

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

2013

Bc. Veronika Svobodová

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE
FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY



Název diplomové práce:

Optimalizace údržby autobusových zastávek

Autor:	Bc. Veronika Svobodová
Katedra:	Katedra ekonometrie
Obor:	Ekonometrie a operační výzkum
Vedoucí práce:	Ing. Jan Fábry, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Optimalizace údržby autobusových zastávek“ zpracovala samostatně. Veškerou použitou literaturu a další podkladové materiály uvádím v seznamu použité literatury.

V Praze dne 10. května 2013

.....
Bc. Veronika Svobodová

Poděkování:

Rád bych na tomto místě poděkovala Ing. Janu Fábrymu, Ph.D. za vedení mé diplomové práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily.

Abstrakt

Název práce: Optimalizace údržby autobusových zastávek

Autor: Bc. Veronika Svobodová

Katedra: Katedra ekonometrie

Vedoucí práce: Ing. Jan Fábry, Ph.D.

Cílem práce je najít nejkratší trasy vývozu odpadkových košů pro několik variant a také určit vhodnost heuristických metod. Úlohy jsou řešeny vkládací metodou, metodou nejbližšího souseda a optimalizací. Při optimalizaci je použit systém LINGO a optimalizační řešitel CPLEX. V práci je nejprve popsán reálný problém vývozu odpadkových košů na autobusových zastávkách. Další kapitola je věnována modelům okružních a rozvozních úloh, jejich klasifikacím, určení problémů při řešení těchto úloh a jejich řešení. Jedná se o úlohu obchodního cestujícího s jedním nebo více vozidly a rozvozní úlohu s jedním nebo více vozidly a jedním nebo více výchozími místy. V poslední kapitole jsou popsány a porovnány výsledky vkládací metody, metody nejbližšího souseda a optimalizace na problému výlepu jízdních řádů a vývozu odpadkových košů.

Klíčová slova: modely okružních a rozvozních úloh, vkládací metoda, metoda nejbližšího souseda, optimalizace, CPLEX

Abstract

Title: The Optimization of Maintenance of Bus Stops

Author: Bc. Veronika Svobodová

Department: Department of Econometrics

Supervisor: Ing. Jan Fábry, Ph.D.

The aim of my thesis is to find the shortest total route to export trash at the bus stops for several variants and also determine the suitability of approximate algorithms. The tasks are solved by insertion heuristic, closest neighbor heuristic and optimization. The optimal solution is gained by using the system LINGO and by using optimization solver CPLEX. In my thesis I first describe the problem of maintenance of bus stops. Following chapter is devoted to the role of routing problems, its classifications, problems to solve, possibilities of solution. The used methods are Traveling Salesman Problem with one or multiple vehicles available in a unique depot and Vehicle Routing Problem with one or multiple vehicles available in a unique depot or multiple depots. The last chapter describes and compare the results of the solution of insertion heuristic, closest neighbor heuristic and optimization for problem of replacement of bus schedules and of maintenance of bus stops.

Keywords: routing problems, insertion heuristic, closest neighbor heuristic, optimization, CPLEX

Obsah

ÚVOD	2
1 POPIS REÁLNÉHO PROBLÉMU – ÚDRŽBA ZASTÁVEK AUTOBUSŮ DÁLKOVÉ DOPRAVY V PRAZE.....	4
2 MODELÝ OKRUŽNÍCH A ROZVOZNÍCH ÚLOH	8
2.1 KLASIFIKACE OKRUŽNÍCH A ROZVOZNÍCH ÚLOH	8
2.2 PROBLÉMY A MOŽNOSTI ŘEŠENÍ	9
2.3 ÚLOHA OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍHO	10
2.4 ÚLOHA S VÍCE OBCHODNÍMI CESTUJÍCÍMI	11
2.5 ROZVOZNÍ ÚLOHA S JEDNÍM VOZIDLEM.....	15
2.6 ROZVOZNÍ ÚLOHA S VÍCE VOZIDLY V JEDNOM VÝCHOZÍM MÍSTĚ	16
2.7 ROZVOZNÍ ÚLOHA S VÍCE VOZIDLY A NĚKOLIKA VÝCHOZÍMI MÍSTY	19
3 APLIKACE VYBRANÝCH MODELŮ NA REÁLNÝ PROBLÉM	22
3.1 VÝLEP JÍZDNÍCH ŘÁDŮ - DVĚ VOZIDLA	23
3.2 VÝLEP JÍZDNÍCH ŘÁDŮ - TŘI VOZIDLA	31
3.3 VÝVOZ KOŠŮ ZE VŠECH ZASTÁVEK - DVĚ VOZIDLA	37
3.4 VÝVOZ KOŠŮ ZE VŠECH ZASTÁVEK - TŘI VOZIDLA	48
3.5 VÝVOZ KOŠŮ BEZ ZASTÁVEK AS ČERNÝ MOST A LETŇANY - DVĚ VOZIDLA	56
3.6 VÝVOZ KOŠŮ BEZ ZASTÁVEK AS ČERNÝ MOST A LETŇANY - TŘI VOZIDLA.....	63
ZÁVĚR	72
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	74

Úvod

Distribuční úlohy, mezi které patří úloha obchodního cestujícího i rozvozní úloha, můžeme vidět všude kolem nás. Jedná se například o rozvoz obědů pro seniory, svoz komunálního odpadu, rozvážení poštovních zásilek a různé druhy zásobování, tedy všude tam, kde se jedná o rozvoz či svoz jakýchkoli produktů s požadavky i bez požadavků na kapacitu vozidla.

I když jsou tyto situace na každodenním pořádku, informovanost malých až středně velkých společností o možnosti optimalizace tras a ušetření nemalých nákladů, je velmi nízká. Jednotlivé trasy si určují sami zaměstnanci, kteří se snaží zkrátit si cestu či vynaložené úsilí, ale při vzrůstajícím počtu míst je jejich snaha mizivá.

K rozhodnutí věnovat se okružním a rozvozním úlohám mě přivedla má dosavadní práce právě ve středně velké společnosti, která má na starost správu autobusových stanišť a nácestných zastávek v Praze. Mezi povinnosti správce patří mimo jiné vývoz odpadkových košů a tomuto problému se hodlám v diplomové práci věnovat. Tato práce také částečně navazuje na mou bakalářskou práci.

První kapitola je věnována popisu reálného problému vývozu odpadkových košů. Seznámíme se zde se systémem autobusové dopravy v Praze a kdo jej spravuje. Dále se dozvíme, jakých autobusových stanišť a nácestných zastávek se diplomová práce týká a v neposlední řadě jaké informace a předpoklady bylo nutné vyhledat a určit, aby bylo možné úlohu řešit. Jedná se především o zjištění stávajícího stavu, sestavení matice nejkratších vzdáleností a určení doby vývozu odpadu na konkrétní zastávce, množství odpadu aj.

Cílem diplomové práce není vyčerpávající souhrn teoretických poznatků o úloze obchodního cestujícího a rozvozní úloze, ale pouze jejich základní popis s vymezením těch obecných poznatků, které se aplikují na praktickou úlohu. V druhé kapitole se seznámíme s klasifikací okružních a rozvozních úloh, určíme problémy při řešení těchto úloh a jejich řešení. Dále si přiblížíme úlohu obchodního cestujícího s jedním a více vozidly. V neposlední řadě je také kapitola věnovaná rozvozní úloze s jedním a více vozidly a jedním a více výchozími místy.

Poslední, třetí kapitola se zabývá aplikací vkládací metody a metody nejbližšího souseda. Vzhledem k tomu, že tato práce částečně vychází z dat mé bakalářské práce Optimalizace výlepu autobusových jízdních řádů, vyzkoušíme nejprve vhodnost vkládací

metody na příkladu s výlepem jízdních řádů se dvěma a třemi vozidly. Tato kapitola je rozdělena do šesti částí, a to výlep jízdních řádů se dvěma vozidly, výlep jízdních řádů s třemi vozidly, vývoz košů ze všech zastávek se dvěma vozidly, vývoz košů ze všech zastávek s třemi vozidly, vývoz košů bez zastávek AS Černý Most a Letňany se dvěma vozidly a vývoz košů bez zastávek AS Černý Most a Letňany s třemi vozidly. V prvních dvou částech jsou popsány a porovnávány tři základní obměny modelu. Modely, u kterých se cesty tvoří současně a to bez časového omezení i s časovým omezením, a dále model, kdy jsou jednotlivé cesty vytvářeny postupně a to s časovým omezením. Zbývající čtyři části jsou rozděleny na tyto stejné podkapitoly:

1. Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem a časovým omezením
2. Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem a časovým omezením
3. Cesty tvořené současně se dvěma/třemi výchozími místy a časovým omezením
4. Optimalizace s jedním výchozím místem a časovým omezením
5. Shrnutí

V první a druhé podkapitole je použita vkládací metoda. Třetí podkapitola s více výchozími místy obsahuje model odpovídající současné praxi. Úloha je řešena metodou nejbližšího souseda. Dále je zde uvedeno optimální řešení a shrnutí výsledků.

Všechny algoritmy jsou naprogramovány ve VBA for Excel, jež využívá vstupní data z MS Excelu. Pro optimalizaci byl vybrán řešitel CPLEX. Všechny soubory lze nalézt na přiloženém CD.

Zastávky jsou v současné době obsluhovány třemi vozidly s posádkou a zvlášť dvěma zaměstnanci, kteří uklízejí AS Černý Most a Letňany. Naším cílem je najít nejkratší trasy vývozu odpadkových košů pro několik variant, které mají různé požadavky:

1. Úloha se všemi zastávkami
 - a. dvě vozidla – musí být dodržena osmihodinová pracovní doba
 - b. tři vozidla – zjistit, zda je možné objet za šest hodin
2. Úloha bez zastávek AS Černý Most a Letňany
 - a. dvě vozidla – nejlépe, pokud trasy budou trvat do sedmi hodin
 - b. tři vozidla – trasy mohou trvat maximálně šest hodin

Tato práce nemá za cíl určit jedno nejvýhodnější řešení, ale dát vedení firmy na výběr nejlepší výsledky všech variant, aby si mezi nimi mohlo vybrat takové řešení, které odpovídá jejich aktuální potřebě. Může se tedy stát, že bude využito hned několik modelů pro různé situace, které mohou ve firmě nastat.

1 Popis reálného problému – údržba zastávek autobusů dálkové dopravy v Praze

Na území hlavního města Prahy se nachází autobusová stanoviště a nácestné zastávky (dále jen AS a NZ) s červenými a modrými označníky. Jedná se o zastávky v rámci systému PID¹ (červené sloupky), z kterých je uskutečňována městská hromadná doprava, a mimo systém PID (modré sloupky), které slouží pro příměstskou a dálkovou dopravu. Správcem červených PID zastávek je DP hl.m.Prahy² a modrých zastávek TSK hl.m.Prahy³ (dále jen TSK).

Zastávky v majetku TSK jsou primárně určeny k přepravě cestujících mimo území hlavního města Prahy. Konkrétně se jedná o AS Černý Most, Letňany, Na Knížecí, Roztyly, Zličín, Želivského a NZ (viz Tab. 1.1). Většinu svých činností, jako údržba komunikací, chodníků, tunelů, mostů, zeleně, dopravního značení, světelné signalizace aj., zajišťuje TSK dodavatelským způsobem [14].

	Nácestné zastávky
Praha 1	Hlavní nádraží
Praha 3	Spojovací Koněvova, Spořovací Českobrodská
Praha 4	Opatov
Praha 5	Nové Butovice, Stodůlky
Praha 6	Aviatická, Bílá Hora, Bílý Beránek, Dejvická, Dědina, Divoká Šárka, Horoměřická, Hradčanská, K letišti, Terminál 3, U hangáru
Praha 8	Ládví, Vychovatelna, Ďáblice, Vozovna Kobylisy
Praha 9	Prosek, Špitálská, Huntírovská
Praha 10	Černokostelecká

Tab. 1.1 – Seznam nácestných zastávek.

K náležité údržbě AS a NZ patří zejména vyvážení odpadkových košů, udržování čistoty v okolí zastávek, sekání trávy, udržování chodníků v zimním období, výlep jízdních řádů a další.

Na všech AS a NZ se musí pravidelně vyvážet odpadkové koše a zametat přilehlé plochy. Tak se děje jeden krát denně na 31 zastávkách. Úklid zastávek začíná v brzkých

¹ Pražská integrovaná doprava

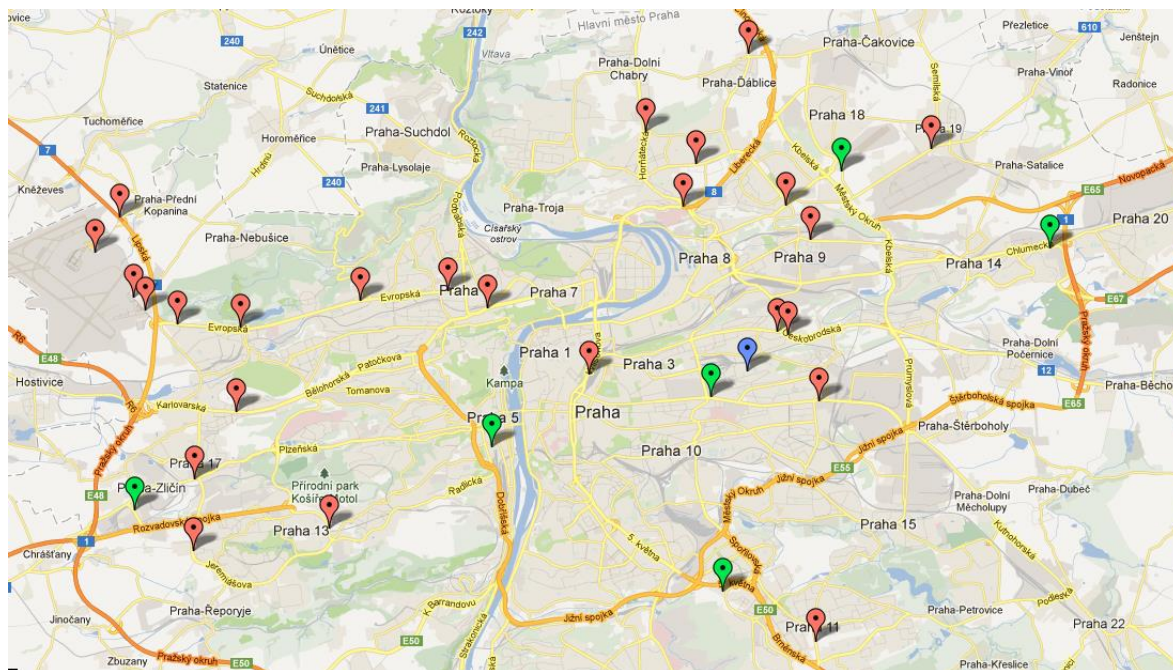
² Dopravní podnik hlavního města Prahy

³ Technická správa komunikací hlavního města Prahy

ranních hodinách. Dosavadní praxe vývozu odpadkových košů a údržby okolí zastávek neprobíhá příliš efektivně. Všechny zastávky, kromě AS Černý Most a Letňany, které uklízejí průběžně dva samostatní pracovníci, objíždějí tři posádky. Toto rozdělení se zdá neekonomické. Je to i z toho důvodu, že se zde angažují zaměstnanci z jiných zakázek společnosti, kteří spadají pod různé vedoucí zaměstnance, a tudíž je obtížné kontrolovat odvedenou práci, protože není jasné, na jaké zakázce se zaměstnanci zrovna nacházejí. Je tedy nutné najít takové řešení, které by sjednotilo prováděné úklidy na AS a NZ, a zaměstnavatel přesně věděl, kterému pracovníku náleží jednotlivé zastávky a v jakou dobu je uklízí, a tím byla možná následná kontrola jak odvedené práce, tak zaměstnance.

Nejprve bylo nutné vyhledat všechny zastávky na mapě hl.m. Prahy. K tomu byly použity mapy od Googlu. Bylo to z toho důvodu, že Google maps umožňují vytváření vlastních map a mají aplikaci “Street view“, která se velmi osvědčila při hledání přesné polohy NZ, vzhledem k tomu, že nejsou na mapách zakresleny. Byla tedy vytvořena mapa se zanesenými značkami jednotlivých zastávek (Obr. 1.1), kde výchozí místo, sídlo firmy, je označeno modrou značkou, NZ jsou červené a AS mají zelené značky. Mapu je také možné nalézt online, s možností vyššího rozlišení na adrese:

<http://maps.google.com/maps/ms?ie=UTF&msa=0&msid=204000856612310948281.00047f55bc86e4594104c>. [12]



Obr. 1.1 – Mapa s vyznačenými zastávkami NZ a AS [12].

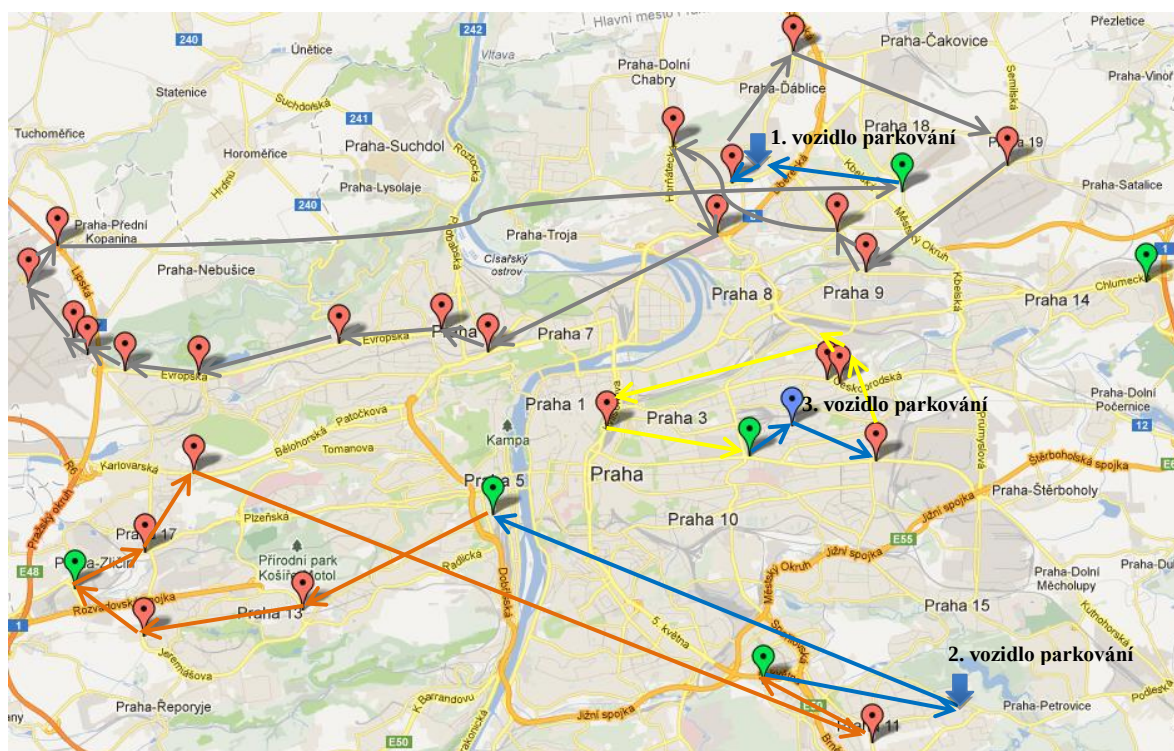
Pro zobecnění skutečnosti je použita jen jedna značka pro jedno jméno zastávky, i když pod jedno jméno většinou spadají dvě zastávky a to směrem z centra a do centra Prahy. Je to možné vzhledem k tomu, že se zastávky nacházejí naproti sobě a tudý není problém přejít na druhou stranu. Výjimku tvoří zastávka Spojovací, která má dvě značky pro zastávky Spojovací Koněvova a Spojovací Českobrodská. Je to z toho důvodu, že jsou zastávky daleko od sebe. Jsou zde také zastávky, z kterých se odjíždí pouze jedním směrem, a to směrem z centra (Černokostelecká, Divoká Šárka, Ďáblice, Hlavní nádraží, Huntířovská, Opatov, Vozovna Kobylisy), a které vedou jen směrem do centra (Bílá Hora, Bílý Beránek).

V případě označení každé zastávky by se za prvé mapa zneprůhlednila a za druhé by se úloha neúměrně rozšířila, a tím by bylo pracnější vytvořit matici vzdáleností a doba výpočtu by se prodloužila. Vynecháním druhé zastávky se nám úloha (počet proměnných) zjednoduší, ale model neztrácí na své objektivitě.

Dále bylo nutné vytvořit matici vzdáleností zastávek. K tomu výborně posloužila online mapa s označenými zastávkami od Google maps. Poté stačilo jen využít funkce “Vyhledat trasu” a postupně označit všechna možná propojení mezi zastávkami a nejkratší cestu zapsat do matice. Matice není souměrná, je to z toho důvodu, že díky jednosměrným ulicím může existovat kratší cesta z jednoho směru na zastávku, než z opačného. Matici vzdáleností lze nalézt na přiloženém CD

Poté bylo nutné určit, jak probíhá samotný vývoz košů. Na AS se odpad přímo vyváží do velkoobjemových kontejnerů. Na NZ je odpad vyhazován do nádob na odpad o objemu 200 l, které se nacházejí na otevřené korbě dodávky, ty se pak po naplnění nebo na konci okruhu vysypávají do jednoho z kontejnerů na AS. Jak již bylo výše zmíněno, dosavadní praxe není příliš ucelená. První vozidlo parkuje v Ládví a trasa začíná v 5:00 na NZ Ládví a končí na NZ Aviatická cca. v 8:10. Vozidlo ovšem ještě pokračuje na AS Letňany, kde je potřeba odpad vysypat do kontejneru a poté se vrací do Ládví. AS Letňany však toto vozidlo neobsluhuje, protože je zde samostatný zaměstnanec. Celková ujetá vzdálenost je 78,6 km a doba strávená na trase je cca. 240 minut. Druhé vozidlo parkuje na Praze 4, ale trasa začíná na AS Na Knížecí v 4:30, kde přistoupí druhý zaměstnanec. Trasa končí na AS Roztyly cca. v 9:30 a vozidlo se většinou vrací na Prahu 4. Celková délka trasy činí 59,3 km a doba strávená na trase je přibližně 330 minut. Trasa třetího vozidla je nejkratší. Začíná v sídle firmy a pokračuje přes NZ Černokostelecká, Spojovací, Hlavní nádraží, Želivského a vrací se zpět. Délka trasy je 18,7 km a trvá 70 minut. Tato čísla jsou však orientační vzhledem k tomu, že tento zaměstnanec na této

trase zároveň plní úkoly jiné zakázky. Označený rajon zastávek jednotlivých vozidel lze vidět na Obr. 1.2. Všechny trasy dohromady měří 156,6 km.



Obr. 1.1 – Trasy jednotlivých vozidel.

V neposlední řadě bylo nutné odhadnout dobu trvání vývozu košů na AS a NZ a množství odpadu na jednotlivých zastávkách. Bereme v úvahu několik faktorů. Za prvé je nutné koš vzít, vysypat, vrátit na původní místo, popřípadě poklidit v okolí koše. Budeme předpokládat, že vysypání jednoho koše na NZ trvá 2 minuty. Za druhé je brán v potaz přesun mezi sloupky v rámci jedné NZ, která má sloupky většinou naproti sobě, a proto je počítáno s dobou přesunu 1 minuty. Koš na NZ má objem 30 l. Průměrná naplněnost koše však je přibližně 10 l. Na AS je situace rozdílná a doba úklidu velmi proměnlivá. Velmi záleží na ročním období, na dnu v týdnu, či jestli se v Praze nekonala větší událost, pak může úklid trvat déle. Průměrná doba vysypání jednoho koše na AS trvá 3,6 minuty. Objem košů na AS nemusíme brát v potaz, vzhledem k tomu že se zde odpad vysypává přímo do objemových kontejnerů. Odhadnutou dobu trvání úklidu a objemu odpadu na jednotlivých AS a NZ lze nalézt na přiloženém CD.

Nakonec byla určena průměrná rychlost jízdy v Praze. Určení rychlosti je velmi problematické, vzhledem k tomu, že v ranních hodinách (od 5:00 do 7:00) je provoz plynulý, ale postupně začíná sílit. Průměrná rychlost jízdy je určena na 36 km/hod.

2 Modely okružních a rozvozních úloh

Okružní a rozvozní úlohy se řadí mezi distribuční úlohy a jsou v zahraniční literatuře spíše známy pod jedním označením a to Vehicle Routing Problems. Rozdělení na okružní a rozvozní úlohy uvádí např. Fábry (2006). U okružních úloh kapacita vozidla nehraje žádnou roli, tedy požadavky zákazníků na velikost z hlediska množství a hmotnosti jsou zanedbatelné. Na druhé straně rozvozní úlohy mají daná omezení co do velikosti požadavku zákazníka a tedy i kapacity vozidla. Nesmíme ovšem pojem rozvozní úlohy brát doslovně. Mezi tyto úlohy patří nejen případy, kdy se rozváží zboží, materiál, služby aj., ale i případy kdy svážíme mléko od jednotlivých zemědělců do mlékárny, děti ráno do školy, odpad na skládku aj.

2.1 Klasifikace okružních a rozvozních úloh

V literatuře najdeme nepřeberné množství možností rozdělení distribučních úloh. My se zde zmíníme jen o těch, které uvádí Fábry v Fiala a kol. (2010).

Okružní a rozvozní úlohy můžeme dělit na statické a dynamické. U statických úloh předem známe požadavky od všech zákazníků, a tudíž po optimalizaci již nedochází k žádným změnám. Reálné situace jsou však nepředvídatelné co do požadavků zákazníků a je tedy nutné pružně reagovat na nový požadavek i po nalezení optimálních tras. Takovým úlohám se říká dynamické.

Důležitou roli v těchto úlohách také hraje počet vozidel. V některých situacích je dostačující jedno vozidlo a jindy je zapotřebí vozidel více a ty mohou vyjíždět na cestu z jednoho či více výchozích míst.

Jiným důležitým kritériem může být požadavek zákazníka, kdy má být obsloužen, v takovém případě mluvíme o časových oknech. Jedná se o časový interval, v kterém chce být zákazník obsloužen. V případě jeho porušení může být firma finančně penalizována, nebo zákazník může od svého požadavku odstoupit.

Další skupinou jsou úlohy, kdy dochází k přepravě z jednoho místa na jiné, přičemž, místa si určí zákazník. Mezi tyto úlohy patří například dobře známá služba doručení obálky či balíčku z místa na místo, přeprava hendikepované osoby z domova na jiné místo aj.

Posledním klasifikačním kritériem je cíl, kterého chceme optimalizací dosáhnout. Převážně se jedná o minimalizaci celkové délky tras nebo doby strávené na trase. Hledisko

času se nemusí vyskytovat jen v účelové funkci, ale může vstupovat do problému jako omezení modelu.

Jak vyplývá z výše uvedeného, typů okružních a rozvozních úloh je velké množství. My se zde zaměříme jen na ty modely, které využijeme pro řešení reálného problému. Jedná se o statickou úlohu obchodního cestujícího (TSP⁴) a statickou rozvozní úlohu (VRP⁵).

2.2 Problémy a možnosti řešení

Úloha obchodního cestujícího i rozvozní úloha patří mezi úlohy NP – těžké⁶. Proto jsou v současnosti hledány alternativní optimalizační postupy vycházející z metody větvení a řezů či generování sloupců. Ve své práci Fábry (2006) zmiňuje například metodu větvení pro rozvozní úlohy, kterou se zabýval Bard et al. (2002) a Achutan et al. (2003). Mezi významné práce v oblasti okružních úloh s více vozidly musíme také zmínit Svestka and Huckfeldt (1973) nebo Gavish and Srikanth (1986). Při použití výše zmíněných metod ovšem hrozí, že optimální řešení nebude poskytnuto v reálném čase.

Pro řešení rozsáhlých a časově náročných úloh je zde možnost využití heuristických postupů. Vzhledem k tomu, že nejsou exaktně formulovány, je možné je upravovat pro konkrétní varianty typových úloh a pro jejich specifické podmínky.

Ve své práci Pelikán (2001) uvádí základní typy heuristických metod pro úlohu obchodního cestujícího:

- **Metoda nejbližšího souseda** – zvolíme první místo a k němu nalezneme místo nejbližší a to zařadíme do cesty. Postupuje se tak dlouho, dokud nejsou do cesty zařazena všechna místa. Tento algoritmus nedosahuje příliš dobrých výsledků.
- **Vkládací metoda** – je určeno výchozí místo a k němu je nalezeno místo nejvzdálenější. Tím je utvořena uzavřená cesta. Do ní se postupně vkládají místa k tak, aby nově utvořená cesta mezi místy i a j měla minimální přírůstek $(c_{ik} + c_{kj} - c_{ij})$.
- **Metoda výhodnostních čísel** – nejprve vypočítáme matici výhodnostních čísel $S = \{s_{ij}\}$, kde s_{ij} je spočítáno podle vzorce $s_{ij} = c_{i1} + c_{1j} - c_{ij}$, pro

⁴Traveling Salesman Problem

⁵Vehicle Routing Problem

⁶Definici NP-těžké resp. obtížné úlohy uvádí Pelikán (2001)

$i, j = 2, 3, \dots, n, i \neq j$, kde $C = \{c_{ij}\}$ je matice nejkratších vzdáleností mezi místy. Poté jsou čísla s_{ij} seříděna sestupně a podle nejvyššího s_{ij} se postupně spojuje místo i s místem j , dokud nevznikne výsledná cesta.

- **Metoda minimální kostry, Metoda konvexního obalu, Metoda výměn**

Některé heuristické metody lze zobecnit. Pak mluvíme o metaheuristikách, které jsou vhodné pro řešení obecných optimalizačních úloh. Jedná se například o metodu tabu search, jejíž paralelní verze byla použita v práci Gendreau et al. (1999). Dále můžeme zmínit metodu lokálního hledání, prahové akceptace, SIAM či genetický algoritmus, který je založen na myšlence darwinovského principu evoluce, jak uvádí Hynek (2008). V rámci populace (podmnožina přípustných řešení) se hledá optimálního řešení formou soutěže. Jednotlivé iterace simulují vývoj této populace z generace na generaci a postupně se blíží k optimálnímu řešení.

2.3 Úloha obchodního cestujícího

Úloha obchodního cestujícího je nejznámější verzí okružních úloh. U statické úlohy TSP jsou před začátkem optimalizace všechny parametry úlohy známy.

Počátky úlohy obchodního cestujícího spadají do 18. století, kdy se mu věnují matematik z Irska Sir William Hamilton a také britský matematik Thomas Penyngton Kirkman. Podrobnou diskusi prací Hamiltona a Kirkmana lze nalézt v Graph Theory (Biggs et al., 1976 in Davendra, 2010). Jako první zveřejnil formulaci matematického modelu TSP Karl Menger, rakouský matematik, který působil ve Vídni a na Harvardu [13]. Problém dále studoval Hassler, Whitney a Merrill v Princetonu. Schrijver (1960 in Davendra, 2010) ve své práci detailně popisuje výsledky práce Mengera a Whitneya a vývoj TSP.

Pelikán (2001) ve své publikaci uvádí definici TSP na základě využití teorie grafů. Mějme neorientovaný graf G , v kterém jsou všechny hrany (i, j) ohodnoceny číslem c_{ij} . V grafu je třeba nalézt uzavřenou cestu, jejíž součet ohodnocených hran je minimální. Hledáme tedy nejkratší Hamiltonův cyklus.

Miler-Tuker-Zemlinova formulace matematického modelu (Pelikán, 2001) je následující:

$$\text{minimalizovat} \quad z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (2.1)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Máme n míst, které musí vozidlo navštívit. Koeficient c_{ij} představuje nejkratší vzdálenost mezi místy i a j . Bivalentní proměnná x_{ij} nabývá hodnoty 1, pokud vozidlo využije cestu mezi místem i a j , resp. hodnoty 0 pokud ne. Cílem je minimalizovat ujetou trasu (2.1). Aby bylo navštíveno každé místo právě jednou, zajišťují podmínky (2.2) a (2.3). Soustava podmínek (2.4) s proměnnou u_i zaručuje, že bude nalezen pouze jeden okruh a ne několik nezávislých dílčích cyklů. Tento model je vhodný pro nesymetrickou matici nejkratších vzdáleností.

2.4 Úloha s více obchodními cestujícími

V předchozím modelu jsme se zabývali situací, kdy k uspokojení požadavků všech zákazníků je dostačující jedno vozidlo. V reálných problémech ovšem dochází k situacím, kdy k uspokojení potřeb zákazníků je potřeba vozidel více. K tomu slouží složitější modely, které se tím více přibližují realitě. Úloha obchodního cestujícího s více vozidly (mTSP⁷) se také objevuje s různými obměnami. Bektas (2006) zmiňuje následující možnosti:

- a) **Jedno nebo více výchozích míst.** U jednoho výchozího místa vozidla vyjíždějí a vracejí se do stejného bodu. Při existenci více výchozích míst, může být v každém z míst buď jedno, nebo více vozidel, která vyjíždějí na trasu a po obsluze všech zákazníků se vrací do svého výchozího místa nebo do některého z jiných výchozích míst. Dalším požadavkem může být, aby byl na konci dne počet vozidel v jednotlivých místech stejný jako na počátku dne.
- b) **Počet vozidel.** Počet vozidel může být v některých úlohách přesně dán, tedy musí vyjet všechna vozidla, v jiných úlohách je počet vozidel omezenou proměnnou.

⁷ Multiple Traveling Salesman Problem.

- c) **Fixní sazba.** Pokud počet vozidel v modelu vystupuje jako proměnná, poté je většinou výjezd vozidla spojen s fixními náklady. V tom případě, může být cílem modelu minimalizovat počet využitých vozidel.
- d) **Časová okna.** Pokud zákazníci požadují, aby byli obslouženi v určitém časovém intervalu, jedná se o model více obchodních cestujících s časovými okny (mTSPTW⁸).
- e) **Další speciální omezení.** Tato omezení mohou například určovat maximální počet zákazníků navštívených jedním vozidlem, či maximální (minimální) vzdálenost ujetou vozidlem.

Uvedme si nyní některé reálné aplikace, které byly již v minulosti řešeny, a lze je s úspěchem používat dodnes.

Plánování posádek:

- a) **Svoz vkladů z poboček do centrální banky** - určení tras jednotlivých posádek s cílem minimalizovat celkové náklady (Svestka and Huckfeldt, 1973 in Bekras, 2006).
- b) Zajištění funkčnosti **telefonních budek** v severním Holandsku a obsluhy **200 poštovních schránek** v Utrechtu v Nizozemí. V obou případech bylo cílem minimalizovat počet použitých vozidel (Lenstra and Rinnooy Kan, 1975 in Bektas, 2006).
- c) **Rozvržení jízd fotografů**, kteří mají navštívit velké množství základních a středních škol (Zhang et al., 1999 in Bektas, 2006).

Problém školních linek autobusů:

Tímto problémem se zabýval Angel et al. (1972 in Bektas 2006). Cílem úlohy je minimalizovat počet tras, aby celková vzdálenost ujetá všemi autobusy byla minimální. Nesmí přitom dojít k přeplnění autobusů a musí být dodržen časový rozpis.

Propojení s jinými problémy:

Model mTSP může také sloužit k řešení obecnějších problémů. Jako příklad lze uvést **vyrovnávání pracovní zátěže mezi jednotlivými prodejci** (Okonjo-Adigwe, 1988 in Bektas, 2006), kdy jsou do úlohy přidána omezení ve formě dolních a horních mezí doby jízdy a celkové hmotnosti jednotlivých vozidel. Podobným příkladem je **noční bezpečnostní služba**, kdy je nutné jednotlivým strážcům přiřadit pravidelné kontroly určitých objektů. Jsou zde také další omezení jako kapacita strážců a časová okna.

⁸ Multiple Traveling Salesman Problem with Time Windows.

Vzhledem k podobnosti s rozvozní úlohou, lze mTSP také využít k jejímu řešení. Například Mole et al. (1983 in Bektas 2006) navrhli heuristickou metodu, která vyhledá výsledek VRP v množině řešení mTSP.

V našem případě se budeme věnovat úloze s více obchodními cestujícími s jedním výchozím místem a s daným počtem vozidel ve výchozím místě. Cílem této úlohy je minimalizovat ujetou trasu všech vozidel. Formulaci matematického modelu uvádí Bektas (2006) a vychází z Miler-Tuker-Zemlinovi formulace.

$$\text{minimalizovat} \quad z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (2.6)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = K, \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{j1} = K, \quad (2.10)$$

$$u_i - u_j + p x_{ij} \leq p - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (2.11)$$

$$x_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.12)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.13)$$

kde K je počet vozidel, n je počet míst, která vozidla musí projet a c_{ij} představuje vzdálenost mezi místy i a j ; bivalentní proměnná x_{ij} nabývá hodnoty 1 v případě, že vozidlo jede do místa j z místa i , hodnoty 0 v opačném případě. Cílem je minimalizovat délku všech tras ujetých všemi vozidly (2.6). Soustavy podmínek (2.7) a (2.8) zajišťují, že každé místo je navštíveno právě jednou, podmínky (2.9) a (2.10) určují, že z výchozího místa vyjede přesně K vozidel a stejný počet vozidel se opět do výchozího místa vrátí. Podmínky (2.12) zamezí vytváření smyček. Podmínky (2.11) jsou opatřením proti vytváření parciálních cyklů a p určuje maximální počet zákazníků, které může obsloužit jedno vozidlo.

Nyní zde uvedeme upravenou vkládací metodu vycházející z Pelikán (2001), která je využita k řešení výlepu autobusových jízdních řádů. Dále budeme používat následující značení:

- U množina uzlů grafu,
- U' množina uzlů, které již leží na některé z tras,
- U'_k množina uzlů, které již leží na trase k -tého vozidla,
- H množina hran grafu,
- H'_k množina zařazených hran do trasy k -tého vozidla,
- T maximální povolená doba strávená na trase,
- t^k čas vozidla k na trase,
- t_p časové prodloužení trasy o uzel p podle vzorečku $c_{ip} + c_{pj} - c_{ij}$
- d_p čas strávený v uzlu p ,
- C_k trasa (cyklus) k -tého vozidla – tvořená vrcholy,
- c_{ij} časová vzdálenost mezi uzly i a j .

Postup:

1. Určíme výchozí uzel, označíme jej číslem 1 a nastavíme $k = 1$ (vyjede první vozidlo) a $U' = \emptyset$.
2. Z dosud nezařazených uzlů $j \in (U - U')$ najdeme nejvzdálenější uzel od výchozího uzlu ($c_{1s} = \max c_{1j}$) a vytvoříme uzavřenou cestu (cyklus) C_k : $1 - s - 1$. Množina $H'_k = \{(1, s), (s, 1)\}$, $U'_k = \{1, s\}$ a $t^k = c_{1s} + c_{s1} + d_s$.
3. Najdeme takový nezařazený uzel $p \in (U - U')$, který je nejbližší uzlům již zařazeným do cyklu C_k .
4. Nalezneme hranu (i, j) ležící na C_k , pro kterou je minimální $c_{ip} + c_{pj} - c_{ij}$ a zároveň pro $t^k = t^k + t_p + d_p$ platí, že $t^k \leq T$. Pak vložíme uzel p mezi uzly i a j v cyklu C_k , U'_k doplníme o vrchol p a množinu H'_k o hrany (i, p) , (p, j) , kde současně vyřadíme hranu (i, j) . Pokud $t^k \geq T$, pak $k = k + 1$ a jdeme na bod 2.
5. Opakujeme bod 3. a 4. dokud všechny uzly nejsou zařazené v některé z tras $U' = U$.

2.5 Rozvozní úloha s jedním vozidlem

Doprava patří mezi významnou oblast lidské činnosti. Podporuje a zajišťuje většinu společenských a ekonomických aktivit. Odhaduje se, že náklady na distribuci dosahují téměř poloviny celkových logistických nákladů. V některých odvětvích, jako potravinářství, mohou tyto náklady dosahovat až 70 % přidané hodnoty zboží. (Bräysy a Gendreau, 2005)

Úlohy, ve kterých je brán zřetel na kapacitu vozidla se nazývají **rozvozní úlohy**. Do této třídy úloh patří i problémy, ve kterých naopak zákazník požaduje odvoz zboží, materiálu, odpadu apod. Někteří autoři VRP řadí jako jednu z podskupin úloh **pick-up and delivery problems**. (Fábry, 2006)

Jak ve své práci uvádí Laporte (1992), v literatuře se objevuje velké množství variant rozvozní úlohy, například Bodinovi et al. (1983), Christofides (1985a), Laporte and Nobert (1987), Laporte (1990), Desrochers, Lenstra and Savelsbergh (1990).

Pro nalezení optimálního řešení rozvozních úloh se nejčastěji využívají metody větvení a hranic⁹, větvení a řezů¹⁰, případně metoda větvení a oceňování¹¹. Jak ve své práci uvádí Fábry (2006), výše zmíněnými metodami se například zabývali Toth and Vigo (1998), Achuthan et al. (2003), Desrochers et al. (1992), Kolen et al. (1987) aj. Přibližné řešení poskytují heuristické či metaheuristické postupy, založené většinou na metodách tabu search, genetických algoritmech apod. (Golden et al., 1998 v Fábry, 2006).

Rozvozní úlohu je možné definovat takto:

Je dán graf $G = (U, H)$, kde U je konečná množina uzlů a H je množina hran. Uzel č. 1 představuje počáteční (výchozí) bod, z kterého jediné vozidlo vyjíždí a vrací se do něj. Všechny okruhy (cykly) tedy musí obsahovat výchozí bod. Každému uzlu, mimo uzel č. 1, je přiřazena hodnota q_i , která představuje požadavek zákazníka na dovezení nákladu z počátečního bodu do uzlu i , nebo naopak odvezení nákladu. Hranám grafu je přiřazeno ohodnocení c_{ij} , které většinou představuje nejkratší vzdálenost mezi uzly i a j . (Fiala, 2008)

Podmínky úlohy jsou následující. Vozidlo musí postupně navštívit všechny uzly právě jednou a při jeho trase nesmí být překročena kapacita vozidla V . Požadavek zákazníka nemůže být větší, než je kapacita vozidla $0 < q_i \leq V$ ($i \neq 1$). Pokud by byla tato podmínka uvolněna, jednalo by se o úlohu s dělenou dodávkou.

⁹ Branch-and-Bound Algorithm.

¹⁰ Branch-and-Cut Algorithm.

¹¹ Branch-and-Price Algorithm.

Matematický model úlohy, jehož cílem je minimalizovat celkovou vzdálenost ujetou vozidlem, zajistit svoz materiálu od zákazníků a nepřekročit kapacitu vozidla, lze zapsat následujícím způsobem (Pelikán, 2001):

$$\text{minimalizovat } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (2.14)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (2.16)$$

$$u_i + q_j - V(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (2.17)$$

$$q_i \leq u_i \leq V, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (2.18)$$

$$u_1 = 0, \quad (2.19)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

Máme n míst, které musí vozidlo navštívit. Koeficient c_{ij} představuje nejkratší vzdálenost mezi místy i a j . Bivalentní proměnná x_{ij} nabývá hodnoty 1, pokud vozidlo využije cestu mezi místem i a j , resp. hodnoty 0 pokud ne. Účelová funkce (2.14) představuje celkovou vzdálenost ujetou vozidlem. Omezující podmínky (2.15) a (2.16) stanovují, že každé místo bude navštíveno právě jednou. Nerovnosti (2.17) jsou smyčkovými podmínkami zamezujícími vytváření parciálních cyklů, tj. cyklů neobsahujících výchozí místo. Zároveň představují bilanci nákladu vozidla. Podmínka (2.18) zajišťuje, aby náklad vozidla nepřekročil kapacitu vozidla V po návštěvě zákazníka i . Rovnice (2.19) definuje nulový náklad vozidla ve výchozím místě.

2.6 Rozvozní úloha s více vozidly v jednom výchozím místě

V předchozí kapitole byl popsán model s jedním vozidlem, které obsluhuje všechny zákazníky. Vzhledem k tomu, že je omezena kapacita vozidla, musí se většinou vozidlo vracet do výchozího bodu a tím absolvovat několik tras. Někteří zákazníci tak jsou navštíveni velmi pozdě a proto se ke svozu využívá více vozidel.

Matematický model rozvozní úlohy s více vozidly v jednom výchozím místě může být následující (Fábry, 2006):

$$\text{minimalizovat} \quad z = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^k, \quad (2.21)$$

za podmínek

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (2.22)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n x_{ij}^k = 1, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (2.23)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j}^k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.24)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^k = \sum_{i=1}^n x_{ji}^k, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.25)$$

$$u_i^k + q_j - V_k (1 - x_{ij}^k) \leq u_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i \neq j, \quad (2.26)$$

$$u_1 = 0, \quad (2.27)$$

$$q_i \leq u_i \leq V_k, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.28)$$

$$x_{ii}^k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.29)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (2.30)$$

Bivalentní proměnná x_{ij}^k nabývá hodnoty 1 v případě, že vozidlo k jede z místa i do místa j , hodnoty 0 v opačném případě. Hodnota K představuje velikost vozového parku. Nerovnice (2.24) určuje, že každé vozidlo odjede z výchozího místa nejvýše jednou, čímž je zajištěno, že některá vozidla nemusí vyjet. Soustava bilančních rovnic (2.25) zajišťuje, aby vozidlo, které přijede k danému zákazníkovi, od tohoto zákazníka také odjelo.

Dále je také nutné upozornit na jednu skutečnost, která zajišťuje existenci přípustného řešení:

$$\sum_{i=2}^n q_i \leq \sum_{k=1}^K V_k, \quad (2.31)$$

tj. součet požadavků všech zákazníků nesmí překročit celkovou kapacitu všech vozidel.

Matematický model rozvozní úlohy s více vozidly byl modifikován na úlohu vývozu odpadkových košů z autobusových stanovišť a nácestných zastávek (AS a NZ) v Praze:

$$\text{minimalizovat} \quad z = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^k, \quad (2.32)$$

za podmínek

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n+m} x_{ij}^k = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n+m, \quad (2.33)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n+m} x_{ij}^k = 1, \quad j = 2, 3, \dots, n+m, \quad (2.34)$$

$$\sum_{j=2}^{n+m} x_{1j}^k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.35)$$

$$\sum_{i=1}^{n+m} x_{ij}^k = \sum_{i=1}^{n+m} x_{ji}^k, \quad j = 2, 3, \dots, n+m, \quad (2.36)$$

$$t_i^k + d_i + c'_{ij} - M(1 - x_{ij}^k) \leq t_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, n+m, \quad j = 2, 3, \dots, n+m, i \neq j, \quad (2.37)$$

$$t_1^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.38)$$

$$t_i^k + d_i + c'_{i1} x_{i1}^k \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, n+m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.39)$$

$$x_{ii}^k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.40)$$

$$x_{i1}^k = 1, \quad i = n+1, n+2, \dots, n+m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.41)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.42)$$

kde n je počet zastávek a c_{ij} určuje vzdálenost mezi jednotlivými zastávkami. Bivalentní proměnná x_{ij}^k nabývá hodnoty 1 v případě, že vozidlo k jede ze zastávky i do zastávky j , resp. hodnoty 0 v opačném případě. Cílem modelu je minimalizovat ujetou vzdálenost všemi vozidly (2.32). Podmínky (2.33) a (2.34) zajišťují, že každá zastávka je navštívena právě jednou. Podmínka (2.35) určuje, že každé vozidlo odjede z výchozího místa nejvýše jednou, čímž je zajištěno, že ne všechna vozidla musí vyjet. Soustava rovnic (2.36) zajišťuje, aby vozidlo, které přijede na danou zastávku, z ní také odjelo. Nerovnost (2.37) je opatření proti vytváření parciálních cyklů, kde proměnná t_i^k , určuje čas příjezdu vozidla k do zastávky i . Hodnota d_i udává čas, který je nutný k vývozu koše na zastávce i ,

hodnota c'_{ij} určuje dobu přejezdu mezi zastávkami i a j , a parametr M je vysoká konstanta. Soustava podmínek (2.39) zaručuje, že žádné vozidlo nepojede déle než T (časové omezení). Podmínka (2.41) udává, aby posledním místem na trase byl jeden z kontejnerů.

Nyní upravíme vkládací metodu z Pelikán (2001), na řešení vývozu odpadkových košů na AS a NZ. Značení předchozího algoritmu rozšíříme o:

- M množina uzlů, ve kterých jsou umístěny odpadové kontejnery,
- V_k množství odpadu ve voze k ,
- q_p množství odpadu v uzlu p ,

Postup:

1. Určíme výchozí uzel, označíme jej číslem 1, nastavíme $k = 1$ (vyjede první vozidlo), $U' = \emptyset$ a $V_k = 0$ pro $k = 1, 2, \dots, K$.
2. Z dosud nezařazených uzlů $j \in (U - U')$ najdeme nejvzdálenější uzel od výchozího uzlu ($c_{1s} = \max c_{1j}$) a vytvoříme uzavřenou cestu (cyklus) C_k : $1 - s - 1$. Množina $H'_k = \{(1, s), (s, 1)\}$, $U'_k = \{1, s\}$, $t^k = c_{1s} + c_{s1} + d_s$ a $V_k = q_s$.
3. Najdeme takový nezařazený uzel $p \in (U - U')$, který je nejbližší uzlům již zařazeným do cyklu C_k .
4. Nalezneme hranu (i, j) ležící na C_k , pro kterou je minimální $c_{ip} + c_{pj} - c_{ij}$ a zároveň pro $t^k = t^k + t_p + d_p$ platí, že $t^k \leq T$. Pak pro $p \notin M$ platí $V_k = V_k + q_p$ a pro $p \in M$ platí $V_k = 0$. Uzel p vložíme mezi uzly i a j v cyklu C_k . Množinu U'_k doplníme o vrchol p a množinu H'_k o hrany (i, p) , (p, j) , kde současně vyřadíme hranu (i, j) . Pokud $t^k > T$ a poslední uzel v trase $j \in M$, pak $k = k + 1$ a jdeme na bod 2, jinak nalezneme takový uzel $m \in M$, pro který je $c_{jm} + c_{m1} - c_{1j}$ minimální. Pak $t^k = t^k + t_m$, $V_k = 0$, $k = k + 1$ a jdeme na bod 2.
5. Opakujeme bod 3. a 4. dokud všechny uzly nejsou zařazeny v některé z cest $U' = U$.

2.7 Rozvozní úloha s více vozidly a několika výchozími místy

Jako poslední model zde uvedeme rozvozní úlohu s více vozidly s několika výchozími místy, kdy v každém místě je právě jedno vozidlo, a vozidla jsou stejné

kapacity. Jak uvádí Fábry (2006), úlohami tohoto typu se zabývali např. Laporte et al. (1988) a Savelsbergh and Sol (1998).

Matematický model dle Fábry (2006):

$$\text{minimalizovat} \quad z = \sum_{i=1}^{S+n} \sum_{j=1}^{S+n} c_{ij} x_{ij}, \quad (2.43)$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{S+n} x_{ij} = 1, \quad j = S+1, S+2, \dots, S+n, \quad (2.44)$$

$$\sum_{i=1}^{S+n} x_{ji} = 1, \quad j = S+1, S+2, \dots, S+n, \quad (2.45)$$

$$\sum_{j=S+1}^{S+n} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, S, \quad (2.46)$$

$$\sum_{j=S+1}^{S+n} x_{ij} = \sum_{j=S+1}^{S+n} x_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, S, \quad (2.47)$$

$$u_i + q_j - V(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i, j = S+1, S+2, \dots, S+n, \quad i \neq j, \quad (2.48)$$

$$q_i \leq u_i \leq V, \quad i = S+1, S+2, \dots, S+n, \quad (2.49)$$

$$u_1 = 0, \quad (2.50)$$

$$x_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, S, \quad (2.51)$$

$$x_{ii} = 0, \quad i = S+1, S+2, \dots, S+n, \quad (2.52)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, S+n. \quad (2.53)$$

V uvedeném modelu předpokládáme, že existuje S stanovišť. V každém z nich je právě jedno vozidlo, které může, ale nemusí vyjet. Dále uvažujeme n zákazníků. Bivalentní proměnná x_{ij} nabývá hodnoty 1 v případě, že některé vozidlo jede z místa i do místa j , hodnoty 0 v opačném případě. Z jednotlivých podmínek je zřejmé, že existuje celkem $S+n$ míst, indexy $1, 2, \dots, S$ jsou zvoleny pro výchozí místa, indexy $S+1, S+2, \dots, S+n$ pro sídla zákazníků. Soustava rovnic (2.51) zakazuje pohyb vozidel mezi jednotlivými výchozími místy navzájem. Ostatní podmínky byly již dříve uvedeny.

Nyní upravíme metodu nejbližšího souseda z Pelikán (2001), na řešení vývozu odpadkových košů na AS a NZ s několika výchozími místy. Značení předchozího algoritmu rozšíříme o:

Z množina výchozích uzlů $Z = 1, 2, \dots, S$,

Postup:

1. Určíme uzel č. 1 a nastavíme $k = 1$ (vyjede první vozidlo), $U' = \emptyset$ a $V_k = 0$ pro $k = 1, 2, \dots, K$.
2. Z dosud nezařazených uzlů $j \in (U - U')$ najdeme k poslednímu zařazenému uzlu na trase nejbližší uzel p a pokud pro $t^k = t^k + t_p + d_p$ platí, že $t^k \leq T$, pak pro $p \notin M$ platí $V_k = V_k + q_p$ a pro $p \in M$ platí $V_k = 0$. Pak přidáme uzel p za poslední uzel cesty C_k a množinu U'_k doplníme o vrchol p . Pokud $t^k > T$ a poslední uzel v trase $j \in M$ pak $k = k + 1$ a jdeme na bod 2, jinak nalezneme takový uzel $m \in M$, pro který je minimální $c_{jm} + c_{m1} - c_{1j}$. Pak $t^k = t^k + t_m$, $V_k = 0$ a $k = k + 1$ a jdeme na bod 2.
3. Opakujeme bod 2. dokud všechny uzly nejsou zařazené v některé z cest $U' = U$.

3 Aplikace vybraných modelů na reálný problém

V této části se již budeme věnovat aplikaci vkládací heuristiky při jednom výchozím místě a heuristiky nejbližšího souseda při více výchozích místech na problém svozu odpadu z autobusových zastávek dálkové dopravy v Praze. Vzhledem k tomu, že tato práce částečně vychází z dat uvedených v práci Optimalizace výlepu autobusových jízdních řádů (Svobodová, 2011), vyzkoušíme nejprve vhodnost vkládací metody na příkladu s výlepem jízdních řádů (dále také JŘ) se dvěma a třemi vozidly. Můžeme tedy porovnat výsledky heuristiky s již vypočítaným optimálním řešením pro dvě vozidla a nejlepším dosaženým řešením pro tři vozidla a z toho posoudit vhodnost zvolené metody.

Všechny algoritmy jsou naprogramovány ve VBA for Excel, jež využívá vstupní data z MS Excelu, kde se v listu „pocety“ nachází matice nejkratších vzdáleností a další údaje. V listu „matice“ je poté realizován samotný výpočet. Všechny soubory s aplikacemi lze nalézt na přiloženém CD.

První dvě části této kapitoly se věnují nalezení nejlepšího výsledku pro výlep jízdních řádů se dvěma a třemi vozidly. V obou částech jsou popsány a porovnávány tři základní obměny modelu. Modely, u kterých se cesty tvoří současně, a to bez časového omezení i s časovým omezením, a dále model, kdy jsou jednotlivé cesty vytvářeny postupně a to s časovým omezením. Je zde počítáno s maticí nejkratších vzdáleností („Matice2“) z práce Svobodová (2011).

Další dvě části se již zabývají řešením vývozu košů se dvěma a třemi vozidly na všech zastávkách. Matice nejkratších vzdáleností tedy odpovídá současné potřebě svozu odpadu. Poslední dvě části řeší vývoz košů se dvěma a třemi vozidly bez zastávek AS Černý Most a Letňany. V těchto čtyřech částech jsou vždy stejné podkapitoly a to:

1. Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem a časovým omezením
2. Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem a časovým omezením
3. Cesty tvořené současně se dvěma/třemi výchozími místy a časovým omezením
4. Optimalizace s jedním výchozím místem a časovým omezením
5. Shrnutí

Postup hledání řešení v prvních třech podkapitolách je totožný. Nejprve jsou nalezeny časové intervaly stability řešení tak, že všechna časová omezení T_k pro $k = 1, 2, \dots, K$ jsou nastavena na stejně vysoké hodnotě (například 1.000 min.) a poté jsou stejnou měrou snižována až do hodnoty, kdy již žádné řešení neexistuje. Z těchto výsledků je možno odhadnout, kde se nachází nejlepší řešení. Z intervalů stability je dále vybráno

několik omezení T_k v celých hodinách (například 360 a 420 min.) a při podmínce $T_k = T_{k+1} = T_{k+2}$ pro $k = 1, 2, \dots, K$ je nalezeno řešení. Poté je vždy jedno omezení uvolněno a snižováno a ostatní T_k jsou fixována na stejné hodnotě. Takto jsou vyzkoušeny všechny obměny a do tabulky je zapsáno jejich nejlepší řešení. Pokud v tabulce některé obměny chybí, neexistuje pro ně řešení.

Ve čtvrté podkapitole je vypočítáno optimální řešení v řešiteli CPLEX. Matematický model z kapitoly 2.6 je nejprve převeden do modelovacího jazyka systému LINGO (zápis modelu na přiloženém CD) a poté transformován do formátu MPS¹². Jako časové omezení T je brána hodnota z nejlepšího řešení prvních tří modelů. U optimálního řešení je uvedena tabulka s průběhem tras a mapa se zakreslením tras.

V poslední podkapitole jsou shrnuty a porovnávány jednotlivé výsledky modelů s optimálním řešením a také s výlepem jízdních řádů. U výsledku, který se nejvíce blíží optimálnímu řešení, je znázorněna tabulka a mapa s průběhem tras.

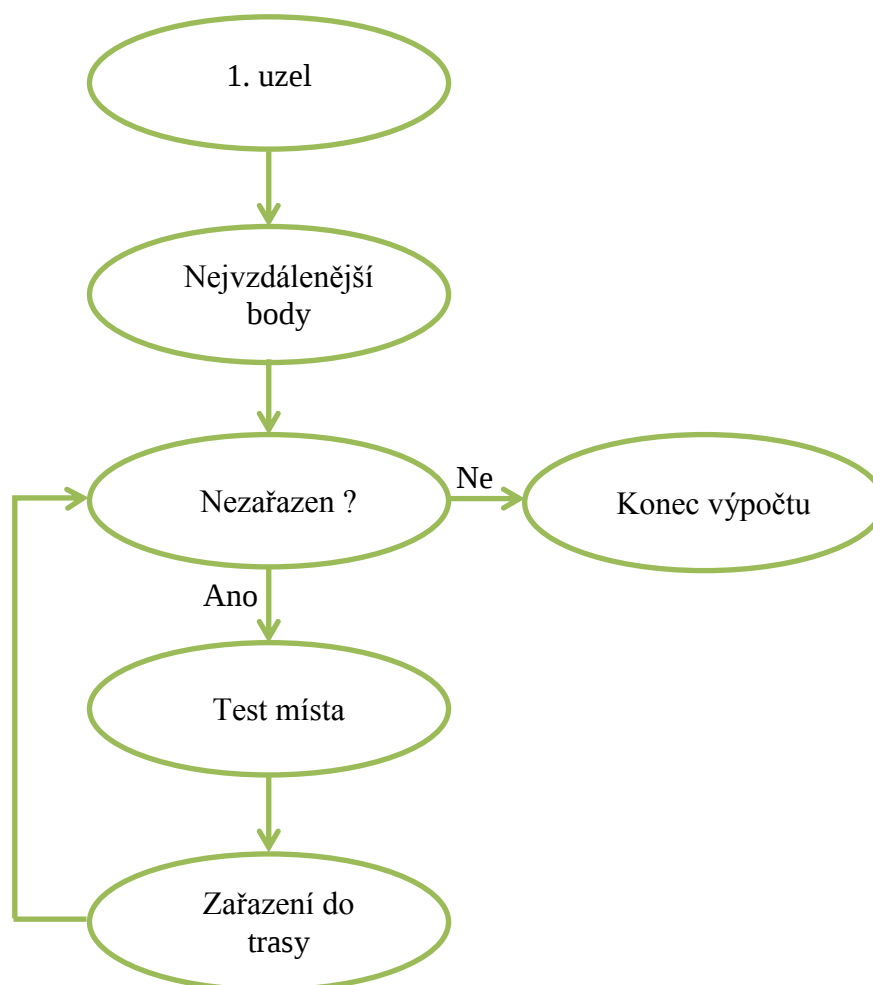
3.1 Výlep jízdních řádů - dvě vozidla

3.1.1 Cesty tvořené současně bez časového omezení

Názorný postup Algoritmu 1 je vidět na Obr. 3.1. Popis diagramu Algoritmu 1:

- a) 1. Uzel – výchozí místo, z kterého vozidla vyjíždějí a do něj se také vrací;
- b) Nejvzdálenější body - nalezení prvního nejvzdálenějšího bodu od počátku a poté nejvzdálenějšího bodu od bodu prvního; máme dvě uzavřené trasy a známe jejich délku a čas;
- c) Nezařazen – testujeme uzly, zda jsou již zařazeny v některé z tras, pokud je bod nezařazen, přesuneme se na Test místa; pokud jsou všechny uzly zařazeny, výpočet končí;
- d) Konec výpočtu – všechny uzly zařazeny;
- e) Test místa – zkoumá, do jaké trasy a na jakou pozici zařadit bod, aby prodloužení bylo nejkratší;
- f) Zařazení do trasy – zařadí bod do jedné z tras a připočítá k ní ujetou vzdálenost a čas.

¹² Mathematical Programming System.



Obr. 3.1 – Diagram Algoritmu 1.

Soubor s aplikací lze nalézt na CD pod názvem „jr_2_soucasne_bez_omezeni“. První trasa měří 78,7 km a čas strávený na trase je 618,97 min. Druhá trasa měří 37,7 km s dobou 218,03 min. Celková ujetá vzdálenost je tedy 116,4 km. Tento model by byl co se počtu ujetých kilometrů velmi vhodný, problém ovšem nastává s dobou strávenou na trase, ta by přesáhla 10 hod, což je vzhledem k osmihodinové pracovní době nevhodné, a proto zde nebudeme ani uvádět průběh a zakreslení tras.

3.1.2 Cesty tvořené současně s časovým omezením

Postup Algoritmu 2 je totožný s Algoritmem 1 (Obr. 3.1). Soubor s aplikací je uložen na CD pod názvem „jr_2_soucasne_s_omezenim“. Popis diagramu Algoritmu 2 je stejný jako Algoritmus 1, až na bod e) Test místa

- e) Test místa – zkoumá, do jaké trasy a kam zařadit bod, aby prodloužení bylo co nejkratší a zároveň bylo dodrženo časové omezení cesty.

V Tab. 3.1 můžeme vyčíst časové intervaly stability řešení a celkovou ujetou vzdálenost. Nejvyšší hodnota 480 min. vychází z úlohy (Svobodová, 2011), pro kterou bylo optimum vypočítáno. Kdybychom tuto podmínku změnili, výsledky by již nebyly porovnatelné s původní úlohou.

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 449,63$		není řešení
$449,63 < T \leq 468,6$		148,8
$468,6 < T \leq 480$		158,0

Tab. 3.1 – Časové intervaly stability řešení.

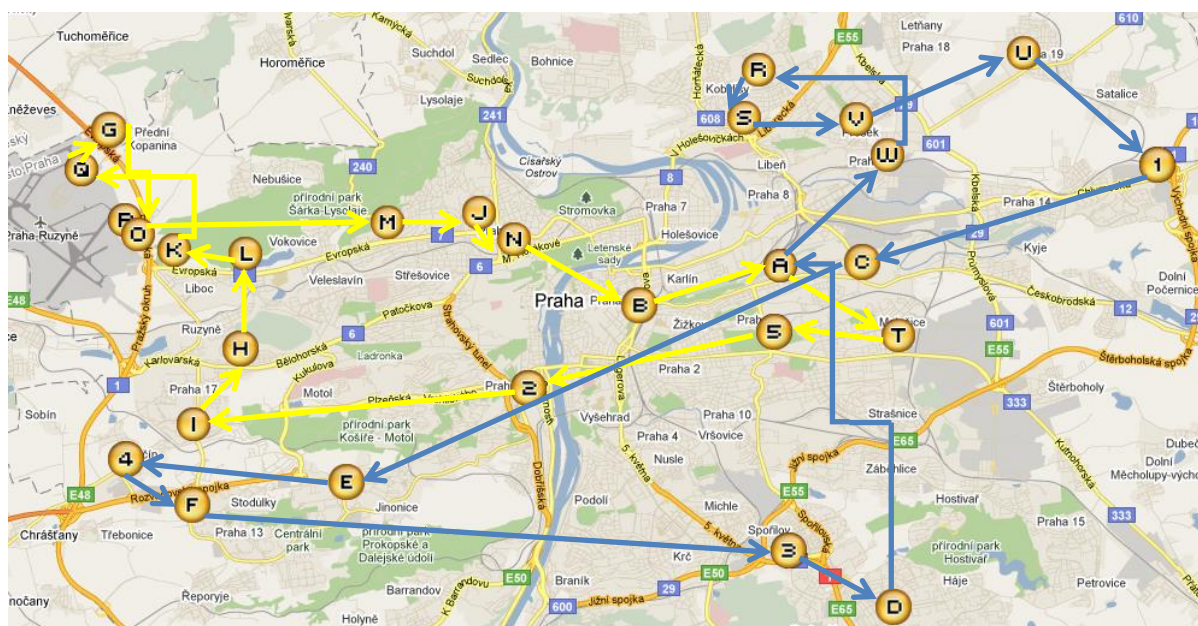
Nyní máme základní představu o řešení. Nejprve do modelu zadáme omezení z práce Optimalizace výlepu autobusových jízdních řádů (Svobodová, 2011). Jak je vidět v Tab. 3.2 (Pokus 1) stejného výsledku jako u Optimalizace není dosaženo. Dále přistupujeme k postupné fixaci omezení tras. Pokud zafixujeme omezení u Trasy 1 na maximální hodnotě 480 a snižujeme omezení u Trasy 2, žádný lepší výsledek nezískáme. Při zafixování omezení Trasy 2 (480) lze získat lepší výsledky. Nejlepšího řešení je dosaženo v Pokusu 5, ale i tak je výsledek o 35,1 km delší než optimální řešení. Průběh trasy Pokusu 5, s délkou a časem příjezdu do jednotlivých zastávek, je znázorněn v Tab. 3.3 a zakreslení tras znázorňuje Obr. 3.2.

		Trasa 1	Trasa 2	Celkem
Optimalizace	T	480	480	110,9
	km	54,9	56	
	čas	462,9	364,93	
Pokus 1	T	480	480	158
	km	74,3	83,7	
	čas	468,63	437,7	
Pokus 2	T	468	480	148,8
	km	61,3	87,5	
	čas	441,37	449,63	
Pokus 3	T	429	480	147,8
	km	56	91,8	
	čas	420,13	469,2	
Pokus 4	T	420	480	147,8
	km	57,1	90,7	
	čas	415,97	473,37	
Pokus 5	T	415	480	146
	km	57,4	88,6	
	čas	410,07	476,27	

Tab. 3.2 – Řešení při různých omezeních.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu
A	T	4,2	7,00
T	5	6,7	14,17
5	2	13,8	44,40
2	I	21,3	127,10
I	H	23,8	134,27
H	L	27,9	150,90
L	Q	33,8	228,33
Q	G	35,3	247,43
G	P	38,8	262,67
P	O	39,2	282,93
O	J	46,4	306,73
J	N	47,6	364,53
N	B	53,9	401,23
B	A	57,4	410,07
A	W	4,6	7,67
W	R	9,2	24,33
R	S	10,8	37,60
S	V	18	78,80
V	U	21,9	94,30
U	1	28,7	108,63
1	C	36,1	198,17
C	E	49,4	237,53
E	4	54,7	261,77
4	F	57,1	319,37
F	3	75	358,60
3	D	78,2	453,33
D	A	88,6	476,27

Tab. 3.3 – Ujetá vzdálenost a čas příjezdu vozidla do zastávky.



Obr. 3.2 – Mapa tras vozidel.

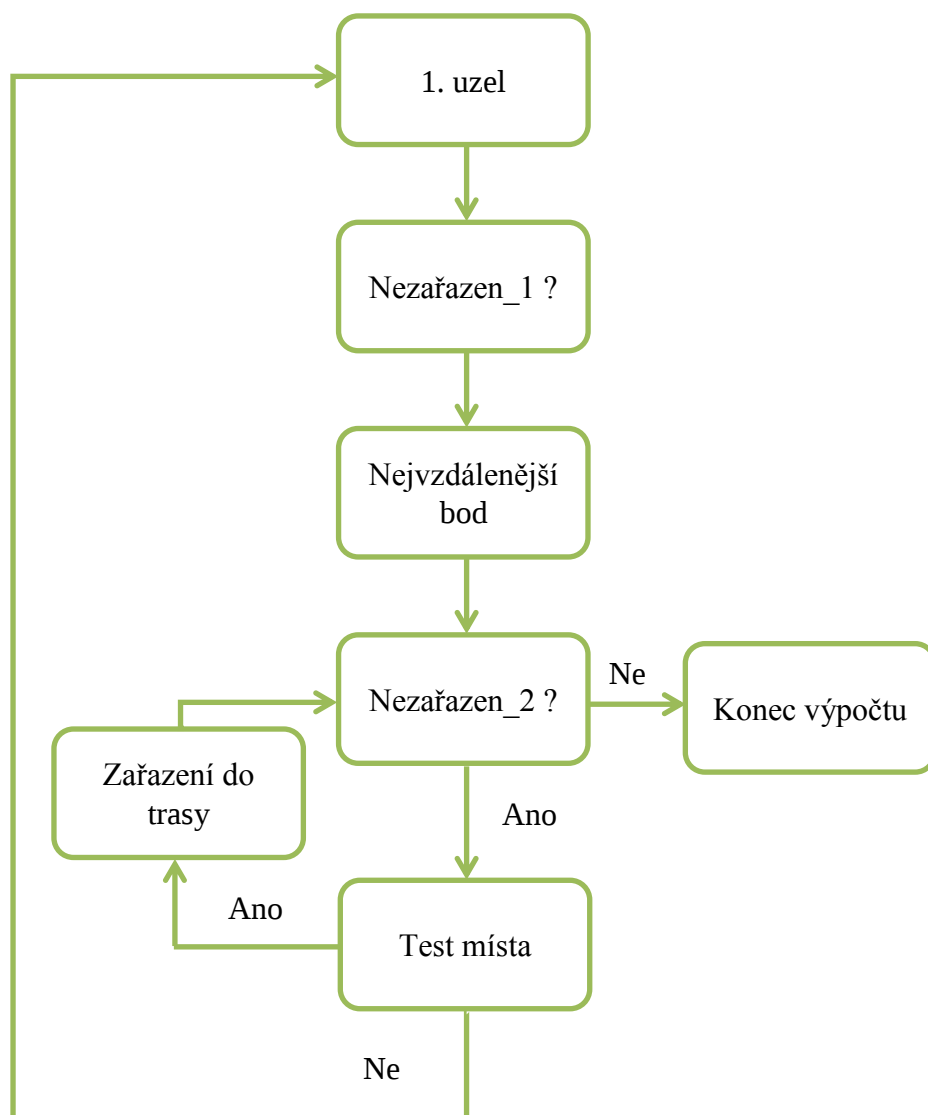
3.1.3 Cesty tvořené postupně s časovým omezením

Názorný postup Algoritmu 3 je vidět na Obr. 3.3. Popis diagramu Algoritmu 3:

- a) 1. uzel – výchozí místo, z kterého vozidla vyjíždějí a do něj se také vrací;
- b) Nezařazen_1 – hledá nezařazené uzly
- c) Nejvzdálenější bod –
 - Varianta 1: první bod je nejvzdálenější od počátku, druhý bod je nejvzdálenější od prvního bodu; vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;
 - Varianta 2: první i druhý bod je nejvzdálenější od počátku; vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;
- d) Nezařazen_2 – testuje uzly, zda jsou již zařazeny v některé z tras, pokud je nezařazen, přesuneme se na Test místa; pokud jsou všechny uzly zařazeny, výpočet končí;
- e) Konec výpočtu – všechny uzly zařazeny;
- f) Test místa – zkoumá, kam zařadit bod, aby prodloužení bylo co nejkratší a zároveň bylo dodrženo časové omezení trasy; v případě splnění podmínek je bod zařazen do trasy, v opačném případě vyjede další vozidlo z 1. uzlu;
- g) Zařazení do trasy – zařadí bod do trasy a připočítá k ní ujetou vzdálenost a čas;

Jak již bylo zmíněno výše, v aplikaci je možné nastavit dvě odlišné varianty (viz CD „jr_2_postupne_s_omezenim“). Varianta 1 hledá druhý bod, jako nejvzdálenější od prvního bodu a Varianta 2 hledá druhý bod, jako nejvzdálenější bod od počátku, v obou případech samozřejmě z dosud nezařazených bodů. Při určování časového omezení a hledání lepších výsledků se postupuje obdobně jako v kapitole 3.1.2. Z časových intervalů stability řešení pro Variantu 1 a 2 (Tab. 3.4) lze usoudit, že nejlepší řešení bude nalezeno ve Variantě 2.

Nejlepšího řešení je dosaženo v Pokusu 6 u Varianty 1 i 2 (Tab. 3.5). Jak se předpokládalo, Varianta 2 je lepší než Varianta 1 a to o 6 km. Nejlepší výsledek je tedy o 25,7 km delší než optimální řešení. V Tab. 3.6 je znázorněn průběh trasy Pokusu 6 Varianty 2. Na Obr. 3.4 je mapa se zakreslením tras.



Obr. 3.3 – Diagram Algoritmu 3.

Varianta 1

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 447,83$		není řešení
$447,83 < T \leq 460,4$		149,4
$460,4 < T \leq 479,07$		152,8
$479,07 < T \leq 480$		153,3

Varianta 2

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 444,17$		není řešení
$444,17 < T \leq 448,33$		147,2
$448,33 < T \leq 460,4$		147,2
$460,4 < T \leq 479,07$		139,1
$479,07 < T \leq 480$		146,6

Tab. 3.4 – Časové intervaly stability řešení.

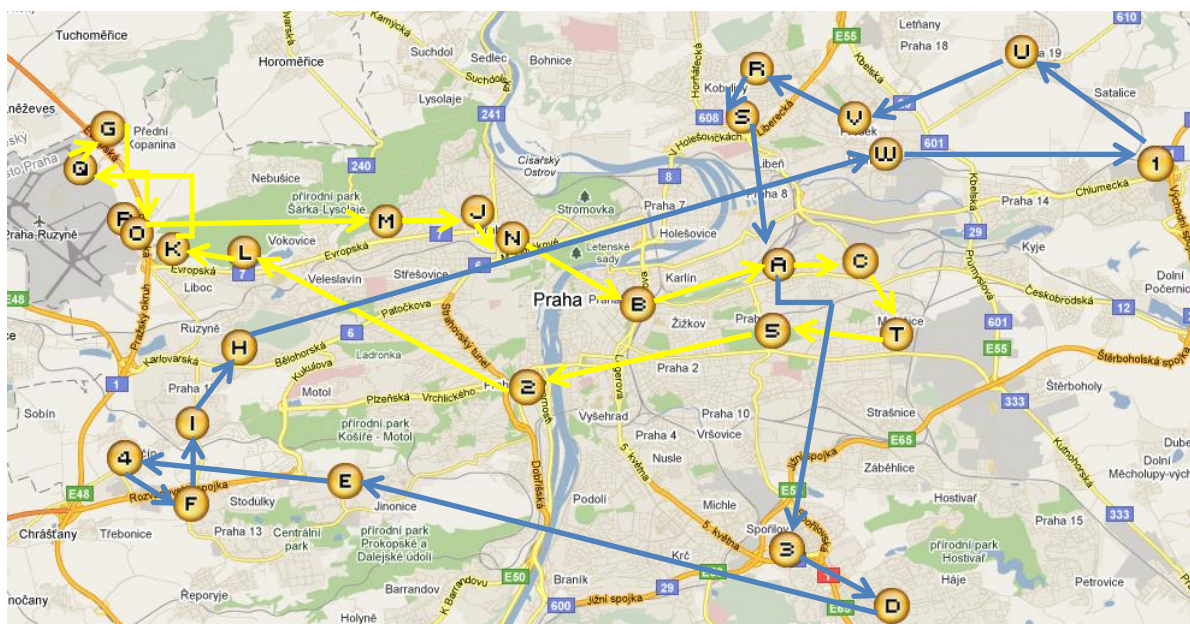
Varianta 1					Varianta 2		
		Trasa 1	Trasa 2	Celkem	Trasa 1	Trasa 2	Celkem
Optimalizace	T	480	480	110,9	480	480	110,9
	km	54,9	56		54,9	56	
	čas	462,9	364,93		462,9	364,93	
Pokus 1	T	480	480	153,3	480	480	146,6
	km	68,2	85,1		68,2	78,4	
	čas	479,07	419,43		479,07	408,27	
Pokus 2	T	479	480	152,8	479	480	139,1
	km	62,4	90,4		62,4	76,7	
	čas	460,4	437,27		460,4	414,43	
Pokus 3	T	460	480	149,4	460	480	147,2
	km	60,8	88,6		60,8	86,4	
	čas	448,33	443,67		448,33	440	
Pokus 4	T	444	480	147	444	480	143,6
	km	58,5	88,5		58,5	85,1	
	čas	429,1	458,9		429,1	453,23	
Pokus 5	T	429	480	143,8	429	480	139,9
	km	55,9	87,9		55,9	84	
	čas	421,77	460,9		421,77	454,4	
Pokus 6	T	416	480	142,6	416	480	136,6
	km	52,7	89,9		52,7	83,9	
	čas	406,63	474,03		406,63	464,03	

Tab. 3.5 – Řešení při různých omezeních.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu
A	C	2	3,33
C	T	5,3	26,03
T	5	7,8	33,20
5	2	14,9	63,43
2	L	23,2	147,47
L	Q	29,1	224,90
Q	G	30,6	244,00
G	P	34,1	259,23
P	O	34,5	279,50
O	J	41,7	303,30
J	N	42,9	361,10
N	B	49,2	397,80
B	A	52,7	406,63
A	3	8	13,33
3	D	11,2	108,07
D	E	28,4	142,33
E	4	33,7	166,57

4	F	36,1	224,17
F	I	37,9	236,57
I	H	40,4	243,73
H	W	55,4	278,53
W	1	61,8	298,20
1	U	69,6	388,40
U	V	73,5	397,90
V	R	76,4	411,73
R	S	78	425,00
S	A	83,9	464,03

Tab. 3.6 – Ujetá vzdálenost a čas příjezdu vozidla do zastávky.



Obr. 3.4 – Mapa tras vozidel.

3.1.4 Shrnutí

V této části byly použity tři modely. V prvním modelu, kdy trasy vznikaly současně bez omezení, jsme chtěli zjistit, jestli sám model je schopen vygenerovat takové řešení, které by splnilo omezující podmínky, tedy maximální dobu strávenou na trase 480 min. To se bohužel nepodařilo. Celková délka trasy byla 116,4 km, což by byl vzhledem k optimálnímu řešení 110,9 km velmi dobrý výsledek, jedna z tras ovšem trvala 618,97 min.

V druhém modelu byla postupně nastavena různá časová omezení, až jsme dosáhli nejlepšího výsledku tohoto modelu a to 146 km (Pokus 5, Tab. 3.2). Ten je o 35,1 km (31,65 %) delší než optimální řešení.

V posledním modelu byly cesty tvořeny postupně. První nejvzdálenější bod byl brán od počátku. Při určení druhé trasy jsme ovšem mohli vycházet z prvního či druhého modelu, kdy druhý bod byl hledán jako nejvzdálenější od prvního bodu (Varianta 1), nebo jsme ho mohli najít jako bod první, tedy nejvzdálenější od počátku (Varianta 2). Ve všech jednotlivých omezeních vycházela Varianta 2 lépe, než Varianta 1. Nejlepší řešení nakonec měřilo 136,6 km (Pokus 6, Varianta 2, Tab. 3.5). Oproti optimálnímu řešení je výsledek o 25,7 km (23,17 %) delší. Tento výsledek je nejlepší ze všech modelů. Vkládací metoda na tomto příkladu nedosahuje velmi dobrých výsledků.

3.2 Výlep jízdních řádů - tři vozidla

3.2.1 Cesty tvořené současně bez časového omezení

Postup Algoritmu 4 je totožný s Algoritmem 1 (Obr. 3.1.). Popis diagramu Algoritmu 4 je obdobný Algoritmu 1, až na bod b) Nejvzdálenější body.

- b) Nejvzdálenější body – nalezneme nejvzdálenější vrchol od výchozího bodu, k němu najdeme nejvzdálenější bod a poté hledáme takový třetí bod, aby součet hran mezi jednotlivými uzly (obvod pomyslného trojúhelníku) byl maximální; máme tři uzavřené trasy a známe jejich délku a čas;

Výsledek tohoto modelu je na první pohled velmi výhodný (viz CD „jr_3_soucasne_bez_omezeni“). Celková ujetá vzdálenost je o 4,6 km kratší než řešení dosažené při optimalizaci (optimálního řešení nebylo dosaženo, výsledek 124,4 km se od dolní hranice lišil o 16,6 %). První trasa měří 58 km a čas strávený na trase je 468,07 min. Druhá trasa měří 37,7 km s dobou 218,03 min a třetí trasa měří 24,1 km s dobou 156,57 min. Celková ujetá vzdálenost je tedy 119,8 km. Všechny trasy se přirozeně vejdou do osmihodinové pracovní doby, ale požadavek byl na 366 min., proto zde nebudeme uvádět průběh trasy s délkou a časem příjezdu do jednotlivých zastávek a ani zakreslení tras.

3.2.2 Cesty tvořené současně s časovým omezením

Názorný postup Algoritmu 5 je vidět na Obr. 3.1. Popis diagramu Algoritmu 5 je stejný jako Algoritmus 1, až na bod b) Nejvzdálenější body a e) Test místa.

- b) Nejvzdálenější body – nalezneme nejvzdálenější vrchol od výchozího bodu, k němu najdeme nejvzdálenější bod a poté hledáme takový třetí bod, aby

součet hran mezi jednotlivými uzly (obvod pomyslného trojúhelníku) byl maximální; máme tři uzavřené trasy a známe jejich délku a čas;

- e) Test místa – zkoumá, do jaké trasy a kam zařadit bod, aby prodloužení bylo nejkratší a zároveň bylo dodrženo časové omezení trasy.

Časové intervaly stability řešení s celkovou ujetou vzdáleností najdeme v Tab. 3.7 a soubor s programem na příloženém CD („jr_3_soucasne_s_omezenim“). Požadavek na maximální hodnotu časového omezení 366 min. opět vychází z úlohy (Svobodová, 2011).

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 324,3$		není řešení
$324,3 < T \leq 344,3$		165,3
$344,3 < T \leq 348,7$		144,3
$348,7 < T \leq 355,03$		140,2
$355,03 < T \leq 365,08$		140,2
$365,08 < T \leq 366$		141,9

Tab. 3.7 – Časové intervaly stability řešení.

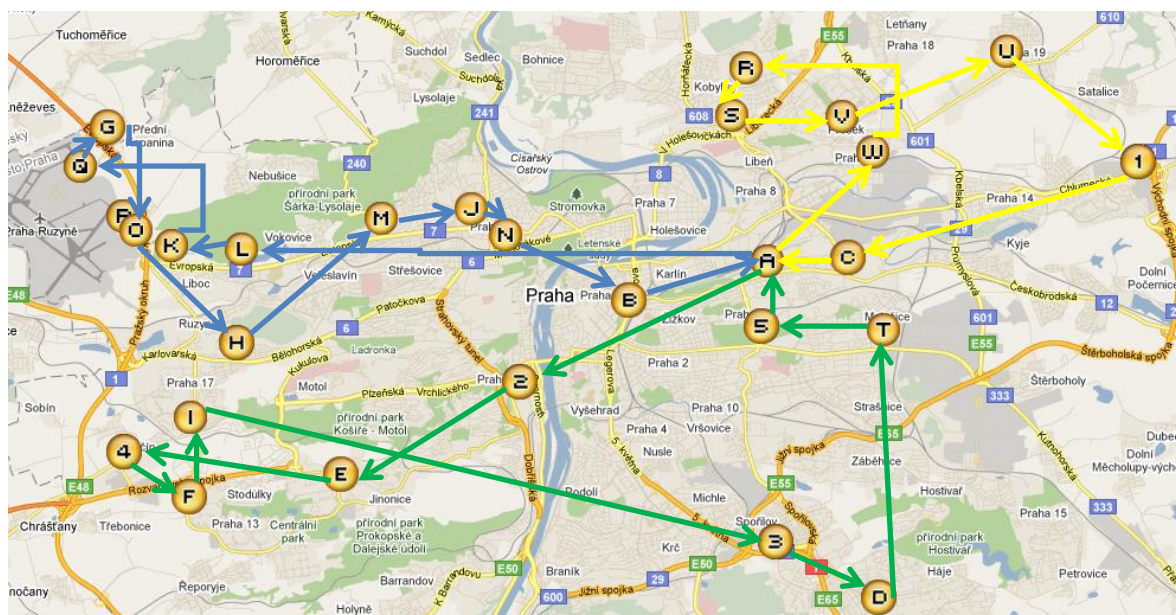
Při hledání lepších výsledků postupujeme obdobně jako v kapitole 3.1.2. Nejlepšího řešení je dosaženo v Pokusu 4 (Tab. 3.8), kde je výsledek jen o 14,7 km delší než při optimalizaci. Průběh trasy Pokusu 4 je znázorněn v Tab. 3.9 a mapa tras v Obr. 3.5.

		Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Celkem
Optimalizace	omezení	366	366	366	124,4
	km	52,3	26,4	45,7	
	čas	362,17	159,4	328,77	
Pokus 1	omezení	366	366	366	141,9
	km	49,1	37,7	55,1	
	čas	365,03	218,03	296,43	
Pokus 2	omezení	365	366	366	140,2
	km	44,9	37,7	57,6	
	čas	355,03	218,03	303,6	
Pokus 3	omezení	355	366	366	140,2
	km	42,9	37,7	59,6	
	čas	348,7	218,03	309,93	
Pokus 4	omezení	306	366	366	139,1
	km	46,7	37,7	54,7	
	čas	297,63	218,03	359,17	

Tab. 3.8 – Řešení při různých omezeních.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu
A	L	13,8	23,00
L	Q	19,7	100,43
Q	G	21,2	119,53
G	P	24,7	134,77
P	O	25,1	155,03
O	H	29,3	173,83
H	J	35,7	194,30
J	N	36,9	252,10
N	B	43,2	288,80
B	A	46,7	297,63
A	W	4,6	7,67
W	R	9,2	24,33
R	S	10,8	37,60
S	V	18	78,80
V	U	21,9	94,30
U	1	28,7	108,63
1	C	36,1	198,17
C	A	37,7	218,03
A	2	7,1	11,83
2	E	12,4	90,87
E	4	17,7	115,10
4	F	20,1	172,70
F	I	21,9	185,10
I	3	38,6	215,93
3	D	41,8	310,67
D	T	49,8	329,60
T	5	52,3	336,77
5	A	54,7	359,17

Tab. 3.9 – Ujetá vzdálenost a čas příjezdu vozidla do zastávky.



Obr. 3.5 – Mapa tras vozidel.

3.2.3 Cesty tvořené postupně s časovým omezením

Postup Algoritmu 6 je totožný s Algoritmem 3 (Obr. 3.3). Popis diagramu Algoritmu 6 je stejný jako Algoritmus 3, až na bod c) Nejvzdálenější bod.

c) Nejvzdálenější bod –

Varianta 1: první bod je nejvzdálenější od počátku, druhý bod je nejvzdálenější od prvního bodu a třetí bod je nejvzdálenější od počátku; postupně vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;

Varianta 2: z nezařazených uzlů vybere vždy ten, který je nejvzdálenější od počátku; postupně vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;

Varianta 3: nalezneme nejvzdálenější vrchol od výchozího bodu, k němu najdeme nejvzdálenější bod a poté hledáme takový třetí bod, aby součet hran mezi jednotlivými uzly (obvod pomyslného trojúhelníku) byl maximální; postupně vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;

V aplikaci je možné nastavit tři odlišné varianty (viz CD „jr_3_postupne_s_omezenim“).

Z časových intervalů stability řešení pro Variantu 1, 2 a 3 (Tab. 3.10) lze usoudit, že nejlepších výsledků bude nalezeno ve Variantě 1 a 2.

Varianta 1

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 335,43$		není řešení
$335,43 < T \leq 348,7$		157,2
$348,7 < T \leq 355,03$		155,9
$355,03 < T \leq 365,03$		153,5
$365,03 < T \leq 366$		147,5

Varianta 2

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 304,7$		není řešení
$304,7 < T \leq 316,2$		150,8
$316,2 < T \leq 320,17$		152,2
$320,17 < T \leq 327,1$		160,8
$327,1 < T \leq 348,7$		148,4
$348,7 < T \leq 355,03$		153,7
$355,03 < T \leq 365,03$		149,9
$365,03 < T \leq 366$		153,6

Varianta 3

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 335,43$		není řešení
$335,43 < T \leq 348,7$		158,0
$348,7 < T \leq 355,03$		155,9
$355,03 < T \leq 365,03$		153,5
$365,03 < T \leq 366$		146

Tab. 3.10 – Časové intervaly stability řešení.

Nejlepšího řešení je dosaženo v Pokusu 3 u Varianty 1, 2 i 3 (Tab. 3.11). Jak se předpokládalo, Varianta 1 a 3 je vždy lepší než Varianta 2. Nejlepší výsledek je však u Varianty 1, 141,5 km. Celková délka trasy je o 17,1 km delší než při optimalizaci. Průběh trasy Pokusu 3 Varianty 1 s délkou a časem příjezdu do jednotlivých zastávek je znázorněn v Tab. 3.12 a zakreslení tras znázorňuje Obr. 3.6.

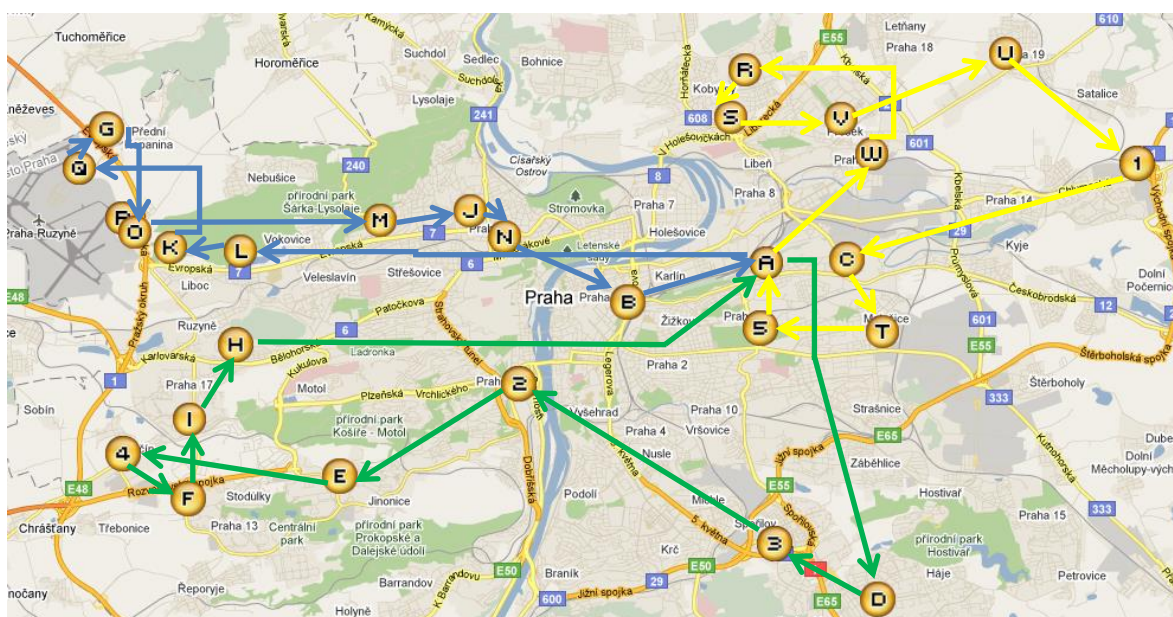
Varianta 1					Varianta 2				Varianta 3				
		Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ
Optimalizace	T	366	366	366	124,4	366	366	366	124,4	366	366	366	124,4
	km	52,3	26,4	45,7		52,3	26,4	45,7		52,3	26,4	45,7	
	čas	362,17	159,4	328,77		362,17	159,4	328,77		362,17	159,4	328,77	
Pokus 1	T	366	366	366	147,5	366	366	366	153,6	366	366	366	146
	km	49,1	44,3	54,1		49,1	66,2	38,3		49,1	44,3	52,6	
	čas	365,03	250,43	273,37		365,03	297,93	236,03		365,03	250,43	270,87	
Pokus 2	T	366	171	366	143,6	366	184	366	146,7	366	185	366	144,9
	km	49,1	26,4	68,1		49,1	41	56,6		49,1	31,8	64	
	čas	365,03	159,4	357,9		365,03	173,73	348,73		365,03	179	340,47	
Pokus 3	T	296	366	366	141,5	296	366	366	143,5	296	366	366	142,8
	km	43,3	44,3	53,9		43,3	46,1	54,1		43,3	44,3	55,2	
	čas	282,17	250,43	346,23		282,17	276,83	323,17		282,17	250,43	348,4	

Tab. 3.11 – Řešení při různých omezeních.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu
A	L	13,8	23,00
L	Q	19,7	100,43
Q	G	21,2	119,53
G	P	24,7	134,77
P	O	25,1	155,03
O	J	32,3	178,83

J	N	33,5	236,63
N	B	39,8	273,33
B	A	43,3	282,17
A	W	4,6	7,67
W	R	9,2	24,33
R	S	10,8	37,60
S	V	18	78,80
V	U	21,9	94,30
U	1	28,7	108,63
1	C	36,1	198,17
C	T	39,4	220,87
T	5	41,9	228,03
5	A	44,3	250,43
A	D	10	16,67
D	3	13,5	28,10
3	2	22,7	132,83
2	E	28	211,87
E	4	33,3	236,10
4	F	35,7	293,70
F	I	37,5	306,10
I	H	40	313,27
H	A	53,9	346,23

Tab. 3.12 – Ujetá vzdálenost a čas příjezdu vozidla do zastávky.



Obr. 3.6 – Mapa tras vozidel.

3.2.4 Shrnutí

Jako v kapitole 3.1 Výlep jízdních řádů – dvě vozidla, i zde byly použity tři modely. První model, kdy cesty vznikaly současně bez omezení, vygeneroval řešení

s celkovou délkou trasy 119,8 km, ale nebylo dodrženo časové omezení na trase 366 min. Nejlepší dosažené řešení při optimalizaci má délku 124,5 km.

Nejlepší výsledek druhého modelu měří 139,1 km (Pokus 4, Tab. 3.8) a je jen o 14,7 km (11,82 %) delší než řešení při optimalizaci. Tento model také dosáhl nejlepšího řešení. Vkládací metoda zde dosahuje lepších výsledků než v úloze se dvěma vozidly (23,17 %).

V posledním modelu byly cesty tvořeny postupně. První nejvzdálenější bod byl u všech variant brán od počátku. U Varianty 1 a 3 byl druhý bod hledán jako nejvzdálenější od prvního bodu a u Varianty 2 jako nejvzdálenější od počátku. Třetí bod byl u Varianty 1 i 2 hledán jako nejvzdálenější od počátku, ale u Varianty 3 to byl takový bod, aby součet hran mezi jednotlivými uzly (obvod pomyslného trojúhelníku) byl maximální. Ve všech jednotlivých omezeních vycházela Varianta 2 nejhůře. Nejlepšího výsledku bylo dosaženo ve Variantě 1, 141,5 km (Pokus 3, Tab. 3.11).

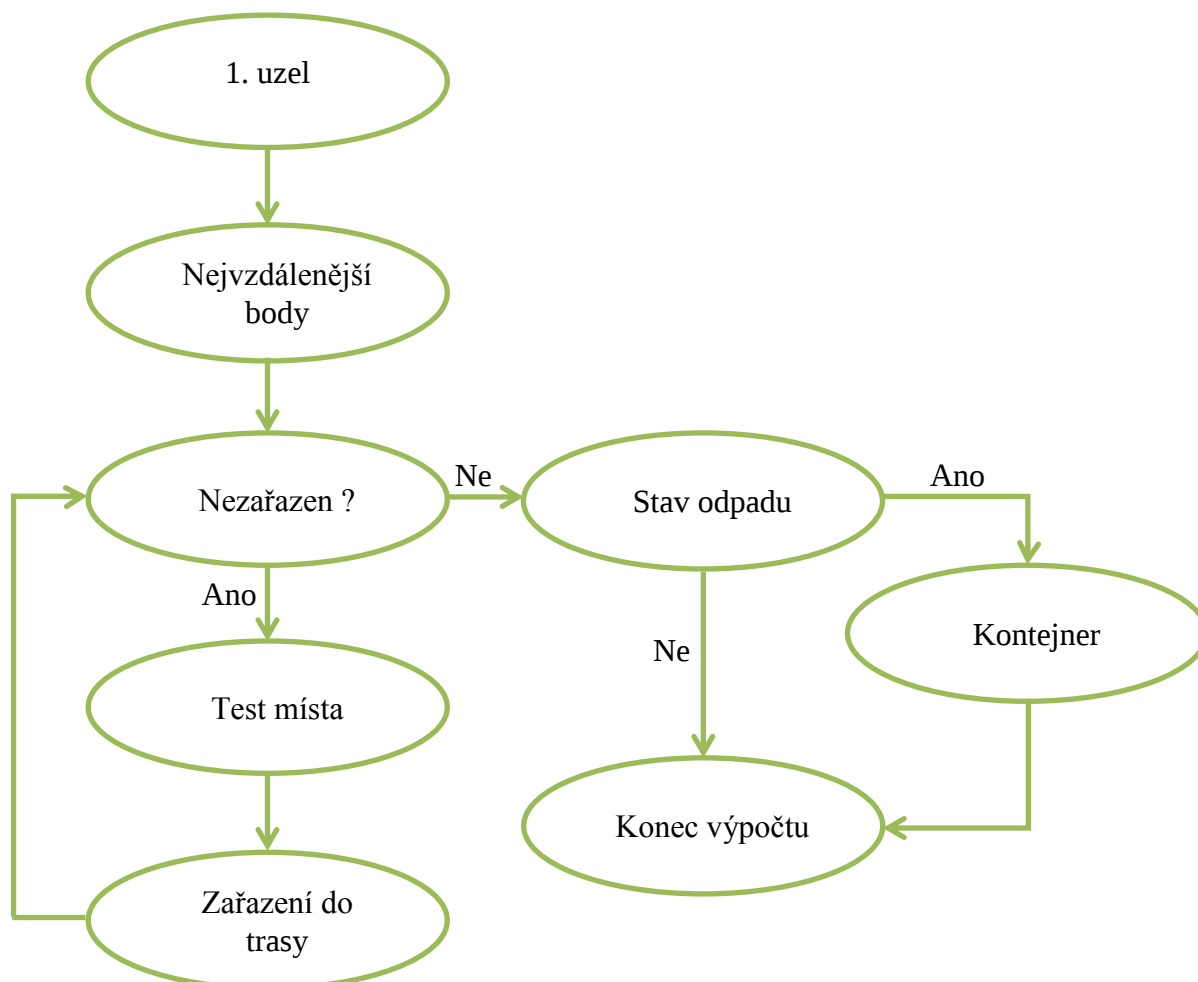
3.3 Vývoz košů ze všech zastávek - dvě vozidla

3.3.1 Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem a časovým omezením

Názorný postup Algoritmu 7 je vidět na Obr. 3.7. Popis diagramu Algoritmu 7 je následující:

- a) 1. uzel – výchozí místo, z kterého vozidla vyjíždějí a do něj se také vracují;
- b) Nejvzdálenější body – nalezení prvního nejvzdálenějšího bodu od počátku a poté nejvzdálenějšího bodu od bodu prvního; máme dvě uzavřené trasy a známe jejich délku a čas;
- c) Nezařazen – testujeme uzly, zda jsou již zařazeny v některé z tras; pokud je bod nezařazen, přesuneme se na Test místa; pokud jsou všechny uzly zařazeny, přejdeme na Stav odpadu;
- d) Test místa – zkoumá, do jaké trasy a kam zařadit bod, aby prodloužení bylo co nejkratší a zároveň bylo dodrženo časové omezení trasy;
- e) Zařazení do trasy – zařadí bod do jedné z tras a připočítá k ní ujetou vzdálenost, čas a přepočítá objem odpadu ve vozidle.
- f) Stav odpadu – zkoumá, zda je vozidlo na konci trasy prázdné nebo veze odpad; pokud vozidlo odpad veze, přejde na Kontejner, jinak výpočet končí;

- g) Kontejner – před konečný bod zařadí bod s kontejnerem tak, aby prodloužení bylo co nejkratší;
- h) Konec výpočtu – všechny uzly jsou zařazeny a ve voze není odpad.



Obr. 3.7 – Diagram Algoritmu 7.

Nejdříve jsou vypočítány časové intervaly stability (Tab. 3.13), z kterých je možné získat základní představu o řešení. Nejlepšího výsledku je dosaženo v intervalu, který přesahuje osmihodinovou pracovní dobu. Vzhledem k tomu, že se jedná pouze o několik minut, zahrneme výsledek do dalších výpočtů.

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 395,7$		není řešení
$395,7 < T \leq 419,2$		130,9
$419,2 < T \leq 472,2$		138,3
$472,2 < T \leq 482,3$		140,2
$482,3 < T < \infty$		128,7

Tab. 3.13 – Časové intervaly stability řešení.

Řešení jsou hledána dle postupu uvedeného na začátku kapitoly 3. Bereme v úvahu dvě možnosti časového omezení tras $T_k = 420$ a 483 min. Nejlepší výsledky počítaných možností lze vidět v Tab. 3.14. Čas 1 značí dobu příjezdu do cíle bez dodatečného zahrnutí místa s kontejnerem a musí splňovat časové omezení T_k . Pokud se čas 1 a 2 rovnají, je místo s kontejnerem součástí řešení. Soubor s aplikací lze nalézt na CD pod názvem „1_kose_2_soucasne_s_omezenim_cele“. Nejkratší ujetá vzdálenost je 128,7 km (Pokus 3) a odpovídá nejlepšímu výsledku z Tab. 3.13. První trasa je 82,1 km dlouhá a objem odpadu ve vozidle během trasy nepřesáhne 320 l, je tedy dostačující mít na korbě vozidla dvě nádoby na odpad o celkovém objemu 400 l. Druhá trasa měří 57,5 km a objem odpadu je maximálně 100 l.

		Trasa 1	Trasa 2	Celkem
Pokus 1	omezení	420	420	138,3
	km	80,8	57,5	
	čas 1	419,2	381,8	
	čas 2	421,7	381,8	
Pokus 2	omezení	400	420	130,9
	km	67,9	63	
	čas 1	395,7	393	
	čas 2	398,2	393	
Pokus 3	omezení	483	483	128,7
	km	82,1	46,6	
	čas 1	482,3	297,5	
	čas 2	484,8	302,7	
Pokus 4	omezení	400	483	130,9
	km	67,9	63	
	čas 1	395,7	393	
	čas 2	398,2	393	

Tab. 3.14 – Řešení při různých omezeních.

3.3.2 Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem a časovým omezením

Postup Algoritmu 8 je zobrazen na Obr. 3.8. Algoritmus 8 lze popsat následovně:

1. uzel – výchozí místo, z kterého vozidla vyjíždějí a do něj se také vrací;
- Nezařazen_1 – hledá nezařazené uzly
- Nejvzdálenější bod –

Varianta 1: první bod je nejvzdálenější od výchozího místa, druhý bod je nejvzdálenější od prvního bodu; vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;

Varianta 2: první i druhý bod je nejvzdálenější od výchozího místa; vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;

- d) Nezařazen_2 – testuje uzly, zda jsou již zařazeny v některé z tras; pokud je nezařazen, přesuneme se na Test místa; pokud jsou všechny uzly zařazeny, přejde na Stav odpadu;
- e) Test místa – zkoumá, kam zařadit bod, aby prodloužení bylo co nejkratší a zároveň bylo dodrženo časové omezení trasy; v případě dodržení podmínek, je bod zařazen do trasy, v opačném vyjede další vozidlo z 1. uzlu;
- f) Zařazení do trasy - zařadí bod do trasy a připočítá k ní ujetou vzdálenost, čas a přepočítá objem odpadu ve vozidle;
- g) Stav odpadu – zkoumá, zda je vozidlo na konci trasy prázdné nebo veze odpad; pokud vozidlo odpad veze, přejde na Kontejner, jinak výpočet končí;
- h) Kontejner – před konečný bod zařadí uzel s kontejnerem tak, aby prodloužení bylo co nejkratší;
- i) Konec výpočtu – všechny uzly jsou zařazeny a ve voze není odpad;

Jak již bylo zmíněno výše, v aplikaci je možné nastavit dvě odlišné varianty (viz CD „1_kose_postupne_s_omezenim_cel“). Varianta 1 hledá takový druhý bod, který je nejvzdálenější od prvního bodu a Varianta 2 hledá druhý bod, jako nejvzdálenější bod od výchozího místa, v obou případech samozřejmě z dosud nezařazených bodů. Z časových intervalů stability řešení pro Variantu 1 a 2 (Tab. 3.15) lze usoudit, že nejlepší řešení bude nalezeno ve Variantě 1.

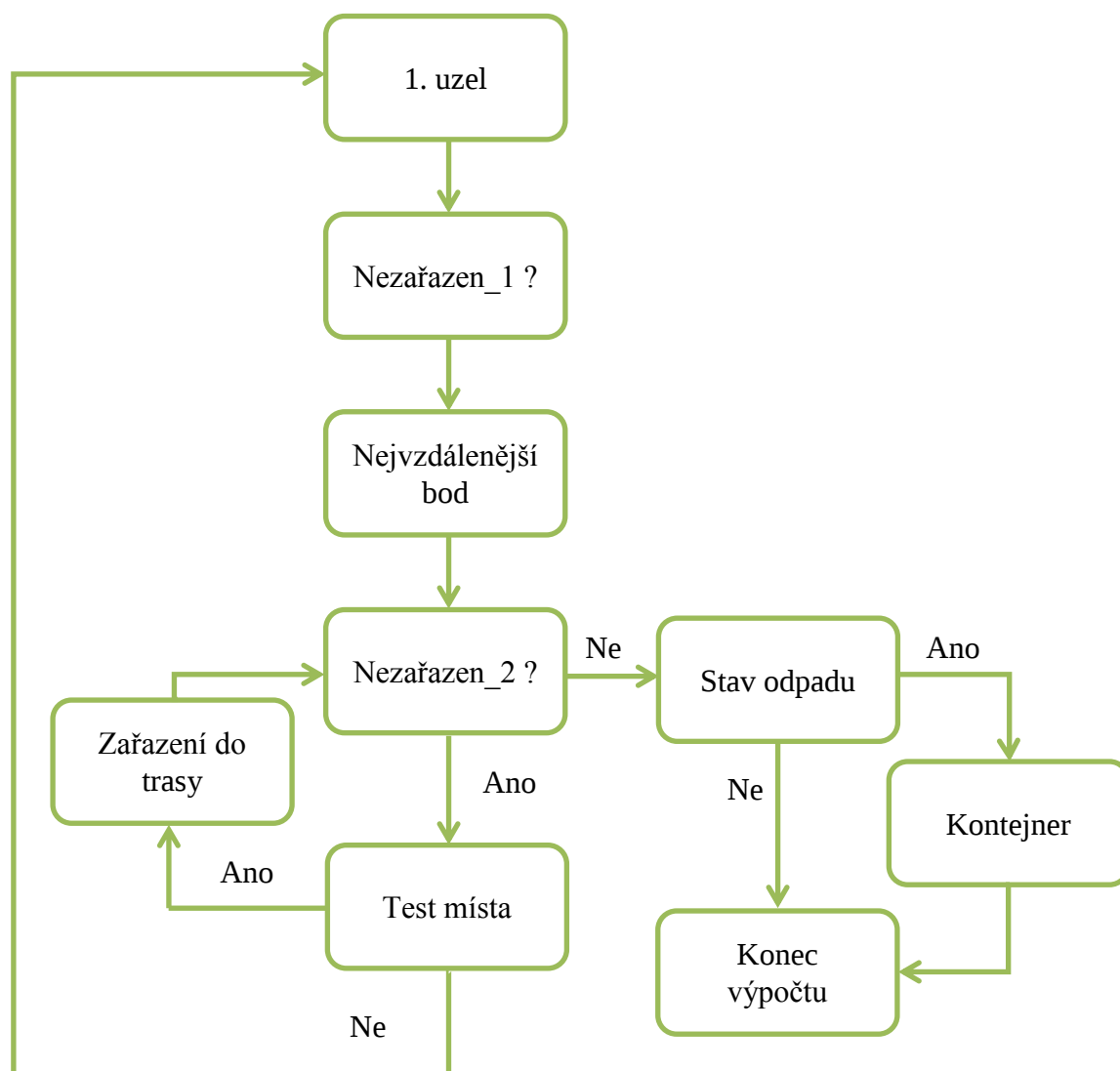
Varianta 1

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 405,2$		není řešení
$405,2 < T \leq 420$		137,9
$420 < T \leq 431$		141,9
$431 < T \leq 443,5$		141,4
$443,5 < T \leq 444,3$		146,3
$444,3 < T \leq 449,2$		146,5
$449,2 < T \leq 459,3$		146,8
$459,3 < T \leq 460,7$		144,9
$460,7 < T \leq 470,8$		145,7
$470,8 < T \leq 483$		143,4

Varianta 2

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 405,2$		není řešení
$405,2 < T \leq 420$		141,5
$420 < T \leq 431$		144,4
$431 < T \leq 443,5$		148,7
$443,5 < T \leq 444,3$		152,9
$444,3 < T \leq 449,2$		152,5
$449,2 < T \leq 459,3$		146,7
$459,3 < T \leq 460,7$		144,9
$460,7 < T \leq 470,8$		149,9
$470,8 < T \leq 483$		143,4

Tab. 3.15 – Časové intervaly stability řešení.



Obr. 3.8 – Diagram Algoritmu 8.

Možnosti časového omezení jsou stejné jako v předchozím modelu, tedy $T_k = 420$ a 483 min. Výsledky počítaných možností lze vidět v Tab. 3.16. Nejlepšího řešení je, jak jsme předpokládali, dosaženo ve Variantě 1 Pokusu 1 i 3 (Tab. 3.16). Pokus 1 je podmnožinou Pokusu 3. Objem odpadu na první trase nepřesáhne 320 l a na druhé trase 80 l.

Varianta 1					Varianta 2		
		Trasa 1	Trasa 2	Celkem	Trasa 1	Trasa 2	Celkem
	omezení	420	420	137,9	420	420	141,5
Pokus 1	km	72,8	65,1		72,8	68,7	
	čas 1	405,17	391,17		405,17	397,17	
	čas 2	410,33	392,5		410,33	398,5	
Pokus 2	omezení	483	483	143,4	483	483	143,4
	km	97,8	45,6		97,8	45,6	
	čas 1	470,8	336		470,8	336	
	čas 2	476	336		476	336	

Pokus 3	omezení	420	483	137,9	420	483	141,5
	km	72,8	65,1		72,8	68,7	
	čas 1	405,17	391,2		405,17	397,17	
	čas 2	410,33	392,5		410,33	398,5	

Tab. 3.16 – Řešení při různých omezeních.

3.3.3 Cesty tvořené současně se dvěma výchozími místy a časovým omezením

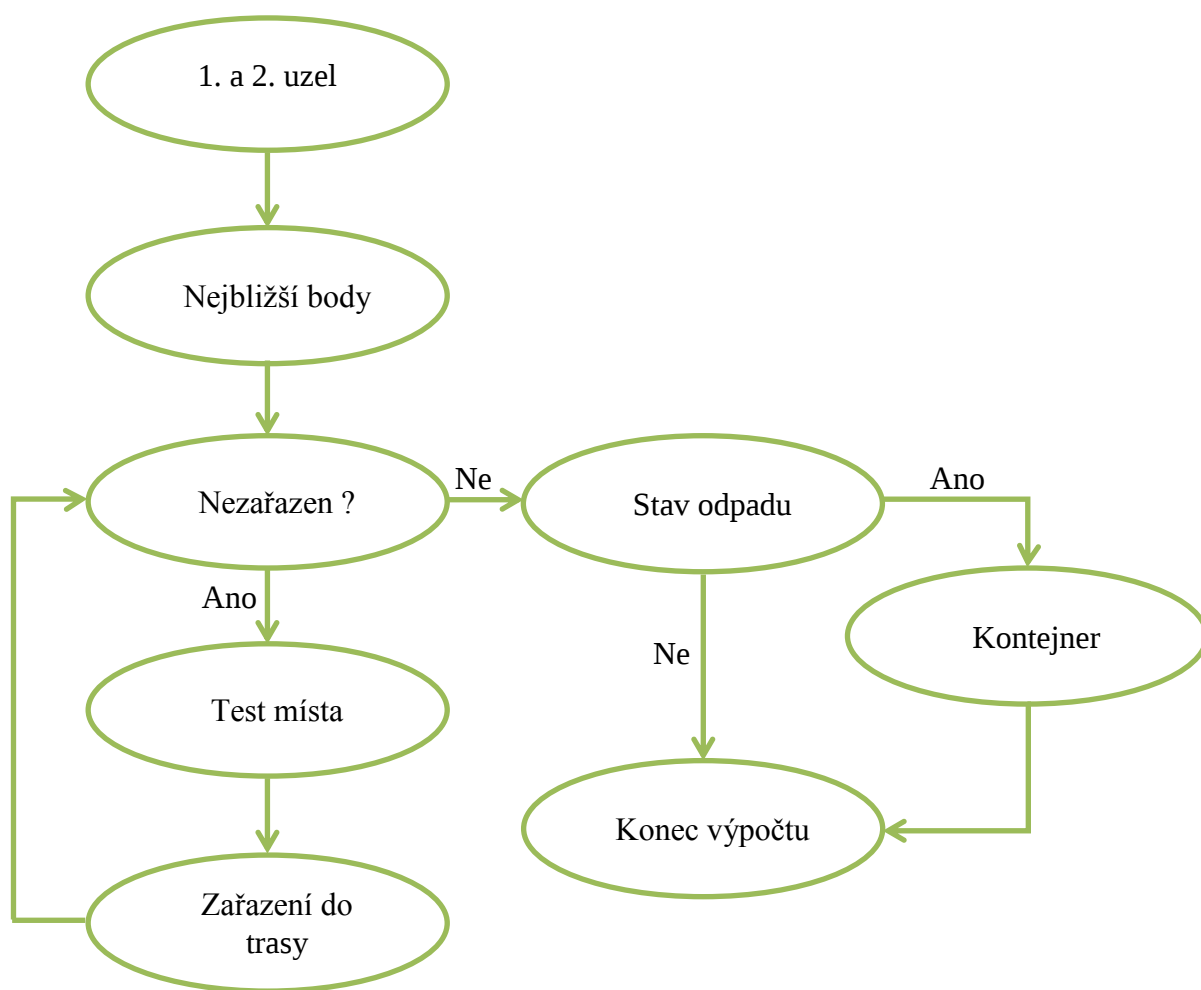
Názorný postup Algoritmu 9 je vidět na Obr. 3.9. Popis diagramu Algoritmu 9 je následující:

1. a 2. uzel – výchozí místa, z kterých vozidla vyjíždějí a do nich se také vracejí;
- Nejbližší body – nalezení prvního nejbližšího bodu od 1. uzlu a poté nejbližšího bodu od 2. uzlu;
- Nezařazen – testujeme uzly, zda jsou již zařazeny v některé z tras; pokud je bod nezařazen, přesuneme se na Test místa; pokud jsou všechny uzly zařazeny, přejdeme na Stav odpadu;
- Test místa – zkoumá, za který poslední bod zařadit uzel, aby prodloužení bylo co nejkratší a zároveň bylo dodrženo časové omezení trasy;
- Zařazení do trasy – zařadí bod do jedné z tras a připočítá k ní ujetou vzdálenost, čas a odpadu;
- Stav odpadu – zkoumá, zda je vozidlo na konci trasy prázdné nebo veze odpad; pokud vozidlo odpad veze, přejde na Kontejner, jinak výpočet končí;
- Kontejner – před konečný bod zařadí bod s kontejnerem tak, aby prodloužení bylo co nejkratší;
- Konec výpočtu – všechny uzly zařazeny a ve voze není odpad.

Soubor s aplikací je uveden na CD („m_kose_2_soucasne_s_omezenim_cele“). Z časových intervalů stability řešení (Tab. 3.17) lze vyčíst, že výsledky se mění již při malé změně časového omezení a celková ujetá vzdálenost je podstatně delší než u předchozích dvou modelů. Metoda nejbližšího souseda tedy neposkytuje dobré výsledky.

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 431,8$		není řešení
$431,8 < T \leq 433,3$		179,0
$433,3 < T \leq 440,8$		160,1
$440,8 < T \leq 441,7$		163,7
$441,7 < T \leq 447$		165,8

$447 < T \leq 449$	165,9
$449 < T \leq 454,8$	167,2
$454,8 < T \leq 456,8$	168,1
$456,8 < T \leq 462,2$	168,9
$462,2 < T \leq 463,2$	169
$463,2 < T \leq 465,2$	167
$465,2 < T \leq 470,5$	167,8
$470,5 < T \leq 476,7$	167,9
$476,7 < T \leq 483$	168,8

Tab. 3.17 – Časové intervaly stability řešení.

Obr. 3.9 – Diagram Algoritmu 9.

Výsledky počítaných možností lze vidět v Tab. 3.18. Nejlepšího řešení je dosaženo v Pokusu 2. První trasa je 65,9 km dlouhá a objem odpadu ve vozidle během trasy nepřesáhne 80 l. Druhá trasa měří 94,2 km a objem odpadu je maximálně 310 l.

		Trasa 1	Trasa 2	Celkem
Pokus 1	omezení	483	483	168,8
	km	78,2	90,6	
	čas 1	478,7	366	
	čas 2	488,2	366	
Pokus 2	omezení	440	483	160,1
	km	65,9	94,2	
	čas 1	433,3	398	
	čas 2	441,8	398	

Tab. 3.18 – Řešení při různých omezeních.

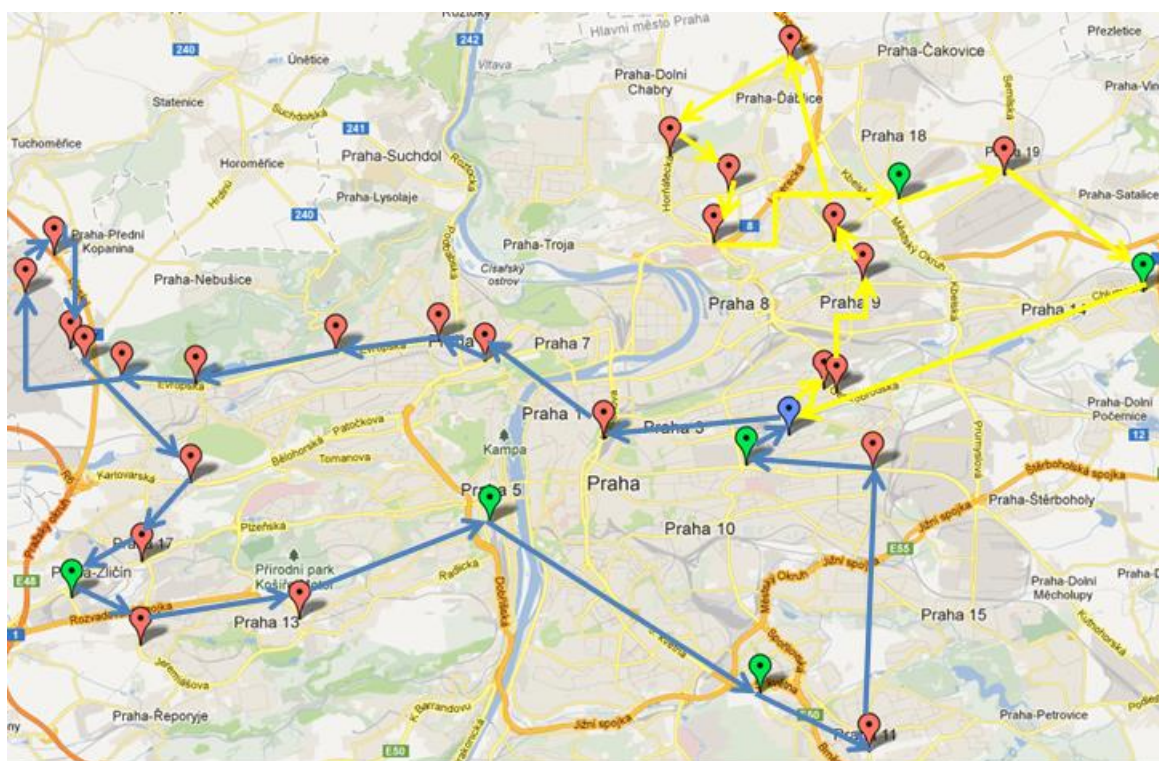
3.3.4 Optimalizace s jedním výchozím místem a časovým omezením

Při optimalizaci bylo zvoleno časové omezení $T = 490$ min. Optimální řešení měří 119,4 km. První trasa je 44,9 km dlouhá, trvá 299,8 min a objem odpadu je maximálně 120 l. Druhá trasa je 74,5 km dlouhá, trvá 472,2 min a objem odpadu ve vozidle nepřekročí 330 l. Průběh trasy je uveden v Tab. 3.19 a mapa tras v Obr. 3.10.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu	Odpad
Začátek	Spojovací-ČB	2,6	4,3	0
Spojovací-ČB	Spojovací-K	2,9	6,8	10
Spojovací-K	Špitálská	6,2	14,3	20
Špitálská	Prosek	8,3	22,8	40
Prosek	Ďáblice	12,8	35,3	60
Ďáblice	Voz. Kobylisy	16,5	43,5	70
Voz. Kobylisy	Ládví	18,5	48,8	80
Ládví	Vychovatelna	20,1	56,5	100
Vychovatelna	Letňany	24,7	69,2	120
Letňany	Huntířovská	27,5	181,8	0
Huntířovská	Černý Most	34,3	195,2	10
Černý Most	Začátek	44,9	299,8	0
Začátek	Hl. nádraží	5	8,3	0
Hl. nádraží	Hradčanská	11	24,3	30
Hradčanská	Dejvická	13,3	46,2	80
Dejvická	Horoměřická	15,2	82,3	170
Horoměřická	Divoká Šárka	18,2	92,3	190
Divoká Šárka	Dědina	19,7	96,8	200
Dědina	U hangáru	24,1	109,2	220
U hangáru	Aviatická	25,6	116,7	240
Aviatická	K letišti	28,7	126,8	260
K letišti	Terminál 3	29,1	132,5	280
Terminál 3	Bílá Hora	33,7	147,2	310
Bílá Hora	Bílý Beránek	36	153,0	320
Bílý Beránek	Zličín	37,9	158,2	330

Zličín	Stodůlky	40,3	252,2	0
Stodůlky	Nové Butovice	44,6	264,3	20
Nové Butovice	Na Knížecí	50	280,3	50
Na Knížecí	Roztyly	59,1	353,5	0
Roztyly	Opatov	62,3	419,8	0
Opatov	Černokostelecká	70,3	435,2	10
Černokostelecká	Želivského	72,8	444,3	30
Želivského	Začátek	74,5	472,2	0

Tab. 3.19 – Ujetá vzdálenost, čas příjezdu vozidla do zastávky a objem odpadu ve vozidle.



Obr. 3.10 – Mapa tras vozidel.

3.3.5 Shrnutí

Na základě výsledku Výlepu jízdních řádů se dvěma vozidly jsme předpokládali, že nejlepší výsledek (NV) bude z modelu, kdy jsou cesty tvořené postupně a procentuální rozdíl od optimálního řešení bude také přibližně 23 %. Jak lze ovšem vidět, stačí změna časové náročnosti jednotlivých zastávek a NV se výrazně liší.

Nejlepší řešení jednotlivých modelů znázorňuje Tab. 3.20. V žádném z modelů nepřekročí objem odpadu ve vozidle na jedné trase 330 l a na druhé trase 120 l. Proto je dostačující mít na korbě vozidel dvě a jednu nádobu na odpad.

Nejlepšího výsledku, co se celkových ujetých kilometrů týče, je dosaženo v prvním modelu. Rozdíl oproti optimálnímu řešení (OŘ) je jen 9,3 km (7,8 %). Co se rozložení tras

týče, řešení prvního modelu a OŘ zahrnují téměř stejné zastávky. Průběh trasy s délkou, časem příjezdu do jednotlivých zastávek a objemem odpadu ve vozidle je znázorněn v Tab. 3.21. Zakreslení tras znázorňuje Obr. 3.11.

Pokud bychom hledali takové řešení, kde časová náročnost obou tras je podobná, zvolili bychom výsledek prvního modelu Pokus 2 (Tab.3.14). Celková ujetá vzdálenost činí 130,9 km a první vozidlo projede svou trasu za 398,2 min. a druhé vozidlo za 393 min.

Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	82,1	8,08
Vozidlo 2	46,6	5,05
Celkem	128,7	13,13

Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	72,8	6,84
Vozidlo 2	65,1	6,54
Celkem	137,9	13,38

Cesty tvořené současně se dvěma výchozími místy

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	65,9	7,36
Vozidlo 2	94,2	6,63
Celkem	160,1	13,99

Optimální řešení

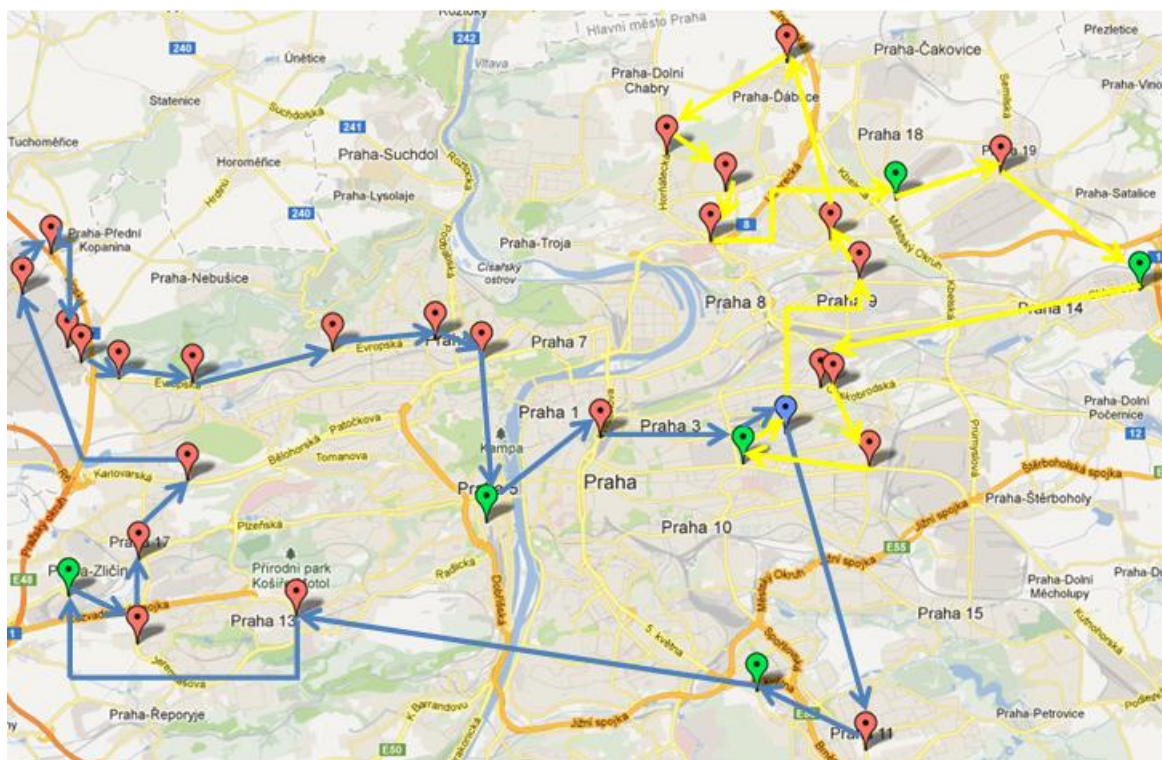
	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	44,9	5
Vozidlo 2	74,5	7,87
Celkem	119,4	12,87

Tab. 3.20 – Výsledky jednotlivých modelů.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu	Odpad
Začátek	Opatov	9,1	15,2	0
Opatov	Roztyly	12,6	23,0	10
Roztyly	Nové Butovice	27,6	109,0	0
Nové Butovice	Zličín	32,9	124,8	30
Zličín	Stodůlky	35,3	218,8	0
Stodůlky	Bílý Beránek	37,1	226,8	20
Bílý Beránek	Bílá Hora	39,6	233,0	30
Bílá Hora	U hangáru	47,9	248,8	40
U hangáru	Aviatická	49,4	256,3	60
Aviatická	Terminál 3	52,9	267,2	80
Terminál 3	K letišti	53,3	274,8	110

K letišti	Dědina	54,2	281,3	130
Dědina	Divoká Šárka	55,7	288,8	150
Divoká Šárka	Horoměřická	58,7	295,8	160
Horoměřická	Dejvická	60,6	304,0	180
Dejvická	Hradčanská	61,8	339,0	270
Hradčanská	Na Knížecí	66,8	365,3	320
Na Knížecí	Hl. nádraží	70,8	430,0	0
Hl. nádraží	Želivského	75,4	443,7	30
Želivského	Černokostecká	77,9	472,8	0
Černokostecká	Želivského	80,4	482,0	20
Želivského	Začátek	82,1	484,8	0
Začátek	Špitálská	5,6	9,3	0
Špitálská	Prosek	7,7	17,8	20
Prosek	Đáblice	12,2	30,3	40
Đáblice	Voz. Kobylisy	15,9	38,5	50
Voz. Kobylisy	Ládví	17,9	43,8	60
Ládví	Vychovatelna	19,5	51,5	80
Vychovatelna	Letňany	24,1	64,2	100
Letňany	Huntířovská	26,9	176,8	0
Huntířovská	Černý Most	33,7	190,2	10
Černý Most	Spojovací-ČB	40,8	289,0	0
Spojovací-ČB	Spojovací-K	41,1	291,5	10
Spojovací-K	Želivského	44,9	299,8	20
Želivského	Začátek	46,6	302,7	0

Tab. 3.21 – Ujetá vzdálenost, čas příjezdu vozidla do zastávky a objem odpadu ve vozidle.



Obr. 3.11 – Mapa tras vozidel.

3.4 Vývoz košů ze všech zastávek - tři vozidla

3.4.1 Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem a časovým omezením

Názorný postup Algoritmu 10 je zobrazen na Obr. 3.8. Popis diagramu Algoritmu 10 je obdobný Algoritmu 7, až na bod b) Nejvzdálenější body.

- b) Nejvzdálenější body – nalezneme nejvzdálenější vrchol od výchozího bodu, k němu najdeme nejbližší bod a poté hledáme takový třetí bod, aby součet hran mezi jednotlivými uzly (obvod pomyslného trojúhelníku) byl maximální; máme tři uzavřené trasy a známe jejich délku a čas;

Z Tab. 3.22 máme základní představu o řešení. Při hledání dalších výsledků bereme v úvahu časové omezení tras $T_k = 300$ a 360 min.

Výsledky počítaných možností jsou uvedeny v Tab. 3.23. Z toho nejlepší výsledek měří 132,4 km (Pokusu 8) a je kratší než nejlepší řešení v časových intervalech. Objem odpadu na vozidle je během trasy maximálně 320, 100 a 10 l. Soubor s aplikací lze nalézt na CD pod názvem „1_kose_3_soucasne_s_omezenim_cele“.

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 292,3$		není řešení
$292,3 < T \leq 297,5$		178,8
$297,5 < T \leq 356,3$		164,2
$356,3 < T < \infty$		133,3

Tab. 3.22 – Časové intervaly stability řešení.

		Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Celkem
Pokus 1	omezení	300	300	300	164,2
	km	59,5	46,6	58,1	
	čas 1	260,7	297,5	279,8	
	čas 2	264,2	302,7	279,8	
Pokus 2	omezení	230	300	300	152,9
	km	48,5	46,6	57,8	
	čas 1	226,3	297,5	294,5	
	čas 2	229,8	302,7	295,5	
Pokus 3	omezení	300	285	300	175,8
	km	78,4	39,3	58,1	
	čas 1	296,2	281,3	279,8	
	čas 2	299,7	286,5	279,8	
Pokus 4	omezení	360	360	360	133,3
	km	62,9	46,6	23,8	
	čas 1	356,3	297,5	132,7	
	čas 2	359,8	302,7	132,7	

Pokus 5	omezení	155	360	360	151,4
	km	44,6	46,6	60,2	
	čas 1	154	297,5	359,8	
	čas 2	159,3	302,7	363,3	
Pokus 6	omezení	360	260	360	147,5
	km	62,9	31,8	52,8	
	čas 1	356,3	258,8	188,3	
	čas 2	359,8	264	195	
Pokus 7	omezení	360	135	360	147,5
	km	62,9	24,9	59,7	
	čas 1	356,3	132,3	321,5	
	čas 2	359,8	137,5	321,5	
Pokus 8	omezení	360	360	125	132,4
	km	62,9	48,6	20,9	
	čas 1	356,3	308,5	122,8	
	čas 2	359,8	311	122,8	

Tab. 3.23 – Řešení při různých omezeních.

3.4.2 Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem a časovým omezením

Názorný postup Algoritmu 11 je zobrazen na Obr. 3.8 (soubor s aplikací viz CD „1_kose_3_postupne_s_omezenim_cel“). Popis diagramu Algoritmu 11 je stejný jako Algoritmus 8 až na bod c) Nejvzdálenější bod.

c) Nejvzdálenější bod –

Varianta 1: první bod je nejvzdálenější od výchozího místa, druhý bod je nejvzdálenější od prvního bodu a třetí bod je nejvzdálenější od výchozího místa; postupně vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;

Varianta 2: z nezařazených uzlů vybere vždy ten, který je nejvzdálenější od výchozího místa; postupně vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas;

Varianta 3: nalezneme nejvzdálenější vrchol od výchozího místa, k němu najdeme nejvzdálenější bod a poté hledáme takový třetí bod, aby součet hran mezi jednotlivými uzly (obvod pomyslného trojúhelníku) byl maximální; postupně vznikají uzavřené trasy, u kterých známe jejich délku a čas.

V Tab. 3.24 můžeme vyčíst časové intervaly stability řešení. Varianta 1 zde dosahuje nejlepšího výsledku 165,4 km.

Varianta 1			Varianta 2			Varianta 3		
čas	čas	km	čas	čas	km	čas	čas	km
$0 \leq T \leq 286,3$		NŘ	$0 \leq T \leq 289,3$		NŘ	$0 \leq T \leq 286,3$		NŘ
$286,3 < T \leq 289,3$		175,6	$289,3 < T \leq 291,5$		170,2	$286,3 < T \leq 289,3$		176,8
$289,3 < T \leq 296$		178,9	$291,5 < T \leq 299,2$		169,5	$289,3 < T \leq 296$		180,6
$296 < T \leq 300$		165,4	$299,2 < T \leq 300$		172,6	$296 < T \leq 300$		165,9
$300 < T \leq 301,8$		168,2	$300 < T \leq 301,8$		179,6	$300 < T \leq 301,8$		169
$301,8 < T \leq 309,5$		169,1	$301,8 < T \leq 309,5$		184,1	$301,8 < T \leq 309,5$		170
$309,5 < T \leq 324,3$		169,8	$309,5 < T \leq 310,8$		185,7	$309,5 < T \leq 324,3$		172,1
$324,3 < T \leq 335,3$		183,2	$310,8 < T \leq 319,7$		187,6	$324,3 < T \leq 335,3$		183,2
$335,3 < T \leq 347,8$		182,7	$319,7 < T \leq 321,8$		183,7	$335,3 < T \leq 347,8$		182,7
$347,8 < T \leq 348,7$		187,1	$321,8 < T \leq 324,3$		191,4	$347,8 < T \leq 348,7$		187,6
$348,7 < T \leq 353,5$		187,8	$324,3 < T \leq 329,9$		185,1	$348,7 < T \leq 353,5$		187,8
$353,5 < T \leq 356,2$		188,1	$329,9 < T \leq 335,3$		184,1	$353,5 < T \leq 356,2$		188,1
$356,2 < T \leq 360$		194	$335,3 < T \leq 347,9$		187	$356,2 < T \leq 360$		194
			$347,9 < T \leq 348,7$		204,7			
			$348,7 < T \leq 353,5$		204,5			
			$353,5 < T \leq 360$		202,7			

Tab. 3.24 – Časové intervaly stability řešení.

Při hledání dalších řešení bereme v úvahu stejná omezení jako v předchozí podkapitole, tedy $T_k = 300$ a 360 min. Nejlepší výsledky počítaných možností lze vidět v Tab. 3.25.

Varianta 1					Varianta 2					Varianta 3				
		Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ	
Pokus 1	T	300	300	300	165,4	300	300	300	172,6	300	300	300	165,9	
	km	64,5	49	51,9		64,5	68,1	40		64,5	49	52,4		
	čas 1	289,3	296	250,7		289,3	299,2	261		289,3	296	251,5		
	čas 2	294,5	302,7	251,5		294,5	300,5	265,7		294,5	302,7	252,3		
Pokus 2	T	270	300	300	153,5	x	x	x		270	300	300	153,5	
	km	53,5	46,6	53,4		x	x	x		53,5	46,6	53,4		
	čas 1	265,7	297,5	256,7		x	x	x		265,7	297,5	256,7		
	čas 2	268,2	302,7	258		x	x	x		268,2	302,7	258		
Pokus 3	T	300	275	300	177,0	300	299	300	169,5	300	290	300	180,6	
	km	64,5	37,1	75,4		64,5	64,7	40,3		64,5	44,4	71,7		
	čas 1	289,3	270,2	295,3		289,3	291,5	265,2		289,3	286,3	285,7		
	čas 2	294,5	276,8	296,7		294,5	292,8	268,2		294,5	293	286,5		
Pokus 4	T	360	360	360	194,0	360	360	360	202,7	360	360	360	194	
	km	85,6	54,7	53,7		85,6	82	35,1		85,6	54,7	53,7		
	čas 1	353,5	356,2	180,2		353,5	341	206,5		353,5	356,2	180,2		
	čas 2	358,7	356,2	181,5		358,7	345,7	206,5		358,7	356,2	181,5		
Pokus 5	T	360	300	360	178,1	360	204	360	189,3	360	204	360	180,4	
	km	85,6	41,1	51,4		85,6	58,1	45,6		85,6	41,1	53,7		
	čas 1	353,5	272,5	237,3		353,5	187,2	336		353,5	272,5	242,5		
	čas 2	358,7	272,5	238,7		358,7	193,8	336		358,7	272,5	242,5		

Pokus 6	T	200	360	360	156,6	262	360	360	152,7	165	360	360	158,3
	km	45,8	63,7	47,1		48,5	66	38,2		45,8	57,6	54,9	
	čas 1	192,3	336,8	303,5		254,8	358,2	213,7		163,8	345,8	316,8	
	čas 2	192,3	338,2	303,5		254,8	359	213,7		167,3	351	318,5	

Tab. 3.25 – Řešení při různých omezeních.

Nejlepšího výsledku je dosaženo překvapivě ve Variantě 2 (Pokus 6), i když v intervalech stability dosahovala tato varianta nejhorších výsledků. První trasa je 48,5 km dlouhá a objem odpadu ve vozidle během trasy nepřesáhne 280 l, je tedy dostačující mít na korbě vozidla dvě nádoby na odpad. Druhá trasa měří 66 km a objem odpadu je maximálně 90 l a třetí nejkratší trasa měří 38,2 km s objemem odpadu 10 l.

3.4.3 Cesty tvořené současně se třemi výchozími místy a časovým omezením

Názorný postup Algoritmu 12 lze vidět na Obr. 3.9. Popis diagramu Algoritmu 12 je obdobný Algoritmu 9 až na bod a) 1., a 2. uzel a b) Nejbližší body:

- 1., 2. a 3. uzel – výchozí místa, z kterých vozidla vyjíždějí a do nich se také vrací;
- Nejbližší body – nalezení prvního nejbližšího bodu od 1. uzlu, nejbližšího bodu od 2. uzlu a nejbližšího bodu od 3. uzlu;

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 299,8$		není řešení
$299,8 < T \leq 305,8$		171,5
$305,8 < T \leq 322,8$		173,9
$322,8 < T \leq 330,8$		169,7
$330,8 < T \leq 341,2$		165
$341,2 < T \leq 346,5$		169,7
$346,5 < T \leq 348,5$		172
$348,5 < T \leq 353,8$		171,1
$353,8 < T \leq 356,3$		171,1
$356,3 < T \leq 360$		172,8

Tab. 3.26 – Časové intervaly stability řešení.

Nejlepšího výsledku je dosaženo v Pokusu 5, 165 km (Tab. 3.27). Objem odpadu ve vozidlech během trasy nepřesáhne 340, 60 a 80 l.

Obdobně jako v modelu se dvěma vozidly, metoda nejbližšího souseda dosahuje výrazně horších výsledků než vkládací metoda.

		Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Celkem
Pokus 1	omezení	300	300	300	171,5
	km	73,9	62,3	35,3	
	čas 1	270,2	291,2	299,8	
	čas 2	270,2	288,8	299,8	
Pokus 2	omezení	300	291	300	173,5
	km	75,8	62,4	35,3	
	čas 1	291,3	272,5	299,8	
	čas 2	229,8	271	299,8	
Pokus 3	omezení	300	272	300	173,5
	km	75,8	62,4	35,3	
	čas 1	296,3	267,2	299,8	
	čas 2	299,7	266	299,8	
Pokus 4	omezení	360	360	360	172,8
	km	71,4	66,1	35,3	
	čas 1	193,7	356,3	299,8	
	čas 2	206	355,2	299,8	
Pokus 5	omezení	360	341	360	165
	km	71,5	58,2	35,3	
	čas 1	205,8	330,8	299,8	
	čas 2	218,2	330	299,8	
Pokus 6	omezení	360	360	193	171,7
	km	70,8	66,1	34,8	
	čas 1	300,7	356,3	191	
	čas 2	313	355,2	191	

Tab. 3.27 – Řešení při různých omezeních.

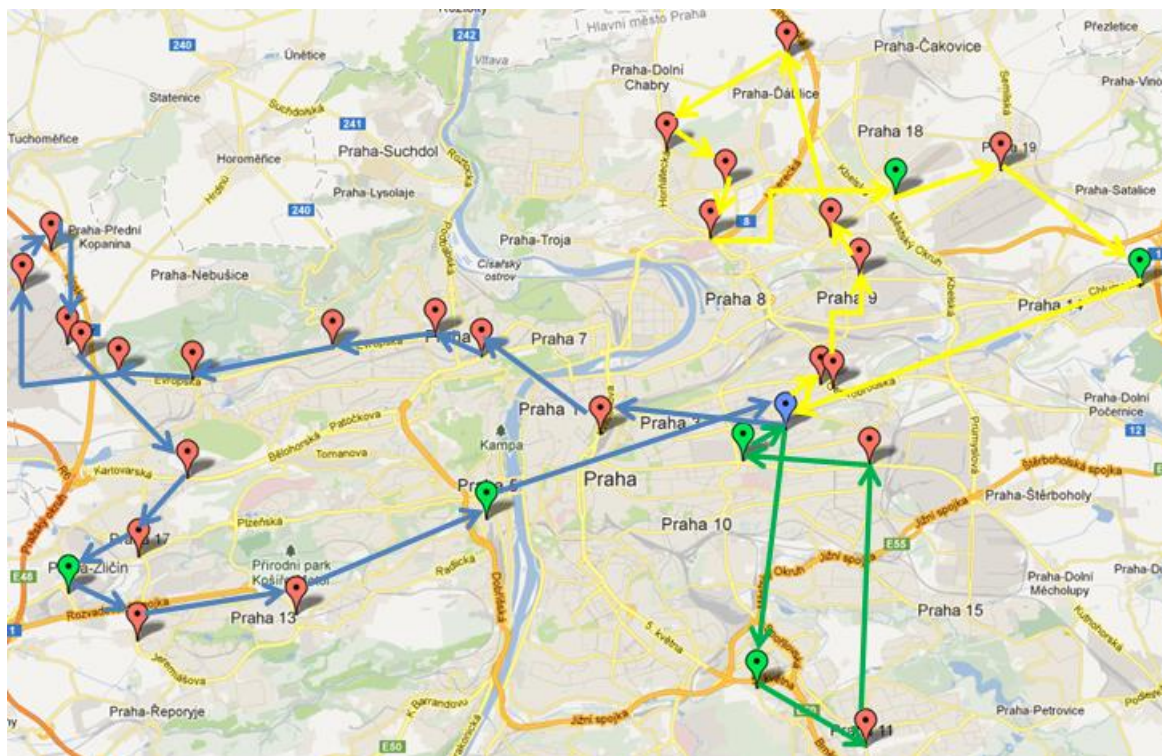
3.4.4 Optimalizace s jedním výchozím místem a časovým omezením

Při optimalizaci bylo zvoleno časové omezení $T = 360$ min. Optimální řešení měří 125,8 km. První trasa je 57,8 km dlouhá, trvá 351,3 min a objem odpadu nepřesáhne 330 l. Druhá trasa je 44,9 km dlouhá, trvá 299,8 min a objem odpadu činí maximálně 120 l. Třetí nejkratší trasa měří 23,1 km, trvá 131,50 min a odpadu je pouze 30 l. Průběh trasy je znázorněn v Tab. 3.28 a mapa tras v Obr. 3.12.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu	Odpad
Začátek	Hl. nádraží	5	8,3	0
Hl. nádraží	Hradčanská	11	24,3	30
Hradčanská	Dejvická	13,3	46,2	80
Dejvická	Horoměřická	15,2	82,3	170
Horoměřická	Divoká Šárka	18,2	92,3	190
Divoká Šárka	Dědina	19,7	96,8	200
Dědina	U hangáru	24,1	109,2	220
U hangáru	Aviatická	25,6	116,7	240
Aviatická	Terminál 3	29,1	127,5	260

Terminál 3	K letišti	29,5	135,2	290
K letišti	Bílá Hora	33,7	147,2	310
Bílá Hora	Bílý Beránek	36	153,0	320
Bílý Beránek	Zličín	37,9	158,2	330
Zličín	Stodůlky	40,3	252,2	0
Stodůlky	Nové Butovice	44,6	264,3	20
Nové Butovice	Na Knížecí	50	280,3	50
Na Knížecí	Začátek	57,8	351,3	0
Začátek	Spojovací-ČB	2,6	4,3	0
Spojovací-ČB	Spojovací-K	2,9	6,8	10
Spojovací-K	Špitálská	6,2	14,3	20
Špitálská	Prosek	8,3	22,8	40
Prosek	Ďáblice	12,8	35,3	60
Ďáblice	Voz. Kobylisy	16,5	43,5	70
Voz. Kobylisy	Ládví	18,5	48,8	80
Ládví	Vychovatelna	20,1	56,5	100
Vychovatelna	Letňany	24,7	69,2	120
Letňany	Huntířovská	27,5	181,8	0
Huntířovská	Černý Most	34,3	195,2	10
Černý Most	Začátek	44,9	299,8	0
Začátek	Roztyly	7,7	12,8	0
Roztyly	Opatov	10,9	79,2	0
Opatov	Černokostelecká	18,9	94,5	10
Černokostelecká	Želivského	21,4	103,7	30
Želivského	Začátek	23,1	131,5	0

Tab. 3.28 – Ujetá vzdálenost, čas příjezdu vozidla do zastávky a objem odpadu ve vozidle.



Obr. 3.12 – Mapa tras vozidel.

3.4.5 Shrnutí

Výsledky řešení jednotlivých modelů zobrazuje Tab. 3.29. V žádném z modelů nepřekročí objem odpadu ve vozidle na první nejdelší trase 340 l, na druhé trase 120 l a na nejkratší trase 80 l. Proto je dostačující mít na korbě vozidel dvě a jednu nádobu na odpad.

Nejlepšího výsledku je dosaženo v prvním modelu, kdy jsou cesty tvořené současně s jedním výchozím místem. Optimální řešení je jen o 6,6 km kratší (5,25 %). Co se rozložení tras týče, obě řešení zahrnují téměř stejné zastávky. Průběh trasy s délkou, časem příjezdu do jednotlivých zastávek a objemem odpadu ve vozidle je znázorněn v Tab. 3.30 a zakreslení tras lze nalézt na Obr. 3.13.

Z výsledku Výlepu jízdních řádů s třemi vozidly se dalo usuzovat, že nejlepší výsledek (NV) bude z modelu, kdy jsou cesty tvořeny současně. Tento předpoklad byl splněn. NV se od optimálního řešení liší o 11,82 %.

Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	62,9	6
Vozidlo 2	48,6	5,18
Vozidlo 3	20,9	2,5
Celkem	132,4	13,68

Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	48,5	4,25
Vozidlo 2	66	6
Vozidlo 3	38,2	3,56
Celkem	152,7	13,81

Cesty tvořené současně s třemi výchozími místy

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	71,5	3,64
Vozidlo 2	58,2	5,5
Vozidlo 3	35,3	5
Celkem	165	14,14

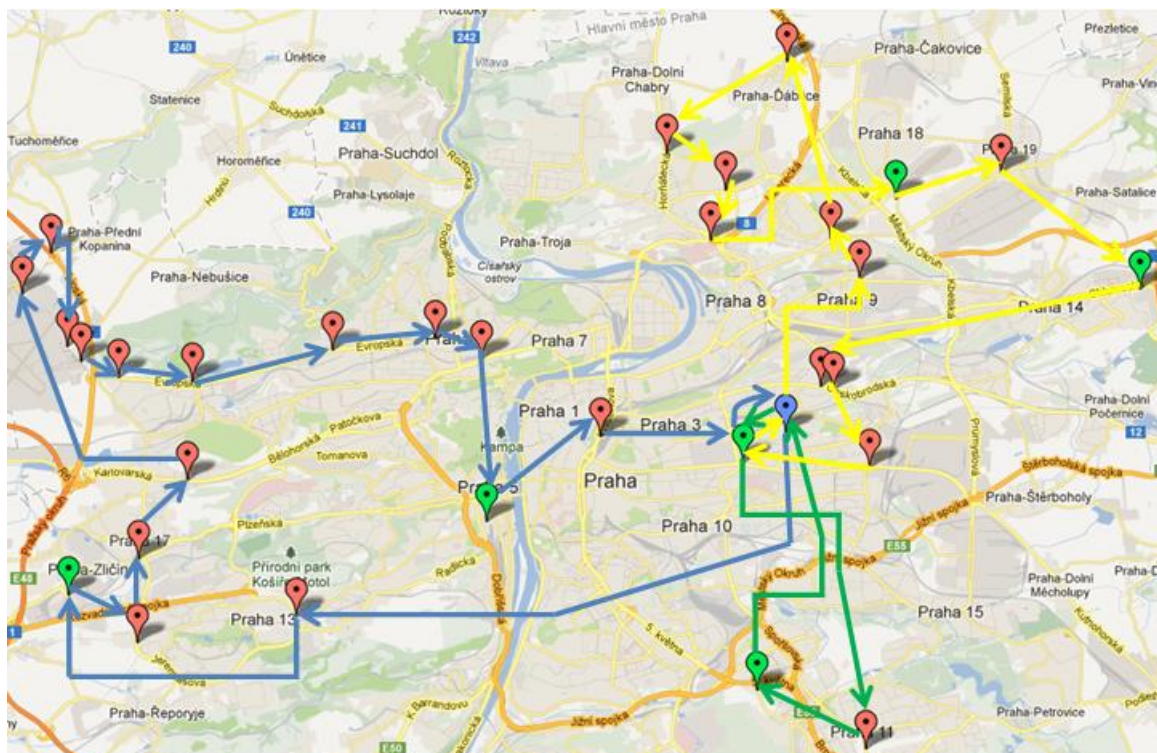
Optimální řešení

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	57,8	5,86
Vozidlo 2	44,9	5
Vozidlo 3	23,1	2,19
Celkem	125,8	13,05

Tab. 3.29 – Výsledky jednotlivých modelů.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu	Odpad
Začátek	Nové Butovice	13,4	22,3	0
Nové Butovice	Zličín	18,7	38,2	30
Zličín	Stodůlky	21,1	132,2	0
Stodůlky	Bílý Beránek	22,9	140,2	20
Bílý Beránek	Bílá Hora	25,4	146,3	30
Bílá Hora	U hangáru	33,7	162,2	40
U hangáru	Aviatická	35,2	169,7	60
Aviatická	Terminál 3	38,7	180,5	80
Terminál 3	K letišti	39,1	188,2	140
K letišti	Dědina	40	194,7	130
Dědina	Divoká Šárka	41,5	202,2	150
Divoká Šárka	Horoměřická	44,5	209,2	160
Horoměřická	Dejvická	46,4	217,3	180
Dejvická	Hradčanská	47,6	252,3	270
Hradčanská	Na Knížecí	52,6	278,7	320
Na Knížecí	Hl. nádraží	56,6	343,3	0
Hl. nádraží	Želivského	61,2	357,0	30
Želivského	Začátek	62,9	359,8	0
Začátek	Špitálská	5,6	9,3	0
Špitálská	Prosek	7,7	17,8	20
Prosek	Đáblice	12,2	30,3	40
Đáblice	Voz. Kobylisy	15,9	38,5	50
Voz. Kobylisy	Ládví	17,9	43,8	60
Ládví	Vychovatelna	19,5	51,5	80
Vychovatelna	Letňany	24,1	64,2	100
Letňany	Huntířovská	26,9	176,8	0
Huntířovská	Černý Most	33,7	190,2	10
Černý Most	Spojovací-ČB	40,8	289,0	0
Spojovací-ČB	Spojovací-K	41,1	291,5	10
Spojovací-K	Černokostelecká	44,4	299,0	20
Černokostelecká	Želivského	46,9	308,2	40
Želivského	Začátek	48,6	311,0	0
Začátek	Želivského	2	3,3	0
Želivského	Opatov	10,4	42,3	0
Opatov	Roztyly	13,9	50,2	10
Roztyly	Začátek	20,9	122,8	0

Tab. 3.30 – Ujetá vzdálenost, čas příjezdu vozidla do zastávky a objem odpadu ve vozidle.



Obr. 3.13 – Mapa tras vozidel.

3.5 Vývoz košů bez zastávek AS Černý Most a Letňany - dvě vozidla

Tato část vychází z části 3.3 Vývoz košů ze všech zastávek – dvě vozidla. Jak název napovídá, jedná se pouze o vynechání dvou zastávek z matice nejkratších vzdáleností. Proto jsou v jednotlivých podkapitolách zmíněny pouze odlišnosti od části 3.3. Jednotlivé výsledky jsou popsány ve Shrnutí. Programy s aplikacemi jsou uloženy na příloženém CD pod názvy:

„1_kose_2_současne_s_omezenim_bez“,

„1_kose_2_postupne_s_omezenim_bez“,

„m_kose_2_soucasne_s_omezenim_bez“.

Použité algoritmy jsou totožné s částí 3.3.

3.5.1 Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem a časovým omezením

Při hledání dalších řešení bereme v úvahu tři možnosti časového omezení tras $T_k = 360, 420$ a 440 min. Omezení 440 min. je vybráno z toho důvodu, že dosahuje nejlepšího výsledku v intervalech stability (viz Tab. 3.31.) Nejkratší ujetá vzdálenost je nalezena právě na tomto omezení (119,3 km, Tab. 3.32, Pokus 5). První trasa je 95,5 km

dlouhá a objem odpadu ve vozidle během trasy nepřesáhne 320 l. Druhá trasa měří 23,8 km a objem odpadu dosahuje maximálně 30 l.

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 319,8$		není řešení
$319,8 < T \leq 320,7$		159,6
$320,7 < T \leq 330,8$		159,1
$330,8 < T \leq 342,2$		160,4
$342,2 < T \leq 365,9$		150,2
$365,9 < T \leq 379$		128,8
$379 < T \leq 388,9$		132,1
$388,9 < T \leq 398,7$		137,8
$398,7 < T \leq 405,3$		139,7
$405,3 < T \leq 415,5$		138,1
$415,5 < T \leq 416,3$		138,2
$416,3 < T \leq 426,5$		132,9
$426,5 < T \leq 439$		130,6
$439 < T \leq \infty$		119,3

Tab. 3.31 – Časové intervaly stability řešení.

		Trasa 1	Trasa 2	Celkem
Pokus 1	omezení	360	360	150,2
	km	92,1	58,1	
	čas 1	343,3	279,8	
	čas 2	348,5	279,8	
Pokus 2	omezení	275	360	152,1
	km	63,9	88,2	
	čas 1	270,3	356	
	čas 2	275,5	356	
Pokus 3	omezení	420	420	132,9
	km	84,3	48,6	
	čas 1	416,3	178	
	čas 2	421,5	178	
Pokus 4	omezení	370	420	128,8
	km	67,3	61,5	
	čas 1	366	221,5	
	čas 2	371,2	221,5	
Pokus 5	omezení	440	440	119,3
	km	95,5	23,8	
	čas 1	439	132,7	
	čas 2	444,2	132,7	
Pokus 6	omezení	370	440	128,8
	km	67,3	61,5	
	čas 1	366	221,5	
	čas 2	371,2	221,5	

Tab. 3.32 – Řešení při různých omezeních.

3.5.2 Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem a časovým omezením

Z Tab. 3.33 lze vyčíst, že obě varianty jsou v časových intervalech totožné. To je poměrně nečekané, neboť v úloze se všemi zastávkami vykazovaly varianty rozdíly.

Varianta 1			Varianta 2		
čas	čas	km	čas	čas	km
$0 \leq T \leq 309,5$		není řešení	$0 \leq T \leq 309,5$		není řešení
$309,5 < T \leq 324,3$		147,1	$309,5 < T \leq 324,3$		147,1
$324,3 < T \leq 335,3$		155,2	$324,3 < T \leq 335,3$		155,2
$335,3 < T \leq 347,8$		165,9	$335,3 < T \leq 347,8$		165,9
$347,8 < T \leq 348,7$		163,1	$347,8 < T \leq 348,7$		163,1
$348,7 < T \leq 353,5$		170,0	$348,7 < T \leq 353,5$		170,0
$353,5 < T \leq 363,7$		163,6	$353,5 < T \leq 363,7$		163,6
$363,7 < T \leq 364,9$		163,7	$363,7 < T \leq 364,9$		163,7
$364,9 < T \leq 375,2$		167,3	$364,9 < T \leq 375,2$		167,3
$375,2 < T \leq 387,7$		164,4	$375,2 < T \leq 387,7$		164,4
$387,7 < T \leq 405,2$		154,4	$387,7 < T \leq 405,2$		154,4
$405,2 < T \leq 420$		125,8	$405,2 < T \leq 420$		125,8
$420 < T \leq 431$		133,9	$420 < T \leq 431$		133,9
$420 < T \leq 440$		140,8	$431 < T \leq 440$		140,8

Tab. 3.33 – Časové intervaly stability řešení.

Nalezený nejlepší výsledek je stejný jako výsledek z intervalu $405,2 < T \leq 420$ (viz Tab. 3.34). Objem odpadu je maximálně 320 a 120 l.

Varianta 1				Varianta 2			
		Trasa 1	Trasa 2	Celkem	Trasa 1	Trasa 2	Celkem
Pokus 1	omezení	360	360	163,6	360	360	163,6
	km	85,6	78		85,6	78	
	čas 1	353,5	292		353,5	292	
	čas 2	358,7	292		358,7	292	
Pokus 2	omezení	280	360	134,6	255	360	129
	km	58,4	76,2		48,5	80,5	
	čas 1	275,2	322		254,8	336,8	
	čas 2	280,3	322		254,8	338,2	
Pokus 3	omezení	420	420	125,8	420	420	125,8
	km	72,8	53		72,8	53	
	čas 1	405,2	177,3		405,2	177,3	
	čas 2	410,3	177,3		410,3	177,3	
Pokus 4	omezení	280	420	134,6	255	420	129
	km	58,4	76,2		48,5	80,5	
	čas 1	275,2	322		254,8	336,8	
	čas 2	280,3	322		254,8	338,2	
Pokus 5	omezení	440	440	140,8	440	440	140,8
	km	82,3	58,5		82,3	58,5	
	čas 1	431	169,8		431	169,8	
	čas 2	436,2	176,5		436,2	176,5	

Pokus 6	omezení	410	440	125,8	255	440	129
	km	72,8	53		48,5	80,5	
	čas 1	405,2	177,3		254,8	336,8	
	čas 2	410,3	177,3		254,8	338,2	
Pokus 7	omezení	x	x		440	169	136,3
	km	x	x		82,3	54	
	čas 1	x	x		431	167,7	
	čas 2	x	x		436,2	169	

Tab. 3.34 – Řešení při různých omezeních.

3.5.3 Cesty tvořené současně se dvěma výchozími místy a časovým omezením

Nejlepšího výsledku je dosaženo v Pokusu 6 (Tab. 3.36) 161,2 km, Pokusy 2 a 4 jsou jen podmnožinou tohoto řešení. Výsledek je z intervalu $343,3 < T \leq 351,7$ (Tab. 3.35). Objem odpadu ve vozidlech během trasy nepřesáhne 290 a 140 l.

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 334,8$		není řešení
$334,8 < T \leq 343,3$		171,2
$343,3 < T \leq 351,7$		161,2
$351,7 < T \leq 357$		166,9
$357 < T \leq 359$		167
$359 < T \leq 364,8$		168,3
$364,8 < T \leq 366,8$		169,2
$366,8 < T \leq 372,2$		170
$372,2 < T \leq 373,2$		170,1
$373,2 < T \leq 375,2$		168,1
$375,2 < T \leq 380,5$		168,9
$380,5 < T \leq 399,2$		169
$399,2 < T \leq 413,8$		168,7
$413,8 < T \leq 432,3$		170,1
$432,3 < T \leq 440,0$		169,4

Tab. 3.35 – Časové intervaly stability řešení.

	Trasa 1	Trasa 2	Celkem
Pokus 1	omezení	360	360
	km	81,5	86,8
	čas 1	359	278,5
	čas 2	370,8	287,7
Pokus 2	omezení	345	360
	km	74,3	86,9
	čas 1	343,3	285,7
	čas 2	351,8	294,8

Pokus 3	omezení	420	420	170,1
	km	84,8	85,3	
	čas 1	413,8	226	
	čas 2	426,3	235,2	
Pokus 4	omezení	345	420	161,2
	km	74,3	86,9	
	čas 1	343,3	285,7	
	čas 2	351,8	294,8	
Pokus 5	omezení	440	440	169,4
	km	85,4	84	
	čas 1	432,3	217,7	
	čas 2	445,3	215	
Pokus 6	omezení	345	440	161,2
	km	74,3	86,9	
	čas 1	343,3	285,7	
	čas 2	351,8	294,8	

Tab. 3.36 – Řešení při různých omezeních.

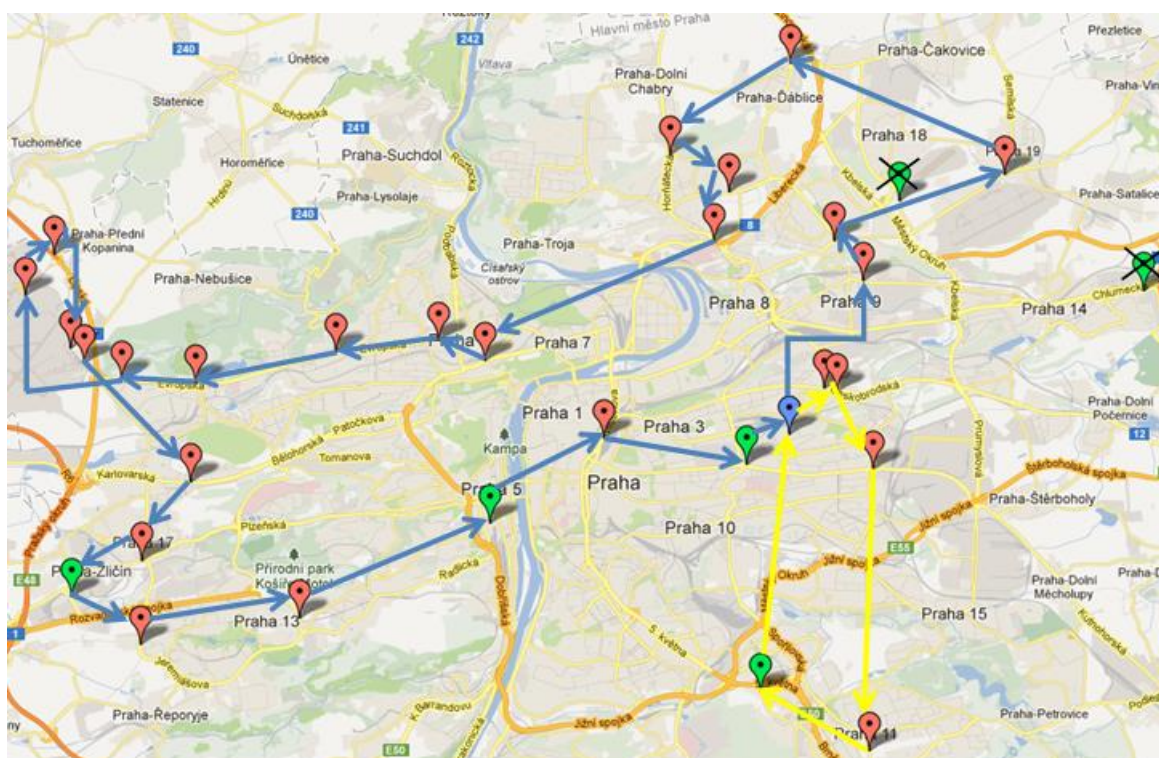
3.5.4 Optimalizace s jedním výchozím místem a časovým omezením

Při optimalizaci bylo zvoleno časové omezení $T = 445$ min. Optimální řešení měří 107,4 km. Průběh trasy s délkou, časem příjezdu do jednotlivých zastávek a objemem odpadu ve vozidle je znázorněn v Tab. 3.37 a zakreslení tras lze nalézt na Obr. 3.14.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu	Odpad
Začátek	Špitálská	5,6	9,3	0
Špitálská	Prosek	7,7	17,8	20
Prosek	Huntířovská	11,6	29,3	40
Huntířovská	Ďáblice	18,5	42,8	50
Ďáblice	Voz. Kobylisy	22,2	51,0	60
Voz. Kobylisy	Ládví	24,2	56,3	70
Ládví	Vychovatelna	25,8	64,0	90
Vychovatelna	Hradčanská	32,6	80,3	110
Hradčanská	Dejvická	34,9	102,2	160
Dejvická	Horoměřická	36,8	138,3	250
Horoměřická	Divoká Šárka	39,8	148,3	270
Divoká Šárka	Dědina	41,3	152,8	280
Dědina	U hangáru	45,7	165,2	300
U hangáru	Aviatická	47,2	172,7	320
Aviatická	K letišti	50,3	182,8	340
K letišti	Terminál 3	50,7	188,5	360
Terminál 3	Bílá Hora	55,3	203,2	390
Bílá Hora	Bílý Beránek	57,6	209,0	400
Bílý Beránek	Zličín	59,5	214,2	410
Zličín	Stodůlky	61,9	308,2	0

Stodůlky	Nové Butovice	66,2	320,3	20
Nové Butovice	Na Knížecí	71,6	336,3	50
Na Knížecí	Hl. nádraží	75,6	401,0	0
Hl. nádraží	Želivského	80,2	414,7	30
Želivského	Začátek	81,9	442,5	0
Začátek	Spojovací-ČB	2,6	4,3	0
Spojovací-ČB	Spojovací-K	2,9	6,8	10
Spojovací-K	Černokostelecká	6,2	14,3	20
Černokostelecká	Opatov	15	34,0	40
Opatov	Roztyly	18,5	41,8	50
Roztyly	Začátek	25,5	114,5	0

Tab. 3.37 – Ujetá vzdálenost, čas příjezdu vozidla do zastávky a objem odpadu ve vozidle.



Obr. 3.14 – Mapa tras vozidel.

3.5.5 Shrnutí

Výsledky řešení jednotlivých modelů znázorňuje Tab. 3.38. Nejlepší výsledek, co se celkových ujetých kilometrů týče, má první model jako v části 3.3 se všemi zastávkami. Rozdíl oproti optimálnímu řešení je 11,9 km (11,08 %). Tento výsledek je horší než v části 3.3, kde se od optimálního řešení lišil jen o 7,8 %. První trasa je 95,5 km dlouhá a objem odpadu ve vozidle během trasy nepřesáhne 320 l. Druhá trasa měří 23,8 km a objem odpadu dosahuje maximálně 30 l. Průběh trasy lze vyčíst z Tab. 3.39 a zakreslení tras z Obr. 3.15.

Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	95,5	7,4
Vozidlo 2	23,8	2,21
Celkem	119,3	9,61

Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	72,8	6,84
Vozidlo 2	53	3
Celkem	125,8	9,84

Cesty tvořené současně se dvěma výchozími místy

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	74,3	5,86
Vozidlo 2	86,9	4,9
Celkem	161,2	10,76

Optimální řešení

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	81,9	7,4
Vozidlo 2	25,5	1,91
Celkem	107,4	9,31

Tab. 3.38 – Výsledky jednotlivých modelů.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu	Odpad
Začátek	Nové Butovice	13,4	22,3	0
Nové Butovice	Zličín	18,7	38,2	30
Zličín	Stodůlky	21,1	132,2	0
Stodůlky	Bílý Beránek	22,9	140,2	20
Bílý Beránek	Bílá Hora	25,4	146,3	30
Bílá Hora	U hangáru	33,7	162,2	40
U hangáru	Aviatická	35,2	169,7	60
Aviatická	Terminál 3	38,7	180,5	80
Terminál 3	K letišti	39,1	188,2	110
K letišti	Dědina	40	194,7	130
Dědina	Divoká Šárka	41,5	202,2	150
Divoká Šárka	Horoměřická	44,5	209,2	160
Horoměřická	Dejvická	46,4	217,3	180
Dejvická	Hradčanská	47,6	252,3	270
Hradčanská	Na Knížecí	52,6	278,7	320
Na Knížecí	Hl. nádraží	56,6	343,3	0
Hl. nádraží	Vychovatelna	61,9	358,2	30
Vychovatelna	Voz. Kobylisy	68,4	374,0	50

Voz. Kobylisy	Ládví	70,4	379,3	60
Ládví	Ďáblice	73,8	390,0	80
Ďáblice	Huntířovská	80,6	403,3	90
Huntířovská	Prosek	84,5	411,8	100
Prosek	Špitálská	86,6	420,3	120
Špitálská	Spojovací-ČB	89,7	430,5	140
Spojovací-ČB	Spojovací-K	90	433,0	150
Spojovací-K	Želivského	93,8	441,3	160
Želivského	Začátek	95,5	444,2	0
Začátek	Želivského	2	3,3	0
Želivského	Černokostecká	4,5	32,5	0
Černokostecká	Opatov	13,3	52,2	20
Opatov	Roztyly	16,8	60,0	30
Roztyly	Začátek	23,8	132,7	0

Tab. 3.39 – Ujetá vzdálenost, čas příjezdu vozidla do zastávky a objem odpadu ve vozidle.



Obr. 3.15 – Mapa tras vozidel.

3.6 Vývoz košů bez zastávek AS Černý Most a Letňany - tři vozidla

Použité algoritmy jsou totožné s částí 3.4. Vývoz košů ze všech zastávek – tři vozidla, neboť tato část, jak napovídá název, z ní vychází. V jednotlivých podkapitolách jsou zmíněny pouze odlišnosti od části 3.4. Výsledky modelů jsou popsány ve Shrnutí. Programy s aplikacemi jsou uloženy na příloženém CD pod názvy:

„1_kose_3_současne_s_omezenim_bez“,
 „1_kose_3_postupne_s_omezenim_bez“,
 „m_kose_3_současne_s_omezenim_bez“.

3.6.1 Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem a časovým omezením

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 245,3$		není řešení
$245,3 < T \leq 251,2$		149,5
$251,2 < T \leq 252,9$		152,9
$252,9 < T \leq 260,7$		152,4
$260,7 < T \leq 356,3$		154,0
$356,3 < T < \infty$		129,1

Tab. 3.40 – Časové intervaly stability řešení.

Při hledání řešení bereme, na základě časových intervalů stability (Tab. 3.40), v úvahu dvě možnosti časového omezení tras $T_k = 300$ a 360 min. Nejkratší celková vzdálenost měří 127,3 km (Tab. 3.41, Pokus 7). Tento výsledek je zlepšením oproti výsledkům z časových intervalů stability. Objem odpadu ve vozidlech během trasy nepřesáhne 320, 10 a 150 l.

		Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Celkem
Pokus 1	omezení	300	300	300	154
	km	59,5	23,8	70,7	
	čas 1	260,7	132,7	232,7	
	čas 2	264,2	132,7	237,8	
Pokus 2	omezení	230	300	300	143,6
	km	48,5	23,8	71,3	
	čas 1	226,3	132,7	249,7	
	čas 2	229,8	132,7	254,8	
Pokus 3	omezení	300	105	300	152,2
	km	59,5	22	70,7	
	čas 1	289,2	104,7	232,7	
	čas 2	259,2	104,7	237,8	
Pokus 4	omezení	300	300	100	160
	km	59,5	58,1	42,4	
	čas 1	260,7	279,8	95,5	
	čas 2	264,2	279,8	100	
Pokus 5	omezení	360	360	360	129,1
	km	62,9	23,8	42,4	
	čas 1	356,3	132,7	95,5	
	čas 2	359,8	132,7	100,7	

Pokus 6	omezení	165	360	360	141,1
	km	45,8	23,8	71,5	
	čas 1	163,8	132,7	308	
	čas 2	167,3	302,7	313,2	
Pokus 7	omezení	360	125	360	127,9
	km	62,9	20,9	44,1	
	čas 1	356,33	122,8	103,3	
	čas 2	359,83	122,8	108,5	
Pokus 8	omezení	360	360	80	140,2
	km	62,9	41,3	36	
	čas 1	356,3	160,2	79,8	
	čas 2	359,8	166,8	85	

Tab. 3.41 – Řešení při různých omezeních.

3.6.2 Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem a časovým omezením

Časové intervaly stability (Tab. 3.42) jsou u stejné u Varianty 1 a 3, až na interval $239,2 < T \leq 247$.

Varianta 1			Varianta 2			Varianta 3		
čas	čas	km	čas	čas	km	čas	čas	km
$0 \leq T \leq 215,7$		NŘ	$0 \leq T \leq 222,7$		NŘ	$0 \leq T \leq 215,7$		NŘ
$215,7 < T \leq 220,8$		163,5	$222,7 < T \leq 226,8$		153,6	$215,7 < T \leq 220,8$		163,5
$220,8 < T \leq 225,8$		167,5	$226,8 < T \leq 237,5$		156,9	$220,8 < T \leq 225,8$		167,5
$225,8 < T \leq 226,8$		167,6	$237,5 < T \leq 239,3$		161,1	$225,8 < T \leq 226,8$		167,6
$226,8 < T \leq 236,8$		174,5	$239,3 < T \leq 244,5$		168,4	$226,8 < T \leq 236,8$		174,5
$236,8 < T \leq 237,5$		175,4	$244,5 < T \leq 247$		171,1	$236,8 < T \leq 237,5$		175,4
$237,5 < T \leq 239,3$		176,4	$247 < T \leq 254,8$		164	$237,5 < T \leq 239,3$		176,4
$239,3 < T \leq 247$		177,2	$254,8 < T \leq 262,8$		134	$239,3 < T \leq 247$		181,7
$247 < T \leq 249,3$		178,7	$262,8 < T \leq 265,7$		140,1	$247 < T \leq 249,3$		178,7
$249,3 < T \leq 254,8$		168,7	$265,7 < T \leq 273$		145	$249,3 < T \leq 254,8$		168,7
$254,8 < T \leq 260,3$		173,4	$273 < T \leq 275,2$		151,1	$254,8 < T \leq 260,3$		173,4
$260,3 < T \leq 262,8$		174,3	$275,2 < T \leq 283,3$		149,3	$260,3 < T \leq 262,8$		174,3
$262,8 < T \leq 265,7$		179,8	$283,3 < T \leq 289,3$		153,3	$262,8 < T \leq 265,7$		179,8
$265,7 < T \leq 273$		175,8	$289,3 < T \leq 299,2$		160,8	$265,7 < T \leq 273$		175,8
$273 < T \leq 275,2$		181,3	$289,3 < T \leq 300$		163,9	$273 < T \leq 275,2$		181,3
$275,2 < T \leq 283,3$		169,6	$283,3 < T \leq 301,8$		156,1	$275,2 < T \leq 283,3$		169,6
$283,3 < T \leq 289,3$		173,6	$289,3 < T \leq 309,5$		172,4	$283,3 < T \leq 289,3$		173,6
$289,3 < T \leq 300$		176,4	$299,2 < T \leq 313,9$		174	$289,3 < T \leq 300$		176,4
$300 < T \leq 301,8$		173,8	$313,9 < T \leq 324$		175,2	$300 < T \leq 301,8$		173,8
$301,8 < T \leq 309$		180				$301,8 < T \leq 309$		180

Tab. 3.42 – Časové intervaly stability řešení.

U Varianty 1 a 3 bereme v úvahu dvě možnosti časového omezení tras $T_k = 240$ a 305 min., pokud by omezení bylo vyšší než 309 min., vznikly by pouze dvě trasy. U Varianty 2 je časového omezení tras $T_k = 240$ a 315 min.

Varianta 1					Varianta 2				Varianta 3				
		Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Σ
Pokus 1	T	240	240	240	177,2	240	240	240	168,4	240	240	240	181,7
	km	65,1	58,2	53,9		65,1	49,1	54,2		65,1	58,2	58,4	
	čas 1	239,3	236,8	186,8		239,3	234,7	173		239,3	236,8	189,8	
	čas 2	244,5	242	186,8		244,5	239,8	174,3		244,5	242	194,3	
Pokus 2	T	165	240	240	143,8	155	240	240	147,1	165	240	240	143,8
	km	45,8	59,2	38,8		44,6	41,3	61,2		45,8	59,2	38,8	
	čas 1	163,8	221,7	228,7		154	235,3	219,8		163,8	221,7	228,7	
	čas 2	167,3	221,7	228,7		159,3	238,8	225		167,3	221,7	228,7	
Pokus 3	T	240	175	240	168,3	240	220	240	160,5	240	190	240	167,8
	km	65,1	29,6	73,6		65,1	37,6	57,8		65,1	41,1	61,6	
	čas 1	239,3	170,3	237		239,3	215,7	184		237,3	189,3	218,7	
	čas 2	244,5	170,3	243,7		244,5	215,7	185,3		244,5	194,5	218,7	
Pokus 4	T	305	305	305	180	315	315	315	175,2	305	305	305	180
	km	67,8	74,7	37,5		69,4	86,2	19,6		67,8	74,7	37,5	
	čas 1	301,8	218,5	152,5		309,5	314	33,33		301,8	218,5	152,5	
	čas 2	307	218,5	152,5		314,7	320,7	34,7		307	218,5	152,5	
Pokus 5	T	165	305	305	153,8	215	315	315	137,2	165	305	305	153,8
	km	45,8	69,2	38,8		55,7	61,9	19,6		45,8	69,2	38,8	
	čas 1	163,8	296,3	169,8		212,7	293,2	95,7		163,8	296,3	169,8	
	čas 2	167,3	296,3	170,7		217,8	293,2	95,7		167,3	296,3	170,7	
Pokus 6	T	305	180	305	158,4	315	235	315	162,6	305	180	305	158,4
	km	67,8	53	37,6		69,4	73,6	19,6		67,8	53	37,6	
	čas 1	301,8	177,3	157,7		309,5	232	95,7		301,8	177,3	157,7	
	čas 2	307	177,3	157,7		314,7	238,7	95,7		307	177,3	157,7	
Pokus 7	T	x	x	x		255	255	255	134	x	x	x	
	km	x	x	x		48,5	65,9	19,6		x	x	x	
	čas 1	x	x	x		254,8	250	95,7		x	x	x	
	čas 2	x	x	x		254,8	250,8	95,7		x	x	x	

Tab. 3.43 – Řešení při různých omezeních.

Vzhledem k tomu, že Varianta 2 nedosáhla nejlepšího výsledku z časového intervalu ($254,8 < T \leq 262,8$), bylo dodatečně prozkoumáno okolí $T_k = 255$ min. Nejlepší výsledek 134 km je právě z tohoto intervalu (Tab. 3.43, Pokus 7, Varianta 2). Objem odpadu ve vozidle je maximálně 320, 10 a 150 l.

3.6.3 Cesty tvořené současně se třemi výchozími místy a časovým omezením

Z časových intervalů stability řešení (Tab. 3.44) lze vyčíst, že výsledky se mění již při malé změně času. Nejlepší výsledek je v Pokusu 5 (Tab. 3.45) 157,3 km. Při porovnání tohoto výsledku s praxí (156,6 km) je zřejmé, že metoda nejbližšího souseda neposkytuje dobrá řešení.

čas	čas	km
$0 \leq T \leq 237,8$		není řešení
$237,8 < T \leq 243,7$		186,8
$243,7 < T \leq 249$		191,5
$249 < T \leq 250,9$		193,8
$250,9 < T \leq 256,3$		192,9
$256,3 < T \leq 258,8$		192,9
$258,8 < T \leq 264,2$		194,6
$264,2 < T \leq 267,2$		194,6
$267,2 < T \leq 272,5$		193,5
$272,5 < T \leq 291,2$		193,5
$291,2 < T \leq 305,8$		166,9
$305,8 < T \leq 322,8$		169,3
$322,8 < T \leq 330,8$		165,6
$330,8 < T \leq 341,2$		160,9
$341,2 < T \leq 346,5$		165,6
$346,5 < T \leq 348,5$		167,9
$348,5 < T \leq 356,3$		167
$356,3 < T \leq 360$		168,7

Tab. 3.44 – Časové intervaly stability řešení.

		Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Celkem
Pokus 1	omezení	240	240	240	186,8
	km	72	53,7	61,1	
	čas 1	205,8	233,3	237,8	
	čas 2	219	232,5	237,8	
Pokus 2	omezení	240	205	240	189,8
	km	86,5	42,2	61,1	
	čas 1	239	204,8	237,8	
	čas 2	252,2	204,3	237,8	
Pokus 3	omezení	300	300	300	166,9
	km	73,9	62,3	30,7	
	čas 1	170,2	291,2	92,67	
	čas 2	170,2	288,8	97,17	
Pokus 4	omezení	105	300	300	184,1
	km	41,9	62,3	79,9	
	čas 1	104,3	291,2	279,2	
	čas 2	116,8	288,8	279,2	
Pokus 5	omezení	300	80	300	157,3
	km	72,4	10,2	74,7	
	čas 1	294,8	80	247,3	
	čas 2	306,7	80	253,5	
Pokus 6	omezení	300	300	70	167,5
	km	85,1	62,3	20,1	
	čas 1	295,8	291,2	67,33	
	čas 2	295,8	288,8	72,5	

Pokus 7	omezení	360	360	360	168,7
	km	71,9	66,1	30,7	
	čas 1	193,7	356,3	92,7	
	čas 2	206,8	355,2	97,2	
Pokus 8	omezení	25	360	360	165,7
	km	18,8	66,1	80,8	
	čas 1	23	356,3	251,5	
	čas 2	41,3	355,2	257,7	
Pokus 9	omezení	360	80	360	160,5
	km	77,1	10,2	73,2	
	čas 1	357	80	189,8	
	čas 2	369,5	80	196	
Pokus 10	omezení	360	360	55	164,8
	km	85,1	66,1	13,6	
	čas 1	227,7	356,3	51,5	
	čas 2	240,8	355,2	56,7	

Tab. 3.45 – Řešení při různých omezeních.

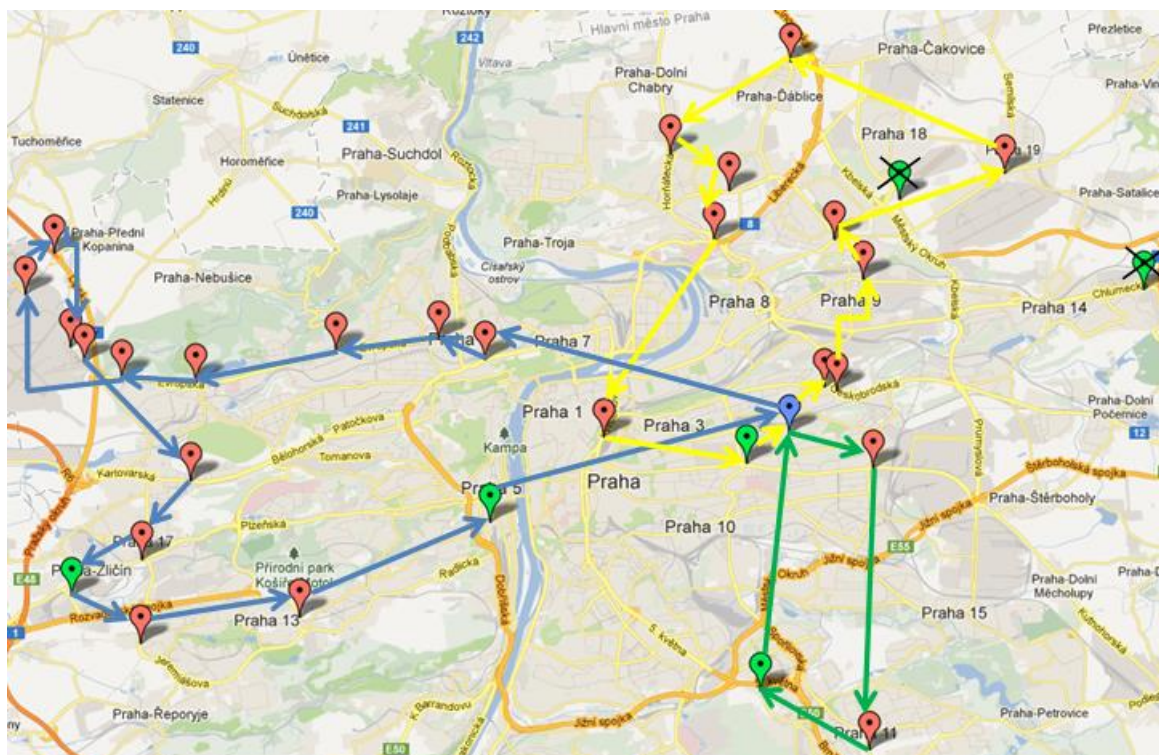
3.6.4 Optimalizace s jedním výchozím místem a časovým omezením

Při optimalizaci bylo zvoleno časové omezení $T = 360$ min. Optimální řešení měří 116,4 km. První trasa je 55 km dlouhá a objem odpadu ve vozidle během trasy nepřesáhne 300 l. Druhá trasa měří 39,4 km a objem odpadu dosahuje maximálně 160 l. Nejkratší trasa měří 22 km a objem odpadu je 30 l. Průběh trasy lze vyčíst z Tab. 3.46 a zakreslení tras z Obr. 3.16.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu	Odpad
Začátek	Hradčanská	8,2	13,7	0
Hradčanská	Dejvická	10,5	35,5	50
Dejvická	Horoměřická	12,4	71,7	140
Horoměřická	Divoká Šárka	15,4	81,7	160
Divoká Šárka	Dědina	16,9	86,2	170
Dědina	U hangáru	21,3	98,5	190
U hangáru	Aviatická	22,8	106,0	210
Aviatická	Terminál 3	26,3	116,8	230
Terminál 3	K letišti	26,7	124,5	260
K letišti	Bílá Hora	30,9	136,5	280
Bílá Hora	Bílý Beránek	33,2	142,3	290
Bílý Beránek	Zličín	35,1	147,5	300
Zličín	Stodůlky	37,5	241,5	0
Stodůlky	Nové Butovice	41,8	253,7	20
Nové Butovice	Na Knížecí	47,2	269,7	50
Na Knížecí	Začátek	55	340,7	0
Začátek	Spojovací-ČB	2,6	4,3	0

Spojovací-ČB	Spojovací-K	2,9	4,8	10
Spojovací-K	Špitálská	6,2	12,3	20
Špitálská	Prosek	8,3	20,8	40
Prosek	Huntířovská	12,2	32,3	60
Huntířovská	Ďáblice	19,1	45,8	70
Ďáblice	Voz. Kobylisy	22,8	54,0	80
Voz. Kobylisy	Ládví	24,8	59,3	90
Ládví	Vychovatelna	26,4	67,0	110
Vychovatelna	Hl. nádraží	33,1	83,2	130
Hl. nádraží	Želivského	37,7	90,8	160
Želivského	Začátek	39,4	118,7	0
Začátek	Černokostecká	2,7	4,5	0
Černokostecká	Opatov	11,5	24,2	20
Opatov	Roztyly	15	32,0	30
Roztyly	Začátek	22	104,7	0

Tab. 3.46 – Ujetá vzdálenost, čas příjezdu vozidla do zastávky a objem odpadu ve vozidle.



Obr. 3.16 – Mapa tras vozidel.

3.6.5 Shrnutí

Výsledky řešení jednotlivých modelů znázorňuje Tab. 3.47. Nejlepšího výsledku je dosaženo v prvním modelu, kdy jsou cesty tvořené současně s jedním výchozím místem. Optimální řešení je jen o 11,5 km kratší (9,88 %). Co se rozložení tras týče, obě řešení zahrnují téměř stejné zastávky. Průběh trasy lze vidět v Tab. 3.48 a mapu tras v Obr. 3.17.

Pro všechny modely je dostačující, aby na korbě vozidel byly dvě a jedna nádoba na odpad.

Pokud porovnáme model s více výchozími místy a praxi, zjistíme, že je o 0,7 km horší. Heuristika nejbližšího souseda je tedy pro tuto úlohu nevhodná.

Cesty tvořené současně s jedním výchozím místem

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	62,9	6
Vozidlo 2	20,9	2
Vozidlo 3	44,1	1,81
Celkem	127,9	9,81

Cesty tvořené postupně s jedním výchozím místem

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	48,5	4,25
Vozidlo 2	65,9	4,18
Vozidlo 3	19,6	1,6
Celkem	134	10,03

Cesty tvořené současně s třemi výchozími místy

	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	72,4	5,1
Vozidlo 2	10,2	1,33
Vozidlo 3	74,7	4,2
Celkem	157,3	10,63

Optimální řešení

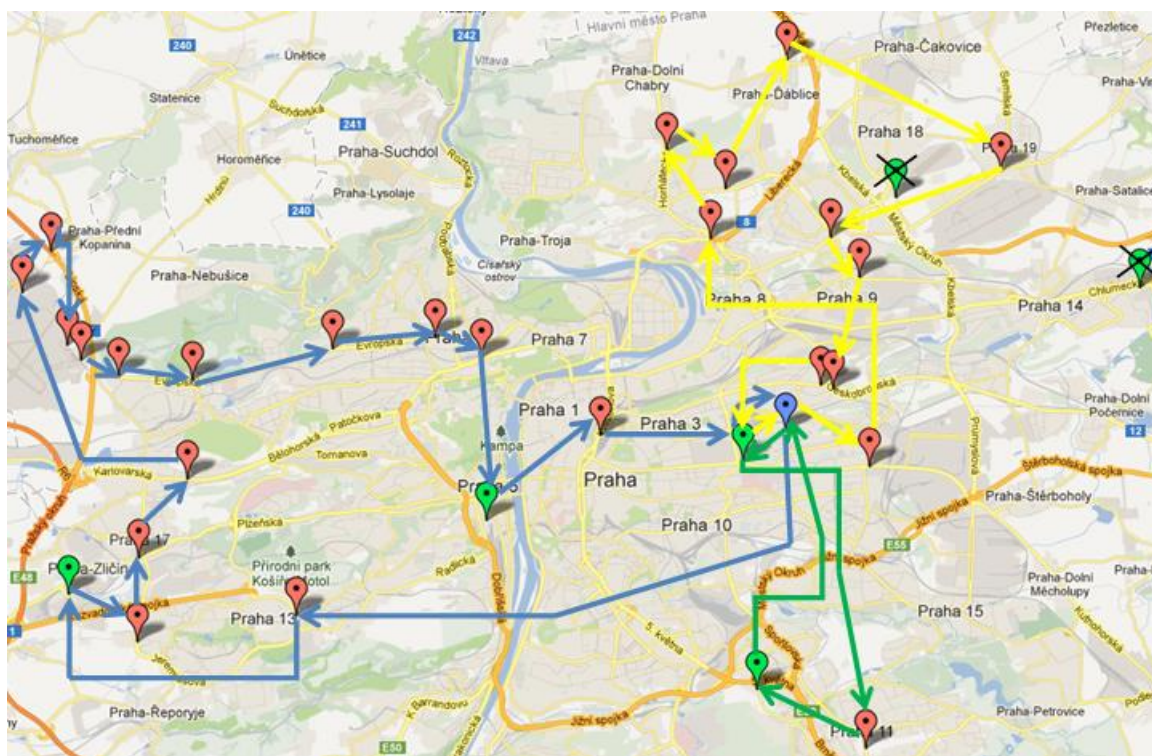
	Celkový počet kilometrů	Celkový čas v hodinách
Vozidlo 1	39,4	2
Vozidlo 2	55	5,68
Vozidlo 3	22	1,74
Celkem	116,4	9,42

Tab. 3.47 – Výsledky jednotlivých modelů.

Zastávka	Zastávka	Délka	Čas příjezdu	Odpad
Začátek	Nové Butovice	13,4	22,3	0
Nové Butovice	Zličín	18,7	38,2	30
Zličín	Stodůlky	21,1	132,2	0
Stodůlky	Bílý Beránek	22,9	140,2	20
Bílý Beránek	Bílá Hora	25,4	146,3	30
Bílá Hora	U hangáru	33,7	162,2	40
U hangáru	Aviatická	35,2	169,7	60
Aviatická	Terminál 3	38,7	180,5	80
Terminál 3	K letišti	39,1	188,2	110
K letišti	Dědina	40	194,7	130
Dědina	Divoká Šárka	41,5	202,2	150

Divoká Šárka	Horoměřická	44,5	209,2	160
Horoměřická	Dejvická	46,4	217,3	180
Dejvická	Hradčanská	47,6	252,3	270
Hradčanská	Na Knížecí	52,6	278,7	320
Na Knížecí	Hl. nádraží	56,6	343,3	0
Hl. nádraží	Želivského	61,2	357,0	30
Želivského	Začátek	62,9	359,8	0
Začátek	Želivského	2	3,3	0
Želivského	Opatov	10,4	42,3	0
Opatov	Roztyly	13,9	50,2	10
Roztyly	Začátek	20,9	122,8	0
Začátek	Černokostelecká	2,7	4,5	0
Černokostelecká	Vychovatelna	10,5	22,5	20
Vychovatelna	Voz. Kobylisy	17	38,3	40
Voz. Kobylisy	Ládví	19	43,7	50
Ládví	Řáblice	22,4	54,3	70
Řáblice	Huntířovská	29,2	67,7	80
Huntířovská	Prosek	33,1	76,2	90
Prosek	Špitálská	35,2	84,7	110
Špitálská	Spojovací-ČB	38,3	94,8	130
Spojovací-ČB	Spojovací-K	38,6	97,3	140
Spojovací-K	Želivského	42,4	105,7	150
Želivského	Začátek	44,1	108,5	0

Tab. 3.48 – Ujetá vzdálenost, čas příjezdu vozidla do zastávky a objem odpadu ve vozidle.



Obr. 3.17 – Mapa tras vozidel.

Závěr

Diplomová práce částečně vychází z mé bakalářské práce Optimalizace výlepu autobusových jízdních řádů, ale převážná část je zaměřena na hledání řešení svozu odpadu z autobusových zastávek. Vkládací metoda proto byla nejprve aplikována na výlep jízdních řádů se dvěma a třemi vozidly, abychom zjistili vhodnost zvolené metody. Jak se ovšem ukázalo, výsledky těchto propočtů v porovnání s výsledky vývozu odpadkových košů dopadly procentuálně hůře (rozdíl od optimálního řešení se dvěma vozidly o 23,17 % a s třemi vozidly o 11,82 %).

V úvodu práce bylo stanoveno několik hlavních cílů. Prvním cílem bylo zjistit, zda je možné, aby za osmihodinovou pracovní dobu stihla dvě vozidla vyvézt odpadkové koše ze všech zastávek. Pomocí vkládací heuristiky se podařilo najít nejlepší výsledek, jehož celková délka trasy měří 128,7 km, ale nejdelší trasa trvá 484,8 minut a tím překračuje o 5 minut osmihodinovou pracovní dobu. Pro tuto úlohu bylo vypočítáno optimální řešení, které splnilo podmínku prvního cíle, nejdelší trasa trvá 472,2 minut. Optimální řešení je o 9,7 km kratší (o 7,8 %) než nejlepší výsledek vkládací metody.

Druhým cílem bylo zjistit, zda je možné se třemi vozidly vyvézt odpadkové koše ze všech zastávek za šest hodin. Tento cíl splnila jak vkládací metoda (359,8 min.), s nejlepším výsledkem 132,4 km, tak optimální řešení (351,3 min.) 125,8 km. V této úloze byl rozdíl mezi výsledkem vkládací metody a optimálním řešením ještě kratší než v předchozí úloze (5,25 %).

Poslední dva cíle se týkaly vývozu odpadkových košů bez zastávek AS Černý Most a Letňany. U úlohy se dvěma vozidly jsme požadovali, aby nejdelší trasa trvala do sedmi hodin. Tato podmínka nebyla splněna. Nejkratší celková ujetá vzdálenost vkládací metody měří 119,3 km a nejdelší trasa trvá 444,2 minut. Optimální řešení měří 107,4 km a nejdelší trasa trvá 442,5 minut. Optimální řešení je o 11,08 % lepší. Ve srovnání s úlohou se všemi zastávkami je odchylka od optimálního řešení vyšší o 3,28 procentního bodu.

V úloze se třemi vozidly byl požadavek na šestihodinovou pracovní dobu. Ten byl také splněn. Nejlepší výsledek vkládací metody měří 127,9 km a doba strávená na nejdelší trase činí 359,8 min, u optimálního řešení je to 116,4 km a 340 min. Procentuální rozdíl optimálního řešení a nejlepšího výsledku heuristiky je u úlohy se všemi zastávkami o 4,66 procentního bodu nižší než u této úlohy.

Co se objemu odpadu týče, u všech variant, kromě optimálního řešení úlohy bez zastávek AS Černý Most a Letňany se dvěma vozidly (410 l), vystačí kapacita dvou nádob na odpad po 200 l na korbě vozidla. To odpovídá současné praxi.

Za zmínku také stojí fakt, že metoda nejbližšího souseda, aplikovaná na model s více výchozími místy, vykazovala nejhorší výsledky za všech a pro výpočet se ukázala jako naprosto nevhodná. V úloze, kdy její výsledek může být porovnán s praxí (vývoz košů bez zastávek AS Černý Most a Letňany – tři vozidla) dosahuje metoda horšího výsledku než praxe.

Jednoznačným doporučením pro vedení firmy je, bez ohledu na výběr varianty úlohy (dvě vs. tři vozidla, či všechny zastávky vs. bez zastávek AS Černý Most a Letňany), že se vyplatí, aby vozidla vyjížděla pouze z jednoho výchozího místa. Tuto úlohu je možné ve firmě dále propojit s jinými zakázkami.

Seznam použité literatury

- [1] BEKTAS, T.: The Multiple Traveling Salesman Problem: an Overview of Formulations and Solution Procedures. Omega. 34: 209-219. 2006.
- [2] BRÄYSSY, O., GENDREAU, M.: Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part I: Route Construction and Local Search Algorithms. Transport Science. 39: 104-118. 2005
- [3] DAVENDRA, D.: Traveling salesman problem, theory and applications, 2010. ISBN 978-953-307-426-9
- [4] FÁBRY, J.: Dynamické okružní a rozvozní úlohy, disertační práce, VŠE-FIS, Praha, 2006.
- [5] FIALA, P.: Řízení projektů, 2008. ISBN 978-80-245-1413-0
FIALA, P a KOLEKTIV.: Operační výzkum nové trendy, 2010. ISBN 978-80-7431-036-2
- [6] HYNEK, J.: Genetické algoritmy a genetické programování, 2008. ISBN 878-80-7435-035-1
- [7] JACOBSON, R.: Microsoft Excel Visual Basic: krok za krokem. Praha: Microsoft Press, 1996. ISBN 80-85896-55-9.
- [8] LAPORTE, G.: The Vehicle Routing Problem: An overview of exact an approximate algorithms, European Journal of Operational Reserch. 59: 345-358. 1992.
- [9] PELIKÁN, J.: Diskrétní modely v operačním výzkumu, 2001. ISBN 80-86419-17-7
- [10] SVOBODOVÁ, V.: Optimalizace výlepu autobusových jízdních řádů, bakalářská práce, VŠE-FIS, Praha, 2011

Internetové zdroje a důležité odkazy:

- [11] Mapy [online]. cit. [2013-3-30]. Dostupné z: <<http://maps.google.cz/>>
- [12] Mapy [online]. cit. [2013-3-30]. Dostupné z:
<<http://maps.google.com/maps/ms?ie=UTF&msa=0&msid=204000856612310948281.00047f55bc86e4594104c>>
- [13] The Traveling Salesman Problem [online]. cit. [2013-03-15] Dostupné z:
<<http://www.tsp.gatech.edu>>

- [14] TSK hl.m. Prahy [online]. cit. [2013-02-20]. Dostupné z: < http://www.tsk-praha.cz/wps/portal/tsk/web/o-spolecnosti!/ut/p/b1/04_SjzS0MDG1NDQ1NDHSj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOJNnAOcLZ0MHQ38gy3MDTwdfZw9vI2dDYAAqCASqMAAB3A0IKQ_XD8KrMTSz9QpwNvd0MDfzcTZwNPTzdLS0dHD2MDIFKoAjxV-Hvm5qfq5UTmWnrqOigBcYyNS/dl4/d5/L2dJQSEvUUUt3QS80SmtFL1o2XzlONUJQS0cxMDhVREMwSUIGUEROOTkwMFE3/>