních jednotek a množinu neefektivních jednotek. DEA je také vhodným nástrojem pro identifikaci slabých míst, odkud neefektivnost jednotky vychází. Pomocí této metody je také možné modelovat odhad produkční funkce na základě identifikace efektivní hranice, v ekonomii používaným pojmem pro tento model je hranice produkčních možností.

Metody vícekriteriálního rozhodování jsou obecně zaměřeny na úlohy hledající uspořádání či ohodnocení množiny variant podle množiny kritérií. Tyto metody byly vyvinuty za účelem podpory rozhodovatele při výběru kompromisní varianty nebo při nutnosti uspořádání variant.

Pokud na DEA vstupy a výstupy pohlížíme jako na minimalizační (vstupy) a maximalizační (výstupy) kritéria pro hodnocení DMUs, pak můžeme považovat cíle modelů DEA a vícekriteriálního rozhodování za přinejmenším velmi podobné.

V následujících podkapitolách 3.1 a 3.2 jsou představeny dvě metody, které používají jak principy vícekriteriálního rozhodování, tak metody analýzy obalu dat. Jedná se o metodu AHP/DEA, která využívá diskrétních vícekriteriálních nástrojů v podobě metody AHP, a o vícekriteriální metodu DEA (Multi Criteria Data Envelopment Analysis, MCDEA), která naopak čerpá z teorie vícekriteriálních spojitých modelů.

3.1 Metoda AHP/DEA

Metoda AHP/DEA (SINUANY-STERN et al., 2000) je hybridní metodou využívající principů jak modelů analýzy obalu dat, tak principů vícekriteriálního hodnocení variant metodou AHP. Obě dílčí metody a jejich principy byly představeny v předchozích kapitolách.

Metoda AHP/DEA je nástrojem pro hodnocení n DMUs. Jedná se o dvouetapový postup, kdy se v první fázi využívá model křížové efektivnosti (kap. 1.7) pro každý pár srovnávaných DMUs, a v druhé fázi se tato párová srovnání hodnotí metodou AHP (kap. 2.1.3), která poskytne úplné uspořádání hodnocených jednotek.

3.1.1 Fáze 1 – párová srovnání prostřednictvím DEA

Mějme n DMUs, každá s vektorem m vstupů $\mathbf{x}$ a vektorem r výstupů $\mathbf{y}$. Matice $\mathbf{X} = (x_{ij})$ představuje i -tý vstup j -té jednotky, matice $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ představuje i -tý výstup j -té jednotky. Následující DEA modely necht' jsou vypočteny pro všechny dvojice (A, B) srovnávaných n jednotek, jedná se tedy o $n(n-1)/2$ párových srovnání.

$$\text{Maximalizovat} \quad E_{AA} = \sum_{i=1}^r u_i y_{iA}, \quad (3.1)$$

$$\text{za podmínek} \quad \sum_{j=1}^m v_j x_{jA} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^r u_i y_{iA} \leq 1,$$

$$\sum_{i=1}^r u_i y_{iB} - \sum_{j=1}^m v_j x_{jB} = 0,$$

$$u_i \geq 0, v_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Model (3.1) představuje formulaci DEA CCR-I pro dvě srovnávané jednotky A a B a maximalizaci efektivnosti jednotky A. Je de facto specifickou formulací modelu křížové efektivnosti (1.13). Váhy jako strukturní proměnné nemusí být všechny zahrnuty do modelu, jsou na ně kladeny klasické podmínky nezápornosti. Model lineárního programování má potom celkem $(r + m)$ strukturních proměnných (váhy odpovídající počtu vstupů plus počtu výstupů) a tři omezení. Základní řešení tedy bude obsahovat tři nenulové prvky: jednu nenulovou váhu vstupu, jednu nenulovou váhu výstupu a jednu nenulovou přídatnou proměnnou odpovídající buď druhému nebo třetímu omezení. Je-li jednotka A efektivní, pak přídatná proměnná druhého omezení bude rovna nule a naopak přídatná proměnná třetího omezení bude nenulová. Je-li jednotka A neefektivní, bude předchozí platit naopak.

Řešení problému (3.1) je následující: existuje-li dvojice m' -tého vstupu a r' -tého výstupu, pro kterou platí $Y_{rA} / X_{m'A} > Y_{rB} / X_{m'B}$, pak jednotka A je efektivní a $E_{AA} = 1$,

neexistuje-li taková dvojice, jednotka A efektivní není a $E_{AA} = \max_{m,r} \{Y_{rA}/X_{mA}\} / \{Y_{rB}/X_{mB}\}$, $E_{AA} < 1$ (STERN et al., 2000).

Model (3.2) maximalizuje efektivnost jednotky B za podmínky, že efektivnost jednotky A je rovna hodnotě E_{AA} z modelu (3.1), neboli model BA ohodnocuje jednotku B za použití optimálních vah z modelu (3.1).

$$\text{Maximalizovat} \quad E_{BA} = \sum_{i=1}^r u_i y_{iB}, \quad (3.2)$$

$$\text{za podmínek} \quad \sum_{j=1}^m v_j x_{jB} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^r u_i y_{iB} \leq 1,$$

$$\sum_{i=1}^r u_i y_{iA} - E_{AA} \sum_{j=1}^m v_j x_{jA} = 0,$$

$$u_i \geq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, r, \quad v_j \geq \varepsilon, j = 1, 2, \dots, m.$$

Stejným způsobem je možné konstruovat model maximalizující efektivnost E_{BB} a model maximalizující efektivnost E_{AB} , kde E_{BB} je efektivnost jednotky B vycházející z modelu (3.1) a E_{AB} je efektivnost jednotky A vycházející z modelu (3.2) při použití optimálních vah jednotky B z modelu (3.1).

Takovýto postup se provede pro všechny dvojice n srovnávaných jednotek. Počet párových srovnání je roven číslu $n(n-1)/2$.

Závěrem této fáze je konstrukce matice $\mathbf{A} = (a_{jk})$ párových srovnání jednotek na základě vypočtených hodnot efektivností E_{AA} , E_{BA} , E_{BB} a E_{AB} . Pro každou dvojici jednotek j a k platí, že

$$a_{jk} = \frac{E_{jj} + E_{jk}}{E_{kk} + E_{kj}}, \quad (3.3)$$

a pro diagonální prvky matice $\mathbf{A}$ platí $a_{jj} = 1$.

3.1.2 Fáze 2 – uspořádání jednotek: AHP

Pro uspořádání jednotek je v druhé fázi použita standardní procedura AHP představená v kapitole 2.1.3. Matice párových srovnání $\mathbf{A} = (a_{jk})$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$, generovaná DEA procedurou, má na diagonále jedničky a je reciproká, jak vyplývá z (3.3), splňuje tedy požadavky Saatyho metody kvantitativního párového srovnání. Je-li $a_{jk} > 1$, pak jednotka j je preferována před jednotkou k . Je-li $a_{jk} = 1$, pak nelze mezi jednotkami j a k rozhodnout (obě jednotky jsou ekvivalentní). Je-li $a_{jk} < 1$, pak jednotka k je preferována před jednotkou j .

Matice párových srovnání $\mathbf{A}$ je podrobena jednoúrovňové proceduře AHP. Je vypočtena hodnota maximálního charakteristického čísla λ_{max} matice $\mathbf{A}$ a jemu příslušející charakteristický vektor $\mathbf{v}$. Charakteristický vektor $\mathbf{v}$ je odhadem relativní důležitosti srovnávaných jednotek. Pro jednoúrovňovou AHP není třeba charakteristický vektor normalizovat, pořadí jednotkám se přiřazuje takto: největší hodnota p charakteristického vektoru v_p přiřadí pořadí 1 prvku p , druhá největší hodnota v_q přiřadí pořadí 2 prvku q atd.

3.1.3 Ilustrace AHP/DEA na konkrétním případě

Metodu AHP/DEA bude nyní ilustrován na modelu $2 \times 2 \times 2$, jedná se o situaci se dvěma vstupy $j = 1, 2$, dvěma výstupy $i = 1, 2$, a porovnávány budou dvě jednotky $q = A, B$. Mějme matici vstupů $\mathbf{X} = (x_{jq})$ a matici výstupů $\mathbf{Y} = (y_{iq})$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Tab. 3.1 udává hodnoty optimálních řešení pro modely AA, BA, BB a AB:

	AA	BA	BB	AB
E	0,4	1	1	0,4
u_1	0	0	0	0
u_2	1	0,5	0,5	1
v_1	0,4	0,2	0,2	0,4
v_2	0	0	0	0

Tab. 3.1: Hodnoty optimálních řešení pro modely AA, BA, BB a AB

Z tabulky (3.1) je patrné, že optimální hodnoty $E_{AA} = E_{AB}$, $E_{BB} = E_{BA}$. Optimální hodnoty vah si vzájemně odpovídají také v modelech AA, AB a BA, BB. Modely BA a AB mají však alternativní optimální řešení. Aby se zajistilo, že v modelu AB jsou použity optimální váhy z modelu BB a v modelu BA jsou použity optimální váhy z modelu AA, je místo explicitní implementace vah do modelu použita optimální hodnota efektivnosti E v posledním omezení (3.2).

Nyní můžeme sestavit matici $\mathbf{A}$ párových srovnání pro jednotky A, B:

$$\begin{aligned} a_{AA} &= 1 \\ a_{BB} &= 1 \\ a_{AB} &= \frac{E_{AA} + E_{AB}}{E_{BB} + E_{BA}} = \frac{0,4 + 0,4}{1 + 1} = 0,4 \\ a_{BA} &= \frac{E_{BB} + E_{BA}}{E_{AA} + E_{AB}} = \frac{1 + 1}{0,4 + 0,4} = 2,5 \end{aligned} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 2,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Je patrné i bez výpočtu charakteristického vektoru matice $\mathbf{A}$, že pro srovnávané prvky A, B platí toto: prvek B má větší váhu než prvek A.

Při párovém srovnávání n prvků ($n > 2$), bychom postupovali stejným způsobem pro $n(n-1)/2$ dvojic a sestavili bychom matici $\mathbf{A}$ řádu n . Tato matice by byla výchozí pro jednoúrovňovou AHP, která generuje pořadí n srovnávaných prvků.

3.1.4 Praktické aspekty AHP/DEA

Metoda AHP/DEA postupuje v hledání ordinálního uspořádání DMUs dvoufázově. V první fázi provádí párové srovnání všech dvojic srovnávaných jednotek prostřednictvím analýzy DEA, ve druhé fázi analyzuje párová srovnání metodou AHP.

Z hlediska výpočetního se může AHP/DEA zdát na první pohled náročná. Ve výpočetní praxi první fáze jde ovšem o optimalizační výpočet, který je omezen na nalezení dominujícího podílu dvojice vstupů a výstupů nebo na hledání maxima v dvourozměrné matici podílů v úloze (3.1), resp. (3.2):

Existuje-li dvojice vstupů a výstupů (I, R) taková, že platí $Y_{RA} / X_{IA} > Y_{RB} / X_{IB}$, pak $E_{AA} = 1$, jinak $E_{AA} < 1$ a platí $E_{AA} = \max_{i,r} \{Y_{rA} / X_{iA}\} / \{Y_{rB} / X_{iB}\}$.

Počet párových srovnání je ovšem značně velký, jak bylo naznačeno v předchozích oddílech, tedy i počet dílčích optimalizačních modelů je velký.

Výpočetní náročnost jednoúrovňové AHP je omezena na výpočet n geometrických průměrů matice párových srovnání.

AHP i DEA mají své praktické problémy. AHP vyžaduje aktivní účast rozhodovatele na vytváření matice párových srovnání. Základní formulace DEA naopak hodnotí DMUs pouze dichotomicky na efektivní a neefektivní. Metoda AHP/DEA potírá obě tyto nevýhody, protože nevyžaduje pro AHP subjektivní zásah rozhodovatele do procesu hodnocení, a dále umožňuje úplné uspořádání DMUs podle kritérií, kterými jsou hodnoty vstupů a výstupů.

Nežádoucím jevem AHP/DEA je fakt, že generuje velké množství párových srovnání s hodnotou $a_{ij} = 1$, tedy nedokáže u velkého množství dvojic DMUs rozhodnout o preferenční relaci mezi nimi. Toto je způsobeno implicitním zahrnutím principu Pareto-optimality v metodě DEA. Existuje-li jediný dominující podíl dvojice výstupů a vstupů při hodnocení dvojice DMUs, pak je jednotka označena za efektivní. Princip Pareto-optimality totiž označí oba vektory $(20, 50, 10)$, $(20^{10}, 50^{10}, 10 - \varepsilon)$ za efektivní řešení ($\varepsilon \rightarrow 0$), i když běžný rozhodovatel by označil pouze řešení obsažené v prvním vektoru za optimální (SINUANY-STERN et al., 2000).

Dále je nutné konstatovat, že metoda AHP/DEA je s DEA kompatibilní pouze pro případ jednoho vstupu a jednoho výstupu. Pro případ více vstupů a výstupů tomu tak být nemusí, může totiž nastat situace, že neefektivní jednotka podle DEA je hodnocena AHP/DEA lépe, než DEA efektivní jednotka. Shodu obou metod lze testovat, při použití Mann-Whitney testu dosahuje shoda metod p -hodnoty 0,029 (SINUANY-STERN et al., 2000).

Generovaná matice párových srovnání je plně konzistentní také jen pro případ jednoho vstupu a jednoho výstupu, pro případ více vstupů a výstupů je možné konzistenci standardními způsoby testovat.

3.2 Vícekriteriální DEA model

DEA modely měří relativní efektivnost hodnocených DMUs. Efektivnost je zde relativní proto, že DEA porovnává hodnocené jednotky mezi sebou na základě dosažených hodnot jejich vstupů a výstupů. Z praktického hlediska lze klasickým DEA modelům vytknout, že jejich výstupem je pouze rozdělení jednotek do dvou množin, na efektivní a neefektivní. V mnoha případech se tak jeví jako problém nemožnost uspořádání efektivních jednotek. Dalším nepříznivým jevem klasického DEA modelu je fakt, že váhy přiřazované hodnoceným jednotkám mohou dosahovat nerealistických hodnot. V krajním a častém

případě dochází k tomu, že hodnocená jednotka může být DEA modelem označena za efektivní přiřazením velké váhy jen jednomu vstupu nebo jednomu výstupu a přiřazením minimálních vah ostatním vstupům nebo výstupům. Co více, v praktických aplikacích se oba zde zmíněné jevy vyskytují často zároveň.

Následující vícekriteriální DEA model (MCDEA), (LI – REEVES, 1999), se snaží překonat obě výše uvedené nevýhody. Pomocí rozšíření počtu kritérií efektivnosti v klasickém DEA modelu dosahují přísnějších požadavků na hodnocené jednotky. Tímto dosahují omezení počtu jednotek v množině efektivních. Stanovením dalších kritérií efektivnosti současně dochází k přiřazování „rozumnějších“ hodnot vah hodnoceným jednotkám v dílčích DEA formulacích.

3.2.1 Formulace vícekriteriálního DEA modelu

Základním DEA modelem používaným v této kapitole je primární DEA CCR-I. Jeho formulace je následující:

$$\text{Maximalizovat} \quad h_q = \sum_{i=1}^r u_i y_{iq}, \quad (3.4)$$

$$\text{za podmíněk} \quad \sum_{j=1}^m v_j x_{jq} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^r u_i y_{ik} - \sum_{j=1}^m v_j x_{jk} \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_i \geq 0, v_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

kde h_q je relativní efektivnost hodnocené jednotky q z množiny $k = 1, 2, \dots, n$ DMUs, v_i je váha přiřazená i -tému výstupu, u_j je váha přiřazená j -tému vstupu, y_{ik} je hodnota i -tého výstupu k -té jednotky, x_{jk} je hodnota j -tého vstupu k -té jednotky.

Ekvivalentní formulace modelu (3.4) je následující:

$$\text{Minimalizovat} \quad d_q, \quad (3.5)$$

$$\text{za podmíněk} \quad \sum_{j=1}^m v_j x_{jq} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^r u_i y_{ik} - \sum_{j=1}^m v_j x_{jk} + d_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_i \geq 0, v_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

kde d_k je přídatná proměnná modelu (3.4) převádějící nerovnice na rovnice, d_q je přídatná proměnná příslušející omezení pro q -tou hodnocenou jednotku. Modely (3.4) a (3.5) jsou ekvivalentní, protože v případě minimalizace d_q a konstantnímu součtu

$$\sum_{j=1}^m v_j x_{jq} = 1$$

de facto dochází k maximalizaci součtu

$$\sum_{i=1}^r u_i y_{iq} = h_q.$$

Jednotka q je efektivní, pokud hodnota účelové funkce h_q modelu (3.4) je rovna jedné, stejně tak je jednotka q efektivní v případě, že hodnota účelové funkce d_q modelu (3.5) je rovna nule. Je tedy možné proměnnou d_q interpretovat jako míru neefektivnosti hodnocené jednotky q . Platí totiž vztah

$$h_q = 1 - d_q.$$

Jak uvádí LI – REEVES (1999), hodnoty h_q a d_q jsou bezpochyby opodstatněnými a dobrými kritérii pro míru efektivnosti, nejsou ale zdaleka jedinými možnými použitelnými měřeními. V teoretických studiích byla navržena jiná kritéria, která jsou pro měření efektivnosti také opodstatnitelná. SEXTON et al. (1986) používá jako kritérium vážený součet odchylek d_j . STEWART (1996) uvažuje jako kritérium pro DEA model minimalizaci maximální odchylky d_j .

MCDEA model používá tři kritériální funkce: minimalizuje d_q (klasická DEA účelová funkce), minimalizuje prostý součet odchylek d_j , a minimalizuje maximální odchylku d_j . Všechny tyto účelové funkce jsou nezávislé a ve své podstatě představují odlišný přístup k měření efektivnosti. Formulace vícekritériálního DEA modelu vycházejícího z formulace (3.4) a (3.5) je následující:

$$\text{Minimalizovat} \quad d_q, \quad (3.6)$$

Minimalizovat	$\sum_{k=1}^n d_k,$
Minimalizovat	$M,$
Za podmínek	$\sum_{j=1}^m v_j x_{jq} = 1,$ $\sum_{i=1}^r u_i y_{ik} - \sum_{j=1}^m v_j x_{jk} + d_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$ $M - d_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$ $u_i \geq 0, v_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, m,$ $d_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$

Model (3.6) je úlohou vícekritériálního lineárního programování. Obecně neexistuje optimální řešení, které by dosahovalo optimálních hodnot podle všech účelových funkcí. Bez apriorních informací o preferencích jednotlivých kritérií lze hledat úplný popis množiny nedominovaných řešení. Množina nedominovaných řešení obsahuje dílčí optimální řešení podle všech tří účelových funkcí. Naopak nedominované řešení může, ale nemusí být ani jedním ze tří monokritériálních optimálních řešení.

Množina přípustných řešení modelu (3.6) je shodná s množinou přípustných řešení modelu (3.4) i (3.5). Omezení

$$M - d_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

tuto množinu neovlivní, je pouze podmínkou minimalizace maximální odchylky d_k . Platí, že M je maximální odchylka z množiny d_k .

Hodnocená jednotka q je v modelu (3.6) efektivní v klasickém smyslu DEA tehdy a pouze tehdy, když hodnota $d_q = 0$. Hodnocená jednotka je v modelu (3.6) „minimax efektivní“ tehdy a pouze tehdy, když hodnota $M = 0$. Hodnocená jednotka je v modelu (3.6) „minsum efektivní“ tehdy a pouze tehdy, když hodnota součtu odchylek d_k je rovna nule.

Dále, je-li hodnocená jednotka DEA efektivní, neznamená to ještě, že je i „minimax efektivní“. Je-li hodnocení jednotka DEA efektivní, neznamená to ani, že je „minsum efektivní“. Kritéria minimax a minsum jsou proto pro hodnocenou jednotku přísnější co do její efektivity. Je to způsobeno tím, že klasická podmínka DEA efektivity minimalizuje

pouze odchylku d_q hodnocené jendotky q . Naopak kritéria minimax a minsum minimalizují různým způsobem všechny odchylky d_k všech n hodnocených jednotek. Hodnocená jendotka je tedy minimax efektivní tehdy a pouze tehdy, když hodnota $M = 0$. Hodnocená jednotka je minsum efektivní tehdy a pouze tehdy, když součet odchylek

$$\sum_{k=1}^n d_k = 0.$$

Lze dokázat, že platí: Je-li hodnocená jednotka minimax efektivní nebo minsum efektivní, pak je i DEA efektivní.

3.2.2 Praktické aspekty vícekritériálního DEA modelu

Klasické modely DEA dělí hodnocené jednotky na efektivní a neefektivní. Jak již bylo zmíněno, v případě velkého množství vstupů a výstupů v porovnání s počtem srovnávaných jednotek může docházet k tomu, že množina efektivních jednotek je velká. V případě, že je třeba vybrat jednu jednotku jako kompromisní ve smyslu vícekritériálního rozhodování, DEA většinou nepřináší uspokojivé výsledky. Vícekritériální DEA model tento jev eliminuje, protože kritéria minsum a minimax jsou pro dosažení efektivnosti přísnější. Tím pádem dochází ke zmenšení počtu DMUs v množině efektivních jednotek.

Průvodním jevem zařazení kritérií minimax a minsum do modelu (3.6) je též omezení vah vstupů a výstupů. Je to způsobeno tím, že kritéria minimax i minsum jsou funkcemi všech proměnných d_k , které jsou přídatnými proměnnými všech n omezení příslušících podmínkám pro množinu hodnocených jednotek. Mají tedy i vliv na přiřazení vah vstupům a výstupům hodnocené jednotky.

MCDEA jako výstup poskytuje množinu nedominovaných řešení modelu (3.6). Protože úloha úplného popisu množiny nedominovaných řešení je výpočetně velmi náročná, v praxi se uživatel neobejde bez specializovaného software pro vícekritériální lineární programování. Jednoduchým způsobem lze zjistit pro úlohu (3.6) tři nedominované krajní body řešením tří monokritériálních úloh podle všech tří kritérií zvlášť.

Je možné přistoupit k úloze (3.6) prostřednictvím některých vícekritériálních metod agregujících více kritérií do jednoho. Lze aplikovat metodu maximální komponenty pro minimalizační kritéria. Pro tuto metodu je nutná normalizace kritérií. Tu jsme však v případě modelu (3.6) schopni snadno provést modifikací kritéria minimalizace součtu odchylek na minimalizaci průměrné odchylky, tzn. pouhým vydělením tohoto kritéria počtem

srovnávaných jednotek. Pak již všechny tři minimalizační kritéria vyjadřují míru neefektivity hodnocené jednotky a jejich hodnoty leží v intervalu $\langle 0;1 \rangle$.

Pokud akceptujeme ad hoc stanovené hodnoty vah kritérií, lze aplikovat na model (3.6) metodu vícekritériální funkce užitku. Váženým součtem kritériálních funkcí pak opět dostáváme monokritériální úlohu, kterou je možné řešit standardním způsobem.

Dalším aplikovatelným přístupem je lexikografický princip (FIALA, 2008). Je zřejmé, že kritéria minimax a minsum jsou více omezující než klasické DEA kritérium, což je při použití tohoto principu nutné brát v úvahu.

Vícekritériální DEA model používá jak principy DEA, tak vícekritériálního rozhodování. Kombinací dosahuje větší diskriminační síly DEA analýzy a zároveň dosahuje realističtějších vah přisouzených jednotlivým DMUs. Neumožňuje ovšem úplné seřazení jednotek jako předchozí AHP/DEA model.

4. Aplikace metod AHP/DEA a MCDEA

DEA i modely vícekritériálního rozhodování se uplatňují v celé řadě reálných problémů. Jejich aplikace je možné nalézt jak v soukromém sektoru, tak i ve veřejném či neziskovém sektoru, publikace i vědecké práce velmi často uvádějí například bankovníctví, retail management nebo zdravotnictví. Modely, které využívají principy jak analýzy obalu dat, tak principů vícekritériálního rozhodování, mohou nalézt své praktické uplatnění stejně snadno, ve svých předpokladech se nijak zásadně neliší. Pravdou ale zůstává, že modely AHP/DEA ani MCDEA, jak byly představeny ve třetí kapitole, zatím nenalézají své pevné místo ve výčtu standardně používaných metod hodnocení efektivnosti produkčních jednotek.

Důvodem nemnoha praktických aplikací těchto modelů je jejich relativně značná výpočetní náročnost, kdy je bez specializovaného softwaru řešení úloh větších rozměrů zdoluhavé. Používání různých metod a přístupů v rámci jednoho modelu vede k nejednoznačnému vlivu jednotlivých principů, tyto parciální vlivy pak nejsou snadno a zřetelně identifikovatelné. Modely tedy poskytují zřejmé výsledky, ale jejich interpretace je pro běžného uživatele metod operačního výzkumu nesnadná.

Pro nastínění výpočetní praxe obou metod, AHP/DEA i MCDEA, byla získána reálná data společnosti působící na trhu stavebních hmot. Konkrétně se jedná o databázi produkčních jednotek firmy na území České republiky. Produkčními jednotkami jsou betonárny reprezentující poslední článek logistického a produkčního řetězce. Jednotlivé betonárny jsou velmi podobné co do spotřebovávaných vstupů i produkovaných výstupů, používané technologie výroby i logistický management podléhají daným interním předpisům. Lze tedy betonárny jako reprezentanty produkčních jednotek ve zřeteli DEA označit za velmi homogenní, jak z pohledu vnější podobnosti (shodné vstupy a výstupy), tak z pohledu vnitřní souvislosti (shodná transformace vstupů na výstupy).

4.1 Charakteristika použitých dat

Databáze obsahuje 53 betonáren patřících společnosti, která údaje pro tuto práci poskytla. Jednotlivé betonárny jsou charakterizovány šesti vstupy:

- průměrná hladina zásoby písku [t],
- průměrná hladina zásoby kameniva [t],
- průměrná roční spotřeba písku [t],
- průměrná roční spotřeba kameniva [t],

- měsíční mzdové náklady všech pracovníků [*tis. Kč*],
- počet kmenových zaměstnanců,

a čtyřmi výstupy:

- měsíční objem výroby betonu [m^3],
- měsíční hrubá marže [*tis. Kč*],
- měsíční obrat [*tis. Kč*],
- obrat z prodeje kameniva [*tis. Kč*].

Jedná se o data generovaná z podnikového informačního systému za měsíc únor 2009. Průměrná zásoba písku a kameniva, stejně jako roční spotřeba těchto surovin, je jednou ze zásadních položek, které ovlivňují náklady na udržování zásob. Mzdové náklady jsou cenou placenou za pracovní sílu. Počet kmenových zaměstnanců je jakousi úrovní velikosti managementu. Co se týká výstupů, objem výroby betonu je sumarizací výroby veškerých vyráběných betonových směsí, měsíční hrubá marže je rozdíl mezi tržbami za výkony a výrobními náklady, měsíční obrat ukazuje na celkovou výši výnosů z uskutečněných prodejů, obrat z prodeje kameniva je výnosem z činnosti, na kterou klade producent v období roku 2009 důraz.

Na tomto místě je nutné konstatovat, že autor neměl možnost ovlivnit, jaké konkrétní položky (vstupy a výstupy) budou z databáze vygenerovány, ale data musel přejmout tak, jak jsou. Na základě apriorních ekonomických znalostí o těchto veličinách je na první pohled patrné, že je na místě ověřit hypotézu závislosti jednotlivých vstupů a výstupů mezi sebou. Je zřejmé, že pokud existuje mezi dvojicí vstupů nebo dvojicí výstupů významná lineární závislost, pak je možné jeden vstup nebo výstup z dvojice z modelu vypustit, aniž by to významně ovlivnilo odhady DEA efektivností. Co více, jak je ukázáno v LEE – CHOI (2010), pokud existuje významná lineární závislost mezi vstupem a výstupem, je možné stejně tak vynechat jednoho z dvojice závislých faktorů, aniž by to mělo významný vliv na odhady efektivnosti v DEA modelu.

Vzhledem k tomu, že významně zkorelovaná data jsou použita jako nástroj pro ilustraci fungování metody, není třeba tomuto jevu věnovat pozornost. Pokud by však bylo třeba z výsledků analýzy formulovat závěry pro implementaci výsledků v praxi, pak by bylo na místě se otázkou korelace zabývat a případně vybrat jiné vstupy a výstupy.

4.2 Aplikace metody AHP/DEA

Metoda AHP/DEA je rozšířením klasické analýzy obalu dat o nástroj vícekritériálního diskrétního rozhodování v podobě metody AHP. Teoretický koncept, předpoklady a důsledky AHP/DEA byly popsány v kapitole 3.1. Cílem této kapitoly je její aplikace na reálná data představená v kapitole 4.1.

AHP/DEA probíhá ve dvou fázích. V první fázi se porovnávají všechny dvojice jednotek metodou DEA a generuje se matice párových srovnání. V druhé fázi je vzniklá matice párových srovnání podrobena proceduře AHP.

Pro výpočty byl použit software LINGO v interakci s MS Excel. Vzhledem k tomu, že manuální počet úkonů ve fázi párového srovnávání v prostředí LINGO/Excel je značný, byl redukován počet srovnávaných jednotek na 12. Jedná se o záměrný výběr betonáren dvou klastrů v oblasti severu a západu České republiky. Pro hodnocení efektivnosti dvanácti produkčních jednotek jsou použity 3 vstupy (průměrná hladina zásoby kameniva, průměrná roční spotřeba kameniva, mzdové náklady) a 2 výstupy (objem výroby, obrat).

Data použitá pro AHP/DEA jsou sumarizována v tabulce 4.1:

	Průměrná zásoba kameniva	Roční spotřeba kameniva	Mzdové náklady	Objem výroby	Obrat
Děčín	159,20	4339,43	453,12	5700,97	9758,48
Dvůr Králové	144,71	6037,78	589,11	7959,10	11338,34
Chomutov	229,37	5626,65	792,22	5243,34	7491,00
Liberec	742,50	14732,28	690,49	16753,56	29764,21
Mladá Boleslav	223,78	7032,01	690,24	6789,73	10007,32
Ohrazenice	273,00	7561,44	444,12	7622,44	12435,57
Plačice	458,00	14544,90	568,83	15273,76	22423,05
Plzeň	351,76	13828,24	721,88	13720,50	20642,12
Sokolov	441,57	11740,75	726,50	10665,93	21768,11
Správkčice	275,84	8427,18	569,43	10358,65	18220,27
Teplice	840,21	12662,20	701,09	13849,19	20827,26
Ústí n. Labem	237,70	9129,85	683,47	10230,96	15174,05

Tab. 4.1: Souhrn vstupních údajů použitých v AHP/DEA

4.2.1 Fáze 1 – párová srovnání

Betonárny (tab. 4.1) jsou podrobeny párovému srovnání dle modelů (3.1) a (3.2). Na základě hodnot efektivností modelů (3.1), (3.2), je vypočtena matice párového srovnání **A** dle vztahu (3.3). Pro každé párové srovnání je nutné provést 2 optimalizační výpočty, z jejichž optimálních hodnot lze podílem získat hodnotu jednoho prvku matice **A**. Počet párových srovnání n prvků je roven hodnotě $n(n-1)/2$, pro 12 jednotek je tento počet roven číslu 66. Vzhledem k tomu, že každé párové srovnání vyžaduje dva optimalizační modely, je pro 12 srovnávaných jednotek potřebné vypočítat 132 dílčích optimalizací. Je zřejmé, že bez softwaru vyvinutého na míru, který by umožnil řešit všechny modely na základě vstupních dat jednorázově, se jedná o velmi rozsáhlý problém co do dílčích optimalizačních úkonů.

Hodnoty efektivností modelů AA, BA, BB, AB, jsou uvedeny v příloze č. 2, formulace modelu AA v příloze č. 3, formulace modelu BA v příloze č. 4. Na základě těchto hodnot získává matice párových srovnání **A** následující formu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1,4 & 1 & 1,2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1,4 & 1 & 1,3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,7 & 0,7 & 1 & 1 & 1 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 1 & 0,8 & 1 & 0,8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,9 & 1 & 1 & 0,8 & 1 & 0,9 \\ 1 & 1 & 1,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1,1 & 1 & 1,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1,3 & 1 & 1,2 & 1,1 & 1 & 1 & 1,1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1,2 & 1 & 1,2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jak již bylo předesláno, matice párových srovnání vzešlá z párové DEA analýzy obsahuje velké množství jedniček, tedy pro velké množství srovnávaných jednotek není možné rozhodnout o preferenční relaci ani o míře preference. Je to způsobeno implicitním zahrnutím principu Pareto-optimality v DEA analýze dvou jednotek. V zásadě lze zobecnit, že párové srovnání prostřednictvím DEA generuje ostrou preferenci tehdy a pouze tehdy, jsou-li

všechny možné dvojice poměrů výstupů a vstupů dvou srovnávaných jednotek příznivé pouze pro jednu jednotku z dvojice. Existuje-li jakákoliv dvojice poměrů výstupu a vstupu, která je příznivá pro první respektive pro druhou jednotku, pak DEA označí jejich preferenční relaci jako indiferentní a v matici **A** se generuje hodnota 1. Precizní formulace tohoto jevu je uvedena v kapitole 3.1. Je možné konstatovat, že čím větší je počet nezávislých vstupů a výstupů $m + r$, tím větší je pravděpodobnost, že preferenční relací mezi dvojicí srovnávaných jednotek bude indiference.

4.2.2 Fáze 2 – AHP

Ve druhé fázi je na matici párových srovnání **A** aplikována jednoúrovňová procedura AHP. Matice **A** je čtvercová a reciproká, na diagonále má hodnoty jedna, splňuje tedy obecné požadavky na formu Saatyho matice. Saatyho matice ovšem obsahuje mimo diagonálu pouze hodnoty 1, 2, ..., 9 respektive převrácené hodnoty těchto cifer. Tento předpoklad matice **A** nesplňuje, její hodnoty mohou být obecně všechna racionální čísla. Nicméně jak se ukazuje, není tato vlastnost pro matici **A** zásadní překážkou pro konstrukci a použitelnost v proceduře AHP. Její interpretace však již není ekvivalentní interpretaci prvků Saatyho matice jako odhadů poměru vah dvojice srovnávaných jednotek. Prvky matice **A** lze ovšem stále považovat za ukazatel míry preference mezi srovnávanými jednotkami.

Odhad normalizovaného charakteristického vektoru vypočteného metodou řádkových geometrických průměrů (2.10) má následující podobu:

$$\mathbf{v} = [0,087 \quad 0,088 \quad 0,074 \quad 0,083 \quad 0,077 \quad 0,083 \quad 0,085 \quad 0,084 \quad 0,083 \quad 0,088 \quad 0,084 \quad 0,086]^T$$

Pořadí srovnávaných prvků je pak možné získat sestupným uspořádáním podle hodnot odhadu charakteristického vektoru. Pořadí 12 srovnávaných betonáren je uvedeno v tabulce 4.2:

betonárna	pořadí
Dvůr Králové	1.
Správčice	2.
Děčín	3.
Ústí nad Labem	4.
Plačice	5.
Plzeň	6.
Teplice	7.
Ohrazenice	8.
Liberec	9.
Sokolov	10.
Mladá Boleslav	11.
Chomutov	12.

Tab. 4.2: *Pořadí AHP/DEA*

4.2.3 Konzistence párových srovnání

Výpočet přibližného odhadu charakteristického vektoru metodou geometrických průměrů řádků matice **A** je oproti regulérním metodám velmi jednoduchý, přesto poskytuje pro účely AHP postačující výsledky. Jeho nevýhodou je, že neposkytuje explicitně odhad dominantního vlastního čísla, jehož znalost je nutná pro výpočet poměru konzistence *CR*. Je však možné z odhadu charakteristického vektoru odhad dominantního charakteristického čísla zpětně vyjádřit.

Konzistence matice **A** je z definice značná, protože není založena na subjektivních odhadech poměrů vah rozhodovatele, ale její hodnoty jsou generovány DEA procedurou. Přesto lze míru konzistence matice **A** prozkoumat: hodnota odhadu dominantního charakteristického čísla je $\lambda_{\max} = 12,02347$, index konzistence $CI = 0,002134$ a poměr konzistence založený na srovnání s indexem konzistence náhodných matic řádu 12 $RI_{12} = 1,48$ je $CR = 0,001442$. Vzhledem k tomu, že $CR \ll 0,1$, je možné označit odhady měr preferencí mezi dvojicemi jednotek v matici **A** za konzistentní.

4.2.4 Porovnání výsledků metod DEA a AHP/DEA

Pro srovnání se standardní metodou DEA je uvedena tabulka 4.3 s hodnotami CCR-I efektivností. Jak je zřejmé, DEA a AHP/DEA neposkytují stejné výsledky. Markantní je hodnocení betonárny Liberec, která je označena za DEA CCR efektivní, avšak metoda AHP/DEA jí přiřadila až 9. místo a před ní se umístily 4 DEA CCR neefektivní betonárny.

DEA CCR efektivnost jednotky Liberec je dosažena především díky relativně nízkým mzdovým nákladům (3. vstup) a relativně vysokému obratu (2. výstup). Nekompatibilita metod je způsobena odlišnými principy, na kterých jsou obě metody založeny. Zatímco benevolentní formulace DEA umožňuje hodnocené jednotce vybrat si pro sebe co nejprůzračnější váhy, princip párového srovnání a následná transformace na charakteristický vektor v AHP/DEA již diferencuje hodnocené jednotky nekompromisněji. Pro porovnání jsou v tabulce 4.3 navíc uvedeny hodnoty superefektivnosti a pořadí generované touto DEA modifikací (JABLONSKÝ – DLOUHÝ, 2004). Koncept superefektivnosti poskytuje relativně podobné uspořádání jako AHP/DEA, opět s výjimkou DMU Liberec, kde je rozdíl v pořadí 5 příček.

	DEA CCR-I	AHP/DEA	Superefektivnost CCR-I	pořadí
Dvůr Králové	1,0000	1.	1,2778	1.
Správkyně	1,0000	2.	1,1848	3.
Děčín	1,0000	3.	1,0586	5.
Ústí nad Labem	0,9464	4.	0,9464	7.
Pláče	1,0000	5.	1,2290	2.
Plzeň	0,9958	6.	0,9958	6.
Teplice	0,9308	7.	0,9308	8.
Ohrazenice	0,8533	8.	0,8533	10.
Liberec	1,0000	9.	1,1809	4.
Sokolov	0,8733	10.	0,8733	9.
Mladá Boleslav	0,7336	11.	0,7336	11.
Chomutov	0,7070	12.	0,7070	12.

Tab. 4.3: Srovnání výsledků DEA a AHP/DEA

Lze tedy konstatovat, že metoda AHP/DEA potírá zásadní nevýhodu klasické analýzy obalu dat, a to nemožnost uspořádání efektivních a neefektivních jednotek. Toto ale za cenu relativně velké výpočetní zdlouhavosti a nesnadno proveditelné interpretace a separace dílčích vlivů na výsledek metody.

4.3 Aplikace vícekriteriálního DEA modelu

Principy vícekriteriálního DEA modelu byly představeny v kapitole 3.2. Jedná se o standardní DEA CCR-I formulaci se třemi kritériálními funkcemi míry efektivnosti hodnocené jednotky. První kritériální funkce minimalizuje hodnotu neefektivnosti hodnocené

jednotky, druhá kritériální funkce minimalizuje součet hodnot neefektivnosti všech jednotek, třetí kritériální funkce minimalizuje maximální odchylku z množiny hodnocených jednotek.

Autoři MCDEA nedávají jednoznačný návod, jakým způsobem získat kompromisní řešení modelu (3.6). Odkazují pouze na metody vícekritériálního lineárního programování.

Nejobecnějším řešením MCDEA je úplný popis množiny nedominovaných řešení. Taková úloha je však pro větší množství strukturních proměnných velmi obtížně realizovatelná. Snadno lze získat pouze tři nedominované krajní body, a to řešením monokritériální optimalizační úlohy postupně podle všech tří kritériálních funkcí.

Dalším teoreticky i prakticky aplikovatelným přístupem k řešení úlohy vícekritériálního lineárního programování (3.6) je teorie maximalizace vícekritériální funkce užitku, a to konkrétně v podobě aditivní agregace jednotlivých dílčích kritérií. Vzniklá monokritériální úloha má potom tvar účelové funkce

$$u(q) = v_1 d_q + v_2 \frac{\sum_{k=1}^n d_k}{n} + v_3 \max_k d_k, \quad (4.1)$$

kde v_1, v_2, v_3 jsou normalizované váhy přiřazené jednotlivým kritériím. Zde je na místě otázka, jaké váhy zvolit pro jednotlivá kritéria. Možnost vyhnout se subjektivnímu přiřazení vah nabízí pouze teorie maximálně pravděpodobného řešení, které je však opět výpočetně omezeno na specializovaný software, případně simulaci metodou Monte Carlo. Pro účely této práce je však nutné omezit se na subjektivní přiřazení vah kritériím se zřetelem na fakt, že použití prvního až třetího kritéria je pro hodnocení efektivnosti postupně zpřísňující. Nejvíce striktní kritérium efektivnosti je minimalizace maximální odchylky, naopak nejméně striktní je standardní DEA kritérium efektivnosti.

Agregace kritérií ve tvaru (4.1) je možná bez normalizace, hodnoty všech kritérií jsou omezeny na zleva uzavřený interval $\langle 0; 1 \rangle$. Dále je nutné interpretačně modifikovat užitek na jakýsi „neužitek“, kterému odpovídají minimalizační dílčí kritéria v (4.1), a pak tuto vícekritériální funkci neužitku minimalizovat.

Princip minimalizace vzdálenosti od ideální varianty je další metodou, kterou lze na úlohu (3.6) aplikovat. Jak již bylo zmíněno, kritéria mohou nabývat hodnot ve stejném intervalu, není proto potřeba je pro tuto metodu dále upravovat. Výsledná monokritériální úloha má potom tvar minimalizační účelové funkce

$$z = v_1(z_1 - \bar{z}_1) + v_2(z_2 - \bar{z}_2) + v_3(z_3 - \bar{z}_3), \quad (4.2)$$

kde $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ jsou normalizované váhy, z_1, z_2, z_3 jsou hodnoty jednotlivých kritérií a $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ jsou ideální hodnoty jednotlivých kritérií. Připustíme-li, že všechna kritéria nabývají hodnot z intervalu $\langle 0;1 \rangle$ a ideální hodnoty kritérií jsou nuly, pak princip minimalizace vzdálenosti od ideální varianty vede na úlohu aditivní funkce užitku (4.1). Obecně samozřejmě neplatí, že po výpočtu ideálních hodnot dílčích kritérií budou všechny tyto ideální hodnoty nulové, jejich postupný výpočet by ale při ruční aplikaci této metody vedl k velmi pracnému a zdlouhavému procesu hodnocení efektivnosti všech jednotek a abstrahování od normalizace (2.2) je v tomto případě přijatelné.

Dalším principem uplatnitelným na úlohu ve tvaru (3.6) je minimalizace maximální hodnoty z množiny tří kritérií. Tato forma řešení však naráží na skutečnost, že již jedno dílčí kritérium je formulováno shodným principem. Co více, toto kritérium minimaxu dosahuje nejvyšších hodnot neefektivnosti (nejhorších hodnot) mezi všemi třemi kritérii, proto výsledkem takovéto agregace dílčích kritérií bude ve většině případů opět třetí kritérium. Tento přístup tedy neposkytuje uspokojivě interpretovatelné výsledky.

Metody řešení vícekritériálního lineárního programování s průběžnou informací, kdy rozhodovatel průběžně vyjadřuje své preference, již příliš zahrnují subjektivní hledisko, které se staví proti snaze DEA modelů dosáhnout co nejobjektivnějšího hodnocení relativní efektivnosti. Procedura s průběžným vstupem rozhodovatele během řešení by byla akceptovatelná, pokud by rozhodovatel nevyjadřoval upřesnění preferencí na základě znalosti hodnot kritérií, ale upřesňoval by své apriorní představy o hodnotách proměnných, kterými jsou váhy vstupů a výstupů. Takováto modifikace je však již téměř za hranicí apriorních východisek, které formují principy analýzy obalu dat.

Aplikace metody MCDEA na reálných datech:

Metoda MCDEA bude ilustrována nejprve na datech použitých v předchozí kapitole (tab. 4.1), kde byla tato data podrobena metodě AHP/DEA. Jedná se o 12 betonáren charakterizovaných třemi vstupy a dvěma výstupy.

Pro agregaci dílčích kritérií bude použita metoda aditivní funkce užitku, zvolený váhový vektor $v = (1/3, 1/3, 1/3)$ reprezentuje subjektivní důležitost jednotlivých kritérií. Formulace modelu MCDEA je uvedena v příloze č. 5.

Tabulka 4.4 uvádí výsledky vícekriteriální analýzy obalu dat v porovnání se standardní analýzou obalu dat. Hodnota agregované účelové funkce z udává míru vícekriteriální neefektivity hodnocené jednotky, z_1 , z_2 , z_3 jsou hodnoty dílčích kritérií. Jak je patrné, žádná jednotka nedosáhla vícekriteriální efektivity. Ve druhé části tabulky je pro srovnání uveden výsledek DEA CCR-I modelu, pro ilustraci jsou uvedeny i hodnoty druhého a třetího kritéria pro váhy CCR.

	MCDEA				DEA			
	z	z_1	z_2	z_3	z	z_1	z_2	z_3
Děčín	0,2847	0,0251	0,2881	0,5408	0,0000	0,0000	0,4510	0,8577
Dvůr Králové	0,2095	0,0309	0,1745	0,4229	0,0000	0,0000	0,2476	0,4478
Chomutov	0,3205	0,3985	0,1644	0,3985	0,2930	0,2930	0,3149	0,6382
Liberec	0,0979	0,0013	0,0854	0,2071	0,0000	0,0000	0,1376	0,2578
Ml. Boleslav	0,2678	0,2915	0,1495	0,3625	0,2664	0,2664	0,1696	0,3797
Ohrazenice	0,2328	0,1533	0,1592	0,3859	0,1467	0,1467	0,1686	0,4838
Plačice	0,1183	0,0495	0,0892	0,2162	0,0000	0,0000	0,1203	0,2947
Plzeň	0,1505	0,1461	0,0892	0,2162	0,0042	0,0042	0,2110	0,8301
Sokolov	0,1863	0,2207	0,1176	0,2207	0,1267	0,1267	0,1637	0,3129
Správčice	0,1549	0,0000	0,1616	0,3032	0,0000	0,0000	0,1832	0,3053
Teplice	0,1331	0,0698	0,0962	0,2333	0,0691	0,0691	0,0962	0,2355
Ústí n. Labem	0,1792	0,1114	0,1245	0,3017	0,0536	0,0536	0,2700	1,0621

Tab. 4.4: *Výsledky MCDEA, 3 vstupy a 2 výstupy*

Otázkou zůstává, zda je možné množinu jednotek označených jako MCDEA neefektivní uspořádat podle dosažených hodnot agregované účelové funkce. Pokud by to bylo interpretačně přijatelné, pak by pořadí generované metodou MCDEA bylo uvedené v tabulce 4.5:

Jak je po srovnání pořadí v tabulce 4.5 (MCDEA) a 4.3 (AHP/DEA) patrné, tyto dvě metody poskytují naprosto odlišné výsledky. Autor se domnívá, že není možné na základě hodnot agregované kriteriální funkce jednotky uspořádat, resp. není možné interpretovat hodnoty agregované kriteriální funkce jako kvazi míru neefektivnosti.

Druhým příkladem je aplikace MCDEA na data dvanácti betonáren, pro hodnocení efektivity jsou ale použity všechny vstupy (6) a výstupy (4). Hodnoty těchto vstupů a výstupů jsou pro větší rozsah uvedeny v příloze č. 1.

betonárna	pořadí	superefektivnost
Liberec	1.	4.
Plačice	2.	2.
Teplice	3.	8.
Plzeň	4.	6.
Správčice	5.	3.
Ústí nad Labem	6.	7.
Sokolov	7.	9.
Dvůr Králové	8.	1.
Ohrazenice	9.	10.
Mladá Boleslav	10.	11.
Děčín	11.	5.
Chomutov	12.	12.

Tab. 4.5: *Pořadí generované MCDEA*

	MCDEA				DEA			
	z	z_1	z_2	z_3	z	z_1	z_2	z_3
Děčín	0,0803	0,0000	0,0830	0,1580	0,0000	0,0000	0,0859	0,1660
Dvůr Králové	0,0793	0,0933	0,0515	0,0933	0,0000	0,0000	0,1266	0,2814
Chomutov	0,0963	0,0513	0,0687	0,1689	0,0452	0,0452	0,0949	0,2663
Liberec	0,0358	0,0303	0,0260	0,0511	0,0000	0,0000	0,0768	0,1339
Ml. Boleslav	0,0645	0,0108	0,0561	0,1264	0,0000	0,0000	0,1392	0,2323
Ohrazenice	0,0531	0,0000	0,0493	0,1099	0,0000	0,0000	0,0705	0,1142
Plačice	0,0389	0,0000	0,0334	0,0833	0,0000	0,0000	0,0480	0,0862
Plzeň	0,0279	0,0000	0,0262	0,0574	0,0000	0,0000	0,0374	0,0803
Sokolov	0,0518	0,0000	0,0445	0,1109	0,0000	0,0000	0,0496	0,1192
Správčice	0,0401	0,0000	0,0377	0,0826	0,0000	0,0000	0,0538	0,1154
Teplice	0,0308	0,0027	0,0276	0,0621	0,0000	0,0000	0,0355	0,0685
Ústí n. Labem	0,0454	0,0179	0,0367	0,0817	0,0000	0,0000	0,0584	0,1527

Tab. 4.6: *Výsledky MCDEA, 6 vstupů a 4 výstupy*

Z tabulky 4.6 je opět patrné, že MCDEA neoznačila žádnou jednotku jako efektivní, naopak DEA CCR-I označila jako efektivní všechny jednotky kromě jedné (Chomutov). Změnou oproti předchozímu modelu však je, že MCDEA označila jako DEA efektivní 6 jednotek, přestože agregované efektivnosti nedosahuje žádná jednotka. Je tedy možné

použít hodnotu z_1 jako dodatečné kritérium efektivnosti, podle nějž lze rozdělit hodnocené jednotky do dvou skupin, na efektivní a neefektivní.

Princip agregace prostřednictvím teorie vícekriteriální funkce užitku používající nenulové váhy pro rozlišení důležitosti kritérií označí jednotku jako MCDEA efektivní tehdy a pouze tehdy, když jednotka dosáhne současně efektivnosti podle všech tří kritérií. V jiném případě je vždy označena jako neefektivní. Podle dosažené hodnoty vícekriteriální funkce užitku není vhodné neefektivní jednotky uspořádat.

Výsledky uvedené v tabulce 4.4 resp. 4.6 včetně hodnot všech proměnných jsou pro velký rozsah uvedeny v příloze č. 6 a 7.

Souhrnnou aplikací metody MCDEA je hodnocení efektivnosti 53 betonáren podle všech disponibilních vstupů (6) a výstupů (4). Agregace dílčích kritérií do jedné účelové funkce byla provedena metodou vícekriteriální funkce užitku, váhový vektor byl konstruován opět tak, aby všechna kritéria měla rovnoměrný vliv.

Výsledná tabulka hodnot vícekriteriální účelové funkce, hodnot dílčích kritérií a hodnot účelové funkce tří nedominovaných krajních bodů je uvedena v příloze č. 8. Z 53 betonáren ani jedna nedosáhla vícekriteriální efektivnosti, tzn. že žádná z hodnocených jednotek nedosáhla ideálního stavu hodnot efektivnosti pro všechna kritéria zároveň. Značným přínosem MCDEA v této aplikaci je významné zmenšení množiny DEA efektivních jednotek pro kompromisní MCDEA váhy. Počet DEA efektivních je v množině 53 betonáren 21 jednotek, počet DEA efektivních jednotek s kompromisními MCDEA váhami je 9. Platí, že je-li hodnocená jednotka s kompromisními MCDEA váhami DEA efektivní, pak je i DEA efektivní.

4.4 Souhrn praktických poznatků o metodách AHP/DEA a MCDEA

Metoda AHP/DEA byla představena na datech 12 produkčních jednotek. Při její aplikaci se ukázalo, že se jedná o vhodnou metodu v případě, že cílem je generovat pořadí srovnávaných jednotek na základě vstupních dat strukturovaných pro DEA analýzu. Metoda AHP/DEA využívá silných stránek obou přístupů: pomocí analýzy obalu dat generuje párová srovnání i s mírou preference srovnávaných jednotek, přístupem AHP pak z párových srovnání vytváří jednoznačný výstup v podobě odhadu charakteristického vektoru. Na základě uspořádání jednotek podle hodnot charakteristického vektoru pak uspořádá soubor všech hodnocených jednotek. Nevýhodou metody AHP/DEA je, že ve výstupu neexistuje informace

o hodnotách efektivností hodnocených jednotek, metoda je také díky párovému hodnocení pro větší počet jednotek výpočetně náročná.

Na stejných datech byla představena i metoda MCDEA. Je založena na zpřísnění kritérií efektivnosti hodnocených jednotek a agregaci těchto kritérií v podobě vícekritériálního lineárního programování. Autoři metody alibisticky neurčují, jaká metoda vícekritériálního lineárního programování je pro DEA model a tři různě silná kritéria efektivnosti nejvhodnější. Princip agregace kritérií do vícekritériální funkce užitku se ukázal jako ne zcela spolehlivý jak pro dichotomické rozdělení jednotek do množiny efektivních a neefektivních, tak pro jejich prosté uspořádání. Jeho přínosem je však skutečnost, že přiřazuje „rozumnější“ hodnoty vah jednotlivým vstupům a výstupům v rámci analýzy obalu dat. Pod pojmem rozumnější váhy se zde rozumí takové váhy, které vyhovují nejen DEA kritériu efektivnosti, ale i dalším odlišně formulovaným kritériím. Tímto metoda MCDEA dosahuje menšího počtu DEA efektivních jednotek.

Odlišné modely, které se snaží neutralizovat výše uvedené nežádoucí jevy analýzy obalu dat, byly již navrženy. Jedná se například o modely superefektivnosti, které umožňují diferencovat efektivní jednotky tak, že měří vzdálenost hodnocené efektivní jednotky od modifikované hranice produkčních možností. Pomocí modelu superefektivnosti lze tedy také efektivní jednotky uspořádat, či vybrat jednotku, která podle zvoleného modelu nejefektivnější. Modifikace DEA modelu s omezenými vahami vstupů a výstupů umožňuje apriori stanovit dolní a horní mez pro hodnoty vah, aby bylo zajištěno dosažení hodnot vah v požadovaném intervalu. Tento přístup omezení vah je velmi účinný, zásadně však jde proti hlavnímu principu DEA, a to libovůli jednotky ve stanovení takových vlastních vah, které jsou pro ni z hlediska zvoleného kritéria nejvýhodnější. Modely superefektivnosti i modely DEA s omezenými vahami jsou podrobněji popsány v JABLONSKÝ – DLOUHÝ (2004).

Závěr

Tato diplomová práce byla zaměřena na analýzu obalu dat ve spojení s principy vícekritériálního rozhodování. Cílem pak bylo nastínit problematiku DEA v různých oblastech vícekritériálního rozhodování, za tyto oblasti lze považovat jednak spojité problémy vícekritériálního programování, tak diskrétní modely vícekritériálního hodnocení variant. Představené modely byly teoreticky formulovány a prakticky prozkoumány.

Dílčí formulace a principy byly představeny v úvodních dvou kapitolách. Ve třetí kapitole pak již šlo obecnou charakteristiku syntetických modelů, které byly následně aplikovány na skutečných datech v poslední kapitole. Lze tedy konstatovat, že cíle vytyčené v úvodu práce byly bezesbýtku splněny.

Souhrnné poznatky této práce je možné shrnout následovně: Analýza obalu dat je relativně silným nástrojem hodnocení efektivnosti produkčních jednotek. Její základní principy lze formulovat mnoha způsoby, což vede k zásadně odlišným interpretacím výsledných hodnot. Metody a modely vícekritériálního rozhodování se ukazují jako vhodný doplněk pro usměrnění DEA ve smyslu dosažení vytyčeného cíle či omezení nežádoucích průvodních jevů v aplikacích DEA. AHP/DEA i MCDEA jsou účelně využitelné při analýze produkčních jednotek či obecněji v problematice vícekritériálních modelů. Obě metody přistupují k DEA odlišně, jsou totiž motivovány nestejnými cíli.

Hlavním přínosem AHP/DEA je možnost uspořádání hodnocených jednotek či výběr jediné kompromisní jednotky, na rozdíl od DEA, která kvůli zahrnutí principu Pareto-optimality takto silným nástrojem není. Obecně nelze říci, že DEA a AHP/DEA jsou kompatibilní, neboli poskytují výsledky, které nejsou protichůdné. Takováto vlastnost modelů DEA a AHP/DEA byla prokázána pouze pro případ jednoho vstupu a jednoho výstupu. Nespornou výhodou AHP/DEA je však skutečnost, že párová srovnání hodnocených jednotek jsou odvozena matematicky, nikoliv subjektivním hodnocením.

MCDEA jako koncept měření relativní efektivnosti přechází z monokritériálního přístupu k vícekritériálnímu tak, aby byla analýza obalu dat silnějším nástrojem ve smyslu diskriminační analýzy a v problematice omezení vah. Spolehlivě tak redukuje množinu jednotek označených jako DEA efektivní, zároveň přiřazuje takové váhy, které jsou méně jednostranně vychýlené ve prospěch jedinečných vstupů a výstupů. Zároveň se dokáže elegantně vyrovnat s existencí alternativního optimálního řešení ve standardní DEA formulaci. Zásadním nedostatkem MCDEA pro použití v praxi je neexistence uživatelsky

přístupných softwarových nástrojů pro řešení úloh vícekriteriálního lineárního programování, které by poskytovaly více nedominovaných řešení. Namísto toho je nutné omezit se na vícekriteriální přístupy generující monokriteriální úlohy řešitelné standardními softwarovými nástroji lineární optimalizace.

Bylo prokázáno, že nástroje a modely vícekriteriálního rozhodování jsou vhodným podpůrným prostředkem či doplňkem analýzy obalu dat. Nelze jednoznačně a obecně určit jediný přístup kombinace modelů vícekriteriálního rozhodování a analýzy obalu dat, přestože byly učiněny takovéto pokusy v mnoha výzkumných studiích. Pro hodnocení kvality navržených modelů lze pouze doporučit srovnání s dalšími metodami hodnocení efektivnosti a modely vícekriteriálního rozhodování. Pak lze jako kvalitní model označit takový, který poskytuje na základě použitého datového souboru konzistentní výsledky.

Ukazuje se, že zvolené téma je velmi mohutné, a je obtížné dosáhnout jeho pojetí jak v dostatečné šířce, tak i odpovídající hloubce. Autor se snažil v tomto směru dospět ve všech kapitolách k akceptovatelnému kompromisu. Práci by bylo možné rozšířit ve smyslu implementace dalších přístupů vícekriteriálního rozhodování do metody DEA. V diskrétních modelech se jedná o celou řadu aplikovatelných metod. Ve spojitých modelech existuje možnost kombinovat analýzu obalu dat s metodami vícekriteriálního programování s průběžnou informací (FIALA, 2008), které by mohly být potenciálním řešením pro problematiku přiřazování vah vstupům a výstupům.

Autor je přesvědčen, že teoretické poznatky učiněné ve třetí kapitole a následná aplikace na reálný datový soubor ve čtvrté kapitole mají v oblasti vícekriteriálních metod a analýzy obalu dat nezanedbatelný přínos. Jak poukázání na souvislosti ve vícekriteriálních metodách a DEA, tak aplikační část s rozsáhlým datovým souborem poskytují nikoliv ucelený, avšak značně souhrnný přehled dané problematiky. Jsou zmíněny modely, které byly konstruovány s cílem řešení podobných problémů. Stejně tak autor odkazuje na nedostatky popisovaných metod, které se mohou v reálných aplikacích ukázat jako fatální.

Podkladem pro vznik této práce bylo vedle standardních publikací ekonomie a operačního výzkumu také značné množství článků v odborných časopisech zabývajících se touto tematikou. Jak bylo zjištěno, problematika souvislostí mezi analýzou obalu dat a teorií vícekriteriálního rozhodování je velmi živá a v současnosti čile diskutovaná odbornými kruhy. Prozatímnní neexistence definitivních a obecně platných závěrů pak téma činí atraktivním pro další akademické zkoumání.

Reference

BELTON, Valerie – VICKERS, Stephen P. Demystifying DEA – A visual Interactive Approach Based on Multiple Criteria Analysis. *Journal of Operations Research Society*, September 1993, Vol. 44, No. 9, p. 883-896.

COOPER, William W. – SEIFORD, Lawrence M. – TONE, Kaoru. *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Boston: Kluwer Academic Publishers. 1999. 318 s.

DOYLE, John – GREEN, Rodney. Efficiency and Cross-Efficiency in DEA: Derivations, Meanings and Uses, *Journal of Operations Research Society*, May 1994, Vol. 45, No. 5, p. 567-578.

FIALA, Petr. *Modely a metody rozhodování*. Praha: Oeconomica, 2008. 292 s.

HOŘEJŠÍ, Bronislava a kol. *Mikroekonomie*. 5. vyd. Praha: Management Press. 2010. 574 s.

CHANDRAN, Bala – GOLDEN, Bruce – WASIL, Edward. Linear Programming Models for Estimating Weights in the Analytic Hierarchy Process, *Computers and Operations Research*, September 2005, Vol. 32, Issue 9, p. 2235-2254.

JABLONSKÝ, Josef – DLOUHÝ, Martin. *Modely hodnocení efektivnosti produkčních jednotek*. Praha: Professional Publishing, 2004. 183 s.

JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: Kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing. 2007b. 323 s.

JABLONSKÝ, Josef. *Programy pro matematické modelování*. Praha: Oeconomica. 2007a. 258 s.

LEE, Kyuseok – CHOI, Kyuwan. Cross Redundancy and Sensitivity in DEA Models, *Journal of Productivity Analysis*, October 2010, Vol. 34, Issue 2, p. 151-165.

LI, Xiao-Bai – REEVES, Gary R. A Multiple Criteria Approach to Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operations Research*, June 1999, Vol. 115, Issue 3, p. 507-517.

SAATY, Thomas L. *Fundamentals Of Decision Making And Priority Theory*. 2. vyd. Pittsburgh: RWS Publications. 2006. 478 s.

SARKIS, Joseph. A Comparative Analysis of DEA as a Discrete Alternative Multiple Criteria Decision Tool, *European Journal of Operations Research*, June 2000, Vol. 123, Issue 3, p. 543-557.

SEXTON, Thomas R. – SILKMAN, Richard H. – HOGAN, Andrew J. Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions. *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*. Winter, 1986. Issue 32, p. 73-104.

SINUANY-STERN, Zilla – MEHREZ, Abraham – HADAD, Yossi. An AHP/DEA Methodology for Ranking Decision Making Units. *International Transactions in Operational Research*, March 2000, Vol. 7, Issue 2, p. 109-124.

STEWART, Theodor J. Relationship between Data Envelopment Analysis and Multicriteria Decision Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, May 1996, Vol. 47, p. 654-665.

THANASSOULIS, Emmanuel. *Introduction to the Theory and Application of Data Envelopment Analysis: A Foundation Text with Integrated Software*. Norwell: Kluwer Academic Publishers. 2001. 281 s.

ZHU, Joe. *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets and DEA Excel Solver*. Boston: Kluwer Academic Publishers. 2003. 297 s.

Přílohy

Příloha č. 1: Datový soubor

VSTUPY	Průměrná zásoba		Roční spotřeba		Mzdové náklady	Počet pracovníků
	písek (t)	šterk (t)	písek (t)	šterk (t)	CZK	
Bělá	113	409	845	2 456	219	1
Beroun	1 002	1 354	3 391	2 219	448	2
Brno	707	891	50 048	32 950	1378	4
Břeclav	276	535	24 428	16 688	808	3
České Budějovice	858	874	27 021	17 696	695	5
Dačice	407	91	6 956	3 785	418	2
Děčín	99	159	10 633	4 339	453	2
Dětmarovice	135	442	15 035	13 143	262	2
Dvůr Králové	164	145	12 926	6 038	589	3
Hodonín	313	321	7 437	5 379	490	2
Horní Počernice	268	548	29 673	37 533	1130	4
Hřebeč	410	287	3 222	1 925	218	2
Chomutov	218	229	7 544	5 627	792	2
Jablunkov	472	869	26 553	24 795	637	2
Jevíčko	521	167	5 506	3 682	434	2
Jihlava	508	477	19 625	10 104	606	3
Klecany	201	357	29 841	19 809	1079	4
Kolín	258	258	19 129	9 878	620	3
Kunovice	264	780	14 334	11 898	743	3
Letkov	399	347	15 184	11 749	745	3
Liberec	415	743	25 919	14 732	690	3
Libuš	145	297	13 675	6 855	1032	2
Malešice	1 836	2 273	53 334	57 307	3236	5
Mikulov	461	508	7 371	5 093	265	2
Mladá Boleslav	82	224	9 087	7 032	690	3
Náklo	672	956	16 313	10 072	608	2
Nepomuk	137	153	7 471	3 095	395	2
Nové Strašecí	132	86	9 247	6 167	610	3
Ohrazenice	108	273	10 851	7 561	444	2
Okarec	197	85	981	512	119	2
Olomouc	285	209	29 733	26 342	969	3
Ostrava	466	1 820	29 406	27 574	724	3
Otrokovice	1 945	2 702	40 197	33 359	1151	5
Pardubice	265	364	17 550	9 663	455	3
Plačice	356	458	22 965	14 545	569	2
Plzeň	313	352	20 901	13 828	722	4

Poděbrady	254	593	19 651	13 543	560	2
Sokolov	376	442	15 464	11 741	727	3
Správkčice	178	276	14 888	8 427	569	2
Stodůlky	761	459	29 744	22 475	1270	4
Stonava	193	642	13 473	12 548	561	2
Šenov	32	40	16 097	7 056	504	2
Šumperk	461	1 305	13 152	9 251	494	2
Teplice	259	840	19 642	12 662	701	3
Třebíč	342	367	7 789	4 909	416	2
Týn nad Vltavou	441	866	13 204	14 942	298	3
Uherský Brod	373	586	17 648	14 914	534	2
Ústí nad Labem	211	238	14 869	9 130	683	3
Valašské Klobouky	139	489	13 939	10 679	463	2
Valašské Meziříčí	806	1 213	23 297	15 888	865	3
Vsetín	935	2 059	21 467	16 330	741	3
Zlín	898	1 756	13 651	12 972	653	3
Znojmo	271	398	13 217	8 219	609	3

VÝSTUPY	objem výroby	marže	obrat	prodej kameniva
	m ³	CZK	CZK	t
Bělá	1 234	646	2 036	5
Beroun	2 295	1 342	3 673	6
Brno	35 884	21 564	61 720	53
Břeclav	17 484	8 144	27 331	31
České Budějovice	13 636	5 723	22 662	6 227
Dačice	4 548	2 306	6 733	8
Děčín	5 701	2 946	9 758	681
Dětmárovice	11 379	3 393	16 167	5
Dvůr Králové	7 959	4 781	11 338	1
Hodonín	5 283	1 887	6 905	28
Horní Počernice	27 272	16 859	38 830	43
Hřebeč	2 013	764	4 126	25
Chomutov	5 243	2 374	7 491	53
Jablunkov	19 610	9 140	32 157	67
Jevíčko	3 774	2 143	6 127	36
Jihlava	11 963	8 345	22 536	13
Klecany	19 750	14 847	32 443	669
Kolín	12 453	7 336	18 863	39
Kunovice	11 105	6 426	18 083	28
Letkov	8 110	4 525	12 157	3 506
Liberec	16 754	11 592	29 764	288
Libuš	8 794	7 103	19 711	216
Malešice	46 484	25 257	82 883	35
Mikulov	5 328	1 783	6 757	1

Mladá Boleslav	6 790	2 953	10 007	1
Náklo	11 398	7 033	20 565	6
Nepomuk	3 572	1 655	5 626	617
Nové Strašecí	5 631	3 287	8 794	809
Ohrazenice	7 622	5 120	12 436	204
Okarec	469	174	695	99
Olomouc	23 702	7 428	29 786	310
Ostrava	23 488	8 128	34 087	137
Otrokovice	29 617	14 125	46 820	100
Pardubice	11 661	8 263	20 081	57
Pláče	15 274	9 246	22 423	27
Plzeň	13 720	6 173	20 642	1 077
Poděbrady	13 714	7 172	19 143	34
Sokolov	10 666	5 406	21 768	135
Správkčice	10 359	6 633	18 220	25
Stodůlky	21 206	13 322	36 886	778
Stonava	11 770	4 192	15 535	1
Šenov	10 085	7 268	21 055	1
Šumperk	8 370	3 437	12 531	1 264
Teplice	13 849	7 438	20 827	71
Třebíč	5 342	1 615	7 451	12
Týn nad Vltavou	7 784	3 036	12 355	1
Uherský Brod	13 882	7 703	22 048	118
Ústí nad Labem	10 231	6 204	15 174	130
Valašské Klobouky	10 146	4 709	16 262	170
Valašské Meziříčí	15 604	7 690	26 088	239
Vsetín	15 303	7 073	25 188	167
Zlín	10 681	5 252	15 456	532
Znojmo	9 178	3 575	12 732	4

Příloha č. 2: Optimální hodnoty modelů AA, BA, BB, AB v AHP/DEA

AA, BA AB, BB	1	2	3	4	5	6
1	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 0,71 0,71	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 0,85 0,85	1,00 1,00 1,00 1,00
2	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 0,71 0,71	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 0,76 0,76	1,00 1,00 1,00 1,00
3	1,00 0,71 1,00 0,71	1,00 0,71 1,00 0,71	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,97 0,97 1,00 1,00	0,92 0,92 1,00 1,00
4	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
5	1,00 0,85 1,00 0,85	1,00 0,76 1,00 0,76	0,97 1,00 0,97 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
6	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,92 1,00 0,92 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
7	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,89 1,00 0,89 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,92 1,00 0,92 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
8	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,94 1,00 0,94 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,97 1,00 0,97 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
9	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
10	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,76 1,00 0,76 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,81 1,00 0,81 1,00	0,94 1,00 0,94 1,00
11	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,96 1,00 0,96 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
12	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,83 1,00 0,83 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,86 1,00 0,86 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00

AA, BA AB, BB	7	8	9	10	11	12
1	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
2	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
3	0,89 0,89 1,00 1,00	0,94 0,94 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,76 0,76 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,83 0,83 1,00 1,00
4	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,96 0,96 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
5	0,92 0,92 1,00 1,00	0,97 0,97 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,81 0,81 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,86 0,86 1,00 1,00
6	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,94 0,94 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
7	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
8	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
9	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,94 0,94 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
10	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	0,94 1,00 0,94 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
11	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00
12	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00 1,00

Příloha č. 3: formulace modelu AA v AHP/DEA

```
MODEL:
SETS:
    vstupy/1..3/:u;
    vystupy/1..2/:v;
    jednotky/1..12/;;
    maticevstup(jednotky,vstupy):x;
    maticevystup(jednotky,vystupy):y;
ENDSETS
DATA:
    x=@OLE('data.xls','vstupy');
    y=@OLE('data.xls','vystupy');
    A=1;
    B=2;
ENDDATA
    max=Eaa;
    Eaa=@SUM(vystupy(i):v(i)*y(A,i));
    @SUM(vstupy(j):u(j)*x(A,j))=10000;
    @SUM(vystupy(i):v(i)*y(A,i))<=10000;
    @SUM(vystupy(i):v(i)*y(B,i))-@SUM(vstupy(j):u(j)*x(B,j))<=0;
END
```

Příloha č. 4: formulace modelu BA v AHP/DEA

```
MODEL:
SETS:
    vstupy/1..3/:u;
    vystupy/1..2/:v;
    jednotky/1..12/;;
    maticevstup(jednotky,vstupy):x;
    maticevystup(jednotky,vystupy):y;
ENDSETS
DATA:
    x=@OLE('data.xls','vstupy');
    y=@OLE('data.xls','vystupy');
    A=1;
    B=2;
    Eaa=1;
    eps=0.00000001;
ENDDATA
    max=Eba;
    Eba=@sum(vystupy(i):v(i)*y(B,i));
    @sum(vstupy(j):u(j)*x(B,j))=10000;
    @sum(vystupy(i):v(i)*y(B,i))<=10000;
    @sum(vystupy(i):v(i)*y(A,i))-Eaa*@sum(vstupy(j):u(j)*x(A,j))=0;
    @for(vystupy(i):v(i)>=eps);
    @for(vstupy(j):u(j)>=eps);
END
```

Příloha č. 5: formulace MCDEA

MODEL:

SETS:

```
vstupy/1..3/:u;  
vystupy/1..2/:v;  
jednotky/1..12/:d;  
maticevstup(jednotky,vstupy):x;  
maticevystup(jednotky,vystupy):y;  
kriteria/1..3/:z;
```

ENDSETS

DATA:

```
x=@OLE('data.xls','vstupy');  
y=@OLE('data.xls','vystupy');  
q=1;  
@OLE('data.xls','zet')=z;  
@OLE('data.xls','vahyvstup')=u;  
@OLE('data.xls','vahyvystup')=v;  
@OLE('data.xls','odch')=d;
```

ENDDATA

```
min=(z(1)+z(2)+z(3))/3;  
z(1)=d(q);  
z(2)=@SUM(jednotky(k):d(k))/12;  
z(3)=M;  
@SUM(vstupy(j):u(j)*x(q,j))=10000;  
@FOR(jednotky(k):  
    @SUM(vystupy(i):v(i)*y(k,i))-@SUM(vstupy(j):u(j)*x(k,j))+d(k)=0  
);  
@FOR(jednotky(k): M-d(k)>=0 );
```

END

Příloha č. 6: MCDEA – podrobný přehled pro 3 vstupy a 2 výstupy

Hodnoty neefektivnosti v intervalu $\langle 0;10000 \rangle$

	Děčín	Dvůr Králové	Chomutov	Liberec	Boleslav	Mladá	Ohrazenice
z	2846,773	2094,524	3204,603	979,394	2678,393	2327,780	
z ₁	250,975	309,462	3984,951	13,343	2915,375	1532,971	
z ₂	2881,475	1744,738	1643,907	854,199	1495,238	1591,779	
z ₃	5407,871	4229,371	3984,951	2070,641	3624,567	3858,588	
u ₁	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
u ₂	1,771	1,137	1,071	0,557	0,974	1,037	
u ₃	5,110	5,321	5,014	2,605	4,560	4,855	
v ₁	1,292	1,218	1,147	0,596	1,043	1,111	
v ₂	0,244	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
d ₁	250,975	404,112	380,758	197,848	346,324	368,684	
d ₂	649,491	309,462	291,578	151,508	265,209	282,332	
d ₃	5407,871	4229,371	3984,951	2070,641	3624,567	3858,588	
d ₄	702,793	27,253	25,678	13,343	23,355	24,863	
d ₅	4763,001	3401,842	3205,245	1665,494	2915,375	3103,607	
d ₆	2774,316	1680,279	1583,174	822,641	1439,997	1532,971	
d ₇	3452,961	968,512	912,541	474,170	830,014	883,604	
d ₈	5407,871	2859,246	2694,006	1399,846	2450,370	2608,580	
d ₉	5407,871	4229,371	3984,951	2070,641	3624,567	3858,588	
d ₁₀	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
d ₁₁	3025,209	1266,109	1192,939	619,869	1085,054	1155,111	
d ₁₂	2735,335	1561,297	1471,067	764,389	1338,030	1424,420	

	Ústí nad Labem	Teplice	Správčice	Sokolov	Plzeň	Pláčice
z	1791,850	1331,307	1549,415	1863,270	1504,994	1182,832
z ₁	1113,786	698,424	0,000	2206,943	1461,443	495,024
z ₂	1244,648	962,450	1615,784	1175,925	891,786	891,766
z ₃	3017,117	2333,048	3032,459	2206,943	2161,754	2161,706
u ₁	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
u ₂	0,811	0,627	0,993	0,723	0,581	0,581
u ₃	3,796	2,935	2,865	2,085	2,720	2,720
v ₁	0,869	0,672	0,725	0,527	0,622	0,622
v ₂	0,000	0,000	0,137	0,100	0,000	0,000
d ₁	288,282	222,920	140,734	102,422	206,553	206,549
d ₂	220,762	170,709	364,202	265,056	158,175	158,172
d ₃	3017,117	2333,048	3032,459	2206,943	2161,754	2161,706
d ₄	19,441	15,033	394,091	286,809	13,930	13,929
d ₅	2426,780	1876,558	2670,849	1943,772	1738,780	1738,741
d ₆	1198,665	926,892	1555,695	1132,193	858,839	858,820
d ₇	690,910	534,260	1936,245	1409,147	495,035	495,024
d ₈	2039,707	1577,246	3032,459	2206,943	1461,443	1461,411
d ₉	3017,117	2333,048	3032,459	2206,943	2161,754	2161,706
d ₁₀	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
d ₁₁	903,207	698,424	1696,384	1234,583	647,145	647,131
d ₁₂	1113,786	861,258	1533,837	1116,285	798,024	798,006

Příloha č. 7: MCDEA – podrobný přehled pro 6 vstupů a 4 výstupy

Hodnoty neefektivnosti v intervalu $\langle 0;10000 \rangle$

	Děčín	Dvůr Králové	Chomutov	Liberec	Mladá Boleslav	Ohrazenice
z	803,300	793,473	963,016	358,032	644,515	530,775
z_1	0,000	932,956	513,132	302,713	108,158	0,000
z_2	829,674	514,506	686,615	260,113	561,220	493,263
z_3	1580,227	932,956	1689,301	511,270	1264,166	1099,060
u_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
u_2	0,000	0,299	0,000	0,000	0,000	0,000
u_3	0,653	0,602	1,044	0,297	0,834	0,727
u_4	0,505	0,265	0,320	0,128	0,272	0,243
u_5	0,000	0,983	0,000	0,620	0,736	0,623
u_6	434,887	0,000	160,201	0,000	0,000	0,000
v_1	1,333	1,139	1,787	0,527	1,457	1,269
v_2	0,000	0,000	0,000	0,055	0,000	0,006
v_3	0,053	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
v_4	2,768	1,324	2,207	0,781	1,615	1,439
d_1	0,000	644,966	1123,030	289,773	978,909	832,504
d_2	1580,227	932,956	1689,301	511,270	1264,166	1099,060
d_3	1101,542	834,525	513,132	511,270	682,187	598,088
d_4	952,814	932,956	1689,301	302,713	1264,166	1099,060
d_5	1203,014	340,978	86,712	278,930	108,158	106,479
d_6	384,200	96,808	0,000	0,000	0,000	0,000
d_7	1580,227	932,956	1605,634	440,479	1237,092	1099,060
d_8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
d_9	1580,227	932,956	1030,338	511,270	870,795	779,628
d_{10}	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
d_{11}	756,501	243,241	140,639	112,051	54,093	64,236
d_{12}	817,336	281,728	361,287	163,596	275,075	241,046

	Plzeň	Sokolov	Správkice	Teplice	Ústí nad Labem	
z	388,989	278,848	518,174	400,908	307,967	454,317
z ₁	0,000	0,000	0,000	0,000	26,591	179,197
z ₂	334,162	262,091	445,378	376,816	275,880	366,698
z ₃	832,804	574,452	1109,145	825,907	621,430	817,056
u ₁	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
u ₂	0,553	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
u ₃	0,373	0,379	0,573	0,545	0,410	0,540
u ₄	0,017	0,131	0,083	0,189	0,134	0,180
u ₅	1,411	0,353	0,224	0,507	0,362	0,463
u ₆	67,591	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
v ₁	0,654	0,670	0,741	0,963	0,716	0,943
v ₂	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,005
v ₃	0,000	0,000	0,091	0,000	0,000	0,000
v ₄	0,501	0,754	0,789	1,084	0,794	1,070
d ₁	832,804	432,219	903,953	621,414	481,205	618,894
d ₂	832,804	574,452	1109,145	825,907	621,430	817,056
d ₃	832,804	329,197	356,594	473,297	335,344	444,627
d ₄	403,141	574,452	871,803	825,907	621,430	817,056
d ₅	367,538	67,075	0,000	96,435	53,167	79,158
d ₆	0,000	7,523	0,000	10,816	0,000	0,000
d ₇	0,000	574,452	1109,145	825,907	608,121	817,056
d ₈	0,000	0,000	386,619	0,000	0,000	0,000
d ₉	394,445	420,437	0,000	604,475	428,059	579,585
d ₁₀	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
d ₁₁	103,596	33,745	244,181	48,517	26,591	47,754
d ₁₂	242,816	131,538	363,090	189,116	135,220	179,197

Příloha č. 8: MCDEA – 53 jednotek, 6 vstupů, 4 výstupy

Hodnoty neefektivnosti v intervalu $\langle 0;10000 \rangle$

	z	z ₁	z ₂	z ₃	DEA	minsum	minimax
Bělá	8854,296	3944,733	7256,277	15361,88	0	5136,031	15154,91
Beroun	4826,808	5372,567	2905,256	6202,603	773,9339	2242,941	6157,451
Brno	392,5486	0	362,8369	814,8088	0	205,2008	739,2859
Břeclav	974,875	502,9167	458,9918	1962,717	323,8851	414,3339	1471,85
České Budějovice	685,0033	0	670,0667	1384,943	0	381,1824	1380,396
Dačice	3214,891	2622,326	2289,741	4732,606	388,1945	1503,658	4701,822
Děčín	2354,438	2018,686	1651,023	3393,605	0	1058,552	3384,803
Dětmarovice	1334,528	127,5357	1196,412	2679,637	0	632,7889	2488,407
Dvůr Králové	2136,725	1238,498	853,2292	4318,446	410,8849	846,4432	2723,496
Hodonín	2933,445	1902,894	1677,355	5220,085	764,4459	1304,009	4196,741
Horní Počernice	539,1481	0	527,392	1090,052	0	276,3404	1087,947
Hřebeč	5422,021	2178,275	4592,181	9495,608	923,6488	3067,584	8903,976
Chomutov	2928,488	2597,82	1504,744	4682,902	1009,987	1220,269	3590,797
Jablunkov	797,049	373,3966	662,5192	1355,231	0	349,1252	1355,061
Jevíčko	3550,36	2533,896	2646,729	5470,454	712,5997	1771,667	5356,691
Jihlava	1286,863	985,0898	920,5127	1954,986	728,7905	553,6095	1899,659
Klecany	840,4832	319,5071	391,8587	1810,084	0	340,8983	1192,266
Kolín	1375,883	743,4951	657,108	2727,045	180,3122	566,8207	1935,771
Kunovice	1408,342	619,3976	876,8353	2728,793	194,0073	657,5144	2268,036
Letkov	1379,189	147,016	635,2564	3355,295	0	635,2564	2182,323
Liberec	912,9501	539,9418	703,9208	1494,988	0	411,3974	1454,522
Libuš	1486,316	1041,553	1093,986	2323,409	0	765,3495	2269,421
Malešice	282,3922	0	277,2668	569,9098	0	161,0956	569,5195
Mikulov	2892,823	1050,55	2246,479	5381,44	381,5443	1365,646	4800,734
Mladá Boleslav	2342,955	1582,087	1324,576	4122,202	415,2108	1035,311	3287,952
Náklo	1236,905	415,0603	1055,014	2240,64	140,383	634,6736	2183,164
Nepomuk	3330,018	3126,49	2237,968	4625,597	232,1041	1488,171	4603,692
Nové Strašecí	2410,939	1609,702	1367,458	4255,656	0	1071,638	3403,375
Ohrazenice	1914,05	984,4163	1551,33	3206,404	86,27483	921,6999	3195,824
Okarec	8954,223	9478,584	6030,504	11353,58	1293,773	5729,473	11155,21
Olomouc	684,622	0	510,4356	1543,43	0	315,2491	1174,396
Ostrava	628,1636	0	581,6819	1302,809	0	314,6861	1219,455
Otrokovice	647,5556	617,0986	432,2213	893,3468	515,5321	238,8234	889,9967
Pardubice	1256,048	498,4447	1046,706	2222,995	0	612,5148	2161,569
Plačice	1173,111	516,5454	590,0725	2412,716	0	452,8055	1638,275
Plzeň	1175,991	682,7893	539,2541	2305,93	293,4715	487,8018	1714,824
Poděbrady	1290,107	691,5328	717,663	2461,124	434,9801	515,8149	1865,411

Sokolov	1200,74	350,1353	1041,067	2211,018	66,18383	628,2585	2165,9
Správkčice	1388,204	535,2107	1161,854	2467,546	0	709,6226	2404,182
Stodůlky	758,2934	372,5972	360,544	1541,739	134,5366	328,2132	1146,719
Stonava	1278,509	0	932,7431	2902,783	0	679,6263	2478,654
Šenov	1183,476	0	1136,573	2413,856	0	697,3424	2341,755
Šumperk	1636,017	703,465	1022,493	3182,093	338,9955	760,6099	2668,556
Teplice	1220,505	621,3436	576,2105	2463,961	298,7699	522,0911	1820,342
Třebíč	2866,124	1648,273	1690,161	5259,938	563,0654	1304,542	4264,361
Týn nad Vltavou	2203,852	2661,847	1287,862	2661,847	2073,896	655,1754	2657,329
Uherský Brod	997,0945	0	975,3528	2015,931	0	540,2095	2011,221
Ústí nad Labem	1610,139	482,7263	692,1095	3655,582	197,1247	692,1095	2311,563
Valašské Klobouky	1471,48	628,1857	1234,565	2551,689	328,4042	702,9664	2544,857
Valašské Meziříčí	1139,362	897,2942	477,7711	2043,02	868,9964	433,1729	1515,281
Vsetín	1079,258	766,6554	791,0612	1680,057	621,1198	456,9015	1642,12
Zlín	1421,528	551,777	902,9	2809,908	303,2145	663,131	2371,978
Znojmo	1853,928	1095,441	846,5156	3619,826	394,8365	776,0728	2595,788

