VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY

Nezáporné lineární operátory a jejich užití v ekonometrických a statistických modelech

Disertační práce

Doktorand: RNDr. Richard Horský

Školitel: prof. Ing. Josef Arlt, CSc.

Studijní program: Kvantitativní metody v ekonomice

Studijní obor: Statistika

Praha, březen 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Praze dne 15. 03. 2015

…….

podpis

Abstrakt

Nezáporné operátory, speciálně nezáporné matice, jsou již od počátku dvacátého století zajímavým tématem, kterému se věnuje řada vědců a výzkumných týmů. Není divu, neboť se objevuje celá řada možných aplikací v oblastech jako jsou ekonomie, statistika, operační výzkum (lineární programování) nebo computer science. Uveďme jako konkrétní příklad teorii Markovových řetězců, ve kterých vystupují jako tzv. matice přechodu jisté nezáporné matice označované jako matice stochastické. Jiným příkladem, tentokrát nezáporného operátoru v nekonečně dimensionálním prostoru je tzv. operátor zpětného posunutí, běžně užívaný v teorii stochastickýh procesů. Nezápornost v uvedených příkladech je nezápornost po prvcích. Jiným typem nezápornosti je nezápornost ve smyslu skalárního součinu. U matic hovoříme o pozitivní definitnosti, resp. semidefinitnosti. Typickými příklady jsou kovarianční matice náhodného vektoru nebo symetrizace jakéhokoli lineárního operátoru, např. diference.

Jinou zajímavou oblastí problémů jsou tzv. inverzní problémy nebo špatně podmíněné úlohy. První práce spojené s touto problematikou se objevily v první polovině dvacátého století. Problematika byla spojena s úlohami kvantové teorie, geofyziky, astronomie apod. Jelikož žijeme v době výkonných počítačů, možnosti aplikací teorie inverzních a špatně podmíněných úloh nacházíme téměř ve všech oblastech vědy, kde se používají matematické metody. Špatně podmíněné úlohy jsou nestabilní a je třeba je regularizovat, aby bylo možné říci něco o jejich řešení. Typickým příkladem takové regularizace může být stacionarizace stochastického procesu diferencováním. Při řešení integrálních rovnic, kde vystupují kompaktní operátory, je problém nestability řešen různými metodami vyvíjenými a vylepšovanými již po několik desetiletí. Jsou jimi vedle metody zaokrouhlené singulární dekompozice, zejména Tichonovova regularizační metoda či Landweberova iterační metoda.

Matematické nástroje, které jsou v této práci použity jsou především pojmy funkcionální analýzy a jejich vlastnosti. Ve funkcionální analýze se setkávají rozmanité matematické struktury studované v rámci jednotlivých matematických disciplín jako jsou matematická analýza, topologie, teorie množin, algebra (zejména lineární) a teorie míry (pravděpodobnosti). Propojením struktury linearity, topologie a měřitelnosti získáváme bohatou strukturu, v rámci níž je na jedné straně možno se dívat na klasicky definované pojmy novým jednotícím způsobem a na druhé straně tím odhalit interakce mezi zdánlivě různými problémy a tak získat ucelený náhled na zdánlivě rozdílnou problematiku.

Klíčová slova:

matematické struktury, Hilbertův prostor, Banachův prostor, omezený operátor, dualita, spektrální teorie operátorů, funkční kalkulus, stochastický proces, stacionarita procesu, autokorelační funkce, operátor zpětného posunutí, invertibilita procesu, náhodná procházka, samoadjungovaný a symetrický operátor, nezáporný operátor, regularizační strategie, Tichonovova regularizace, předifferencování stochastického procesu.

Abstract

Non-negative operators, in special case non-negative matrices, are an interesting topics for many scientists and scientific teams from the beginning of the 20th century. It is not suprising because there are a lot of applications in different areas of science like economy, statistics, linear programming, computer science and others. We can give as the particular example the theory of the Markov chains in which we deal with non-negative matrices, so called transition matrices. They are of the special form and we called them stochastic matrices. Another example is given by the non-negative operator on spaces of infinite dimension which is employed in the theory of stochastic processes. It is the backward shift operator called the lag operator as well. The non-negativity in these examples is considered as the piecewise non-negativity. Another type of non-negativity is that in the sense of inner products. In the case of matrices we talk about positive-definite or positive-semidefinite matrices. A typical example is the covariance matrix of a random vector or symmetrization of any linear operator, for instance the symmetrization of the difference operator.

The terms inverse problem or ill-posed problem have been gaining popularity in modern science since the middle of the last century. The subjects of the first publications in this area were related to quantum scattering theory, geophysics, astronomy and others. Thanks to powerful computers the chances for applications of the theory of inverse and ill-posed problems has extended in almost all fields of science which use mathematical methods. Ill-posed problems bear the feature of instability and there is the need of regularization if we want to get some reasonable solution. A typical example of the regularization is the differencing of stochastic process with the purpose to obtain a stationary process. Another concept of regularization used for solving e.g. integral equations with compact operators consists in application of regularization method as truncated singular value decomposition, Tichonov regularization method or Landweber iteration method.

Mathematical tools employed in this work are those of the functional analysis. It is the area of mathematics in which distinct mathematical structures meet each other. They are structures built within different mathematical disciplines as mathematical analysis, topology, theory of sets, algebra (mainly linear algebra) and theory of measure (probability). The functional analysis framework enables us to obtain right formulations of definitions and problems providing the general view on the notions and problems of the theory of stochastic processes.

Key words:

mathematical structures, Hilbert space, Banach space, bounded operator, duality, spectral theory, functional calculus, stochastic process, stationary process, autocorrelation function, lag operator, invertible process, random walk, self-adjoint and symmetric operator, non-negative operator, regularization strategy, Tichonov regularization, overdifferencing of stochastic process.

Obsah

ÚVOD **6**

KAPITOLA I

MATEMATICKÉ STRUKTURY **8**

1.1 MNOŽINY A ZOBRAZENÍ 8
1.2 MATEMATICKÉ STRUKTURY 10
1.3 STRUKTURA LINEARITY 17
1.4 STRUKTURA KONVERGENCE 24
1.5 STRUKTURA MĚŘITELNOSTI 27

KAPITOLA II

ELEMENTY FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY **31**

2.1 NORMOVANÉ LINEÁRNÍ PROSTORY 31
2.2 UNITÁRNÍ PROSTORY 39
2.3 OPERÁTORY A FUNKCIONÁLY. DUALITA. PROJEKCE 42
2.4 SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA 53

KAPITOLA III

STOCHASTICKÉ PROCESY. APLIKACE FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY **59**

3.1 ABSTRAKTNÍ STOCHASTICKÝ PROCES 59
3.2 CHARAKTERISTIKY STOCHASTICKÉHO PROCESU 61
3.3 STACIONÁRNÍ PROCESY 63
3.4 LINEÁRNÍ PROCES 65
3.5 OPERÁTOR ZPĚTNÉHO POSUNUTÍ A JEHO ALGEBRAICKÉ A ANALYTICKÉ VLASTNOSTI 67
3.6 STACIONÁRNÍ PROCESY S POLYNOMIÁLNÍM A RACIONÁLNÍM FILTREM 76

KAPITOLA IV

NESTACIONÁRNÍ PROCESY. SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY **81**

4.1 SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA OPERÁTORU ZPĚTNÉHO POSUNUTÍ V PROSTORECH $\ell_p(L_2)$ 81
4.2 SYMETRICKÉ, SAMOADJUNGOVANÉ A NEZÁPORNÉ OPERÁTORY V HILBERTOVÝCH PROSTORECH 84
4.3 SYMETRIZACE MODELU NÁHODNÉ PROCHÁZKY A PROBLÉM NESTABILITY ŘEŠENÍ 87
4.4 REGULARIZACE A JEJÍ APLIKACE NA MODEL NÁHODNÉ PROCHÁZKY 90
4.5 DIFERENCOVÁNÍ NESTACIONÁRNÍCH PROCESŮ 95

ZÁVĚR **99**

SEZNAM LITERATURY **101**

SEZNAM SYMBOLŮ **104**

Úvod

Tato práce je věnována problematice nezáporných lineárních operátorů v teorii lineárních stochastických procesů. Rovněž je věnována pozornost nestabilitě řešení stochastické diferenční rovnice prvního řádu, která popisuje velice důležitý nestacionární proces, tzv. náhodnou procházku. Matematický aparát použitý k řešení příslušných problémů poskytuje lineární funkcionální analýza.

Nezáporné lineární operátory představují zajímavou oblast v matematice s řadou možných aplikací v různých oborech aplikovaných věd. V teorii Markovových řetězců se setkáváme se stochastickými maticemi, které jsou velice důležitou podtřídou třídy nezáporných matic. V této práci se zabýváme jiným typem stochastických procesů a to procesy, které spadají pod tzv. Box Jenkinsonovu metodologii. V rámci analýzy lineárních procesů se používá běžně operátor zpětného posunutí. Jeho použití je obvykle velice formální, nicméně tento operátor je zároveň objektem ke zkoumání metodami lineární funkcionální analýzy. Ve třetí kapitole se věnujeme podrobně jeho spektrálním vlastnostem; spektrálním nikoli ve smyslu tzv. spektrální analýzy časových řad založené na Fourierově transformaci, nýbrž ve smyslu spektrální teorie lineárních operátorů v Banachových a Hilbertových prostorech. Jedním z cílů této práce je právě objasnit chování tohoto operátoru v různých strukturách v souvislosti s teorií stochastických procesů.

Dalším cílem této práce je vyjasnění problému invertibility diferenčního operátoru. Ve třetí kapitole je dokázáno, že v prostoru omezených stochastických procesů není tento operátor invertibilní, zatímco v Hilbertově prostoru procesů tvořících řady sčitatelné s kvadrátem invertibilní je, jak je vysvětleno ve čtvrté kapitole. Inverzní operátor však není v tomto případě spojitý a vzhledem k úplnosti prostoru je definovaný pouze na hustém podprostoru daného Hilbertova prostoru. To znamená, že i v tomto případě narážíme na závažný problém s řešitelností příslušné stochastické diferenční rovnice. V Hilbertově prostoru je navíc nutné mírně modifikovat klasický pojem stacionarity procesu, neboť procesy stacionární v klasickém smyslu v tomto prostoru neleží. Za tím účelem je v kapitole IV zaveden pojem procesu stacionárního až do úrovně N. V každém případě je proces náhodné procházky popsán rovnicí, která patří do třídy tzv. špatně podmíněných úloh (anglicky *ill-posed problems*). Ve snaze dosáhnout nějakého řešení je u těchto úloh prováděna symetrizace.

Symetrizace původní úlohy vede k problému, jehož řešením je tzv. zobecněné řešení (řešení ve smyslu nejmenších čtverců) problému původního. Jestliže i tento modifikovaný problém je špatně podmíněný, provádíme jeho regularizaci. Regularizací se rozumí stabilizace problému, operace, která převede daný problém na blízký problém, který je dobře podmíněný (anglicky *well-posed problem*), tj. problém, jehož řešení existuje, je jednoznačně určené a je spojitě závislé na datech. Jako regularizaci lze chápat i diferencování časové řady (stochastického procesu) prováděné s cílem stacionarizace procesu. Operátorový pohled na rovnici náhodné procházky umožňuje i jiné přístupy známé z oblasti řešení integrálních a diferenciálních rovnic. Jedna z dobře známých a účinných metod regularizace je tzv. Tichonovova regularizační metoda. Ta je postavena na předběžné symetrizaci problému. Tato symetrizace může ovšem z hlediska teorie stochastických procesů představovat problém, neboť dochází k tzv. předifferencování řady. Úvahy týkající se diferencování stacionárních procesů jsou obsaženy v závěrečném odstavci kapitoly IV.

Těžiště práce spočívá v kapitolách III a IV. Kapitoly I a II obsahují stručný přehled pojmů a vztahů, které jsou použity v kapitolách III a IV. Vlastní výsledky jsou obsaženy ve spektrální analýze operátoru zpětného posunutí a následným zjištěním, která z této analýzy vyplývají v kontextu teorie stochastických procesů. Původní je pojem procesu stacionárního až do úrovně N, který umožňuje studovat problém náhodné procházky ve struktuře Hilbertova prostoru. Aplikace regularizačních metod v teorii stochastických procesů přináší další otázky, zejména v souvislosti s dlouhodobě diskutovaným problémem předifferencování časové řady.

Kapitola I

Matematické struktury

Matematický pohled na různé problémy v aplikovaných vědách spočívá vždy ve vytváření vhodných abstraktních struktur odpovídajících dané problematice. Vše se odehrává v jistých množinách, prostorech, které jsou opatřeny dalšími speciálními vlastnostmi. V takovém případě hovoříme o matematických strukturách. V současné době je matematika rozsáhlou vědou členící se na mnoho speciálních oborů jakou jsou algebra, geometrie, topologie, teorie míry, funkcionální analýza, kombinatorika apod. Pro každou z těchto oblastí matematiky jsou specifické určité struktury. Cílem úvodní kapitoly je ve stručnosti připomenout zásadní pojmy a vztahy týkající se matematických struktur použitých v této práci. Pochopitelně jsou uvedena pouze základní fakta. Podrobnosti lze najít ve specializované literatuře, např. v pracích Horský Z., 1987 (odst. 1.1), Kuroš, 1968 (odst. 1.2), Bečvář, 2000 (odst. 1.3), Veselý, 2001 (odst. 1.4), Rényi, 1972 (odst. 1.5).

1.1 Množiny a zobrazení

Je zvykem, že rozsáhlejší matematické texty začínají připomínkou základních matematických pojmů. K takovým jistě patří pojmy množina a zobrazení. Není naším cílem pouštět se do velkých podrobností. Připomeňme proto pouze základní skutečnosti.

1.1.1 *Množinou* rozumíme jakýkoli soubor prvků s jistou vlastností. Je-li x prvkem množiny M, píšeme $x \in M$. Množinu prvků majících vlastnost $\propto$, zapisujeme $M = \{x: \propto\}$. Vyplývá-li z faktu, že $x \in N$, také $x \in M$, píšeme stručně $N \subset M$ a říkáme, že množina N je *podmnožinou* množiny M. Rovnost dvou množin $N = M$ nastává právě tehdy, když $N \subset M$ a naopak $M \subset N$. *Prázdná množina* $\emptyset$ je podmnožinou každé množiny, každá množina je podmnožinou sebe sama. Základními množinovými operacemi jsou *průnik množin* $M \cap N$, *sjednocení množin* $M \cup N$ a *doplněk množiny v množině* $M - N = \{x: x \in M, x \notin N\}$.

Významnými příklady množin jsou číselné obory: obor přirozených čísel $\mathbb{N}$, obor celých nezáporných čísel $\mathbb{N}_0$, obor celých čísel $\mathbb{Z}$, racionálních čísel $\mathbb{Q}$, reálných čísel $\mathbb{R}$ a konečně komplexních čísel $\mathbb{C}$.

1.1.2 Jsou-li M a N dvě množiny, pak symbolem $M \times N$ označujeme *kartézský součin množin M* a *N*, tj. množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in M$ a $y \in N$,. Jakoukoli množinu $R \subset M \times N$ pak nazýváme *relací mezi množinami M* a *N*. Speciálním případem relací mezi množinami jsou zobrazení. Je-li $F \subset M \times N$, pak F se nazývá *zobrazením množiny M do množiny N*, píšeme

$$F: M \to N, \tag{1.1}$$

jestliže pro libovolné $x \in M$ existuje jediné $y \in N$ takové, že $(x, y) \in F$, píšeme $y = F(x)$. Prvek x se nazývá *vzor (argument)* a jemu odpovídající prvek $y = F(x)$ *obraz (hodnota)* zobrazení F v bodě x. Množina M je tzv. *definiční obor zobrazení* F, množina N tzv. *cílová množina* zobrazení F a množina $\mathcal{R}(F) = \{y: y \in N, y = F(x)\} \subset N$ je tzv. *obor hodnot zobrazení* F. Symbolem $F(U)$, kde $U \subset M$, označujeme množinu všech hodnot zobrazení F v bodech množiny U (neboli obor hodnot restrikce zobrazení F na množinu U), symbolem $F^{-1}(V)$, kde $V \subset N$, množinu všech vzorů prvků množiny V. Je-li pro každou jednoprvkovou $V \subset N$ množina $F^{-1}(V)$ nejvýše jednoprvková, nazývá se zobrazení F *prosté*. Je-li F *prosté* a navíc $\mathcal{R}(F) = N$, nazýváme zobrazení F *bijekcí množiny M na množinu N*. Významným příkladem bijekce v případě, že $M = N$ je *identita na množině M*, $I: M \to M, I(x) = x$. Je-li F prosté, pak relace mezi množinami $\mathcal{R}(F)$ a M tvořená uspořádanými dvojicemi (y, x), pro které $y = F(x)$ je zobrazení. Toto zobrazení nazýváme *inverzním zobrazením k zobrazení F* a označujeme jej F^{-1}. Kupříkladu pro identitu na množině M platí $I^{-1} = I$.

Zobrazení hrají v matematice zásadní roli. Téměř všechny pojmy, se kterými se setkáváme v různých matematických oblastech jsou jistá zobrazení. Jako příklady uveďme třeba pojmy uspořádaná n-tice, posloupnost prvků v množině, reálná (komplexní) funkce, operace sčítání (násobení), konvergence, pravděpodobnost, náhodná veličina, matice, derivace, diference, norma, skalární součin, operátor, funkcionál atd. Pomocí pojmu bijekce (resp. prostého zobrazení) lze například definovat pojmy jako konečná či nekonečná množina (spočetná či nespočetná). Pojem rovnice a jejího řešení lze definovat pomocí pojmu zobrazení. Jakákoli rovnice je totiž úloha požadující nalezení všech vzorů při daném zobrazení (1.1) a daném prvku b v cílové množině tohoto zobrazení, tj.

$$F(x) = b. \tag{1.2}$$

Existence řešení rovnice (1.2) je ekvivalentní podmínce $b \in \mathcal{R}(F)$. Jednoznačnost řešení rovnice (1.2) pro libovolně pevně zvolené $b \in \mathcal{R}(F)$ je ekvivalentní podmínce, že F je prosté zobrazení. Pomocí inverzního zobrazení lze pak jediné řešení rovnice (1.2) zapsat ve tvaru $x = F^{-1}(b)$.

1.2 Matematické struktury

1.2.1 Matematickou strukturou rozumíme jakoukoli neprázdnou množinu opatřenou nějakými zobrazeními, operacemi či relacemi. Typickým příkladem matematické struktury je množina reálných čísel $\mathbb{R}$, jež je opatřena operacemi sčítání a násobení a relací uspořádání (např. Horský, 1987, str.38). Z hlediska aplikací v ekonomii, ekonometrii či statistice jsou patrně nejvýznamnějšími matematickými strukturami struktura linearity, struktura topologie (konvergence) a struktura měřitelnosti (pravděpodobnosti), přičemž vše zastřešuje funkcionální analýza, jako moderní sjednocující pohled, přinášející nové možnosti zobecnění. Pojem matematické struktury je velice obecný a tak nás zajímá, zda struktura, kterou jsme definovali, má nějaké konkrétní realizace. Každou takovou realizaci pak nazýváme interpretací (modelem) dané struktury.

1.2.2 Pro tvoření algebraických struktur potřebujeme pojem operace na množině. Zobrazení

$$F: M \times M \to M \tag{1.3}$$

nazýváme *(binární) operace* na množině M. Obvykle se při značení operace používá multiplikativní, resp. aditivní symbolika. To znamená, že místo $F(a, b) = c$ píšeme $ab = c$, resp. $a + b = c$ a hodnotu zobrazení F pak nazýváme součin, resp. součet prvků $a, b \in M$ a operaci nazýváme násobení, resp. sčítání.

Říkáme, že operace (1.3), v multiplikativní symbolice, je

(i) *asociativní*, jestliže platí $(ab)c = a(bc)$ pro všechna $a, b, c \in M$.

(ii) *komutativní*, platí-li pro všechna $a, b \in M$ rovnost $ab = ba$.

(iii) Existuje-li prvek, označovaný v multiplikativní symbolice 1, resp. v aditivní symbolice 0, pro který $1a = a1 = a$, resp. $a + 0 = 0 + a = a$ pro každé $a \in M$, nazýváme tento prvek *neutrálním prvkem* vzhledem k operaci násobení, resp. sčítání.

(iv) Existuje-li k prvku $a \in M$ prvek $b \in M$ té vlastnosti, že $ab = ba = 1$, resp. $a + b = b + a = 0$, pak prvek b nazýváme *inverzním prvkem k prvku a (vzhledem k násobení,* resp. *sčítání).*

Zvolíme-li za *M* číselný obor $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, pak operace sčítání v *M* je definována tak, že splňuje (i), (ii), (iii) s neutrálním prvkem 0 a (iv) pro libovolný prvek *M*, a operace násobení v *M* splňuje rovněž (i), (ii), (iii) s neutrálním prvkem 1 a (iv) platí pro každý nenulový prvek v *M*.

1.2.3 *Grupou* nazýváme strukturu s jednou operací, která je asociativní, obecně není komutativní, existuje neutrální prvek a ke každému prvku prvek inverzní. Je-li tato operace navíc komutativní, hovoříme o *abelovské grupě*. Typické příklady grup (dokonce abelovských) najdeme v číselných oborech. Množina reálných čísel s operací sčítání je abelovská grupa (sčítání čísel je komutativní). Množina kladných reálných čísel s operací násobení je abelovská grupa. Množina komplexních jednotek, tj. komplexních čísel tvaru $z = \mathrm{e}^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi$ s operací násobení je rovněž abelovská grupa. Nekomutativní grupy pak najdeme ve strukturách, jejichž prvky jsou bijekce na nějaké vhodné množině a operace je skládání zobrazení. Podrobněji, máme-li zobrazení $A: M \to N, B: N \to P$ a $C: M \to P$, pak zobrazení *C* je *zobrazením složeným (superpozicí) ze zobrazení A a B*, píšeme $C = A[B]$, jestliže pro každé $x \in M$ je $C(x) = A\big(B(x)\big)$. Je-li S množina všech bijekcí na množině *M*, pak je na S definována operace skládání zobrazení (bijekcí) tak, že složené zobrazení ze dvou bijekcí (jež je opět bijekcí na *M*) je hodnotou této operace. Jednotkovým prvkem je identita na *M*, inverzním prvkem pak inverzní bijekce (viz odst.1.1). Interpretací této grupy je například grupa všech permutací na množině $M = \{k: k \in \mathbb{N}, k \leq n\}, n \in \mathbb{N}$. Tato grupa není abelovská, jakmile $n \geq 3$. Jinou interpretací grupy, která není abelovská, je grupa regulárních matic řádu $n \in \mathbb{N}$, s $n \geq 2$ a operací násobení matic (podrobněji v odst. 1.3).

1.2.4 Obecnější strukturou než grupa je tzv. *semigrupa*. Je to množina opatřená jednou operací, o které předpokládáme pouze to, že je asociativní. Příkladem semigrupy je např. množina všech zobrazení (1.1), kde $M = N$, přičemž operací je operace skládání zobrazení. Jinou interpretaci získáme tak, že uvážíme množinu všech funkcí tvaru $F_a(x) = \exp(ax)$, $x \in \mathbb{R}, a > 0$ s operací násobení funkcí. V tomto případě je uvažovaná operace dokonce

komutativní. Tento případ lze zobecnit v tom směru, že místo čísla a budeme uvažovat nějaké vhodné zobrazení (zobecnění exponenciály). Množina $\mathbb{N}$ s operací sčítání přirozených čísel tvoří komutativní semigrupu. Totéž lze říci o množině $\mathbb{N}$ s operací násobení. V tomto případě má uvažovaná operace dokonce neutrální prvek (číslo 1).

1.2.5 Množina T opatřená dvěma operacemi (sčítáním a násobením) se nazývá těleso, splňuje-li tyto tři axiomy:

(i) T tvoří vůči operaci sčítání abelovskou grupu s neutrálním prvkem 0 (tzv. aditivní grupa tělesa). Prvek 0 je tzv. nula tělesa.

(ii) $T - \{0\}$ tvoří vzhledem k operaci násobení abelovskou grupu s neutrálním prvkem 1 (tzv. multiplikativní grupa tělesa). Prvek 1 je tzv. jednotka tělesa

(iii) Pro každé $a, b, c \in T$ platí $c(a + b) = ca + cb, (a + b)c = ac + bc$ (tzv. distributivní zákon).

V tělese platí řada přirozených vztahů, které známe z číselných oborů jako např. ekvivalence $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$. A jsou to právě číselné obory, které dávají typické interpretace struktury tělesa. Nejmenším tělesem nad oborem $\mathbb{N}$ s přirozenou aritmetikou je těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Stejně tak číselné obory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ představují tělesa. Interpretacemi tělesa, jehož prvky nejsou čísla, jsou těleso racionálních, resp. meromorfních funkcí (podrobně viz Rudin, 1977, str. 332).

1.2.6 V obecné algebře se setkáváme i s obecnějšími strukturami se dvěma operacemi jako jsou okruhy nebo obory integrity (viz např. Kuroš, 1968, str.30). *Okruhem* rozumíme strukturu se dvěma operacemi jako v případě tělesa, rozdíl je však v tom, že v axiomu (ii) nepředpokládáme o operaci násobení nic. Případ, se kterým se však často setkáváme, je ten, že operace násobení je alespoň asociativní (tzv. asociativní okruh), tzn. okruh je multiplikativní semigrupou. Příkladem asociativního okruhu je např. okruh čtvercových matic řádu $n > 1$ s obvykle definovanými operacemi sčítání a násobení matic. Jinou interpretaci okruhu představuje množina všech zobrazení (1.1), kde cílová množina je těleso. Takovým zobrazením říkáme funkce. Operaci sčítání, resp. násobení funkcí definujeme pomocí sčítání, resp. násobení v tělese. Podrobněji, $H = F + G$, právě když pro každé $x \in M$ je $H(x) = F(x) + G(x)$, podobně pro násobení. Přitom součin dvou nenulových prvků může být v okruhu roven 0 (tzv. netriviální dělitelé nuly).

Asociativní okruh, jehož multiplikativní semigrupa je komutativní, má jednotku a v tomto okruhu neexistují netriviální dělitelé 0 se označuje jako *obor integrity*. Typickou interpretací oboru integrity je obor celých čísel $\mathbb{Z}$.

Jiným důležitým příkladem je okruh (obor integrity) polynomů. Máme-li obecně komutativní a asociativní okruh R, lze uvažovat *polynomy* $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ v neurčité x s koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n, n \in \mathbb{N}_0$, které s běžně definovaným sčítáním a násobením tvoří *okruh polynomů nad okruhem R*. Je-li speciálně R oborem integrity (nebo dokonce tělesem), je příslušný okruh polynomů rovněž oborem integrity (nikoli tělesem). Součin dvou polynomů je polynom, jehož stupeň je součtem stupňů jednotlivých činitelů a pro nenulové polynomy je tedy nenulový. Zobecněním polynomů jsou *formální mocninné řady* $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$, jejichž součet a součin (Cauchyův součin řad) je přirozeným rozšířením součtu a součinu polynomů. Situace je zde analogická jako u polynomů a příslušné okruhy (obory integrity) nazýváme *okruhy (obory integrity) mocninných řad nad okruhem (oborem integrity) R*. S konkrétními interpretacemi se seznámíme v kapitole III.

1.2.7 Algebraická struktura může být tvořena nejenom operací (operacemi), ale i nějakými (binárními) relacemi na dané množině. Mezi nejvýznamnější relace na množině patří *relace ekvivalence* a *relace uspořádání*. Předtím než tyto relace definujeme, připomeňme si určité vlastnosti, které sledujeme u relací na množině.

Relace F na množině M , tj. množina $F \subset M \times M$se nazývá

(i) *reflexivní*, jestliže pro každé $a \in M$ je $(a, a) \in F$.

(ii) *tranzitivní,* jestliže pro každé $a, b, c \in M$ platí: $(a, b) \in F, (b, c) \in F \Longrightarrow (a, c) \in F$.

(iii) *symetrická,* jestliže pro každé $a, b \in M$ platí: $(a, b) \in F \Longrightarrow (b, a) \in F$.

(iv) *antisymetrická,* jestliže pro každé $a, b \in M$ platí: $(a, b) \in F, (b, a) \in F \Longrightarrow a = b$.

Relace F na množině M se nazývá *relace ekvivalence na M*, splňuje-li vlastnosti (i), (ii), (iii). Obvykle se používá značení $a \sim b$ místo $(a, b) \in F$. Relace ekvivalence na množině úzce souvisí s rozkladem množiny na disjunktní třídy.

Příkladem relace ekvivalence je rovnost na množině. Jiným příkladem je relace podobnosti matic na množině čtvercových matic řádu n (viz 1.3) anebo ekvivalence funkcí v

L_p prostorech (tj. rovnost až na množinu nulové míry, viz 1.4). Zobrazení (1.1) definuje rozklad na množině *M*, tj. na svém definičním oboru: $a \sim b \Leftrightarrow F(a) = F(b)$.

1.2.8 Relace *F* na množině *M* se nazývá *uspořádáním na množině M*, splňuje-li vlastnosti (i), (ii) a (iv). Píšeme pak obvykle $a \leq b$ místo $(a, b) \in F$. Množina *M* opatřená touto relací se nazývá *uspořádaná množina.*

Teorie uspořádání je rozsáhlou kapitolou obecné algebry a teorie množin. Existuje několik typů uspořádání. Jsou definovány pojmy jako částečné uspořádání, lineární uspořádání anebo dobré uspořádání. S uspořádáním souvisí řada důležitých matematických pojmů jakou jsou minimum a maximum množiny, supremum a infimum množiny, pojem intervalu či plus a minus nekonečna, nezápornost (kladnost) čísla, resp. matice či operátoru atd. *Částečné uspořádání*, kterým se zde budeme zabývat nejvíce, je fakticky uspořádání tak, jak bylo definováno. Budeme tedy dále vynechávat atribut „částečné“. Typickým příkladem je uspořádání na množině $\exp M = \{A: A \subset M\}$, tj. *potenční množině* množiny *M*. Relací je vlastnost „být podmnožinou“, tj. relace *inkluse.* Jak jsme si již připomněli v odst. 1.1, je každá množina podmnožinou sebe sama (reflexivita inkluse) a rovnost množin nastává, je-li jedna podmnožinou druhé a naopak (antisymetrie). Tranzitivita $A \subset B, B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ je rovněž evidentní. Minimálním prvkem v tomto uspořádání je $\emptyset$ a maximálním prvkem samotná množina *M*. Pro uspořádání na oboru přirozených čísel $\mathbb{N}$, máme zde na mysli tzv. přirozené uspořádání, tj $1 < 2, 2 < 3, \ldots$, existuje minimální prvek (totiž číslo 1), každý prvek má svého následníka $(n < n + 1)$ a neexistuje maximální prvek. Toto uspořádání se nazývá *dobré uspořádání*: každá neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{N}$ má minimální prvek. Uspořádání oboru reálných čísel $\mathbb{R}$ je *lineární uspořádání*: kromě vlastností (i), (ii), (iv) platí pro každé $a, b \in M$, že $a \leq b \vee b \leq a$ (tzv. *dichotomie*). Pro naše účely je dostatečně zpracována problematika uspořádání v Kuroš, 1968, str. 18-25, kde je také ukázána úzká souvislost uspořádání s axiomem výběru. Tento axiom je jedním ze základních stavebních kamenů matematiky a jeho přijetí či naopak odmítnutí je tak zásadní věcí, že znamená přiklonění se k různým vývojovým směrům v matematice (Horský, 2009, str. 49).

Spojení struktury uspořádání se strukturou tělesa vede k důležitému pojmu uspořádaného tělesa. Budiž *T* těleso. Řekneme, že *T* je *uspořádané těleso*, platí-li

(i) *T* je lineárně uspořádaná množina.

(ii) Pro každé $a, b, c \in T$ platí: je-li $a \leq b$, je $a + c \leq b + c$.

(iii)Pro každé $a, b \in T$ platí: je-li $0 \leq a, 0 \leq b$, je $0 \leq ab$.

Příkladem uspořádaného tělesa je těleso reálných nebo racionálních čísel. Každé uspořádané těleso obsahuje podmnožinu, kterou lze ztotožnit s tělesem racionálních čísel.

1.2.9 Struktury, které byly definovány v předchozích odstavcích jsou algebraickými strukturami. V algebře, a nejenom v ní, je pak zvykem označovat takové struktury jako *algebry*. V odstavci 1.4. definujeme speciální množinovou algebru, tzv. σ- algebru, která vytváří strukturu vhodnou pro definici pojmu pravděpodobnost, obecněji míra. V kapitole II bude našim zájmem tzv. Banachova algebra (operátorů). Pojem algebra se tedy používá obecně v souvislosti s některými matematickými strukturami. Je také vhodné připomenout, že stejně jako v případě obecné množiny uvažujeme o jejích podmnožinách, tak v případě algeber jsou naším zájmem jejich části, subalgebry. Definice příslušných pojmů je ovšem různá. Zatímco u algebraických struktur jako jsou grupy, okruhy, tělesa či lineární prostory nám jde o uzavřenost příslušných podmnožin vůči operacím, či relacím v těchto strukturách, v případě struktur matematické analýzy (topologie), či teorie pravděpodobnosti jde o pouhé restrikce příslušných zobrazení definujících danou strukturu. Mluvíme pak o podgrupách, podokruzích, podtělesech nebo podprostorech lineárních prostorů, o podprostorech topologických nebo měřitelných prostorů apod. Pro příklad uveďme, že např. těleso racionálních čísel je podtělesem tělesa reálných čísel, aditivní grupa sudých celých čísel je podgrupou aditivní grupy celých čísel, okruh polynomů je podokruhem okruhu formálních mocninných řad apod.

1.2.10 Zobrazení (1.1), kde množiny M a N jsou grupy (tělesa, okruhy) nazýváme *homomorfismus M* do *N*, pokud toto zobrazení přenáší příslušnou operaci (operace), či relaci z argumentů na hodnoty. Jsou-li např. M a N grupy, přičemž operace v M je sčítání a operace v N je násobení, pak (1.1) je *(grupový) homorfismus M do N*, pokud pro každé $a, b \in M$ platí, že $F(a + b) = F(a)F(b)$. Konkrétním příkladem takového homomorfismu je funkce daná předpisem $F(x) = 2^x$, kde M je aditivní grupa všech celých čísel a $N = \mathbb{R}^+$ je multiplikativní grupa kladných reálných čísel. V tomto případě existuje inverzní homorfismus, kterým je zřejmě logaritmus o základu dvě definovaný na podgrupě celočíselných mocnin čísla dvě multiplikativní grupy kladných reálných čísel. Obor hodnot homomorfismu je vždy příslušná subalgebra cílové algebry. Také neutrální prvky operací příslušných algeber se zobrazují na neutrální prvky operací cílových algeber téhož typu. Na konci odst. 1.2.8 jsme poznamenali,

že uspořádané těleso je vždy nekonečná množina, obsahující podmnožinu, kterou lze ztotožnit s $\mathbb{Q}$. Toto ztotožnění je prostý homorfimus definovaný v tělese racionálních čísel s hodnotami v daném uspořádaném tělese. Jeho obor hodnot je podtěleso daného uspořádaného tělesa, nula, resp. jednotka tělesa $\mathbb{Q}$ přechází na nulu, resp. jednotku uspořádaného tělesa. V této souvislosti se hovoří o *vnoření* tělesa $\mathbb{Q}$ do daného uspořádaného tělesa. Podobně vnoření tělesa reálných čísel do tělesa komplexních čísel je tělesový homorfismus. Většinou se však říká, že v daném tělese je podtěleso izomorfní (podrobněji dále) s tělesem racionálních (reálných) čísel. Zajímavou subalgebrou definičního oboru homomorfismu je tzv. *jádro homomorfismu*, definované jako množina vzorů neutrálního prvku cílové algebry. Skládáním homorfismů (viz 1.2.3) vznikne opět homomorfismus. Ve struktuře linearity (viz 1.3) je homorfismus obvykle reprezentován maticí.

Homomorfismus pro $M = N$ nazýváme *endomorfismem na množině M*. Endomofismy lineárních prostorů budou naším tématem v odst. 1.3. i v dalších kapitolách. Ve struktuře linearity v konečné dimenzi jsou to operátory (lineární zobrazení) reprezentovaná čtvercovými maticemi. Endomorfismy libovolné algebry tvoří semigrupu vzhledem k operaci skládání (viz také 1.2.4). Jednotkovým prvkem této semigrupy je identita na dané algebře.

1.2.11 Je-li bijekce algebraických struktur homorfismus, jedná se o velice důležitý případ tzv. *izomorfismu* struktur. Tak např. logaritmus o jakémkoli základu $a > 0, a \neq 1$ je izomorfismem multiplikativní grupy kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$ a aditivní grupy tělesa reálných čísel. Inverzní izomorfismus je exponenciála o základu a. Obecně platí, že inverzní zobrazení k izomorfismus je opět izomorfismus a skládáním izomorfismů vznikne izomorfismus. Hovoříme o izomorfismech grup, okruhů, těles, uspořádaných množin, lineárních prostorů, obecně algeber. S důležitým případem *izomorfního vnoření* těles jsme se setkali v 1.2.10. Uveďme jiné neméně důležité skutečnosti: každý obor integrity lze izomorfně vnořit do tělesa. Jde o známou algebraickou konstrukci tzv. podílového tělesa; např. pro obor integrity celých čísel je podílovým tělesem těleso racionálních čísel. Podílovým tělesem oboru integrity polynomů v neurčité x je těleso racionálních funkcí. Pro izomorfní vnoření uspořádaných množin platí toto tvrzení: každou uspořádanou množinu lze vnořit do potenční množiny nějaké množiny (speciálně potenční množiny dané uspořádané množiny). Uspořádaní na potenční množině je dáno inklusí (viz 1.2.8).

1.3 Struktura linearity

Zcela zásadní postavení mezi algebraickými strukturami má struktura linearity. V jistém smyslu lze říci, že tato struktura vychází ze struktury tělesa.

1.3.1 *Lineárním (vektorovým) prostorem (nad tělesem T)* nazveme libovolnou neprázdnou množinu *V* splňující následující vlastnosti:

(i) Množina *V* je abelovská grupa s operací sčítání.

(ii) Je definováno zobrazení $F: T \times V \to V$, $F(c, v) = cv$, které splňuje tyto vlastnosti:

(a) $1v = v$ pro každé $v \in V$ (1 je jednotka tělesa *T*).

(b) $(cd)v = c(dv)$ pro každé $c, d \in T, v \in V$.

(c) $(c + d)v = cv + dv$ pro každé $c, d \in T, v \in V$.

(d) $c(u + v) = cu + cv$ pro každé $c \in T, u, v \in V$.

Prvky prostoru *V* nazýváme *vektory* a prvky tělesa *T* nazýváme v tomto kontextu *skaláry*. Zobrazení (ii) nazýváme *skalárním násobkem vektoru*.

Zobrazení (ii) je tedy jakousi obdobou násobení v tělese. Nicméně se nejedná o operaci na množině, jak byla definována v (1.3). Neutrální prvek abelovské grupy *V* nazýváme nulovým vektorem a značíme *o*. Platí řada obdobných vztahů, jako v tělesech: např. $(-1)v = -v$ nebo $cv = o \Leftrightarrow c = 0 \vee v = o$.

Interpretací lineárního prostoru *V* nad tělesem *T* reálných (komplexních) čísel je např. prostor uspořádaných *n*-tic reálných, resp. komplexních čísel; značíme ho $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$. Sčítání vektorů a skalární násobek vektoru jsou definovány po složkách, tj. tak, jak bylo řečeno v 1.2.6. Uspořádané *n*-tice jsou fakticky zobrazení (1.1), kde definiční obor je množina $M = \{k: k \in \mathbb{N}, k \leq n\}$. Cílová množina je v našem případě těleso $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. V případě reálných skalárů jde o již zmíněný euklidovský prostor. Obecněji lze za těleso *T* vzít jakékoli těleso. Pak prostor *V* označujeme V_n a nazýváme aritmetickým *n*-rozměrným prostorem nad tělesem *T*. Pokud v (1.1) zvolíme $M = \mathbb{N}$ a *N* bude libovolně zvolené těleso *T*, pak získáme analogickou interpretaci, prostor V_∞, kde vektory jsou posloupnosti prvků tělesa *T*. Speciálně $\mathbb{R}^\infty$ je prostor posloupností reálných čísel. Všechny tyto a podobné prostory jsou vytvářeny na

základě obecné konstrukce, kde vezmeme za V aditivní grupu okruhu zobrazení z (1.2.6). Zde se pak budeme zabývat vesměs případem, kdy těleso skalárů je $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$.

Podprostorem lineárního prostoru V nazýváme neprázdnou množinu $P \subset V$, pro kterou platí, že s každými dvěma vektory obsahuje i jejich součet a s každým vektorem i každý jeho skalární násobek. Relace „být podprostorem“ je uspořádání na množině $\wp(V)$ všech podprostorů prostoru V. V tomto uspořádání existuje $\min \wp(V) = \{o\}$, tzv. triviální prostor a také $\max \wp(V) = V$. Běžný způsob, jak se vytvářejí podprostory daného prostoru je pomocí lineárních obalů skupin (množin) jistých vektorů. *Skupinou vektorů (délky m, $m \in \mathbb{N}_0$)*

$$v_1, v_2, \dots, v_m \tag{1.4}$$

rozumíme zobrazení (1.1) s $M = \{k: k \in \mathbb{N}, k \leq m\}$ a $N = V$. Pomocí skupiny (1.4) vytváříme další vektory v prostoru V jako *lineární kombinace*

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m, \tag{1.5}$$

kde $c_i \in T$ jsou tzv. koeficienty lineární kombinace (1.5). Množinu všech vektorů tvaru (1.5) nazýváme *lineárním obalem skupiny vektorů* (1.4) a značíme

$$[\![v_1, v_2, \dots, v_m]\!]. \tag{1.6}$$

Množina (1.6) je podprostorem lineárního prostoru V. Je to nejmenší podprostor prostoru V, který obsahuje vektory skupiny (1.4). Říkáme, že skupina (1.4) je *generující skupina prostoru* (1.6). Obecněji můžeme skupinu (1.4) nahradit množinou $S \subset V$ a uvažovat množinu všech vektorů tvaru (1.5), kde (1.4) je libovolná skupina vektorů v množině S. Tento přístup je běžný ve funkcionální analýze, kde se zabýváme především prostory nekonečné dimenze (viz níže), zatímco předchozí přístup je typický pro klasickou (“konečně dimenzionální”) lineární algebru.

1.3.2 Označíme-li skupinu (1.4) stručně S a symbolem S_j skupinu, která vznikne z S vynecháním vektoru v_j, $j = 1, \dots, m$, říkáme, že skupina S je *lineárně závislá*, platí-li $[\![S]\!] = [\![S_j]\!]$ pro alespoň jedno j. V opačném případě říkáme, že S je *lineárně nezávislá.* Příkladem lineárně nezávislé skupiny je prázdná skupina $\emptyset$. Jejím lineárním obalem je triviální prostor. Nutnou a postačující podmínkou pro lineární nezávislost skupiny je to, že nulový vektor lze pomocí ní vyjádřit pouze triviálně, tj. všechny koeficienty v (1.5) jsou nulové, položíme-li $w = o$.

Je-li S lineárně nezávislá a generující skupina pro prostor V, říkáme, že S je *báze prostoru V*. Existence báze lineárního prostoru je zaručena, jakmile je prostor V tvaru (1.6). V takovém případě platí, že každé dvě báze tohoto prostoru mají tutéž délku $r \leq m$. Číslo r pak nazýváme *dimenzí prostoru V* a značíme $\dim V$. Lineární prostory zde popsaných vlastností se nazývají *prostory konečné dimenze.* Příkladem takového prostoru je triviální prostor, jehož dimenze je podle předchozích úvah nulová. V lineární funkcionální analýze jsou předmětem studia lineární prostory, které nemají konečnou dimenzi. Tyto prostory nelze generovat skupinami (1.4) pro žádné $m \in \mathbb{N}_0$. Takové prostory nazýváme *prostory nekonečné dimenze*, přičemž k pojmu báze se přistupuje jiným způsobem (viz kapitola II). Na závěr ještě doplňme, že v prostoru konečné dimenze lze libovolný vektor vyjádřit jednoznačně pomocí předem pevně, leč libovolně, zvolené báze. Tento fakt ukazuje, že každý lineární prostor V, jehož $\dim V = r$, je izomorfní (ve smyslu izomorfismu lineárních prostorů) s aritmetickým r-rozměrným prostorem V_r. Je-li totiž $v_1, v_2, \dots, v_r$ nějaká báze prostoru V, pak při vyjádření libovolného vektoru $w \in V$ ve tvaru $w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r$ jsou koeficienty $c_i \in T$ určeny jednoznačně. Zobrazení (1.1), kde $M = V_r$ a $N = V$ je tedy bijekce a snadno se lze přesvědčit, že jde o izomorfismus lineárních prostorů, tj. obraz součtu vektorů je součet jejich obrazů a obraz skalárního násobku vektoru je skalární násobek jeho obrazu. Tento izomorfismus se nazývá *souřadnicový izomorfismus* (nebo také *aritmetizace prostoru V*) vzhledem k dané bázi prostoru V. V prostoru V_r je bází skupina vektorů

$$e_1, e_2, \dots, e_r \ , \ e_j = (0,0, \dots 0,1,0, \dots ,0). \tag{1.7}$$

V r-tici e_j je 1 (jednotka tělesa) pouze v j-té pozici, jinde 0. Tuto bázi nazýváme *kanonická báze* a její členy *jednotkové vektory*. Pro aritmetizaci tedy platí $F(e_j) = v_j, \ j = 1, \dots, r$.

1.3.3 Homomorfismy lineárních prostorů se nazývají lineární zobrazení. Podrobněji, zobrazení

$$F: V \to W, \tag{1.8}$$

kde V, W jsou lineární prostory nad týmž tělesem T se nazývá *lineární zobrazení (prostoru V* do prostoru W, platí-li

(i) $F(u + v) = F(u) + F(v)$ pro každé $u, v \in V$.

(ii) $F(cu) = cF(u)$ pro každé $c \in T$ a $u \in V$.

Vlastnost (i) se nazývá *adivita zobrazení F*, vlastnost (ii) je tzv. *homogenita zobrazení F*.

Přímým důsledkem vlastností (i) a (ii) lineárního zobrazení je fakt, že obrazem lineární kombinace vektorů (ve V) je lineární kombinace obrazů těchto vektorů (ve W).

Obor hodnot lineárního zobrazení $\mathcal{R}(F)$ je podprostorem prostoru W. *Jádro lineárního zobrazení*, tj. množina $N(F) = \{z: z \in V,\ F(z) = o\}$, je podprostorem prostoru V. Nulový vektor prostoru V je vzorem nulového vektoru prostoru . Je-li jeho jediným vzorem, je (1.8) prosté. Za předpokladu, že prostor V je konečné dimenze, platí věta o zachování dimenze: $\dim V = \dim N(F) + \dim \mathcal{R}(F)$.

Příkladem lineárního zobrazení je konstantní *nulové zobrazení* (jedinou hodnotou je nulový vektor) a v případě, že $V = W$, identita na V. Identita je (triviálním) příkladem lineární bijekce, tj. izomorfismu lineárních prostorů. Aritmetizace zmíněná v předchozím odstavci, je jiným příkladem lineární bijekce.

Dále předpokládejme, že $\dim V = n, \dim W = m$. Nechť $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ je báze prostoru V, $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_m)$ báze prostoru W. Pak $F = hAg^{-1}$, kde g je aritmetizace prostoru V vzhledem k bázi $\boldsymbol{u}$ a h je aritmetizace prostoru W vzhledem k bázi $\boldsymbol{v}$. Zobrazení $A: V_n \to V_m$ je lineární zobrazení, které reprezentujeme maticí typu (m,n), v jejíchž sloupcích jsou hodnoty tohoto zobrazení ve vektorech kanonické báze prostoru V_n. Tuto konstrukci znázorníme následujícím diagramem

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ g \uparrow & & \uparrow h \\ V_n & \xrightarrow[A]{} & V_m \end{array}$$

Obr.1. Aritmetizace lineárního zobrazení maticí

Uvedené úvahy ukazují, že studium lineárních zobrazení v prostorech konečné dimenze je studiem matic.

Zvolíme-li $V = V_n$, resp. $W = V_m$, dostaneme relaci ekvivalence na množině $M(m,n)$ matic $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ typu (m,n), kde každá třída ekvivalence odpovídá jednomu lineárnímu

zobrazení (1.8). Její prvky jsou pak matice tohoto zobrazení vzhledem k různě voleným bázím $\boldsymbol{u}$, resp. $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{-1}. \tag{1.9}$$

Je-li $m = n$, píšeme $M(n)$ místo $M(n,n)$. V (1.9) je $\boldsymbol{G}^{-1} \in M(n)$ inverzní matice k matici $\boldsymbol{G}$ aritmetizace g (ve sloupcích matice $\boldsymbol{G}$ jsou vektory báze $\boldsymbol{u}$) a $\boldsymbol{H} \in M(m)$ je matice aritmetizace h (ve sloupcích matice $\boldsymbol{H}$ jsou vektory báze $\boldsymbol{v}$). Je zvykem obvykle ztotožňovat lineární zobrazení s jeho maticí v kanonické bázi (viz (1.7))

Superpozice lineárních zobrazení je lineární zobrazení, inverzní zobrazení k lineárnímu zobrazení, existuje-li, je rovněž lineární. V konečné dimenzi interpretujeme skládání lineárních zobrazení jako násobení matic, místo inverzní lineární zobrazení říkáme inverzní matice. Identické zobrazení je reprezentováno jednotkovou maticí, nulová matice reprezentuje konstantní nulové zobrazení. Izomorfismy aritmetického prostoru jsou reprezentovány regulárními maticemi, inverzní izomorfismus reprezentuje inverzní matice.

1.3.4 Rovnici (1.2), tj. rovnici

$$F(x) = b, \tag{1.10}$$

v níž F je zobrazení (1.8), $b \in W$ pevně zvlený vektor, nazýváme *lineární rovnice*. Rovnice (1.10) se nazývá *homogenní*, je-li b nulový vektor. V tomto případě je množinou řešení jádro $N(F)$. Množina vzorů vektoru b, tj. $F^{-1}(\{b\})$ je neprázdná právě tehdy, když $b \in \mathcal{R}(F)$ (viz 1.1.2). Pak lze psát

$$F^{-1}(\{b\}) = p + N(F) = \{x: x = p + z, z \in N(F)\}, \tag{1.11}$$

kde pro $p \in V$ platí $F(p) = b$ (tzv. *partikulární řešení rovnice* (1.10)). Množina (1.11) je tzv. *lineál (řešení rovnice* (1.10)).

V případě, že $V = V_n$ a $W = V_m$, rovnice (1.10) přechází do tvaru, kterému se říká *soustava lineárních algebraických rovnic* (přesněji soustava m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých). Tzv. *matice soustavy* $\boldsymbol{A} \in M(m,n)$ je pak matice reprezentující dané lineární zobrazení. Rovnice (1.10) přechází do tvaru

$$\boldsymbol{A}x = b. \tag{1.12}$$

Teorie těchto soustav je klasickým tématem lineární algebry (viz např. Horský Z., 1987, str. 59-66).

V případě, že $V = W = V_\infty$ a F je lineární zobrazení typu *lineární diferenční operátor k-tého řádu*, tj. je-li $= (x_1, x_2, \dots) \in V_\infty$, je $F(x) = (x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n)$, $a_1, \dots, a_k$ pevně dané skaláry, či obecněji $a_j = a_j(n), j = 1, \dots, k$, pak rovnice (1.10) je tzv. *lineární diferenční rovnice k-tého řádu s koeficienty* $a_1, \dots, a_k$. Teorie těchto rovnic je dobře známa. Přestože prostor V_∞ je nekonečné dimenze, má jádro lineárního diferenčního operátoru konečnou dimenzi: $\dim N(F) = k$. V případě konstantních koeficientů a_j lze bázi jádra konstruovat pomocí geometrických posloupností, jejichž kvocienty jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice.

Jinými typickými třídami lineárních rovnic jsou obyčejné a parciální lineární diferenciální rovnice. Derivace všech řádu (obyčejné, parciální, totální) jsou lineárními zobrazeními v lineárních prostorech nekonečné dimenze. Prvky těchto prostorů jsou funkce jedné, či více proměnných, dostatečně diferencovatelné.

Na závěr tohoto odstavce ještě poznamenejme, že existují možnosti, jak získat řešení rovnice (1.10) i za situace, že klasické řešení neexistuje, tj. v (1.10) není vektor b prvkem oboru hodnot. *Zobecněné* (někdy také *slabé*) *řešení* se pak konstruuje pomocí zobecněných inverzí jako jsou Moore-Penroseova nebo Drazinova inverze (viz např. Nair, 2009, str. 146 nebo Horský, 2011, str. 121)

1.3.5 Je-li v (1.8) $V = W$, je F endomorfismus . Uvažujeme-li prostory konečné dimenze n, lze přejít aritmetizací k maticové reprezentaci těchto endomorfismů (viz 1.3.3). Reprezentující matice jsou čtvercové, řádu n. Algebra endomorfismů (tj. lineární prostor endomorfismů s operací skládání zobrazení, vůči níž jde o semigrupu s jednotkovým prvkem, identitou) je izomorfní s algebrou matic $M(n)$ (lineární prostor matic s operací násobení matic, jednotkou je jednotková matice). Z věty o zachování dimenze zmíněné v 1.3.3 plyne, že jakmile je endomorfismus prostý, jedná se již o izomorfismus. V maticové podobě jde o *regulární matici*. V opačném případě jde o endomorfismus s netriviálním jádrem a oborem hodnot různým od cílového prostoru, tj. *singulární matici*. Jak jsme již zmínili v 1.2.2 množina regulárních matic řádu aspoň dva je nekomutativní grupa, jež je podgrupou multiplikativní semigrupy matic. Nejedná se o podprostor lineárního prostoru $M(n)$. Lineární prostor endomorfismů prostoru dimenze n má dimenzi n^2. Je totiž zřejmě $\dim M(n) = n^2$. Z toho

plyne, že existují netriviální polynomy (neurčité x), které se anulují na těchto endomorfismech (maticích). Pro každý endomorfismus pak existuje v oboru integrity polynomů (nad tělesem T) (viz (1.2.6) polynom nejnižšího stupně s vedoucím koeficientem 1 (monický), anulující daný endomorfismus (matici), tzv. *minimální polynom endomorfismu (matice).* Například *nilpotentní endomorfismu (matice)* je takový nenulový endomorfismus (matice), jehož minimální polynom je x^r, pro nějaké $r \in \mathbb{N}$. Číslo r se nazývá *řádem nilpotence endomorfismu (matice).*

1.3.6 Spektrální teorie endomorfismů (matic) je významnou částí lineární algebry. Zde budeme předpokládat, jak je to obvyklé, že skaláry jsou reálná (komplexní) čísla, a prostory jsou konečné dimenze. V kapitole II budeme obecněji uvažovat i prostory nekonečné dimenze. Připomeňme základní fakta ve formulacích pro matice. Má-li soustava (1.12) s $b = \lambda x, \lambda \in T$, netriviální řešení, nazýváme každý nenulový vektor x řešící tuto soustavu *vlastním vektorem matice* $\boldsymbol{A}$. Skalár λ určený vlastním vektorem jednoznačně nazýváme *vlastním číslem matice* $\boldsymbol{A}$. Jinými slovy, každý skalár λ, pro který je matice

$$\lambda I - \boldsymbol{A} \tag{1.13}$$

singulární, je vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$. Matice (1.13) je tzv. *charakteristická matice* příslušná matici $\boldsymbol{A}$. Je-li (1.13) singulární, pak netriviální jádro $N(\lambda I - \boldsymbol{A})$ nazýváme *vlastním podprostorem příslušným číslu* λ. Dimenze tohoto podprostoru se nazývá *geometrickou násobností vlastního čísla* λ. Fakt, že (1.13) je singulární lze ekvivalentně vyjádřit rovností

$$\det(\lambda I - \boldsymbol{A}) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0. \tag{1.14}$$

Rovnice (1.14) se nazývá *charakteristická rovnice* a determinant charakteristické matice je tzv. *charakteristický polynom matice* $\boldsymbol{A}$. Jeho kořeny jsou právě vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$. Ze základní věty algebry plyne, že (1.14) má n kořenů v $\mathbb{C}$ (nejvýše n kořenů v $\mathbb{R}$), tj. $\boldsymbol{A}$ má (nejvýše) n vlastních čísel. *Násobnost* kořene λ rovnice (1.14) je tzv. *algebraická násobnost vlastního čísla* λ. Cayley Hamiltonova věta říká, že charakteristický polynom je anulujícím polynomem matice $\boldsymbol{A}$. Tento polynom je vždy dělitelný minimálním polynomem matice $\boldsymbol{A}$; vyjímečně jsou oba polynomy totožné, např. pro nilpotentní matice. Množina všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ je tzv. *spektrum matice* $\boldsymbol{A}$, značíme ji $\sigma(\boldsymbol{A})$. Poloměr nejmenšího kruhu v komplexní rovině, který obsahuje $\sigma(\boldsymbol{A})$ nazýváme *spektrálním poloměrem matice* $\boldsymbol{A}$ a značíme ho $r(\boldsymbol{A})$. Perronova věta tvrdí, že má-li $\boldsymbol{A}$ všechny prvky kladné, je $r(\boldsymbol{A}) \in \sigma(\boldsymbol{A})$ a jemu odpovídá (až na násobek) jediný vlastní vektor, jehož všechny složky jsou kladná čísla.

Matice $\boldsymbol{A}^T$, tj. transponovaná matice k matici $\boldsymbol{A}$, má stejné spektrum jako matice $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A}^T) = \sigma(\boldsymbol{A})$. Symetrická matice, tj. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, má všechna vlastní čísla reálná. Matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou *podobné matice*, píšeme $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, jestliže existuje regulární matice $\boldsymbol{C}$ tak, že

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}. \tag{1.15}$$

Podobnost matic je relací ekvivalence na množině $M(n)$. Podobné matice mají tentýž charakteristický polynom, tj. totéž spektrum a spektrální poloměr. Jordanova věta tvrdí, že každá matice je podobná matici v *Jordanově kanonickém tvaru*: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J}$, kde matice $\boldsymbol{J}$ (tzv. Jordanův kanonický tvar) je blokově diagonální matice skládající se z jistých k bloků tvaru $\lambda_i I_{r_i} - N_{r_i}, i = 1, \dots, k$. Zde $\lambda_i \in \sigma(A)$, I_{r_i} je jednotková matice řádu r_i a $N_{r_i} \in M(r_i)$ je nilpotentní matice, v jejíchž řádcích jsou jednotkové vektory $e_2, \dots, e_{r_i}$ kanonické báze prostoru V_{r_i} , $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

1.4 Struktura konvergence

Struktura konvergence je tématem matematické analýzy a topologie. Obvykle se konvergence zavádí obecně v rámci pojmu topologický prostor. V celé této práci budeme uvažovat v jistém smyslu speciální, přesto dosti obecnou topologii, která se označuje jako Hausdorffova, přičemž tato topologie bude mít samozřejmě různé interpretace (tj. realizace).

1.4.1 Neprázdný systém τ jistých podmnožin neprázdné množiny M nazveme *topologií na prostoru M*, platí-li:

(i) $\emptyset \in \tau, M \in \tau$.

(ii) Sjednocení libovolného počtu prvků z τ je opět prvkem systému τ.

(iii) Průnik libovolného konečného počtu prvků z τ je opět prvkem systému τ.

Množinu M opatřenou topologií τ nazýváme *topologickým prostorem*. Někdy pro zdůraznění topologie jej zapisujeme jako dvojici (M, τ). Prvky topologie τ nazýváme *otevřenými množinami*. Jejich doplňky (v prostoru M) nazýváme *uzavřenými množinami*. Z de Morganových pravidel plyne, že průnik libovolného systému a sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Množiny $\emptyset$ a M jsou zároveň otevřené i uzavřené. Průnik systému všech uzavřených množin obsahujících množinu $S \subset M$

nazýváme *uzávěr množiny* S a značíme $\bar{S}$. Množina $\bar{S}$ je nejmenší uzavřená množina v M (v uspořádání inklusí), která obsahuje množinu S. Sjednocení všech otevřených množin obsažených v S nazýváme *vnitřkem množiny S. Okolím bodu* $a \in M$ rozumíme jakoukoli množinu v τ obsahující bod a ve svém vnitřku, značíme $\mathcal{E}(a)$. *Hausdorffovým topologickým prostorem* rozumíme takový topologický prostor, ve kterém pro každé dva různé body existují disjunktní otevřené množiny, které jsou jejich okolími. Takový topologický prostor je pro naše účely nejvhodnější. V něm platí např. věta o jednoznačnosti limity posloupnosti.

Říkáme, že *posloupnost* (x_n) obsažená v topologickém prostoru *M konverguje k bodu* $a \in M$, píšeme $x_n \to a$, jestliže v každém okolí bodu a leží všechny členy této posloupnosti od jistého počínaje. Také říkáme, že bod *a je limitou posloupnosti* (x_n), píšeme $\lim x_n = a$.

Pojem konvergence posloupnosti je tak důležitý, že budeme (vzhledem k našim dalším záměrům) hovořit o struktuře konvergence spíše než o topologii. Existence limity není pro danou posloupnost zaručena. Pokud posloupnost má limitu, pak každá z ní *vybraná posloupnost* má tutéž limitu. $K \subset M$ se nazývá *kompaktní množina*, pokud z každé posloupnosti v ní obsažené lze vybrat posloupnost, která v ní konverguje. Kompaktní množina je uzavřená. *Limitním bodem množiny* $S \subset M$ rozumíme bod $a \in M$, pro který existuje posloupnost (x_n) v S, pro kterou $\lim x_n = a$. Množina limitních bodů množiny S je totožná s jejím uzávěrem $\bar{S}$. Rovnost $\bar{S} = S$ znamená, že S je uzavřená. Pokud existuje $S \subset M$ taková, že $\bar{S} = M$ říkáme, že S je *hustá množina v M*. Je-li S hustá v M a navíc spočetná (tzn. existuje bijekce množiny $\mathbb{N}$ na S), říkáme, že M je *separabilní prostor.*

Je-li $S \subset M$ (M topologický prostor), $S \neq \emptyset$, je množina S topologickým prostorem s topologií $\tau_S = \{G \cap S : G \in \tau\}$. Množinu S pak nazýváme *podprostorem topologického prostoru M*.

1.4.2 Vedle samotného topologického prostoru jsou předmětem našeho zájmu zobrazení spojená se strukturou topologie. Jsou-li M a N topologické prostory, pak (1.1) se nazývá *zobrazení spojité v bodě* $a \in M$, platí-li $\lim F(x_n) = F(a)$ pro každou posloupnost (x_n) obsaženou v M, pro kterou $\lim x_n = a$. F je *zobrazení spojité v prostoru M* , je-li spojité v každém bodě prostoru M. Je-li $S \subset M$, pak říkáme, že zobrazení *F je spojité v množině S*, je-li jeho restrikce na množinu S (tj. zobrazení $G: S \to N$ definované rovností $G(x) = F(x)$ pro každé $x \in S$) spojitá v prostoru S.

Spojitost zobrazení $F: M \to N$ lze definovat pomocí pojmu otevřené množiny tak, že pro každou otevřenou množinu $V \subset N$ je množina všech vzorů $F^{-1}(V)$ (viz 1.1.2) otevřená v *M*. Podobně vzorem každé uzavřené množiny je ve spojitém zobrazení uzavřená množina. Obrazem kompaktní množiny *K* ve spojitém zobrazení *F* je kompaktní množina $F(K)$.

Superpozice spojitých zobrazení je spojité zobrazení. Existuje-li inverzní zobrazení ke spojitému zobrazení, nemusí být toto zobrazení spojité. Zobrazení se nazývá *homeomorfismus,* pokud k němu existuje inverzní zobrazení, které je spojité. Příkladem spojitého zobrazení (a také homeomorfismu) je identita na daném topologickém prostoru.

1.4.3 Typickou interpretací topologického prostoru je reálná osa $\mathbb{R}$, resp. rozšířená reálná osa $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\propto, \propto\}$. Standardní topologie (konvergence) v $\mathbb{R}$ je definována tak, že množina v $\mathbb{R}$ je otevřená právě tehdy, když je sjednocením otevřených intervalů. Typickým okolím bodu a je otevřený interval $\mathcal{E}(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné. Konstrukce $\mathbb{R}^*$ a standardní konvergence v této množině je popsána např. v Horský, 2006. Množina v $\mathbb{R}$ je otevřená právě tehdy, když je sjednocením otevřených intervalů. Množina $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tedy $\mathbb{R}$ je separabilní. Kompaktní množina *K* je právě taková množina, která je uzavřená a omezená (tj. existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $K \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$). Tento prostor a zobrazení (funkce) s hodnotami v tomto prostoru definované v nějaké podmnožině $\mathbb{R}$ jsou předmětem studia klasické reálné analýzy. Typickou vlastností tohoto prostoru je jeho úplnost, tj. cauchyovské posloupnosti jsou konvergentní.

Jinou interpretací topologického prostoru je komplexní rovina $\mathbb{C}$, resp. rozšířená komplexní rovina $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\propto\}$. Okolí bodu jsou v $\mathbb{C}$ definovány jako kruhy se středem v daném bodě. Studium tohoto prostoru a zejména zobrazení definovaných v podmnožinách $\mathbb{C}$ s hodnotami v $\mathbb{C}$, tzv. komplexních funkcí komplexní proměnné, jsou předmětem studia klasické komplexní analýzy (Veselý, 2000). My se zde setkáme se zobrazeními definovanými v $\mathbb{C}$ s hodnotami v Banachových prostorech (např. prostorech spojitých lineárních operátorů) v kapitole II a dalších kapitolách.

Euklidovský *r*-rozměrný prostor $\mathbb{R}^r$ lze opatřit strukturou konvergence tak, že okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_r)$ je kartézský součin okolí jeho souřadnic v $\mathbb{R}$.

Všimněme si, že v našich příkladech topologických prostorů jsou okolí bodů definována pomocí absolutní hodnoty reálného (komplexního) čísla. Se zobecněním absolutní hodnoty čísla, s pojmem normy prvku, se setkáme v kapitole II. Tzv. normované prostory

představují speciální případ topologických prostorů. Existuje i jistý mezistupeň mezi topologickým a normovaným prostorem, tzv. metrický prostor.

1.4.4 Mezi spojitými zobrazeními hrají významnou roli spojité funkce, tj. zobrazení, jejichž cílovým prostorem je $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) . Množinu spojitých funkcí $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ budeme označovat $\mathsf{C}(M)$. Lze uvažovat posloupnosti funkcí v tomto prostoru a jejich konvergenci. Bodová konvergence je zobecněním konvergence v $\mathbb{R}^r$. *Bodová konvergence posloupnosti funkcí* (f_n), $f_n: M \longrightarrow \mathbb{R}$, je konvergence posloupnosti $\big(f_n(x)\big)$ v $\mathbb{R}$, v každém pevně zvoleném $x \in M$. Bodová limita posloupnosti spojitých funkcí (f_n) (pokud existuje) nemusí být spojitá funkce. Běžná topologii v prostoru $\mathsf{C}(M)$ je dána tzv. stejnoměrnou konvergencí. Říkáme, že (f_n) v $\mathsf{C}(M)$ *konverguje k funkci f stejnoměrně*, jakmile $\sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ pro $n \to \infty$. Stejnoměrně konvergentní posloupnost spojitých funkcí má za limitu spojitou funkci.

1.5 Struktura měřitelnosti

Postupným zobecňováním pojmu součtu z konečného na nekonečný počet sčítanců dospějeme k pojmům nekonečná řada a integrál. Spočetně nekonečné soubory sčítanců vytváří nekonečné řady, nespočetné vedou k pojmu integrálu. Postupnou abstrakcí pojmu integrál přejdeme k integrálům funkcí (zobrazení) v abstraktních měřitelných prostorech. Pravděpodobnostní prostor je důležitým speciálním případem měřitelného prostoru.

1.5.1 Neprázdný systém $\mathcal{M}$ podmnožin jisté neprázdné množiny M se nazývá *σ-algebra na množině M* , splňuje-li následující vlastnosti:

(i) $M \in \mathcal{M}$.

(ii) Je-li $A \in \mathcal{M}$, je také $M - A \in \mathcal{M}$.

(iii) Pro každou posloupnost (A_n) množin v $\mathcal{M}$ je také $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Prostor M se strukturou *σ-algebry* se nazývá *měřitelný prostor.* Prvky *σ-algebry* $\mathcal{M}$ nazýváme *měřitelné množiny.*

Z vlastností operací množinové algebry plyne, že *σ-algebra* obsahuje $\emptyset$, konečná sjednocení, konečné i spočetné průniky svých prvků. Jedná se o uspořádanou množinu s minimálním prvkem $\emptyset$ a maximálním prvkem M. Největší *σ-algebra* je $\exp M$, nejmenší obsahuje pouze množiny M a $\emptyset$. Pro každý systém podmnožin $S \subset \exp M$ existuje nejmenší

σ-algebra obsahující systém *S*. Je to průnik všech *σ-algeber*, které obsahují *S*. Je-li speciálně *M* topologický prostor, pak nejmenší *σ-algebra* obsahující systém všech otevřených množin v *M* se nazývá *σ-algebra borelovských množin*, budeme ji značit $\mathcal{B}$. Borelovskými množinami jsou tedy např. všechny otevřené množiny, dále množiny uzavřené, spočetná sjednocení uzavřených množin (označovaná jako množiny typu F_σ) a spočetné průniky otevřených množin (tzv. množiny typu G_δ).

Prostor *M* se *σ-algebrou* $\mathcal{M}$ dále opatříme funkcí $\mu: \mathcal{M} \to \langle 0, \infty \rangle$, přičemž budeme požadovat

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{1.16}$$

pro libovolnou posloupnost (A_n) navzájem disjunktních množin v $\mathcal{M}$. Funkci μ nazveme *míra na prostoru M*. Vlastnost (1.16) se nazývá *σ-aditivita míry*. Je-li $S \in \mathcal{M}$, pak číslo $\mu(S)$ nazýváme mírou množiny *S*. Prostor *M* se strukturou *σ*-algebry a s mírou se nazývá *měřitelný prostor s mírou* a někdy se označuje jako trojice $(M, \mathcal{M}, \mu)$.

Předpoklad nezápornosti míry někdy opouštíme (komplexní míry nabývají hodnot komplexních čísel.)

Míra má řadu vlastností, jako jsou monotonie nebo spojitost vzhledem ke spočetným sjednocením, resp. průnikům.

1.5.2 Příkladem míry je tzv *.aritmetická míra.* Pro libovolnou množinu $S \subset M$ je $\mu(S) = |S|$ (počet prvků množiny *S*) nebo $\mu(S) = \infty$, je-li *S* nekonečná množina. Jiným příkladem je tzv. *Diracova míra*: uvažujme pevně zvolený bod $a \in M$ a definujme $\mu(S) = 1$ pro libovolnou množinu $S \subset M$, pro kterou je $a \in S$; v opačném případě položíme $\mu(S) = 0$.

Jiným velmi důležitým příkladem míry je *Lebesgueova míra* v $\mathbb{R}^n$. Tato míra zobecňuje pojmy jako délka, obsah, objem. Její konstrukce není zcela triviální (viz např. Sikorski, 1973, str.270.) Mezi množiny měřitelné v Lebesgueově smyslu patří všechny borelovské množiny v $\mathbb{R}^n$ (se standardní topologickou strukturou, viz. 1.4.3), tj. např. otevřené a uzavřené množiny v $\mathbb{R}^n$, množiny typu F_σ i G_δ. Přestože *σ*-algebra Lebesgueovsky měřitelných množin je velmi rozsáhlá, je známo, že existují v $\mathbb{R}^n$ množiny, které Lebesgueovsky měřitelné nejsou.

Základem teorie pravděpodobnosti je Kolmogorovův axiomatický systém, ve kterém je vytyčen pojem *pravděpodobnostního prostoru*. Jde fakticky o měřitelný prostor, kde míra se nazývá *pravděpodobnostní míra*. Jedná se o míru s hodnotami v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Měřitelné množiny se v tomto kontextu nazývají *náhodné jevy*. Podrobně je o těchto věcech pojednáno např. v Rényi, 1972, str. 13-42. Každou konečnou míru lze normovat na pravděpodobnostní míru. Diracova míra je zřejmě pravděpodobnostní míra.

1.5.3 Analogií pojmu spojité zobrazení v topologických prostorech je ve struktuře měřitelnosti pojem měřitelného zobrazení. Je-li M měřitelný prostor a N topologický prostor, na němž budeme uvažovat σ-algebru borelovských množin $\mathcal{B}$, pak zobrazení (1.1) se nazývá *měřitelné zobrazení*, jestliže pro každou množinu $V \in \mathcal{B}$ platí, že $F^{-1}(V) \in \mathcal{M}$, tj. vzor libovolné borelovské množiny (viz (1.1.2) je měřitelná množina v M.

Speciálním případem jsou měřitelné funkce $f: M \to \mathbb{R}$. σ-algebru $\mathcal{B}$ lze vytvořit nad systémem intervalů tvaru $(-\infty, a), a \in \mathbb{R}$ a pro definici měřitelnosti funkce pak stačí měřitelnost vzoru každého takového intervalu ve funkci f. Speciálně v teorii pravděpodobnosti říkáme měřitelným funkcím *náhodné veličiny*. V teorii pravděpodobnosti je zvykem značit náhodné veličiny X, Y apod. Je-li $f: M \to \mathbb{R}^n$, na $\mathbb{R}^n$ standardní topologie a σ-algebra Borelovských množin, M pravděpodobnostní prostor, hovoříme o měřitelném zobrazení f jako o *náhodném vektoru*.

Je-li $G[F]$ superpozice zobrazení, kde F je měřitelné zobrazení a G je spojité zobrazení, je tato superpozice měřitelné zobrazení. Jsou-li v (1.1) M a N topologické prostory a F spojité zobrazení, je F zároveň měřitelné vzhledem k σ-algebrám borelovských množin v M, resp. N.

1.5.4 Od pojmu měřitelná funkce vede přímá cesta k pojmu integrálu, tj. k zobecnění součtu. Teorie abstraktního Lebesgueova integrálu je popsána např. v Sikorski, 1973, str.283-312. V teorii pravděpodobnosti definujeme pomocí tohoto integrálu základní charakteristiky náhodných veličin. Jako příklad uveďme pojem střední hodnoty náhodné veličiny X (definované na pravděpodobnostním prostoru M s pravděpodobnostní mírou π):

$$EX = \int_M X d\pi. \tag{1.17}$$

Uvážíme-li distribuční funkci náhodné veličiny X, tj. funkci $F: \mathbb{R} \to \langle 0,1 \rangle$ definovanou rovností $F(x) = \pi\left(X^{-1}(-\infty, x)\right)$, lze (1.17) přepsat do tvaru

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

jak plyne z věty o substituci v integrálu (viz např. Sikorski, 1973, str. 337).

1.5.5 Zvláštní význam mají množiny míry 0. V měřitelných prostorech znamená rčení „*vlastnost* $\propto$ *platí skoro všude (skoro jistě) v prostoru* M“, že množina $S \subset M$, kde tato vlastnost neplatí, je míry 0 (jedná se o jev nemožný). Příkladem takové vlastnosti může být rovnost na množině měřitelných funkcí: jsou-li f a g měřitelné funkce (definované v M), pak za předpokladu, že $\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0$, říkáme, že $f = g$ skoro všude (zkratka s.v.) (vzhledem k μ), v teorii pravděpodobnosti skoro jistě (zkratka s.j.). Uvedená relace je relace ekvivalence na množině měřitelných funkcí. Označíme-li symbolem $L_1(\mu)$ (viz také 2.1.5) prostor funkcí, jehož prvky jsou funkce, pro které $\int_M |f|\, d\mu < \infty$, je relace $f \sim g$, právě když $f = g$ s.v., relací ekvivalence na prostoru $L_1(\mu)$.

1.5.6 V teorii pravděpodobnosti se setkáváme s různými druhy konvergencí posloupností náhodných veličin. *Konvergence podle kvadratického středu* je konvergencí v prostoru $L_2(\mu)$ (viz 2.1.5) funkcí, pro které $\int_M |f|^2\, d\mu < \infty$ (μ je pravděpodobnostní míra). Tato konvergence implikuje *konvergenci podle středu*, tj. v $L_1(\mu)$. Konvergence, která se vyskytuje v souvislosti se zákony velkých čísel, tj. *konvergence podle pravděpodobnosti*, plyne z obou předchozích typů konvergence. Nejslabší konvergencí je *konvergence podle distribuce*. Bodová konvergence skoro jistě implikuje konvergenci v pravděpodobnosti. Podrobnosti lze nalézt např. v Rényi, 1972, str. 318 a 334.

Kapitola II

Elementy funkcionální analýzy

Podobně jako kapitola I je i kapitola II podpůrnou kapitolou celé práce. V této kapitole uvedeme základní koncepty a výsledky lineární funkcionální analýzy. Budeme se zabývat jednak prostory, které nás budou provázet v posledních dvou kapitolách, tj. Banachovým a Hilbertovým prostorem, jednak zobrazeními definovanými a majícími hodnoty v těchto prostorech. Ta se ve funkcionální analýze označují jako operátory nebo funkcionály. V některých případech si uvedeme i důkazy vět, abychom si připomněli postupy a způsoby uvažování, které se v této oblasti používají. Půjde, stejně jako v kapitole I, o výběr látky relevantní z hlediska další aplikace. Pokud jde o literaturu, možnými zdroji pro další podrobnější studium jsou např. Taylor, 1973, Lukeš, 2012, Marek, Žitný 1983.

2.1 Normované lineární prostory

Spojením struktury topologie definované v 1.4 a struktury linearity definované v 1.3 vzniká struktura, kterou označujeme jako topologický lineární prostor. Aby toto spojení struktur mělo význam, je třeba zajistit jisté vztahy mezi oběma strukturami. Jde o požadavek, aby obě operace struktury linearity, tj. sčítání vektorů a skalární násobek vektoru, byly spojité.

V příkladech, které jsme uvedli v 1.4.3 a 1.4.4 hrála důležitou roli absolutní hodnota reálného čísla. Tento pojem lze zobecnit pojmem norma vektoru. Pomocí normy vektoru je definována topologie na daném lineárním prostoru, tzv. normová topologie. Hovoříme pak o normovaném lineárním prostoru. Tělesem skalárů T bude v celé této kapitole těleso reálných nebo komplexních čísel. V některých případech bude důležité, které z těchto dvou těles máme na mysli a pak budeme hovořit o reálném, resp. komplexním prostoru. Konvergence cauchyovských posloupností v topologickém (normovaném) lineárním prostoru je vítanou vlastností; jsou-li cauchyovské posloupnosti konvergentní v daném prostoru, hovoříme o úplném topologickém (normovaném) lineárním prostoru. Předmětem analýzy jsou dále zobrazení s definičním oborem i cílovým prostorem s uvedenou strukturou, zejména lineární a spojitá (viz 1.3.3 a 1.4.2).

2.1.1 *Normovaným lineárním prostorem* (NLP) rozumíme lineární prostor M (nad tělesem T), na němž je definována funkce $\|.\|: M \to \langle 0,\infty)$ s těmito vlastnostmi:

(i) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ pro libovolné $u, v \in M$.

(ii) $\|cu\| = |c|\|u\|$ pro libovolné $c \in T$ a $u \in M$.

(iii) $\|u\| = 0 \Longrightarrow u = o$ pro libovolné $u \in M$.

Nezáporná funkce $\|.\|$ je tzv. *norma vektoru u.* Vlastnost (i) je tzv. *trojúhelníková nerovnost*. Vlastnost (iii) říká, že jediným vektorem s nulovou normou je nulový vektor prostoru M.

Snadno lze ukázat pomocí vlastnosti (i), že norma je spojitou funkcí na prostoru M a také že sčítání vektorů je spojité zobrazení $M \times M \to M$ a z vlastností (i) a (ii), že skalární násobek vektoru je spojité zobrazení $T \times M \to M$. NLP je speciálním případem topologického lineárního prostoru. Konvergence posloupnosti (x_n) v M k bodu $a \in M$, symbolicky $x_n \to a$, je ekvivalentní s konvergencí $\|x_n - a\| \to 0$ (v tělese T).

Důležitými podmnožinami NLP jsou sféry, resp. koule se středem v daném bodě: $S = \{x: x \in M, \|x-u\| = r\}$ je *sféra se středem v bodě u a poloměrem* $r > 0$, $K = \{x: x \in M, \|x-u\| < r\}$ je *(otevřená) koule se středem v bodě u a poloměrem* $r > 0$. Množina $U \subset M$ je omezená, je-li $U \subset K$ pro nějakou kouli K se středem v počátku (nulovém vektoru). Je-li U libovolná podmnožina v NLP M, pak existuje nejmenší lineární podprostor prostoru M obsahující množinu U, který je zároveň uzavřenou množinou v M. Nazýváme ho *uzavřeným lineárním obalem množiny U* a značíme $\overline{[\![U]\!]}$.

2.1.2. Zobrazení

$$A: M \to N, \tag{2.1}$$

kde M a N jsou NLP, se nazývá operátor. Hodnotu operátoru v bodě x budeme označovat Ax. Předmětem našeho zájmu budou takové operátory, které jsou svázány s uvažovanou strukturou, tj. lineární a spojité. Struktura linearity je natolik silná, že platí toto tvrzení:

Je-li (2.1) lineární operátor, je A spojitý buď v každém bodě prostoru M anebo v žádném jeho bodě. A je spojitý v M, právě když existuje konstanta C tak, že pro libovolné $x \in M$ platí

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \tag{2.2}$$

Na jednotkové kouli, resp. jednotkové sféře v NLP M je $\|Ax\| \leq C$. Platí však i obráceně: existuje-li konstanta C tak, že $\|Ax\| \leq C$ na jednotkové kouli (sféře) v NLP M, pak platí (2.2) pro každé $x \in M$. Nejmenší taková konstanta C (zřejmě nezáporná), pro kterou platí (2.2) se nazývá *norma operátoru* a značíme ji $\|A\|$. Normu operátoru A lze vyjádřit těmito rovnostmi:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq o} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} . \tag{2.3}$$

Spojitý lineární operátor tedy zobrazuje kouli o poloměru r do koule o poloměru $r\|A\|$, tj. omezené množiny zobrazuje na omezené množiny. Platí však i obráceně: je-li A lineární operátor zobrazující omezené množiny na omezené množiny, jedná se o spojitý lineární operátor. To je také důvod, proč se místo spojitý (lineární) operátor používá označení *omezený (lineární) operátor*.

Lineární operátor A má spojitý inverzní operátor (definovaný v oboru hodnot $\mathcal{R}(A)$), právě když existuje konstanta $c > 0$ taková, že $c\|x\| \leq \|Ax\|$ pro každé $x \in M$. Pro normu inverzního operátoru A^{-1} platí $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$.

Je-li operátor (2.1) lineární izomofismus NLP M a N a je-li navíc spojitý, nemusí inverzní operátor (který je také lineárním izomorfismem, viz 1.3.3) být spojitý (viz 1.4.2). Pokud spojitý je, říkáme, že NLP M a N jsou *lineárně homeomorfní*. Platí tedy, že NLP M a N jsou lineárně homeomorfní, právě když existuje lineární izomorfismus (2.1) a kladné konstanty c, C takové, že

$$c\|x\| \leq \|Ax\| \leq C\|x\| \tag{2.4}$$

pro libovolné $x \in M$. Všimněme si, že označení pro normu je totožné pro vzory i obrazy. Přitom obecně jde o různé normy v obecně různých prostorech ($M \neq N$ anebo $M = N$, ale normy mohou být různé). V každém případě, je-li A identita na M, přičemž definiční obor M je NLP s normou $\|.\|_1$ a obor hodnot je NLP M s normou $\|.\|_2$, pak (2.4) má tvar

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1. \tag{2.5}$$

Platí-li (2.5), pak konvergence v jedné normě implikuje konvergenci v druhé normě a naopak. V takovém případě říkáme, že normy v prostoru M jsou *ekvivalentní normy*. Ekvivalentní normy generují na lineárním prostoru ekvivalentní topologie.

Věta o ekvivalenci norem v prostorech konečné dimenze. NLP stejné konečné dimenze jsou lineárně homeomorfní. Všechny normy v NLP konečné dimenze jsou ekvivalentní.

Speciálním, a velice významným, případem lineárního homeomorfismu je lineární izometrie. Je-li (2.1) lineární izomorfismus a je-li navíc $\|Ax\| = \|x\|$, říkáme, že A je *izometrie* nebo také, že NLP M a N jsou *izometrické prostory*. V tomto případě je zřejmě $\|A\| = 1$.

2.1.3 Přestože výsledky funkcionální analýzy jsou zajímavé především z hlediska prostorů nekonečné dimenze, nelze prostory konečné dimenze opomenout. Prostory konečné dimenze nás vedou k úvahám o analogiích určitých pojmů a vlastností v prostorech nekonečné dimenze. Faktem zůstává, že řadu věcí nelze jednoduše přenést a přechodem k nekonečné dimenzi určité vlastnosti ztrácíme. Typickým příkladem je věta o ekvivalenci norem uvedená v předchozím odstavci. Uveďme další tvrzení, specifická pro prostory konečné dimenze:

- A) NLP konečné dimenze je úplný a separabilní.
- B) Každý podprostor konečné dimenze libovolného NLP je uzavřený.
- C) V NLP konečné dimenze je každá uzavřená a omezená množina kompaktní. Také obráceně, je-li v NLP každá uzavřená a omezená množina kompaktní, je NLP konečně dimenzionální. Speciálně platí: jednotková sféra v NLP je kompaktní, právě když NLP je konečně dimenzionální.

Typické příklady NLP konečné dimenze uvedeme v 2.1.5.

2.1.4 Úplnost NLP je jedním ze základních požadavků na NLP ve funkcionální analýze. Bez předpokladu úplnosti prostoru by neplatila tvrzení představující pilíře lineární funkcionální analýzy: Banachova věta o pevném bodu, věta o otevřeném zobrazení, věta o uzavřeném grafu, Banachův-Steinhausův princip stejnoměrné omezenosti a mnoho dalších tvrzení. Úplnost prostoru je pojem, se kterým se setkáváme v základní podobě u reálných čísel.

NLP M se nazývá *úplný* nebo také *Banachův prostor*, pokud každá cauchyovská posloupnost obsažená v prostoru M je v tomto prostoru konvergentní. Posloupnost (x_n) v M se nazývá *cauchyovská posloupnost*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna $m, n \geq n_0$ platí, že $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Každý NLP je možné zúplnit tím způsobem, že k němu přidáme nové „ideální“ prvky tak, abychom zajistili konvergenci cauchyovských posloupností. Podrobně lze tuto konstrukci

nalézt např. v Taylor, 1973, str.104, str.82. Původní prostor lze pak chápat jako podprostor jeho úplného obalu, v němž je původní prostor hustou množinou. Jedná se o analogii zúplnění množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$ vzhledem k normě-absolutní hodnotě, kdy dostaneme obor reálných čísel $\mathbb{R}$. Nově přidané ideální prvky jsou v tomto případě iracionální čísla. V oboru reálných (komplexních) čísel jsou všechny cauchyovské posloupnosti konvergentní.

V NLP vyšetřujeme nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Obdobou kritéria absolutní konvergence číselné řady je toto tvrzení:

Absolutní konveregence v Banachově prostoru: Platí-li pro posloupnost (x_n) v Banachově prostoru M, že $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje v M, tj. existuje $x \in M$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Na závěr ještě uveďme tyto vlastnosti Banachových prostorů:

- A) Uzavřený lineární podprostor Banachova prostoru je Banachův prostor.
- B) Podprostor Banachova prostoru, který je v tomto prostoru hustý, ale není s ním totožný, není Banachův prostor.

2.1.5 V tomto odstavci uvedeme několik významných příkladů NLP. Jak uvidíme, většina z nich jsou Banachovy prostory, některé jsou dokonce separabilní (viz 1.4.1).

Začněme nejprve s prostory konečné dimenze. V odstavci 1.3.2 jsme uvedli, že každý lineární prostor dimenze r je lineárně izomorfní s aritmetickým prostorem V_r , jehož prvky jsou uspořádané r-tice skalárů $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, v našem případě reálných, resp. komplexních čísel, tj. $V_r = \mathbb{R}^r$, resp. $\mathbb{C}^r$. Normu ve V_r zavedeme následujícím způsobem: pro libovolné $p \geq 1$ označíme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{r} |x_i|^p\right)^{1/p}. \tag{2.6}$$

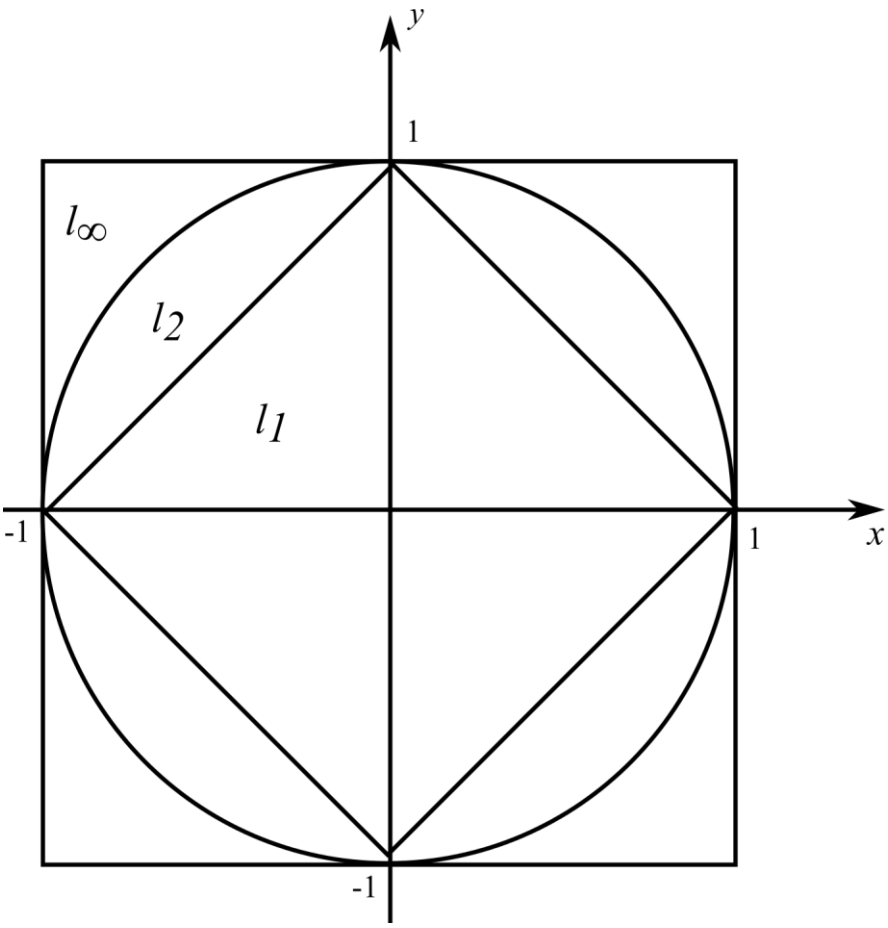
Skutečnost, že (2.6) je opravdu norma plyne z tzv. Minkowského nerovnosti pro konečné součty:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{r} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{r} |y_i|^p\right)^{1/p}. \tag{2.7}$$

Nerovnost (2.7) je vlastně trojúhelníková nerovnost pro funkci (2.6) (podrobně viz např.Taylor, 1973, str. 20). Ostatní vlastnosti normy z definice 2.1.1 lze snadno ověřit. Prostor V_r s normou (2.6) je NLP, označovaný symbolem $\ell_p(r)$. Povšimněme si, že pro $p = 2$ jde o dobře známý eukleidovský prostor $\mathbb{R}^r$. Normu lze ve V_r definovat také rovností

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,r} |x_i|. \tag{2.8}$$

Prostor s takto definovanou normou budeme značit $\ell_\infty(r)$. Důvod pro označení této normy indexem ∞ vyplývá z faktu, že $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$. Na obr. 2 jsou znázorněny jednotkové sféry prostorů $\ell_p(2)$ (nad tělesem reálných čísel) pro $p = 1, p = 2, p = \infty$.



Obr.2 Jednotkové sféry v $\ell_p(2)$ pro $p = 1; 2; \infty$

Všechny normy (2.6) a (2.8) jsou ekvivalentní, jak bylo zmíněno v 2.1.2.

V 1.3.4 je v souvislosti s lineárními diferenčními rovnicemi zmíněn lineární prostor (nekonečných) posloupností skalárů V_∞ (zde $V_\infty = \mathbb{R}^\infty$, resp. $V_\infty = \mathbb{C}^\infty$). V tomto prostoru lze zavést normu analogickým způsobem k (2.6), resp. (2.8). Podstatný rozdíl je v tom, že součet, resp. maximum nekonečně mnoha čísel nemusí existovat. Nelze tedy obecně uvažovat všechny prvky prostoru V_∞. Prostor $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ je prostor posloupností $x = (x_n) \in V_\infty$, pro které je

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty. \tag{2.9}$$

Funkce (2.9) je norma, jak plyne z Minkowského nerovnosti pro nekonečné řady (v (2.7) změníme horní mez sumy na ∞). Prostor ℓ_∞ je prostor posloupností $x = (x_n) \in V_\infty$, pro které je

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty. \tag{2.10}$$

Lze dokázat (viz např. Taylor, 1973, str. 105), že prostory $\ell_p, p \in \langle 1, \infty\rangle$ jsou Banachovy, dokonce se jedná o prostory separabilní s výjimkou prostoru ℓ_∞, který separabilní není. Důkaz úplnosti pro prostor ℓ_p, jehož prvky jsou posloupnosti s nikoli skalárními členy je uveden v kapitole III. Povšimněme si, že NLP $\ell_p(r)$, $r \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$ jsou lineárně izometrické s podprostory $Л_r$ prostoru ℓ_p, jejichž prvky jsou tvaru $(x_1, \dots, x_r, 0,0, \dots)$. Prostory $Л_r$ jsou uzavřené (a tedy úplné) podprostory prostoru ℓ_p. Jejich sjednocení $c_{00} = \bigcup_{r=1}^{\infty} Л_r$ je podprostor prostoru ℓ_p sestávající z těch posloupností, které mají jen konečný počet nenulových členů. Úzávěr tohoto podprostoru je celý prostor ℓ_p, neboť pro libovolnou posloupnost $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p$ platí, že posloupnost $x^{(r)} = (x_1, \dots, x_r, 0,0, \dots) \to x$ (v ℓ_p), jakmile $r \to \infty$, nicméně prvek x nemá obecně jen konečný počet nenulových členů. To znamená, že prostor c_{00} není uzavřený v ℓ_p a tedy ani úplný (viz tvrzení B na konci 2.1.4).

Tzv. Jensenova nerovnost (viz Taylor, 1973, str. 20) říká, že platí implikace $1 \leq p < q \leq \infty \Longrightarrow \|x\|_p \geq \|x\|_q$ a tedy $\ell_p \subset \ell_q$, jinými slovy prostory $\ell_p, p \in \langle 1, \infty\rangle$ tvoří lineárně uspořádanou množinu vzhledem k inkluzi s minimálním prvkem ℓ_1 a maximálním prvkem ℓ_∞.

Uvažujme měřitelný prostor s mírou $(M, \mathcal{M}, \mu)$ (viz 1.5.1) a reálné číslo $p \geq 1$. Na množině všech funkcí $f: M \to T$, kde $T = \mathbb{R}$, resp. $T = \mathbb{C}$, pro které integrál

$$\|f\|_p = \int_M |f|^p d\mu^{1/p} \tag{2.11a}$$

nabývá konečné hodnoty, uvažujeme relaci ekvivalence: $f \sim g$, právě když $f(x) = g(x)$ s.v. v M (viz 1.5.5). Lineární prostor, jehož prvky jsou třídy ekvivalentních funkcí, je s (2.11a) NLP. Tento prostor označujeme symbolem $L_p(M, \mu)$. Funkce (2.11a) je norma v tomto prostoru. Trojúhelníková nerovnost je tzv. Minkowského nerovnost pro integrály (Taylor, 1973, str. 20). Lze také uvažovat prostor, jehož prvky jsou třídy ekvivalence funkcí omezených skoro všude v M. V takovém případě má množina všech konstant $C = \sup_{t \in M-E} |f(t)|$, kde $\mu(E) = 0$, infimum a toto infimum nazýváme *esenciálním supremem* funkce f v M:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{essup}_{t \in M} |f(t)| = \inf_{E \subset M, \mu(E)=0} \sup_{t \in M-E} |f(t)| < \infty. \tag{2.11b}$$

Jedná se o NLP s normou (2.11b), který značíme $L_\infty(M, \mu)$.

Běžně se při označení těchto prostorů vypouští ze závorky symbol M nebo μ, je-li ze souvislosti zřejmé, o jaký prostor či míru se jedná. Prostory L_p pro $p \in \langle 1, \infty)$ jsou úplné a separabilní, (stejně, jako v případě prostorů ℓ_p), prostor L_∞ je úplný, není však separabilní (stejně jako ℓ_∞). Prostory L_p, $p \in \langle 1, \infty\rangle$ zahrnují jako speciální případ prostory $\ell_p(r)$, resp. ℓ_p, ve kterých za množinu M bereme množinu $\{k \in \mathbb{N}: k \leq r\}$, resp. $\mathbb{N}$ a μ je aritmetická míra na $\mathcal{M} = \exp M$ (viz 1.5.2).

V případě, že μ je pravděpodobnostní míra (viz (1.5.6)), tvoří prostory $L_p(\mu), 1 \leq p \leq \infty$ vzhledem k inkluzi lineárně uspořádanou množinu s maximálním prvkem $L_1(\mu)$ a minimálním prvkem $L_\infty(\mu)$. Konvergence podle kvadratického středu, tj. konvergence v $L_2(\mu)$, implikuje konvergenci podle středu, tj. konvergenci v $L_1(\mu)$ (viz 1.5.6), opačná implikace však neplatí.

Je-li S libovolná neprázdná množina, označujeme symbolem $\mathcal{B}(S)$ množinu všech reálných (komplexních) funkcí, které jsou omezené v S, tj. $\sup_{t \in S} |f(t)| < \infty$. Lze ukázat, že $\mathcal{B}(S)$ je NLP s normou

$$\|f\| = \sup_{t \in S} |f(t)| \ . \tag{2.12}$$

Je-li M topologický prostor, pak podprostorem prostoru $\mathcal{B}(M)$ je prostor spojitých omezených funkcí v M, značíme ho $\mathsf{C}(M)$. Konvergence odvozená z normy (2.12) je stejnoměrná konvergence (viz 1.4.4). Z klasické matematické analýzy je známo, že stejnoměrná limita posloupnosti spojitých funkcí je spojitá funkce, a proto je $\mathsf{C}(M)$ uzavřený podprostor prostoru $\mathcal{B}(M)$. Prostor $\mathcal{B}(M)$ je Banachův a z uzavřenosti $\mathsf{C}(M)$ v $\mathcal{B}(M)$ plyne (viz tvrzení A na konci 2.1.4), že i $\mathsf{C}(M)$ je Banachův. Je-li M nějaký kompaktní interval na reálné ose, je prostor $\mathsf{C}(M)$ je separabilní. To plyne ze známé Weierstrassovy věty o aproximaci spojité funkce v kompaktním intervalu polynomy. Prostor $\mathsf{C}(M)$ je, za předpokladu, že M je kompaktní měřitelný prostor s mírou μ, hustou množinou v $L_p(M,\mu), 1 \leq p < \infty$, v topologii dané normou (2.11a.). V této topologii není prostor $\mathsf{C}(M)$ uzavřený, tj. není to Banachův prostor. Prostor $\mathsf{C}_0(M)$ všech funkcí spojitých v M, majících v M kompaktní nosič (tj. uzávěr množiny bodů v M, v nichž funkce nabývá nenulových hodnot je kompaktní podmnožinou v M) je hustou množinou v $L_p(M,\mu), 1 \leq p < \infty$ (např. Rudin, 1977, str. 82).

2.2 Unitární prostory

Strukturu linearity tak, jak byla definována v odst. 1.3 lze doplnit dalším zobrazením (funkcí), tzv. skalárním součinem vektorů. Jak je známo z modelové situace eukleidovského prostoru, lze pomocí skalárního součinu vektorů zachytit významné geometrické vlastnosti vektorů jako jsou délka a kolmost. Délka vektoru je jiný název pro normu vektoru. Lineární prostor se skalárním součinem je NLP a nazývá se unitárním prostorem. Je-li navíc úplný, vzhledem k normě odvozené ze skalárního součinu, označuje se jako Hilbertův prostor. Konečně dimenzionální prostor se skalárním součinem se někdy nazývá eukleidovský, někteří autoři ho ovšem rovněž označují jako Hilbertův. Hilbertův prostor dimenze r je izometricky izomorfní s prostorem $\ell_2(r)$. Také platí, že každý nekonečně dimenzionální separabilní Hilbertův prostor je izometricky izomorfní prostoru ℓ_2 (viz (2.9), $p = 2$). Separabilní Hilbertovy prostory jsou pro aplikace v teorii stochastických procesů nejvýznamnější (viz kapitola III). Není-li prostor se skalárním součinem úplný, lze ho vždy zúplnit jako NLP.

2.2.1. Je-li M lineární prostor (nad tělesem T), pak funkci $(.,.): M \times M \to T$ nazýváme *skalárním součinem na prostoru M*, pokud platí pro všechna $x, y, z \in M, c \in T$:

(i) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

(ii) $(cx, y) = c(x, y)$.

(iii) $(x, y) = (y, x)$.

(iv) $(x, x) \geq 0$ a $(x, x) = 0 \Rightarrow x = o$.

V případě tělesa komplexních čísel je podmínka (iii) nahrazena podmínkou $(x, y) = \overline{(y, x)}$, kde horní pruh znamená komplexní sdruženost. Vlastnosti (i) a (ii) znamenají propojení skalárního součinu se strukturou linearity prostoru *M*. Vlastnost (iii) znamená symetrii (v případě komplexních skalárů hermitovskou symetrii) a vlastnost (iv) nezápornost (dokonce v nenulových vektorech kladnost) skalárního součinu. Uvedené podmínky implikují, že skalární součin je aditivní a homogenní funkce i v druhé souřadnici (v případě komplexních skalárů $(x, cy) = \bar{c}(x, y)$). Lineární prostor se skalárním součinem se nazývá *unitární prostor*.

Unitární prostor je NLP, neboť funkce

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{2.13}$$

splňuje vlastnosti normy (viz 2.1.1). Trojúhelníková nerovnost plyne z tzv. Schwarzovy nerovnosti:

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|. \tag{2.14}$$

Rovnost v (2.14) nastává, právě když jsou vektory *x* a *y* lineárně závislé (Taylor, 1973, str. 112). Unitární prostor s normou (2.13) je tedy NLP. Je-li tento prostor úplný vzhledem k (2.13), nazývá se *Hilbertův prostor.*

2.2.2. Říkáme, že vektory *x* a *y* jsou *ortogonální*, jestliže $(x, y) = 0$. Ortogonalita je symetrická relace. Nulový vektor je ortogonální ke každému vektoru.

Ortogonální skupina vektorů je taková skupinu vektorů $v_1, v_2, \dots, v_m$ (viz (1.4)), pro kterou $(v_i, v_j) = 0$, jakmile $i \neq j$. Speciálním případem ortogonální skupiny je *ortonormální skupina vektorů*; pro její vektory navíc platí $\|v_i\| = 1, i = 1, \dots, m$. Ortonormální skupiny vektorů jsou lineárně nezávislé.

V prostorech nekonečné dimenze pracujeme s posloupnostmi vektorů $v_1, v_2, \ldots$ nebo dokonce obecněji se systémy vektorů libovolné mohutnosti. Systém (množina) $S \subset M$ se nazývá lineárně nezávislý, jestliže každá (konečná) skupina vektorů vybraných z tohoto systému je lineárně nezávislá (viz 1.3.1). Množina $S \subset M$ se nazývá *ortogonální systém*, platí-li $(x, y) = 0$ pro libovolné dva navzájem různé prvky $x, y \in S$. Mají-li navíc všechny prvky S jednotkovou normu říkáme, že S je *ortonormální systém.* Ortonormální systém S je lineárně nezávislý. Obráceně, každý konečný nebo spočetně nekonečný lineárně nezávislý systém je možno převést na ortonormální systém, přičemž lineární obaly těchto systémů (tj. množiny všech vektorů tvaru (1.5), kde (1.4) je libovolná skupina obsažená v daném lineárně nezávislém systému) jsou stejné. Postup, kterým lze tuto transformaci realizovat je tzv. Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces (např. Taylor, 1973, str. 120). V separabilních prostorech jsou všechny ortonormální systémy nejvýše spočetné.

Důležitou roli hrají tzv. úplné ortonormální systémy. Každá podmnožina ortonormálního systému tvoří ortonormální systém. *Úplný ortonormální systém*.je takový, který není vlastní částí jiného ortonormálního systému. Existence těchto úplných ortonormálních systémů vyplývá v obecném případě z axiomu výběru (viz 1.2.8). Pro prostory konečné dimenze ovšem stačí Gramův-Schmidtův proces. Ten z libovolné báze takového prostoru vyrobí ortonormální bázi tohoto prostoru. Pro unitární prostory nekonečné dimenze je vítanou vlastností jejich separabilita. Existence (spočetného) úplného ortonormálního systému v takovém prostoru s vlastností, že uzavřený lineární obal tohoto systému je celý prostor, se dokáže tak, že se nejprve vyrobí spočetný lineárně nezávislý systém z prvků spočetné husté množiny v tomto prostoru a na ni se použije opět Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Někdy se takovým prostorům říká *prostory se spočetnou bází.* Obecně se v unitárních prostorech označují úplné ortonormální systémy jako ortonormální báze těchto prostorů. V daném unitárním prostoru mají každé dvě ortonormální báze stejnou mohutnost, tj. existuje bijekce jedné na druhou (viz 1.1.2), což je jistá analogie tvrzení o délce báze v prostoru konečné dimenze (viz 1.3.2).

Je-li S nějaký ortonormální systém (nikoli nutně úplný) v prostoru M, vzniká otázka, zda lze prvek $x \in M$ vyjádřit jako (zobecněnou) lineární kombinaci vektorů tohoto systému. Platí toto tvrzení:

Věta o ortogonální projekci. Je-li S ortonormální systém v M (pro nekonečný systém S předpokládáme, že M je Hilbertův prostor), pak pro každé $x \in M$ existuje jediný prvek

$$x_S = \sum_{u \in S} (x, u) u \in \overline{[\![S]\!]} \tag{2.15}$$

zvaný *ortogonální projekce* prvku x na uzavřený podprostor $\overline{[\![S]\!]}$. Výraz na pravé straně v (2.15) je konečný součet nebo nekonečná řada, neboť existuje jen konečně nebo spočetně mnoho prvků $u \in S$, pro které je $(x, u) \neq 0$ a sčítání na pravé straně v (2.15) probíhá právě přes tyto prvky. To vyplývá z tzv. Besselovy nerovnosti (např. Taylor, 1973, str. 119). Název ortogonální projekce vychází z toho, že vektor $x - x_S$ je ortogonální ke všem prvkům $\overline{[\![S]\!]}$. Rovnost $x = x_S$ nastane, právě když $x \in \overline{[\![S]\!]}$.

Předchozí tvrzení se opírá o následující větu, která hraje důležitou roli při zkoumání stacionarity (konvergence) lineárního filtru definovaného v kapitole III:

Věta o rozvoji do Fourierovy řady. Je-li M Hilbertův prostor a (u_n) spočetný (nekonečný) ortonormální systém v M , pak $\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n u_n$ konverguje (v M), právě když skalární posloupnost $(\psi_n) \in \ell_2$. Mezi součtem řady $x = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n u_n$ a koeficienty ψ_n platí vztah $\psi_n = (x, u_n)$. Důkaz tohoto tvrzení je proveden v odstavci 3.4 v kontextu stochastických procesů.

Řada v (2.15) je tzv. *Fourierova řada* prvku x vzhledem k ortonormálnímu systému S a skalární součiny (x, u) jsou *Fourierovy koeficienty* prvku x vzhledem k systému S. Ortonormální systém v Hilbertově prostoru je tedy úplný, právě když pro každý prvek tohoto prostoru platí, že jeho Fourierova řada má za součet právě tento prvek.

2.2.3. Je-li S neprázdná podmnožina unitárního prostoru M, pak *ortogonálním doplňkem množiny* S rozumíme množinu $S^{\perp} = \{x \in M: (x, y) = 0\,, y \in S\}$. Ortogonální doplněk každé neprázdné množiny je uzavřený lineární podprostor prostoru M. Tento prostor je totožný s ortogonálním doplňkem uzavřeného lineárního obalu množiny S.

Věta o rozkladu Hilbertova prostoru. Je-li M Hilbertův prostor a K jeho uzavřený podprostor, pak $M = K \oplus K^{\perp}$, tj. každý prvek $x \in M$ lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru $x = u + v$, kde $u \in K$ a $v \in K^{\perp}$.

Znovu se k této větě vrátíme v odstavci 2.3.6 o projekcích.

2.3 Operátory a funkcionály. Dualita. Projekce.

Pojem lineárního operátoru byl definován již v odstavci 2.1.2. V této části uvedeme některé významné vlastnosti těchto operátorů. Je celkem pochopitelné, že velký význam pro většinu

tvrzení má předpoklad spojitosti lineárního operátoru. Předpoklad úplnosti prostoru, ať již jde o unitární prostor nebo NLP, není vždy nezbytný, nicméně nejzávažnější věty lineární funkcionální analýzy tento předpoklad obsahují. Funkcionály jsou operátory, jejichž definičním oborem je daný NLP a cílovým prostorem je příslušné těleso (reálných či komplexních čísel) uvažované jako NLP (normou je absolutní hodnota). Prostor spojitých lineárních funkcionálů se nazývá duální prostor k danému NLP. V příkladové části si ukážeme, jak vypadají spojité lineární funkcionály a operátory na konkrétních prostorech, zejména ℓ_p, resp. L_p. Značnou pozornost budeme věnovat těmto funkcionálům a operátorům v Hilbertových prostorech. Budeme se také zabývat speciálním typem operátorů, kterému se říká projekce.

2.3.1. Množina všech lineárních operátorů definovaných v lineárním prostoru *M*, s hodnotami v lineárním prostoru *N*, (nad týmž tělesem *T*) tvoří lineární prostor (nad tělesem *T*), definujeme-li pro všechny $x, y \in M, c \in T$

$$(A + B)x = Ax + By, \qquad cAx = Acx.$$

Jsou-li *M* a *N* NLP, tvoří všechny spojité lineární operátory *M* do *N* podprostor tohoto prostoru. Prostor spojitých lineárních operátorů definovaných v prostoru M s hodnotami v prostoru N budeme značit $\mathcal{L}[M, N]$ a pro $M = N$ stručně $\mathcal{L}[M]$. S funkcí (2.3) je $\mathcal{L}[M, N]$ NLP. Pokud je *N* Banachův, je také $\mathcal{L}[M, N]$ Banachův prostor.

S operací skládání zobrazení, kterou zde nazýváme *součin operátorů*,

$$(AB)x = A(Bx), \qquad x \in M,$$

tvoří množina $\mathcal{L}[M]$ semigrupu s jednotkovým prvkem, identitou na *M*. Identický operátor budeme značit *I*. Součin operátorů je svázán s normou (2.3) nerovností $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Dále platí, že $\|I\| = 1$. Na množině $\mathcal{L}[M]$ tak získáváme bohatou strukturu: normovanou algebru operátorů. Je-li *M* úplný, hovoříme o $\mathcal{L}[M]$ jako o *Banachově algebře*.

Topologie vytvořená normou v $\mathcal{L}[M, N]$ je topologie stejnoměrné konvergence. Předpoklad $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$ implikuje $\|A_n x - Ax\| \to 0$ stejnoměrně v jednotkové kouli prostoru M (viz 1.4.4). Jiný typ konvergence je tzv. bodová konvergence posloupnosti operátorů, kdy $\|A_n x - Ax\| \to 0$ pro každé $x \in M$. Slavná Banachova Steinhausova věta, jeden z pilířů lineární funkcionální analýzy, říká, že bodová limita posloupnosti spojitých

lineárních operátorů definovaných v Banachově prostoru s hodnotami v NLP je spojitý lineární operátor.

Nyní si uvedeme důležitou větu, která nás informuje o existenci a vlastnostech inverzních operátorů. Jde o analogii známého vzorce pro součet geometrické řady:

Věta o Neumannově řadě. Je-li M Banachův prostor, $A \in \mathcal{L}[M], \|A\| < 1$, pak pro obor hodnot operátoru $I - A$ platí $\mathcal{R}(I - A) = M$, operátor $(I - A)^{-1}$ existuje a je spojitý (tj. patří do $\mathcal{L}[M]$) a platí rovnost

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \tag{2.16}$$

přičemž konvergence řady na pravé straně je míněna v normě prostoru $\mathcal{L}[M]$. Navíc platí

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{2.17}$$

Důkaz: Položme $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$. Posloupnost (S_n) je zřejmě cauchyovská v prostoru $\mathcal{L}[M]$ a tedy má limitu $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Dále platí, že $AS_n = S_n A = S_{n+1} - I$ a přechodem $n \to \infty$ dostaneme $AS = SA = S - I$, čili $I = (I - A)S = S(I - A)$, tedy platí (2.16). Zbývající nerovnost (2.17) je důsledkem faktu, že $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, trojúhelníkové nerovnosti a vzorce pro součet geometrické číselné řady (s kvocientem $\|A\| < 1$).

Věta o Neumannově řadě, tj. řadě (2.16), nás informuje např. o tom, že v jistém okolí identity se nacházejí pouze invertibilní operátory, tzv. *regulární prvky* Banachovy algebry $\mathcal{L}[M]$. Dalším důsledkem je fakt, že množina $\mathcal{G}$ všech regulárních prvků je otevřená (v $\mathcal{L}[M]$) a zobrazení přiřazující každému operátoru $A \in \mathcal{G}$ operátor $A^{-1} \in \mathcal{G}$ je homeomorfismus (samozřejmě nelineární) na množině $\mathcal{G}$.

Na závěr tohoto odstavce si ještě uvedeme větu, která zdůrazňuje význam předpokladu úplnosti prostoru pro spojitost inverzního operátoru.

Věta (o lineárním homeomorfismu Banachových prostorů). Je-li $A \in \mathcal{L}[M, N]$, kde M a N jsou Banachovy prostory, přičemž $\mathcal{R}(A) = N$ a A^{-1} existuje, pak A^{-1}je spojitý (tj. A je lineární homeomorfismus prostorů M a N).

2.3.2 Některé důležité operátory vyskytující se v souvislosti s obyčejnými i parciálními diferenciálními rovnicemi nejsou spojité. Přitom mají vlastnost, která jistým způsobem spojitost nahrazuje. Jde o tzv. uzavřenost operátoru. Tento pojem lze přirozeně definovat pomocí grafu operátoru. Jsou-li M a N NLP (nad týmž tělesem skalárů) lze kartézský součin $M \times N$ (který je zřejmě lineárním prostorem s operacemi struktury linearity definovanými jako např. v $\mathbb{R}^2$, tj. „po složkách“) normovat:

$$\|(x,y)\| = \|x\|_M + \|y\|_N \text{ pro libovolnou dvojici } (x,y) \in M \times N. \tag{2.18}$$

S normou (2.18) je $M \times N$ Banachův, jsou-li prostory M a N Banachovy. *Grafem operátoru* $A: D \to N, D \subset M$ rozumíme množinu $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax): x \in D\}$. V této definici je tedy operátor A definován na jisté podmnožině D NLP M a nemusí být ani lineární. Naším cílem jsou ovšem lineární operátory a pak D je lineární prostor (podprostor prostoru M, který nemusí být v M uzavřený.) Je-li A lineární operátor, je jeho graf lineárním podprostorem prostoru $M \times N$. *Uzavřený operátor* je takový operátor, jehož graf je uzavřenou množinou (v topologii normy (2.18)).

Kriterium uzavřenosti operátoru. Jsou-li M a N NLP, A operátor s definičním oborem $D \subset M$ a oborem hodnot $\mathcal{R} \subset N$, pak A je uzavřený právě tehdy, když pro každou posloupnost (x_n) v D platí:

$$x_n \to x, Ax_n \to y \implies x \in D, y = Ax. \tag{2.19}$$

Typickým příkladem uzavřeného, nikoli spojitého, operátoru je derivace. Podrobněji, nechť $M = N = \mathrm{C}(0,1)$ (prostor omezených spojitých funkcí v intervalu $(0,1)$ se supremovou normou, viz (2.12)), $D = \mathrm{C}^1(0,1) \subset M$ prostor funkcí majících v intervalu $(0,1)$ spojitou derivaci a A operátor, přiřazující každé funkci $x \in D$ její derivaci, tj. $Ax = x'$. Z klasické věty matematické analýzy (Jarník, 1976, str. 139) plyne uzavřenost operátoru A. Nespojitost A plyne takto: vezmeme funkce $x(t) = t^n$, tj. $\|x\| = 1$. Pak $Ax(t) = nt^{n-1}$, tj. $\|Ax\| = n$. To znamená, že operátor A není ohraničený (tj. není spojitý).

Jiný velice významný případ uzavřených operátorů probereme v odstavci 2.3.5. Jedná se o tzv. samoadjungované operátory.

Jedním z klíčových tvrzení lineární funkcionální analýzy je tzv. věta o uzavřeném grafu. Tuto větu si uvedeme včetně důkazu opírajícím se o větu o lineárním homeomorfismu Banachových prostorů uvedenou na konci předchozího odstavce.

Věta o uzavřeném grafu. Jsou-li M a N Banachovy prostory a $A: M \to N$ uzavřený lineární operátor, pak $A \in \mathcal{L}[M, N]$, neboli A je spojitý.

Důkaz: $M \times N$ je vzhledem k normě (2.18) Banachův, jak jsme již dříve konstatovali. Z předpokladu, že A je uzavřený plyne, že jeho graf $\mathcal{G}(A)$ je Banachův prostor. Definujeme operátor $L: \mathcal{G}(A) \to M$ předpisem $L(x, Ax) = x,\ x \in M$. L^{-1}existuje a $L^{-1}x = (x, Ax)$. Jelikož $\|x\| \leq \|(x, Ax)\|$, je operátor L spojitý a podle věty o lineárním homeomorfismu Banachových prostorů je také L^{-1} spojitý. To znamená, že $\|(x, Ax)\| = \|x\| + \|Ax\| \leq \|L^{-1}\|\|x\|$ neboli $\|Ax\| \leq (\|L^{-1}\| - 1)\|x\|$ a to znamená, že A je spojitý (viz (2.3)).

2.3.3 V odstavci 2.3.1 jsme definovali prostor $\mathcal{L}[M, N]$. Zvolíme-li za prostor N těleso skalárů, dostáváme prostor spojitých lineárních funkcionálů (forem) na NLP M. Tento prostor se nazývá *(spojitým) duálním prostorem k prostoru M* (*(spojitý) duál M*) a značíme ho M^*. Prostor M^* je vždy Banachův (viz 2.3.1) a to i v případě, že M Banachův není. V případě, že M má konečnou dimenzi, je každý lineární funkcionál na M spojitý a duál M^* lze ztotožnit izometrickým izomorfismem s prostorem M. V nekonečné dimenzi existují i nespojité lineární funkcionály. Jednoduchá charakteristika spojitosti lineárního funkcionálu říka, že lineární funkcionál na NLP M je spojitý, právě když je jeho jádro (viz 1.3.3) uzavřená množina v M. Popis duálního prostoru je jedním z důležitých úkolů lineární funkcionální analýzy. V některých případech nekonečně dimenzionálních prostorů lze najít prostory izometricky izomorfní jejich duálům. Než připomeneme, jak vypadají duály k některým prostorům z odstavce 2.1.5, musíme uvést další z pilířů lineární funkcionální analýzy, tzv. Hahn-Banachovu větu:

Věta (Hahn Banachova). Spojitý lineární funkcionál na podprostoru reálného NLP lze rozšířit na celý NLP při zachování jeho normy.

Tato věta má řadu významných důsledků. Pro ilustraci uveďme alespoň některé z nich:

- A) Anulují-li se všechny spojité lineární funkcionály na daném vektoru, je nutně tento vektor nulový.
- B) Je-li M^* separabilní prostor, je separabilní i prostor M.
- C) Duální vyjádření normy v NLP M : $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} \|f(x)\|$.

Nyní přikročíme k popisu duálů prostorů $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ (viz 2.1.5) Čísla p, q, $1 \leq p, q \leq \infty$ nazýváme *sdružené indexy*, pokud platí $1/p + 1/q = 1$. Pro $p = 1$ je $q = \infty$ (a naopak). Je-li $p = 2$, je zřejmě $q = 2$. Platí následující věta:

Věta (o duálu prostoru ℓ_p). Nechť $1 \leq p < \infty$: Každý spojitý lineární funkcionál na ℓ_p lze vyjádřit jediným způsobem ve tvaru

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k, \tag{2.20}$$

kde $\alpha = (\alpha_k) \in \ell_q$, přičemž p,q jsou sdružené indexy. Obráceně každá posloupnost $\alpha = (\alpha_k) \in \ell_q$ definuje spojitý lineární funkcionál na ℓ_p ve tvaru (2.20). Uvedená bijekce mezi prostory ℓ_p^* a ℓ_q je izometrický izomorfismus.

Povšimněme si, že pro $p = \infty$ uvedené tvrzení neplatí. Důvodem je např. skutečnost, že ℓ_1 je separabilní, ale ℓ_∞ nikoliv. Pak ovšem podle důsledku B) Hahn Banachovy věty (viz výše) nemůže být ℓ_1 duálem k ℓ_∞. A tak posloupnosti z ℓ_1 reprezentují (ve smyslu (2.20)) jen některé prvky duálu prostoru ℓ_∞. Přesněji, prostor ℓ_1 je izometricky izomorfní s duálem prostoru c_0, což je prostor všech skalárních posloupností majících nulovou limitu s normou (2.10), viz Lukeš, 2012, str. 20.

Situace v prostorech $L_p(M, \mu), 1 < p < \infty$ (viz 2.1.5) je podobná, tj. platí věta analogická výše uvedené charakteristice spojitého lineárního funkcionálu na ℓ_p. Ve formuli (2.20) ovšem musíme zaměnit sumu integrálem: $f(\varphi) = \int_M \varphi \alpha d\mu$, kde $\alpha \in L_q(M, \mu)$. Tvrzení je správné i pro $p = 1$ a $q = \infty$, je-li měřitelný prostor M σ-konečný, tj. M je sjednocením spočetně mnoha množin konečné míry μ (např. Taylor, 1973, str. 362). Tuto vlastnost mají zřejmě pravděpodobnostní prostory, ale třeba také r-rozměrný eukleidovský prostor s Lebesgueovou mírou.

Tvar duálu k prostoru funkcí spojitých na kompaktním intervalu popisuje např. Taylor, 1973, str. 190.

2.3.4 Pokud je prostor M Hilbertův, je popis spojitých lineárních funkcionálů na tomto prostoru poměrně jednoduchý. Platí totiž tato významná věta:

Věta (Rieszova o reprezentaci spojitého lineárního funkcionálu na Hilbertově prostoru). Nechť M je Hilbertův prostor. Pak pro každé $f \in M^*$ existuje jediné $u_f \in M$ té vlastnosti, že pro každé $x \in M$ je

$$f(x) = (x, u_f)\,. \tag{2.21}$$

Přitom $\|f\| = \|u_f\|$.

Důkaz: Je-li $f = 0$, položíme $u_f = o$. Pro nenulový funkcionál f budeme postupovat takto: jádro $N(f)$ je uzavřený lineární podprostor M (viz 2.3.3.). Jeho ortogonální doplněk $N(f)^\perp$ je jednodimenzionální podprostor M a podle věty o rozkladu Hilbertova prostoru (viz 2.2.3) lze prvek $x \in M$ jednoznačně vyjádřit ve tvaru $x = z + \lambda u$, kde $z \in N(f), u \in N(f)^\perp, u \neq o$, λ skalár. Položme $u_f = \|u\|^{-2} f(u) u$. Pak jednak $f(x) = \lambda f(u)$, neboť $f(z) = 0$, jednak $(x, u_f) = (z + \lambda u, \|u\|^{-2} f(u) u) = \lambda \|u\|^{-2} f(u)(u, u) = \lambda f(u)$. Závěr: $f(x) = \lambda f(u) = (x, u_f)$. Tím je dokázána existence vyjádření (2.21). Pokud jde o jednoznačnost, předpokládejme, že $f(x) = (x, u_f)$ a také $f(x) = (x, v_f)$. Pak $(x, u_f) = (x, v_f)$ a tedy $(x, u_f - v_f) = 0$. Volbou $x = u_f - v_f$ dostaneme $\|u_f - v_f\|^2 = 0$ a tedy $u_f = v_f$. Konečně pokud jde o normy, pak ze Schwarzovy nerovnosti (2.14) plyne, že $|f(x)| = |(x, u_f)| \leq \|u_f\| \|x\|$ a tedy z definice operátorové normy $\|f\| \leq \|u_f\|$. Volbou $x = u_f$ dostaneme $f(u_f) = (u_f, u_f) = \|u_f\|^2$, a proto platí $\|f\| = \|u_f\|$.

Uvedená věta ukazuje, že Hilbertův prostor je izometricky izomorfní se svým duálem. Je pak obvyklé, že dochází ke ztotožnění těchto prostorů. V rámci prostorů ℓ_p je jediný Hilbertův prostor pro $p = 2$ a stejně je tomu i v případě prostorů $L_p(M, \mu)$ (viz 2.2 a 2.1.5).

2.3.5 Pojem transponované matice (hermiteovsky adjungované matice v případě tělesa komplexních čísel) má v teorii operátorů analogii v pojmu duální, resp. adjungovaný operátor. Je-li $A: M \to N$ spojitý lineární operátor NLP M do NLP N, definujeme *duální operátor k operátoru* A jako operátor $A^*: N^* \to M^*: g \to f = A^* g$ takto: pro každé $x \in M$ je $f(x) = g(Ax)$. V tom případě je $|f(x)| = |g(Ax)| \leq \|g\| \|Ax\| \leq \|g\| \|A\| \|x\|$ a tedy $\|f\| \leq \|A\| \|g\|$. To ukazuje, že operátor A^* je spojitý, přičemž pro jeho normu platí, že $\|A^*\| \leq \|A\|$. Opačná nerovnost je pak důsledkem duálního vyjádření normy (viz důsledek C) Hahnovy Banachovy věty uvedený v 2.3.3). Nakonec tedy platí $\|A^*\| = \|A\|$. Dualita pro spojité lineární operátory je zobecněním transponování matic. Platí např., že $(AB)^* = B^* A^*$.

Ve speciálním případě Hilbertových prostorů lze na základě Rieszovy věty o reprezentaci (viz 2.3.4) při ztotožnění duálu s výchozím Hilbertovým prostorem považovat duální operátor za operátor Hilbertova prostoru N do Hilbertova prostoru M . Podrobněji, je-li $y_0 \in N$ pevně zvolený, je $f(x) = (Ax, y_0)$ spojitý lineární funkcionál na M. Pak ale podle Rieszovy věty existuje jediný prvek $u_f \in M$ tak, že platí (2.21). Je tedy definováno zobrazení $A^*: N \to M$, které každému prvku $y_0 \in N$ přiřazuje jediný prvek $u_f = A^* y_0 \in M$. Definici tohoto operátoru lze vyjádřit rovností

$$(Ax, y) = (x, A^* y).$$

Operátor A^* v kontextu Hilbertových prostorů je tzv. *adjungovaný operátor k operátoru A.* Adjungovaný operátor má všechny dobré vlastnosti duálního operátoru (Taylor, 1973, str. 238). Pro obory hodnot a jádra operátorů A a A^* na Hilbertových prostorech platí následující vztahy:

$$N(A)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A^*)}, N(A^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A)}.$$

Je-li $A \in \mathcal{L}[M, N]$, kde M a N jsou Hilbertovy prostory, pak z věty o rozkladu Hilbertova prostoru (viz 2.2.3) plyne, že $M = N(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ a $N = N(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Je-li M Hilbertův prostor, říkáme, že $A \in \mathcal{L}[M]$ je *samoadjungovaný operátor*, jestliže $A = A^*$. V prostorech konečné dimenze splývá tento pojem s pojmem symetrické (hermiteovské) matice. Pojem symetrického operátoru (v nekonečné dimenzi) a jeho vztahu k samoadjungovanému operátoru je podrobněji rozebírán v odst. 4.2. Samoadjungovaný operátor je z hlediska invertibility a oboru hodnot buď lineárním homeomorfismem nebo má obor hodnot neuzavřený, hustý v Hilbertově prostoru a nespojitý inverzní operátor anebo není jeho obor hodnot hustý a inverzní operátor neexistuje. Tyto skutečnosti budeme používat v kapitole IV.

K operátoru $A \in \mathcal{L}[M]$, který není samoadjungovaný lze zkonstruovat samoadjungovaný operátor ve tvaru A^*A, tzv. *symetrizaci operátoru A.* Následující věta vyjasňuje vztahy mezi jádry a obory hodnot operátorů A a A^*A:

Věta o vlastnostech symetrizace operátoru: Platí následující rovnosti:

- A) $N(A^*A) = N(A)$.
- B) $\overline{\mathcal{R}(A^*A)} = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$. (2.22)

- C) $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

Důkaz těchto rovností lze najít např. v monografii Taylor, 1973, str. 238 a 239. Symetrizace operátoru splňuje nerovnost $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$ a jedná se tedy o tzv. *nezáporný operátor* (viz také odst. 4.2). K operátoru A^*A existuje smoadjungovaný operátor S té vlastnosti, že $S^2 = A^*A$. Operátor S se značí $|A| = \sqrt{A^*A}$ a nazývá se *odmocnina z operátoru* A^*A.

Jiným speciálním případem operátoru v Hilbertově prostoru je tzv. unitární operátor. Operátor $U \in \mathcal{L}[M]$, M Hilbertův prostor, se nazývá *unitární operátor*, jestliže $U^*U = UU^* = I$. Platí tedy, že $U^{-1} = U^*$ a dále, že $(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y)$, čili U zachovává skalární součin a je tedy izometrickým izomorfismem na Hilbertově prostoru M. V konečné dimenzi odpovídá takovému operátoru ortogonální (unitární) matice, tj. matice, jejíž součin s maticí k ní transponovanou (hermitovsky sdruženou) je jednotková matice (viz 1.3.3). Unitární operátory, stejně jako samoadjungované operátory, mají řadu dalších zajímavých vlastností, z nichž některé probereme v odst. 2.4. Zde ještě uveďme následující větu:

Věta o polárním rozkladu spojitého operátoru: Je-li $A \in \mathcal{L}[M]$ libovolný operátor na Hilbertově prostoru M, pak existuje jediný operátor $U \in \mathcal{L}[M]$ tak, že $A = U|A|$, kde U je unitární na $\overline{\mathcal{R}(A)}$, přičemž $N(U) = N(A)$ (U je tzv. parciálně unitární operátor).

Důkaz: Jelikož $|A|$ je samoadjungovaný, je $\||A|x\|^2 = (x, |A|^2x) = (x, A^*Ax) = \|Ax\|^2$, a proto $N(|A|) = N(A)$. Konstrukce operátoru U se provede takto: je-li $y = |A|x$, definujeme operátor $V: \mathcal{R}(|A|) \to \mathcal{R}(A)$ předpisem $Vy = Ax$. Snadno je vidět, že V je izometrický izomorfismus $\mathcal{R}(|A|)$ na $\mathcal{R}(A)$. Nyní operátor V spojitě rozšíříme (při zachování izometrie) na $\overline{\mathcal{R}(|A|)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$ a toto rozšíření označíme U. Položíme-li $Uy = o$ na $\overline{\mathcal{R}(A)}^\perp = \overline{\mathcal{R}(|A|)}^\perp = N(|A|) = N(A)$, dostaneme příslušný parciálně unitární operátor.

Povšimněme si, že polární rozklad spojitého operátoru připomíná polární tvar komplexního čísla.

2.3.6 V odstavcích 3.5 a 4.3 se setkáme s maticovými reprezentacemi operátorů v prostorech podobných klasickým prostorům $\ell_p, 1 \leq p \leq \infty$ (viz 2.1.5). Jelikož jde o prostory nekonečné dimenze, je třeba vyjasnit, jak tato reprezentace funguje. Pro operátory v prostorech konečné dimenze je maticová reprezentace popsána v odst. 1.3.3. Jisté informace

o této reprezentaci lze nalézt např. monografii Taylor, 1973, str. 208-215. Shrňme nyní pro nás nejdůležitější fakta:

Je-li $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ nekonečná matice skalárů, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ posloupnosti skalárů, pak symbolický zápis $y = \boldsymbol{A}x$ znamená, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$.

Reprezentace operátoru $A \in \mathcal{L}[\ell_p, \ell_\infty]$: Nekonečná matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ reprezentuje spojitý lineární operátor *A*, jestliže norma tohoto operátoru je svázána s prvky dané matice takto:

- A) $p = 1$: $\|A\| = \sup_i \sup_j |a_{ij}|$.
- B) $1 < p < \infty$: $\|A\| = \sup_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}$, kde $1/p + 1/q = 1$.
- C) $p = \infty$: $\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

Uvedené rovnosti vyjadřují normu daného operátoru a tedy nutnou a postačující podmínkou pro jeho spojitost je konečnost suprem na pravých stranách. Zároveň si povšimněme (viz 2.3.3), že suprema na pravých stranách jsou brána přes řádky dané nekonečné matice, přičemž tyto řádky reprezentují spojité lineární funkcionály a suprema se berou právě z jejich norem. V případech (i) a (ii) jde dokonce o ekvivalenci, zatímco v případě (iii) se nejedná o všechny spojité lineární operátory, neboť všechny prvky z $\ell_\infty{}^*$ nelze vyjádřit ve formě nekonečné řady.

Duální operátor k operátoru reprezentovanému nekonečnou maticí $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je reprezentován maticí $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = (a_{ij})$, resp. v případě komplexního prostoru $\boldsymbol{A}^* = (\overline{a_{ij}})$.

2.3.7 Mezi rozličnými operátory hrají důležitou roli operátory, které nazýváme projekcemi. Je-li *M* lineární prostor, pak lineární operátor $P: M \to M$ se nazývá *projekce* (v prostoru *M*), jestliže $P^2 = P$. Každý prvek *x* prostoru *M* lze napsat jediným způsobem ve tvaru $x = y + z$, kde $y = Px$ a $z = x - Px$. Zřejmě $y \in \mathcal{R}(P)$ a $z \in N(P)$. Operátor $I - P$ je zřejmě také projekce. Jejím oborem hodnot je $N(P)$. Je-li *M* Banachův prostor, je pro spojitou projekci *P* v *M* její obor hodnot $\mathcal{R}(P)$ uzavřený prostor. Platí i obráceně: Je-li *P* projekce v Banachově prostoru a $\mathcal{R}(P)$ a $N(P)$ jsou uzavřené množiny, je *P* spojitá. Avšak největší význam mají v našem kontextu projekce v Hilbertově prostoru. Jak uvidíme v kapitole III, souvisí v tomto případě pojem projekce úzce s otázkou predikce v časových řadách.

Je-li P projekce v Hilbertově prostoru, pak říkáme, že P je *ortogonální projekce*, jestliže $\mathcal{R}(P) = N(P)^{\perp}$ (viz 2.2.3). Je-li P nenulová ortogonální projekce, je $\|P\| = 1$. Totiž jednak $\|Px\|^2 \leq \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2$ (poslední rovnost je vlastně Pythagorova věta) a tudíž $\|P\| \leq 1$, jednak platí (viz 2.3.1), že $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|\|P\|$ a tedy $\|P\| \geq 1$.

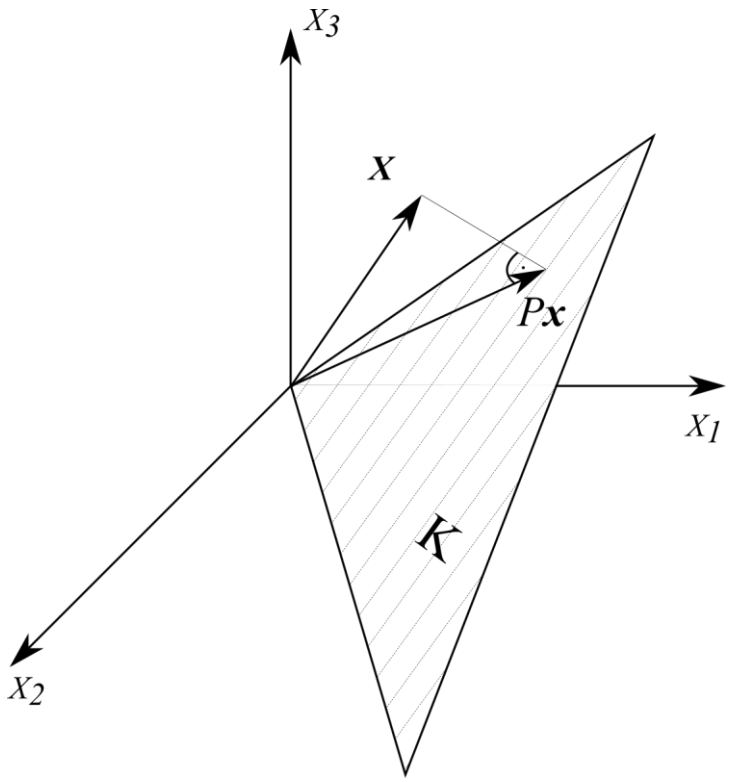
Věta o symetrii ortogonální projekce: Projekce v Hilbertově prostoru je ortogonální, pravě když je samoadjungovaným operátorem.

Další věta je variací věty o rozkladu Hilbertova prostoru uvedené v odst. 2.2.3:

Věta o projekci na uzavřený podprostor Hilbertova prostoru: Je-li K uzavřený podprostor Hilbertova prostoru M, pak pro každé $x \in M$ existuje jediné $Px \in K$ té vlastnosti, že

$\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|$. Přitom $x - Px \in K^{\perp}$.

V této větě je tedy definována ortogonální projekce $P: M \to M$, M je Hilbertův prostor, s oborem hodnot $\mathcal{R}(P) = K$. Na obr. 3 je znázorněna ortogonální projekce na rovinu K v Hilbertově prostoru $\ell_2(3)$.



Obr. 3 Projekce na uzavřený podprostor Hilbertova prostoru

2.4 Spektrální analýza

V odstavci 1.3.6 jsme si připomněli základní fakta ze spektrální teorie endomorfismů na konečně dimensionálních lineárních prostorech, tj. spektrální teorie matic. V nekonečně dimenzionálních prostorech je rozšíření této teorie dáno přítomností topologické struktury a v řadě ohledů lze tuto teorii chápat jako teorii komplexních funkcí s hodnotami v Banachových prostorech. Dále budeme předpokládat, že M je netriviální Banachův prostor a operátor $A \in \mathcal{L}[M]$ nebo obecněji uzavřený operátor s definičním oborem hustým v M. V odstavci 1.3.6 je definován pojem vlastního čísla matice. V nekonečné dimenzi je situace komplikovanější v tom smyslu, že kromě vlastních čísel může mít operátor ve svém spektru další hodnoty, které považujeme za hodnoty v jistém smyslu singulární pro daný operátor. V případě operátoru na Hilbertově prostoru zjišťujeme podobnosti ve spektrálních vlastnostech samoadjungovaných operátorů a symetrických matic. O spektrální analýzu se také opírá tzv. funkční kalkulus.

2.4.1 Je-li (komplexní) číslo λ takové, že operátor $\lambda I - A$ je spojitě invertibilní, přičemž jeho obor hodnot je hustý v M, říkáme, že λ je prvkem *rezolventní množiny* operátoru A. Rezolventní množinu označíme $\rho(A)$. Všechna ostatní komplexní čísla tvoří tzv. *spektrum operátoru* A. Spektrum operátoru A značíme $\sigma(A)$.

Označme dále

$$R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}. \tag{2.23}$$

Argumentem v zobrazení (2.23) je komplexní proměnná λ, hodnotou je operátor $(\lambda I - A)^{-1}$. Definičním oborem zobrazení definovaného předpisem (2.23) rozumíme rezolventní množinu $\rho(A)$. Obor hodnot tohoto zobrazení je podmnožina prostoru $\mathcal{L}[M]$, neboť z definice rezolventní množiny plyne uzavřenost definičního oboru operátoru (2.23) a tedy jeho rovnost celému M (Taylor, 1973, str.174). Zobrazení (2.23) je tedy funkce komplexní proměnné s hodnotami v Banachově algebře $\mathcal{L}[M]$. Nazývá se *rezolventa* operátoru A. Následující věta popisuje analytické vlastnosti rezolventy operátoru a jeho rezolventní množiny:

Věta (o vlastnostech rezolventy): Rezolventní množina $\rho(A)$ je otevřená množina v oboru komplexní čísel. Rezolventa (2.23) má tyto vlastnosti:

- A) $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu)$.
- B) $R_A(\lambda)R_A(\mu) = R_A(\mu)R_A(\lambda)$.
- C) $\mu \in \varrho(A), |\lambda - \mu| < \|R_A(\mu)\|^{-1} \Longrightarrow \lambda \in \varrho(A), R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R_A(\mu)^{k+1}(\lambda - \mu)^k$.

To znamená, že funkci (2.23) lze rozvinout v jistém okolí libovolného bodu rezolventní množiny do mocninné řady (pochopitelně s koeficienty z $\mathcal{L}[M]$), tj. jedná se o holomorfní (analytickou) funkci.

2.4.2 Spektrum operátoru A je podle této věty uzavřená množina v komplexní rovině. Obecně nelze tvrdit, že $\sigma(A)$ je neprázdná množina, ale pro $A \in \mathcal{L}[M]$ a komplexní Banachův

prostor M je spektrum neprázdná množina. Pro neprázdné spektrum definujeme následující pojem: číslo

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \tag{2.24}$$

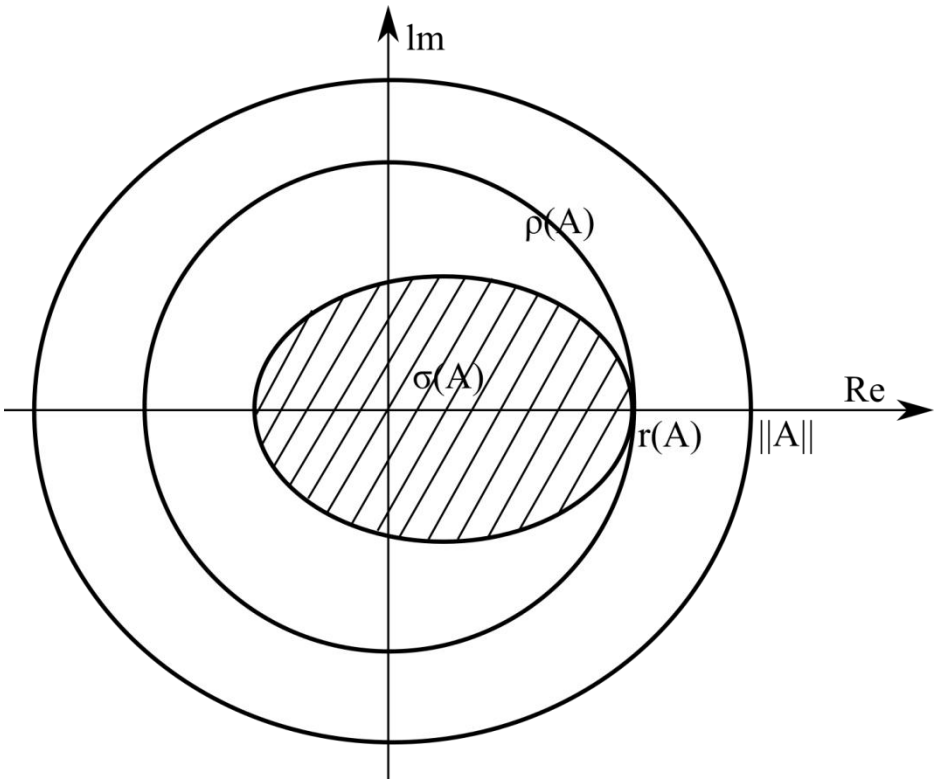
nazýváme *spektrální poloměr* operátoru A. Číslo (2.24) tedy udává poloměr nejmenšího kruhu v komplexní rovině se středem v počátku, který obsahuje celé spektrum operátoru A. Pro spektrální poloměr spojitého operátoru platí tato věta:

Věta (odhad spektrálního poloměru a Beurlingův vzorec). Je-li $A \in \mathcal{L}[M]$ s neprázdným spektrem a M je Banachův prostor, pak $r(A) \leq \|A\|$ a

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}. \tag{2.25}$$

Vzorec (2.25) se nazývá Beurlingův vzorec a lze ho.dokázat pomocí jiné význačné věty:

Věta (o zobrazení spektra pro polynomy). Je-li p polynom a $A \in \mathcal{L}[M]$, je $\sigma\big(p(A)\big) = p\big(\sigma(A)\big)$.



Obr.4 Spektrum, rezolventní množina a spektrální poloměr spojitého lineárního operátoru

Pro $|\lambda| > \|A\|$ je zřejmě $\lambda \in \rho(A)$ a pak lze pro vyjádření rezolventy (2.23) užít, za uvedených předpokladů na operátor A a prostor M, Neumannovu řadu (2.16). Dostaneme tak vyjádření

$$R_A(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}A^k \ . \tag{2.26}$$

Protože je rezolventa analytická (holomorfní) funkce, plyne z věty o jednoznačnosti rozvoje holomorfní funkce do Laurentovy řady (Veselý, 2000, str. 49 a 129), že rozvoj (2.26) má smysl dokonce pro každé $|\lambda| > r(A)$. Dokonce i pro nějaké $|\lambda| = r(A)$ může řada v (2.26) konvergovat. Označíme-li pro takové λ její součet T, pak $(\lambda - A)T = T(\lambda - A) = I$ a tedy operátor T je operátor (2.23). Každopádně pro $|\lambda| < r(A)$ řada v (2.26) diverguje, jak plyne z teorie mocninných řad (Veselý, 2000, str. 42). Obrázek 4 znázorňuje výše uvedené pojmy a jejich vzájemné vztahy.

2.4.3 Jak již bylo řečeno, body spektra operátoru jsou všechny ty body komplexní roviny, pro které operátor (2.23) buď neexistuje nebo není spojitý nebo není definován na celém prostoru. Pak je jeho definiční obor buď alespoň hustý v daném prostoru, popř. není ani hustý v tomto prostoru. V kapitolách III a IV se budeme zabývat jistými operátory, jejichž spektra budou obsahovat body, v nichž nastanou tyto rozmanité singulární případy. Ve spektrální analýze je proto vhodné zavést jistou klasifikaci bodů spektra.

(i) hodnota $\lambda \in \sigma(A)$ se nazývá *vlastním číslem* operátoru A, pokud operátor (2.23) neexistuje. To je totéž, jako když řekneme, že operátor $\lambda I - A$ není prostý (viz 1.3.3) anebo, že operátor $\lambda I - A$ má netriviální jádro (viz 1.3.6). Množinu vlastních čísel operátoru A nazýváme *bodovým spektrem* tohoto operátoru a značíme $\sigma_P(A)$. V případě operátorů v konečně dimenzionálních prostorech, je spektrum operátoru tvořeno pouze jeho vlastními čísly (viz 1.3.6).

(ii) Pokud operátor (2.23) existuje, ale není spojitý a jeho definiční obor je hustý v daném prostoru, říkáme, že příslušná hodnota λ patří do *spojité části spektra* operátoru A (pro příklad viz 3.5 nebo 4.3). Spojitou část spektra značíme $\sigma_C(A)$.

(iii) Pokud operátor (2.23) existuje (spojitý či nespojitý) a jeho definiční obor není hustý v daném prostoru, říkáme, že příslušná hodnota λ patří do *reziduálního spektra* operátoru A (pro příklad viz 4.2). Reziduální část spektra značíme $\sigma_R(A)$.

2.4.4 V odstavci 1.3.6 jsme konstatovali známý fakt, že spektrum matice je invariantní vůči jejímu transponování. V nekonečně dimenzionálním případě je situace analogická. Je-li $A \in \mathcal{L}[M]$, je definován duální operátor $A^* \in \mathcal{L}[M^*]$ a platí, že $(\lambda I - A)^* = \lambda I - A^*$. Ukazuje se, že operátory A a A^* mají stejnou rezolventní množinu a stejné spektrum (Taylor, 1973, str. 226), nicméně struktura spekter těchto operátorů nemusí být stejná (viz opět odst. 3.5 a 4.3).

V případě, že M je Hilbertův prostor, je zajímavou otázkou, co platí z hlediska spektrální analýzy pro samoadjungované operátory. Připomeňme, že v konečně dimenzionálním případě platí (viz 1.3.6), že každá symetrická matice je ortogonálně

(unitárně) podobná diagonální matici. Tato diagonální matice má na diagonále vlastní čísla dané symetrické matice a tato čísla jsou vesměs reálná. V obecném případě definujeme pro samoadjungovaný operátor A *dolní*, resp. *horní mez operátoru* A: $m_A = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, resp. $M_A = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Tato čísla jsou korektně definována, neboť i v komplexním případě je díky samoadjungovanosti A číslo (Ax, x) reálné. Pro spektrum operátoru A pak platí, že $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$, přičemž krajní body tohoto intervalu jsou součástí spektra. Pro spektrální poloměr samoadjungovaného operátoru platí:

Věta (o spektrálním poloměru samoadjungovaného operátoru). Je-li A samoadjungovaný operátor, je $r(A) = \|A\|$.

Důkaz: Je-li A samoadjungovaný operátor, je $\|A^2\| = \|A\|^2$, viz poslední rovnost v (2.22). To však znamená, že pro každé celé kladné k platí, že $\|A^{2k}\| = \|A\|^{2k}$. Umocníme-li nyní obě strany této rovnosti na $\frac{1}{2k}$ dostaneme rovnost $\|A\| = \|A^{2k}\|^{1/2k}$. Nyní stačí použít Beurlingův vzorec (2.25).

V odst. 2.3.5 jsme definovali symetrizaci spojitého lineárního operátoru A na Hilbertově prostoru jako operátor A^*A. Jak jsme uvedli, je symetrizace nezáporný operátor, což má za následek, že $m_A \geq 0$, takže spektrum nezáporného operátoru je tvořeno nezápornými čísly. V konečné dimenzi lze totéž říci o pozitivně semidefinitních maticích. V případě pozitivně definitních matic jsou pak všechna vlastní čísla kladná.

V odst. 2.3.7 jsme definovali pojem projekce. V souvislosti se spektrální analýzou samoadjungovaných operátorů lze použít projekcí k vyjádření samoadjungovaného operátoru a udělat si geometrickou představu o jeho spektrálním rozkladu. Je-li A samoadjungovaný operátor v konečně dimenzionálním Hilbertově prostoru M, pak tento operátor má spektrum složené z m navzájem různých vlastních reálných čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Projekce na vlastní podprostory příslušné těmto číslům, $P_k: M \to N(\lambda_k I - A)$, $k = 1, \dots, m$, jsou ortogonální a platí tyto rovnosti:

- A) $A = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k P_k$.
- B) $I = \sum_{k=0}^{m} P_k$ (2.27)
- C) $P_i P_j = 0$ pro $i \neq j$.

Užití vztahů (2.27) pro definici zobecněného řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (1.12) lze nalézt v Horský, 2011, str. 121.

Spektrální věta pro samoadjungovaný operátor na obecném Hilbertově prostoru je uvedena např. v monografii Taylor, 1973, str. 326.

2.4.5 V odst. 2.3.5 jsme zavedli pojem symetrizace operátoru na Hilbertově prostoru. Zároveň jsme poznamenali, že existuje odmocnina této symetrizace. Odmocnina je tedy v tomto kontextu chápána jako funkce operátoru. Přirozeně si položíme otázku, jaké další funkce operátoru lze definovat a jakým způsobem to lze učinit? Nejjednodušším typem funkce je polynom. Je-li p polynom, tj. $p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ (s obecně komplexními

koeficienty) v komplexní proměnné z, lze pro libovolný $A \in \mathcal{L}[M]$, kde M je komplexní Banachův prostor, definovat operátor $p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$. Zřejmě $p(A) \in \mathcal{L}[M]$ a při pevném A je zobrazení $F: \wp \to \mathcal{L}[M]$ homomorfismem (viz 1.2.11) algebry polynomů $\wp$ do Banachovy algebry $\mathcal{L}[M]$. Zobrazení F se nazývá *polynomiální kalkulus operátoru A.*

Zobecňování polynomu jako funkce, do jejíhož argumentu dosazujeme daný operátor je závislé na komplikovanosti samotného operátoru. Funkčním kalkulem operátoru pak rozumíme homomorfismus příslušné algebry funkcí do Banachovy algebry operátorů. Existuje několik typů funkčních kalkulů. Jedním z nich je tzv. *analytický funkční kalkulus*, jehož vlastnosti použijeme v kapitole III.

Ukazuje se, že rozumným požadavkem na funkci f komplexní proměnné z, chceme-li ji užít jako funkci daného operátoru $A \in \mathcal{L}[M]$, je, aby tato funkce byla definována v jisté otevřené množině $G_f \subset \mathbb{C}$ (obor komplexních čísel), pro niž platí, že $\sigma(A) \subset G_f$. Kupříkladu funkce $f(z) = \frac{1}{1-z}$ není definována v bodě 1. Pokud by operátor A měl vlastní číslo 1, nebylo by možné ho formálně dosadit za proměnnou z v předpisu této funkce, neboť $(I - A)^{-1}$ neexistuje. Tudíž racionální funkce (tj. podíl polynomů) je funkcí operátoru A, pokud její póly (tj. body, kde není definována) leží vně kruhu o spektrálním poloměru daného operátoru.

Analytický funkční kalkulus operátoru $A \in \mathcal{L}[M]$ je homomorfismus algebry funkcí holomorfních v jistém okolí spektra $\sigma(A)$, budeme ji značit $\mathcal{A}(A)$, do Banachovy algebry $\mathcal{L}[M]$. Takže funkce $f \in \mathcal{A}(A)$, právě když f je holomorfní v jisté otevřené množině $G_f \subset \mathbb{C}$, pro kterou $\sigma(A) \subset G_f$. Na algebře $\mathcal{A}(A)$ je třeba definovat ekvivalenci: dvě funkce f a g z $\mathcal{A}(A)$ jsou ekvivalentní, je-li $f(z) = g(z)$ na nějakém okolí $\sigma(A)$. Do algebry $\mathcal{A}(A)$ patří všechny polynomy (tj. $\wp$ je podalgebrou $\mathcal{A}(A)$), takže analytický funkční kalkulus je přirozeným rozšířením polynomiálního funkčního kalkulu. Dále $\mathcal{A}(A)$ obsahuje všechny celé funkce (tj. funkce holomorfní v $\mathbb{C}$) jako např. $\exp z, \cos z, \sin z$. V $\mathcal{A}(A)$ jsou i všechny funkce, které lze rozvinout do mocninné řady se středem v počátku a poloměrem konvergence $r > \|A\|$. Skutečně, je-li $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, pak

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \tag{2.28}$$

má smysl, tj. řada vpravo konverguje ve smyslu topologie normy v $\mathcal{L}[M]$, pokud konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} \|c_k A^k\|$ (viz odst. 2.1.4 absolutní konvergence v Banachově prostoru). Absolutní konvergence řady v (2.28), tj. $\sum_{k=0}^{\infty} \|c_k A^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \, \|A^k\| < \infty$, nastane, pokud $1 > \limsup |c_k|^{1/k} \, \|A^k\|^{1/k} = \limsup |c_k|^{1/k} \lim \|A^k\|^{1/k} = \frac{1}{r} r(A)$. To plyne z odmocninového kriteria konvergence řad s nezápornými členy, Cauchy-Hadamardova vzorce pro poloměr konvergence mocninné řady (Veselý, 2000, str. 45) a Beurlingova vzorce pro spektrální poloměr operátoru (2.25). Poslední nerovnost tedy znamená $r > r(A)$ a máme opět požadavek, aby definiční obor funkce $f(z)$ obsahoval spektrum $\sigma(A)$. Obecný prvek $f \in \mathcal{A}(A)$ lze jakožto komplexní funkci komplexní proměnné z vyjádřit pomocí křivkového

integrálu (tzv. Cauchyův vzorec, viz Veselý, 2000, str.105) a jí odpovídající operátor $f(A)$ zobecněným Cauchyovým vzorcem (viz Taylor, 1974, str. 273), tj. ve tvaru

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\lambda)\, R_A(\lambda) d\lambda,$$

kde γ je kladně orientovaná Jordanova křivka obepínající $\sigma(A)$ a nacházející se v otevřené množině G_f.

Věta (vlastnosti analytického funkčního kalkulu): Analytický funkční kalkulus, tj. homomorfismus $F: \mathcal{A}(A) \to \mathcal{L}[M]$, převádí konstantní funkci $f(z) = 1$ na identitu $I \in \mathcal{L}[M]$ a identickou funkci $f(z) = z$ na operátor A. Díky tomu, že algebra $\mathcal{A}(A)$ je komutativní, je její obraz v Banachově algebře $\mathcal{L}[M]$ komutativní algebra (subalgebra algebry $\mathcal{L}[M]$) a pokud funkce $f(z)$ nenabývá na $\sigma(A)$ nulové hodnoty, je $f(A)$ regulárním prvkem $\mathcal{L}[M]$, přičemž inverzní operátor k $f(A)$ je vyjádřen jakoukoli funkcí ze třídy funkcí ekvivalentních s $1/f(z)$. Kromě těchto algebraických vlastností má analytický funkční kalkulus i vlastnost analytickou: Je-li (f_n) posloupnost funkcí v $\mathcal{A}(A)$, které konvergují k funkci $f \in \mathcal{A}(A)$ lokálně stejnoměrně na nějaké otevřené množině $G \supset \sigma(A)$ (tj. stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině množiny G), pak $F(f_n) \to F(f)$ v normové topologii prostoru $\mathcal{L}[M]$.

V případě, že M je Hilbertův prostor a $A \in \mathcal{L}[M]$ je samoadjungovaný operátor, lze vybudovat funkční kalkulus obecněji pro funkce spojité na $\sigma(A)$. Postup je založen opět na zobecňování polynomiálního kalkulu. Pro libovolný polynom p je operátor $p(A)$ samoadjungovaný. Použitím věty o obrazu spektra pro polynomy (viz 2.4.2) a věty o spektrálním poloměru samoadjungovaného operátoru (viz 2.4.4) dostáváme

$$\|p(A)\| = r\big(p(A)\big) = \sup_{\lambda \in \sigma(p(A))} |\lambda| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} |p(\mu)| = \|p\|_{\mathrm{C}(\sigma(A))}, \qquad (2.29)$$

Poslední výraz v (2.29) znamená normu polynomu p v Banachově prostoru $\mathrm{C}\big(\sigma(A)\big)$ funkcí spojitých na spektru $\sigma(A)$. Zobrazení $F: \wp \to \mathcal{L}[M]$ je podle (2.29) izometrické lineární zobrazení prostoru polynomů $\wp$ do prostoru $\mathcal{L}[M]$. Prostor $\wp$ je v $\mathrm{C}\big(\sigma(A)\big)$ hustým podprostorem (Weierstassova věta, viz Taylor, 1973, str.100). Nyní stačí F rozšířit na $\mathrm{C}\big(\sigma(A)\big)$ a to lze při zachování izometrie, tj. $\|f\|_{\mathrm{C}(\sigma(A))} = \|f(A)\|$ pro každou $f \in \mathrm{C}\big(\sigma(A)\big)$.

Jak pro analytický funkční kalkulus spojitého lineárního operátoru, tak pro spojitý funkční kalkulus samoadjungovaného operátoru platí věta o zobrazení spektra zobecňující větu o obrazu spektra pro polynomy (viz 2.4.2):

Věta (o obrazu spektra). $f\big(\sigma(A)\big) = \sigma\big(f(A)\big)$ pro libovolnou funkci z definičního oboru analytického, resp. spojitého funkčního kalkulu.

Kapitola III

Stochastické procesy. Aplikace funkcionální analýzy

V této kapitole aplikujeme pojmy a vztahy, které byly tématem předchozích dvou kapitol na jednu velice důležitou oblast terie pravděpodobnosti a matematické statistiky, na teorii stochastických procesů. V odstavcích 3.1 až 3.4 si připomeneme zásadní pojmy této teorie, přičemž klasickou terminologii a známé vztahy přeložíme do pojmů funkcionální analýzy. V odst. 3.1 je definován obecně pojem stochastického procesu a časové řady. Odst. 3.2 popisuje základní charakteristiky procesu, tj. funkci středních hodnot, rozptylu a kovarianční funkci. V odst. 3.3 se zabýváme ústředním pojmem teorie stochastických procesů, tzv. stacionárním procesem a jeho speciálním případem, bílým šumem. V závěru odstavce je uveden vlastní příklad bílého šumu. Odst. 3.4 je věnován obecnému lineárnímu procesu. Je ukázána ekvivalence konvergence tohoto procesu podle kvadratického středu s jeho stacionaritou. Je použita terminologie a věta z odst. 2.2 o unitárních prostorech. Vlastní výsledek je pak obsažen v odstavci 3.5, kde je provedena spektrální analýza důležitého operátoru, používaného běžně v Box Jenkinsonově terminologii pro formální zápisy zásadních modelů stochastických procesů. Kromě formálního zjednodušení je často v literatuře zmiňována algebraická stránka, nikoli analytická stránka tohoto operátoru. Vlastním výsledkem je pak věta (včetně důkazu) popisující chování tohoto operátoru v prostoru omezených stochastických posloupností. Tvrzení této věty je pak aplikováno společně s analytickým funkčním kalkulem na problém invertibility lineárního filtru. Věta o invertibilitě lineárního filtru zobecňuje klasický výsledek týkající se invertibility polynomiálních filtrů. Jiným vlastním výsledkem je získání reprezentace lineárních filtrů na prostoru omezených stochastických procesů pomocí jistých posloupností skalárů tvořících absolutně konvergentní řady. Závěrečný odstavec 3.6 je věnován klasickým modelům Box Jenkinsonovy metodologie, tj. procesům ARMA a ARIMA a otázce predikce v návaznosti na pojmy funkcionální analýzy, zejména větu o projekci na uzavřený podprostor Hilbertova prostoru. Práce, které posloužily k přípravě kapitoly III, zejména z oblasti stochastických procesů jsou: Anděl, 1976; Anderson, 1971 Arlt, 1999; Arlt, Arltová 2003; Box, Jenkins, 1970, Brockwell, Davis, 1987; Cipra 1986; Rényi, 1972, Zichová, 2011.

3.1 Abstraktní stochastický proces

Nechť Ω je jakákoli neprázdná množina, na které je definována σ-algerba $\mathcal{M}$ a na ní pravděpodobnostní míra π, tj. $(\Omega, \mathcal{M}, \pi)$ je pravděpodobnostní prostor (viz 1.5.1). Dále mějme množinu $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{R}$. Zobrazení

$$X: \mathfrak{I} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.1}$$

nazýváme *stochastickým procesem*, pokud při každém pevném $t \in \mathfrak{I}$ je $X(t,.): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ náhodná veličina na prostoru $(\Omega, \mathcal{M}, \pi)$. Jedná se tedy o funkci dvou proměnných s hodnotami v množině reálných čísel (lze uvažovat i případ, kdy hodnoty této funkce jsou čísla komplexní, prvky euklidovského n-rozměrného prostoru či zcela abstraktního měřitelného prostoru). V klasických případech uvažujeme v cílové množině zobrazení (3.1) σ-algebru borelovských množin. Množina $\mathfrak{I}$ se v aplikacích interpretuje jako časová doména. Přitom čas lze chápat buď spojitě a pak je $\mathfrak{I} = \mathbb{R}$ nebo $\mathfrak{I}$ je nějaký interval na reálné ose, anebo možno chápat čas diskrétně a potom volíme obvykle $\mathfrak{I} = \mathbb{Z}$ nebo $\mathfrak{I} = \mathbb{N}$. V dalších úvahách přijmeme předpoklad, že čas je měřen diskrétně. Náhodnou veličinu $X(t,.): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ budeme dále značit X_t. Zobrazení (3.1) budeme stručně zapisovat (X_t) a hovořit také o *stochastické posloupnosti*.

Obrácená parcializace stochastického procesu, tj. parcializace, při níž uvažujeme pevně $\omega \in \Omega$, je fakticky realizace stochastického procesu, která se běžně označuje jako *časová řada*. Parcializace $X(.,\omega): \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ je tedy reálná funkce reálné proměnné t. Pro spočetnou množinu $\mathfrak{I}$ celých (přirozených) čísel jde o posloupnost. Tzn. časová řada je posloupnost reálných čísel. V aplikacích jsou pochopitelně k dispozici pouze konečné posloupnosti naměřených hodnot.

Stochastický proces je možno ztotožnit i se systémem všech jeho realizací, tj. systémem nějakých funkcí definovaných v $\mathfrak{I}$. Mějme stochastický proces (3.1). Ke každému $\omega \in \Omega$ přiřaďme funkci $f: \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ podle předpisu $f(t) = X(t,\omega)$. Tyto funkce (časové řady procesu X) tvoří systém S, z něhož lze učinit měřitelný prostor, tj. definovat nějakou σ-algebru na S a pravděpodobnostní míru prvků této σ-algebry. Definujeme σ-algebru $\mathcal{F}$ na S tak, že je to nejmenší σ-algebra obsahující množiny $A_{t,c} = \{f \in S: f(t) < c\}$ pro dané $t \in \mathfrak{I}$ a $c \in \mathbb{R}$. Zobrazení $H: (\Omega, \mathcal{M}, \pi) \longrightarrow (S, \mathcal{F})$ definované podle předpisu $f(t) = X(t,\omega)$ je měřitelné, neboť vzorem $\mathcal{F}$-měřitelné množiny$A_{t,c} = \{f \in S: f(t) < c\}$ je $\mathcal{M}$-měřitelná množina $A = \{\omega \in \Omega: X(t,\omega) < c\}$, tj. $H^{-1}(A_{t,c}) = A$. Zobrazení H tak indukuje na $(S, \mathcal{F})$ pravděpodobnostní míru PH^{-1}. Obráceně, máme-li nějaký systém S funkcí konečných na množině $\mathfrak{I}$, lze na tomto systému definovat σ-algebru pomocí výše zmíněných množin $A_{t,c}$ a na ní uvažovat jakoukoli pravděpodobnostní míru. Tyto funkce pak představují časové řady procesu (3.1) tvořeného náhodnými veličinami $X(t,\omega) = f(t)$.

Pravděpodobnostní chování stochastického procesu popisuje distribuční funkce. Nehovoříme o této funkci v souvislosti s celým procesem naráz (nemáme pojem „funkce nekonečně mnoha proměnných“), ale tak, že pro každou skupinu časů $t_1, \dots, t_n$ v $\mathfrak{I}$ a vektor $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ uvažujeme sdruženou distribuční funkci $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ náhodných veličin ve stochastickém procesu odpovídajících těmto časům. Pro různé volby časů (skupiny časů i různých délek *n*) tak dostáváme systém všech distribučních funkcí náhodných vektorů, které lze ze stochastického procesu vytvořit. Tento systém je konzistentní, což znamená, že

(i) $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ nezávisí na permutaci časů (při téže permutaci složek náhodného vektoru).

(ii) $F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, \infty) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Vlastnost (i) znamená symetrii distribučních funkcí, (ii) je tzv. konzistence systému distribučních funkcí

Obráceně také platí, že systém distribučních funkcí splňujících vlastnosti (i) a (ii) definuje stochastický proces s tímto systémem distribučních funkcí. Toto tvrzení je známo jako Kolmogorovova konzistenční věta (pro stochastickou posloupnost viz Rényi,1972, str. 250).

Příklad 3.1.1. Uvažujme stochastickou posloupnost (X_t) stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin X_t. Je-li $t_1, \dots, t_n$ v $\mathfrak{I}$ a vektor $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pak pro sdruženou distribuční funkci $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{t_i}(x_i) = F^n(x_i)$, kde $F(x)$ je (stejná) distribuční funkce náhodných veličin X_t. Vlastnosti (i) a (ii) jsou zřejmě splněny.

Příklad 3.1.2. Gaussovský proces je proces, jehož sdružené rozdělení pravděpodobností je normální (viz Rényi, 1972, str.176). Význam tohoto typu procesu je zřejmý, uvážíme-li platnost centrální limitní věty. Řada výsledků z teorie stochastických procesů se váže právě k tomuto typu procesu.

3.2 Charakteristiky stochastického procesu

Standardními charakteristikami náhodných vektorů jsou vektor středních hodnot a kovarianční, resp. korelační matice. Podobně pro stochastický proces definujeme *funkci středních hodnot* $\mu_t = EX_t$, $t \in \mathfrak{I}$, a *kovarianční funkci procesu*,

$$C(t,s) = E\big((X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)\big).$$

kde $(t,s) \in \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$. Speciálně

$$C(t,t) = \sigma_t^2 = EX_t^2 - \mu_t^2$$

je *funkce rozptylu procesu*.

Je dobré si uvědomit, že existence a konečnost prvních, resp. druhých momentů náhodných veličin je zajištěna, jakmile tyto veličiny jsou funkce z prostoru $L_1(\Omega)$, resp.$L_2(\Omega)$ a vzhledem k inkluzi $L_2(\Omega) \subseteq L_1(\Omega)$ stačí pro konečnost všech uvedených funkcí předpoklad konečného rozptylu $\sigma_t^2 < \infty$. Podrobněji, podle Schwarzovy nerovnosti (2.14) , zde v Hilbertově prostoru $L_2(\Omega)$, je

$$E(1.|X_t|) \leq \sqrt{E1^2}\sqrt{EX_t^2} = \sqrt{EX_t^2} < \infty,$$

kde první výraz představuje $L_1(\Omega)$ −normu veličiny $|X_t|$ a zároveň skalární součin funkce konstantní jedničky a veličiny $|X_t|$ v $L_2(\Omega)$ $\sqrt{EX_t^2}$ je $L_2(\Omega)$ −norma veličiny X_t. Kovariance $C(t,s)$ je zřejmě skalárním součinem centrovaných náhodných veličin $(X_t - \mu_t)$ a $(X_s - \mu_s)$ (jejich střední hodnota je nulová) v $L_2(\Omega)$ a tedy podle (2.14) platí

$$|C(t,s)| \leq \sqrt{\sigma_t^2}\,\sqrt{\sigma_s^2}.$$

Definujeme obvykle také „normovanou“ verzi kovarianční funkce, tzv. korelační funkci procesu

$$R(t,s) = \frac{C(t,s)}{\sqrt{\sigma_t^2}\sqrt{\sigma_s^2}},$$

pro jejíž hodnoty platí $|R(t,s)| \leq 1$.

Dále si připomeneme vlastnosti kovarianční funkce procesu:

Věta (o nezápornosti kovarianční matice). Pro libovolnou skupinu časů $t_1, \dots, t_n$ v $\mathfrak{I}$ a vektor $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost

$$\sum_{i,j=1}^{n} C(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0, \tag{3.2}$$

neboli matice $C(t_i, t_j)$ je pozitivně semidefinitní (tj. nezáporná ve smyslu skalárního součinu).

Důkaz: tvrzení plyne přímo z faktu, že hodnota kvadratické formy příslušné symetrické matici $C(t_i, t_j)$ je rozptyl lineární kombinace veličin $X_{t_i} - \mu_{t_i}$ s koeficienty x_i, $i = 1, \dots, n$.

Vlasnost kovarianční funkce (3.2) je natolik silná, že platí i obrácené tvrzení: máme-li funkci $C: \mathfrak{I} \times \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ splňující (3.2), pak existuje stochastický proces (dokonce gaussovský), pro nějž je funkce *C* jeho kovarianční funkcí (Anděl, 1976).

Pokud jde o operace s kovariančními funkcemi, pak platí, že každá lineární kombinace kovariančních funkcí s nezápornými koeficienty je rovněž kovarianční funkce.

3.3 Stacionární procesy

Mezi všemi stochastickými procesy zaujímají význačné postavení stacionární procesy. Stacionarita procesu znamená, že jeho pravděpodobnostní chování je ustálené. Přesněji řečeno, sdružená distribuční funkce je závislá pouze na časovém posunutí

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h,\dots t_n+h}(x_1, \dots, x_n) \tag{3.3}$$

pro každé celé h. Vlastnost (3.3) se označuje jako tzv. *striktní stacionarita* procesu.

Příklad 3.3.1 Jednoduchým příkladem striktně stacionárního procesu je stochastická posloupnost z příkladu 3.1.1.

Obvykle se však pracuje s poněkud méně omezující verzí stacionarity, tzv. slabou stacionaritou. Proces (3.1) se nazývá *slabě stacionární*, má-li konečnou konstantní střední hodnotu, konečný konstantní rozptyl a kovariance dvojic náhodných veličin tohoto procesu jsou invariantní vůči posunu v čase. Slabá stacionarita tedy znamená, že

(i) $\mu_t = \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Označíme-li $h = t - s$, je $\gamma_h = C(t, t-h) = C(s+h, s)$. (3.4)

(iii) Speciálně pro $h = 0$, je $\gamma_0 = C(t,t) = \sigma_t^2 = \sigma^2 < \infty$.

Korelační funkce má v případě procesu s nenulovým rozptylem tvar

$$\varrho_h = R(t, t-h) = R(s+h, s) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \epsilon \langle -1, 1 \rangle.$$

Funkce γ_h, resp. ρ_h se označují jako *autokovarianční*, resp. *autokorelační funkce procesu*, přičemž se jedná o sudé funkce (při volbě časové domény $\mathfrak{I} = \mathbb{Z}$).

Vztah striktní a slabé stacionarity vyjasňuje následující příklad a věta:

Příklad 3.3.2 Striktně stacionární proces s nekonečnými prvními či druhými momenty není slabě stacionární.

Věta (o vztahu striktní a slabé stacionarity procesu). Pokud pro striktně stacionární proces platí $EX_t^2 < \infty$ pro každé t (tj. proces má konečné druhé momenty), pak je tento proces slabě stacionární.

Důkaz: Stejné rozdělení všech náhodných veličin v procesu implikuje jejich stejné střední hodnoty $EX_t = EX_{t+h}$ pro každé h celé. Podobně ze stejného rozdělení náhodných vektorů (X_t, X_s) a (X_{t+h}, X_{s+h}) plyne rovnost $E(X_t X_s) = E(X_{t+h} X_{s+h})$. Volíme-li $h = -s$, je $E(X_t X_s) = E(X_{t-s} X_0)$. To znamená, že kovariance náhodných veličin X_t a X_s závisí pouze na jejich časové vzdálenosti $t - s$.

Věta (o stacionaritě gaussovského procesu). Gaussovský slabě stacionární proces je striktně stacionární.

Důkaz: Slabá stacionarita procesu implikuje, že vektor středních hodnot je konstantní pro každou skupinu časů $t_1, \dots, t_n$ v $\mathfrak{I}$. Kovarianční matice vektorů náhodných veličin tohoto procesu $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ a $X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_{n+h}}$ je stejná. Vzhledem k tomu, že normální rozdělení je určeno vektorem středních hodnot a kovarianční maticí, je sdružené rozdělení obou vektorů stejné.

Vzhledem k předchozím faktům se budeme zabývat slabě stacionárními procesy a pod označením stacionární proces budeme rozumět slabě stacionární proces.

Základním typem stacionárního procesu je tzv. proces bílého šumu. O stacionárním procesu $\mathcal{E} = (\varepsilon_t)$ řekneme, že je to *bílý šum*, má-li nulovou střední hodnotu a jeho kovarianční struktura má tyto vlastnosti:

(i) $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$.

(ii) $\gamma_h = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = 0$ pro $h \neq 0$.

Jedná se tedy o proces nekorelovaných (v případě gaussovského procesu tedy dokonce nezávislých) náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem. Veličiny tohoto procesu nazýváme někdy náhodnými šoky.

Příklad 3.3.3 Uvažujme prostoru $L_2(\Omega,\pi)$, $\Omega = (-1,1), \pi = \frac{\mu}{2}$, kde μ je Lebesgueova míra. Označme $x_t = \sum_{j=1}^{t} 2^{-j}$ a $s_t = \frac{x_t + x_{t+1}}{2}$, kde t je celé kladné číslo. Definujme systém náhodných veličin takto:

$$\varepsilon_0(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in \langle 0, {}^{1}/_{2}) \\ -1, \omega \in \langle -{}^{1}/_{2}, 0), \\ 0, \qquad \text{jinak} \end{cases}$$

$$\varepsilon_t(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2^{t+1}}, \ \omega \in \langle s_t, x_{t+1}) \\ -\sqrt{2^{t+1}}, \ \omega \in \langle x_t, s_t) \\ 0, \qquad \text{jinak} \end{cases}, \ \varepsilon_{-t}(\omega) = \begin{cases} -\sqrt{2^{t+1}}, \ \omega \in \langle -x_{-t-1}, -s_{-t}) \\ \sqrt{2^{t+1}}, \ \omega \in \langle -s_{-t}, -x_{-t}) \\ 0, \qquad \text{jinak} \end{cases}.$$

Přímým výpočtem ověříme, že $E\varepsilon_t = 0, \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 = 1, \gamma_h = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = 0, h \neq 0$.

V terminologii kapitoly II, odst. 2.2.2 lze bílý šum charakterizovat jako (spočetný) ortogonální systém nenulových funkcí v prostoru $L_2(\Omega)$. Tyto funkce jsou centrované, tj. jejich střední hodnota je nulová, a proto je jejich norma v $L_2(\Omega)$ (viz (2.11a) s $p = 2, M = \Omega, \mu = \pi$) rovna jejich směrodatné odchylce. Bílý šum v příkladu 3.3.3 je dokonce ortonormální (nikoli úplný) systém v $L_2(-1,1)$.

3.4 Lineární proces

Lineárním procesem rozumíme stochastický proces tvaru

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \varepsilon_{t-n}, \tag{3.5}$$

kde (ψ_n) je daná posloupnost reálných čísel (vah procesu), $\psi_0 = 1$, (ε_t) je daný proces bílého šumu. Je tedy každá náhodná veličina X_t tohoto procesu součtem nekonečné řady a tedy je nutné si položit otázku, v jakém smyslu je konvergence této řady uvažována a kdy tento součet existuje? V terminologii teorie pravděpodobnosti uvažujeme konvergenci řady na pravé straně (3.5) jako konvergenci podle kvadratického středu. To znamená, že

$$E(S_t(n) - X_t)^2 \longrightarrow 0, \tag{3.6}$$

jakmile $n \longrightarrow \infty$. Přitom

$$S_t(n) = \sum_{j=0}^{n} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \tag{3.7}$$

tj. (3.7) je částečný součet řady (3.5).

Konvergence (3.6), jak jsme připomněli v odst. 1.5.6, implikuje konvergenci v pravděpodobnosti, takže tvrzení, která zde vyslovíme, jsou na úrovni slabého zákona velkých čísel.

V terminologii funkcionální analýzy je konvergence (3.6) konvergencí v Hilbertově prostoru $L_2(\Omega)$ (viz 2.1.5). Z úplnosti tohoto prostoru vyplývá, že konvergence řady v (3.5) je ekvivalentní tomu, že posloupnost (3.7) je cauchyovská. Předpokládejme, že $n > m$ a uvažujme náhodnou veličinu $S_t(n) - S_t(m)$. Pak

$$E(S_t(n) - S_t(m))^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \psi_i \psi_j \, E\left(\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-j}\right) = \sum_{i=m+1}^{n} \psi_i^2 \, E(\varepsilon_{t-i}^2) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=m+1}^{n} \psi_i^2.$$

Uvedené vztahy ukazují, že posloupnost (3.7) je cauchyovská (v $L_2(\Omega)$), právě tehdy, když je cauchyovská posloupnost součtů $s_n = \sum_{i=1}^{n} \psi_i^2$ (v $\mathbb{R}$). Vzhledem k úplnosti $\mathbb{R}$ (se standardní konvergencí) můžeme tedy uzavřít:

Řada v (3.5) konverguje podle kvadratického středu (tj. v $L_2(\Omega)$), právě když

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^2 < \infty \,. \tag{3.8}$$

Podmínka (3.8) znamená, že $(\psi_n) \in \ell_2$(viz 2.1.5). Poznamenejme ještě, že právě provedené úvahy jsou důkazem věty o rozvoji do Fourierovy řady z odstavce 2.2.2 v tomto speciálním kontextu.

Z této věty také plyne, že $E(X_t \varepsilon_{t-n}) = \psi_n \sigma_\varepsilon^2$. Konvergence řady (3.8) implikuje konvergenci $\psi_n \longrightarrow 0$. Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že korelace náhodné veličinyX_t se vzdálenými šoky ε_{t-n} je malá a tyto veličiny jsou „téměř“ nekorelované. Konvergence posloupnosti vah

lineárního procesu k nule je nutnou podmínkou konvergence řady vah. Pro platnost nerovnosti (3.8) stačí absolutní konvergence řady vah, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n| < \infty \,. \tag{3.9}$$

Důvodem je (viz 2.1.5) inkluze $\ell_1 \subset \ell_2$. Protože opačná inkluze neplatí, je podmínka (3.9) pouze postačující, nikoli nutná pro konvergenci (3.5).

Příklad 3.4.1. Je-li $\psi_n = \frac{1}{n}$, je zřejmě $\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n = \infty$, neboť jde o harmonickou řadu. Na druhou stranu $\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^2 < \infty$, což lze dokázat užitím integrálního kriteria konvergence číselných řad (např. Horský Z., 1987, str. 249).

Nyní ukážeme, že podmínka (3.8), tj. konvergence lineárního procesu (3.5), je ekvivalentní stacionaritě tohoto procesu. Především střední hodnota procesu (3.5) je nulová. To plyne ihned z možnosti záměny spojitého lineárního funkcionálu střední hodnoty a sumy na pravé straně (3.5). Uvažovaný proces (3.5) je tedy centrovaný, přičemž tato vlastnost není zřejmě na újmu obecnosti. Pro autokovarianci procesu (3.5) pak platí:

$$\gamma_h = E(X_t X_{t+h}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \varepsilon_{t-n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \varepsilon_{t+h-n}\right) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \psi_{n+h}. \tag{3.10}$$

Poslední výraz v (3.10) obsahuje skalární součin posloupností $(\psi_n) \in \ell_2$ a $(\psi_{n+h}) \in \ell_2$. Použijeme-li Schwarzovu nerovnost (2.14) a fakt, že ℓ_2-norma posloupnosti (ψ_{n+h}) je nejvýše rovna ℓ_2-normě posloupnosti (ψ_n), dostaneme

$$|\gamma_h| = \sigma_\varepsilon^2 \left|\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \, \psi_{n+h}\right| \leq \sigma_\varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^2 = \gamma_0.$$

Zde $\gamma_0 = E(X_t^2)$ je společný rozptyl náhodných veličin procesu (3.5) a jeho konečnost je ekvivalentní s podmínkou (3.8).

3.5 Operátor zpětného posunutí a jeho algebraické a analytické vlastnosti

Lineární proces lze chápat jako transformaci bílého šumu. Abychom mohli formalizovat tuto myšlenku, zavedeme pojem operátoru zpětného posunutí (Arlt, 1999, str. 23 nebo Cipra, 1986, str. 107).

Jsou-li (X_t) a (Y_t) stochastické procesy, pak

$$(Y_t) = B(X_t), \text{ pokud } Y_t = X_{t-1}. \tag{3.11}$$

pro každé $t \in \mathfrak{I}$. Proces (Y_t) tedy vznikne z procesu (X_t) zpožděním o jednu časovou jednotku. Transformaci zprostředkovává operátor B, který se nazývá *operátorem zpětného posunutí* (angl. *lag operator*). Tento operátor, jakožto zobrazení, může být ovšem uvažován (definován) v různých prostorech a to pak způsobuje odlišnosti v některých jeho vlastnostech, jak později uvidíme.

Uvažujme pro začátek nejobecnější případ, prostor všech stochastických procesů, tj. v našem případě posloupností náhodných veličin definovaných v $(\Omega, \mathcal{M}, \pi)$, viz odst. 3.1, který označíme $\left(L_0(\Omega)\right)^{\mathfrak{I}}$. Jde o lineární prostor nekonečné dimenze, ve kterém struktura topologie je dána konvergencí podle pravděpodobnostní míry π (viz 1.5.6). Pro operátor

$$B: (L_0(\Omega))^{\mathfrak{I}} \longrightarrow (L_0(\Omega))^{\mathfrak{I}},$$

který je zřejmě lineárním zobrazením, můžeme v algebře $\mathcal{L}((L_0(\Omega))^{\mathfrak{I}})$ všech lineárních operátorů definovaných na prostoru $(L_0(\Omega))^{\mathfrak{I}}$ vytvořit subalgebru generovanou tímto operátorem. Především pro každé celé nezáporné n definujeme mocniny operátoru B indukcí:

(i) $B^0 = I$, kde I je identický operátor na prostoru $(L_0(\Omega))^{\mathfrak{I}}$,

(ii) $B^{n+1} = BB^n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Operátor B^n tedy zpožďuje proces o n časových jednotek. Algebra operátoru B obsahuje kromě těchto mocnin i všechny jejich lineární kombinace, tj. polynomy v neurčité B (s koeficienty $\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_n$):

$$p(B) = \psi_0 I + \psi_1 B + \cdots + \psi_n B^n. \tag{3.12}$$

Lze uvažovat i algebru formálních mocninných řad v neurčité B (viz odst. 1.2.6). Prvky této algebry jsou řady

$$\psi(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n B^n\,. \tag{3.13}$$

Je třeba zdůraznit, že z čistě algebraického hlediska nás netrápí otázka konvergence řady (3.13). Algebra těchto formálních mocninných řad obsahuje algebru polynomů v neurčité B;

řada (3.13) má součet, pokud posloupnost $(\psi_n) \in c_{00}$ (viz 2.1.5) a tento součet je operátor typu (3.12). Jakmile zavedeme v uvažovaných algebrách topologickou strukturu, budeme moci uvažovat o symbolu $\psi(B)$ jako o součtu řady (3.13) a nikoli jenom jako o formální zkratce pro uvedenou řadu.

Pro maticovou reprezentaci operátoru B budeme uvažovat stochastický proces jako posloupnost

$$X = (X_t, X_{t-1}, \dots) \tag{3.14}$$

náhodných veličin $X_{t-n}, n \in \mathbb{N}_0$. Přitom $t \in \mathfrak{I}$ je libovolné pevné celé číslo. Operátor B lze pak reprezentovat nekonečnou maticí

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Analogicky jako v konečné dimenzi (viz 1.3.3) operátor B ztotožníme s jeho maticovou reprezentací (3.15). Povšimněme si, že matice (3.15) je nekonečně dimenzionální analogií nilpotentní matice (viz 1.3.5). Konečná matice, kterou získáme z (3.15) vynecháním všech řádků a sloupců v (3.15) od jistého, řekněme N+1-ního počínaje je právě onou nilpotentní maticí řádu N. Operátor B tedy přiřazuje stochastické posloupnosti (3.14) stochastickou posloupnost $Y = BX = (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$.

Budeme nyní rozvíjet úvahy o operátoru (3.15) v prostorech analogických k prostorům $\ell_p, 1 \leq p \leq \infty$ (viz 2.1.5). Na rozdíl od klasických ℓ_p prostorů, jejichž prvky jsou posloupnosti skalárů (reálných nebo komplexních čísel), budou naše prostory obsahovat jako prvky posloupnosti náhodných veličin s konečnými prvními a druhými momenty, tj. posloupnosti funkcí z prostoru $L_2(\Omega)$. Tyto prostory budeme označovat $\ell_p(L_2)$. Vlastnosti těchto prostorů jsou analogické vlastnostem klasických ℓ_p prostorů. Z hlediska zavedení ústředního pojmu teorie stochastických procesů, tj. stacionarity procesu, je nejpřirozenějším prostorem pro naše úvahy prostor $\ell_\infty(L_2)$. Ukážeme, pomocí spektrální analýzy operátoru (3.15), že jiný významný operátor této teorie, totiž operátor diference, není v tomto prostoru invertibilní. Ve snaze docílit invertibility diference bude, jak uvidíme v kapitole IV, nutné přejít do prostorů $\ell_p(L_2), 1 \leq p < \infty$. Tím se však dostaneme do problému s vlastností

stacionarity. Klasickou stacionaritu, jak byla definována v odst. 3.3 nahradíme „volnějším“ pojmem: stacionaritou do úrovně N. Ale nyní již k případu prostoru $\ell_\infty(L_2)$.

Stochastickému procesu (3.14), kde $X_{t-n} \in L_2(\Omega)$, přiřadíme číslo

$$\|X\| = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|X_{t-n}\|_2. \tag{3.16}$$

Norma s indexem 2 v (3.16) značí $L_2(\Omega)$ − normu náhodné veličiny (viz 2.11). Funkce (3.16) je zřejmě normou, pokud se omezíme na případ konečného suprema. Tím získáváme prostor omezených stochastických posloupností (procesů) se členy z $L_2(\Omega)$, tj. prostor ℓ_∞. Podobně, jako v klasickém případě, můžeme ukázat, že tento normovaný lineární prostor je vzhledem k (3.16) úplný:

Věta (o úplnosti prostoru $\ell_\infty(L_2)$). Prostor stochastických procesů $\ell_\infty(L_2)$ s normou (3.16) je Banachův.

Důkaz: Nechť posloupnost stochastických procesů $(X^{(n)})$ je cauchyovská. To znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq n_0$ je $\left\|X^{(m)} - X^{(n)}\right\| < \varepsilon$. Vzhledem k nerovnosti $\left\|X_{t-k}^{(m)} - X_{t-k}^{(n)}\right\|_2 \leq \left\|X^{(m)} - X^{(n)}\right\|$ je při libovolně zvoleném pevném $k \in \mathbb{N}_0$ posloupnost $(X_{t-k}^{(n)})$ cauchyovská v $L_2(\Omega)$. Protože prostor $L_2(\Omega)$ je úplný, existuje funkce $X_{t-k} \in L_2(\Omega)$, která je limitou posloupnosti $(X_{t-k}^{(n)})$ v $L_2(\Omega)$. Pro proces $X = (X_{t-k})$ tvořený těmito limitami je číslo (3.16) konečné. To plyne z toho, že posloupnost $(X^{(n)})$ je omezená, tj. existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\left\|X^{(n)}\right\| < K$. To ale znamená, že také pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $k \in \mathbb{N}_0$ je $\left\|X_{t-k}^{(n)}\right\|_2 < K$. Kdyby (3.16) bylo pro proces $X = (X_{t-k})$ nekonečno, pak by $\|X_{t-k}\|_2 \to \infty$ pro $k \to \infty$. To by ale znamenalo, že pro nějaké velké k by muselo být $\|X_{t-k}\|_2 > K$, ale pak by pro takové k nemohlo platit, že $\left\|X_t^{(n)} - X_t\right\|_2 \to 0$, pro $n \to \infty$.

Stacionární posloupnosti zřejmě patří do tohoto prostoru, neboť mají konstantní funkci středních hodnot a rozptylů (viz 3.2), totiž $\mu_n = EX_{t-n} = \mu,\ \sigma_n^2 = EX_{t-n}^2 - \mu_n^2 = \sigma^2$, tedy

$$\|X_{t-n}\|_2 = \sqrt{EX_{t-n}^2} = \sqrt{\sigma^2 + \mu^2}, \tag{3.17}$$

odkud pak ihned plyne, že

$$\|X\| = \sqrt{\sigma^2 + \mu^2} < \infty.$$

V případě centrovaných procesů ($\mu = 0$) dokonce $\|X\| = \sqrt{\sigma^2}$. Do prostoru $\ell_\infty(L_2)$. patří také konstantní posloupnosti, např. $X = (1,1,1, \dots)$, tj. $X_{t-n}(\omega) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0, \omega \in \Omega$. Tento proces je zřejmě stacionární s jednotkovou střední hodnotou a nulovým rozptylem (rozptyl konstanty je nulový) a konstantní (nulovou) kovarianční funkcí. Tento proces budeme dále značit písmenem E. Norma (3.16) tohoto procesu je zřejmě $\|E\| = 1$. Posloupnosti

$$\Lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots), \tag{3.18}$$

pro $|\lambda| \leq 1$ (speciálně pro $\lambda = 1$ jde zřejmě o posloupnost E) jsou také prvky jednotkové koule v prostoru $\ell_\infty(L_2)$. Pro $\lambda \neq 1$ se zřejmě nejedná o stacionární procesy, neboť střední hodnota konstantních funkcí v (3.18) není stejná.

Nyní budeme vyšetřovat operátor (3.15) na prostoru $\ell_\infty(L_2)$. Jedná se o spojitý operátor. Jeho normu spočteme podle (2.3), tj.

$$\|B\| = \sup_{\|X\|=1} \|BX\|. \tag{3.19}$$

Protože zřejmě platí $\|BX\| \leq \|X\|$ pro každý proces $X \in \ell_\infty(L_2)$, je $\|B\| \leq 1$. Dále platí, že

$$BE = E,$$

a protože $\|E\| = 1$, nabývá funkce $\|BX\|$ v bodě E své maximální hodnoty na jednotkové sféře prostoru $\ell_\infty(L_2)$ a tedy, viz (3.19), je $\|B\| = 1$.

Analyzujme spektrum operátoru (3.15). Rezolventní množina operátoru B (viz 2.4.1) obsahuje všechna čísla vně kompaktního jednotkového kruhu: $\rho(B) \supset \{\lambda: |\lambda| > 1\}$ (viz 2.4.2, věta o odhadu spektrálního poloměru). Zřejmě platí

$$B\Lambda = \lambda\Lambda$$

pro každý proces (3.18), kde $|\lambda| \leq 1$. To znamená, že každý bod kompaktního jednotkového kruhu je bodem spektra operátoru B, neboli $\sigma(B) = \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$. Inverzní operátor k operátoru $\lambda I - B$ neexistuje pro žádné $|\lambda| \leq 1$, neboť platí, že $N(\lambda I - B) = [\![\Lambda]\!]$ pro každé $|\lambda| \leq 1$, tj. jádro operátoru $\lambda I - B$ je netriviální, tedy všechny prvky spektra operátoru (3.15) jsou jeho vlastní čísla, tzn. $\sigma(B) = \sigma_P(B)$, viz 2.4.3 (i). Speciálně neexistuje B^{-1}, neboť $0 \in$

$\sigma(B)$ s vlastním vektorem (posloupností) $E_1 = (1,0,0,\dots)$. Neexistuje také $(I-B)^{-1}$, přičemž $N(I-B) = [\![E]\!]$.

Jak víme z odst. 2.4, kromě otázky existence operátoru $(\lambda I - B)^{-1}$ je předmětem zájmu spektrální analýzy operátoru i diskuze oboru hodnot $\mathcal{R}(\lambda I - B)$. Ukážeme, že tento prostor je ve vnitřku spektra, tj. pro $|\lambda| < 1$, roven celému $\ell_\infty(L_2)$, zatímco na hranici spektra, tj. pro $|\lambda| = 1$ není ani hustý v $\ell_\infty(L_2)$ V každém případě je otázka popisu oboru hodnot operátoru $\lambda I - B$ otázkou existence řešení diferenční rovnice

$$\lambda X_{t-n} - X_{t-n-1} = Y_{t-n}. \tag{3.20}$$

Přepišme rovnici (3.20) do pohodlnější formy:

$$\lambda x_n - x_{n+1} = y_n\,. \tag{3.21}$$

Homogenní rovnice příslušná rovnici (3.21) má obecné řešení

$$(z_n) = C(\lambda^n), C \in \mathbb{R}, \text{ pro nenulové } \lambda, \text{ resp. } (z_n) = C(1,0,0,\dots) \text{ pro } \lambda = 0.$$

Pro $\lambda = 0$ má pro libovolnou posloupnost $(y_n) \in \ell_\infty(L_2)$ rovnice (3.21) partikulární řešení $(x_n) \in \ell_\infty(L_2)$, kde $x_{n+1} = -y_n, n \in \mathbb{N}_0$ a skalár x_0 lze volit pevně jakkoli.

Pro $\lambda \neq 0$ spočítáme partikulární řešení rovnice (3.21) pro pevně, leč libovolně danou posloupnost $(y_n) \in \ell_\infty(L_2)$ variací konstant: předpokládáme, že partikulární řešení je tvaru $p_n = C_n\lambda^n$ a dosazením do (3.21) dostaneme diferenční rovnici

$C_n - C_{n+1} = \lambda^{-1}\lambda^{-n}y_n$, odkud $C_n = -\lambda^{-1}(y_0 + \frac{y_1}{\lambda} + \dots + \frac{y_{n-1}}{\lambda^{n-1}})$ a volíme $C_0 = 0$. Odtud $p_n = -\lambda^{-1}(\lambda^n y_0 + \lambda^{n-1}y_1 + \dots + \lambda^1 y_{n-1})$.

Obecné řešení rovnice (3.21) má tedy tvar

$$x_n = p_n + z_n = -\lambda^{-1}(\lambda^n y_0 + \lambda^{n-1}y_1 + \dots + \lambda^1 y_{n-1}) + C\lambda^n,$$

neboli

$$x_n = C\lambda^n - \lambda^{n-1}y_0 - \lambda^{n-2}y_1 - \dots - \lambda^0 y_{n-1} \tag{3.22}$$

Posloupnost $(x_n) \in \ell_\infty(L_2)$, neboť $(y_n) \in \ell_\infty(L_2)$ a $0 < |\lambda| < 1$. Uvažujme nyní konkrétně posloupnost $(y_n) = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \in \ell_\infty(L_2)$. Jejím dosazením do (3.22) dostaneme

$$x_n = (C - n)\lambda^n \tag{3.23}$$

Posloupnost (3.23) patří do prostoru $\ell_\infty(L_2)$, právě když $|\lambda| < 1$. Je-li $|\lambda| = 1$, pak posloupnost (3.23) v tomto prostoru není. To ukazuje, že pro $|\lambda| = 1$ je $\mathcal{R}(\lambda I - B)$ různý od $\ell_\infty(L_2)$. Dokážeme, že dokonce $\overline{R(\lambda I - B)} \neq l_\infty$. Uvažujme posloupnost $(w_n) \in \ell_\infty$ s malou normou, $\|(w_n)\| < \varepsilon$. Položme v (3.22) $y_k = \lambda^{k+1} + w_k, k = 0, \dots, n-1$. Tedy

$$x_n = (C - n)\lambda^n - \lambda^{n-1}w_0 - \lambda^{n-2}w_1 - \cdots - \lambda^0 w_{n-1},$$

odkud

$$|x_n| \geq |C - n| - |w_0| - |w_1| - \cdots - |w_{n-1}| \geq n - C - n\varepsilon = (1 - \varepsilon)n - C$$

pro velká n $(n > C)$ a malé ε $(0 < \varepsilon < 1)$. Tedy $(x_n) \notin \ell_\infty(L_2)$ pro žádný bod z $\varepsilon -$ okolí posloupnosti $(y_n) = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$, $|\lambda| = 1$.

Shrňme všechny dosavadní poznatky o operátoru zpětného posunutí (3.15) do následující věty:

Věta (o spektrálních vlastnostech operátoru zpětného posunutí v prostoru omezených stochastických procesů). Operátor B reprezentovaný nekonečnou maticí (3.15) je prvek Banachovy algebry $\mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$ s normou $\|B\| = 1$. Jeho spektrální vlastnosti v prostoru $\ell_\infty(L_2)$ jsou následující:

- A) Rezolventní množina je $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| > 1\}$.
- B)Spektrum je $\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq 1\}$. Toto spektrum je tvořené výhradně vlastními čísly operátoru B.
- C) Pro obory hodnot operátorů $\lambda I - B$ platí:
  a) $\mathcal{R}(\lambda I - B) = \ell_\infty(L_2)$ pro $|\lambda| < 1$.
  b) $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - B)} \neq \ell_\infty(L_2)$ pro $|\lambda| = 1$.

Operátor (3.15) jako prvek Banachovy algebry $\mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$ všech omezených lineárních operátorů na prostoru $\ell_\infty(L_2)$ generuje v rámci $\mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$ subalgebru $\wp(B)$ všech polynomiálních operátorů (3.12). Vzhledem k normové topologii (topologii stejnoměrné konvergence, viz 2.3.1) prostoru $\mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$ můžeme uvažovat její uzávěr $\overline{\wp(B)}$, který zřejmě obsahuje konvergentní řady (3.13). Navíc je $\overline{\wp(B)}$ rovněž Banachova algebra. Snadno nahlédneme, že $\|B^n\| = \|B\|^n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, a proto

$$\|\psi(B)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n| \|B\|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n|. \tag{3.24}$$

Z (3.24) plyne, že postačující podmínkou k tomu, aby řada (3.13) definovala jistý prvek v prostoru $\mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$, je podmínka (3.9).

Je-li

$$\pi(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n B^n, \tag{3.25}$$

pak

$$\vartheta(B) = \psi(B)\pi(B), \tag{3.26}$$

kde $\vartheta(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n B^n$, právě když $\vartheta_n = \sum_{i+j=n} \psi_i \pi_j$ (tzv. Cauchyův součin řad). To platí pro libovolné (formální) mocninné řady. Z faktu, že součin absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní řada (Jarník, 1976, str. 105) plyne, že je-li splněna podmínka (3.9) pro posloupnosti vah v (3.13) i (3.25), je splněna i pro posloupnost (ϑ_n). To znamená, že z předpokladu $\psi(B) \in \mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$, , a $\pi(B) \in \mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$, , plyne $\vartheta(B) \in \mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$.

Je-li $\vartheta(B) = I$ a $\psi(B) \in \mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$, je $\pi(B) = \psi(B)^{-1} \in \mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$, právě když

(i) $\psi_0 \pi_0 = 1$,

(ii) $\psi_0 \pi_n + \psi_1 \pi_{n-1} + \cdots + \psi_n \pi_0 = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, (3.27)

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\pi_n| < \infty$.

Uvedené podmínky jsou tedy podmínky nutné i postačující k tomu, aby prvek $\psi(B)$ Banachovy algebry $\overline{\wp(B)}$ byl regulární, tj. invertibilní (viz 2.3.1). Vzhledem k úmluvě $\psi_0 = 1$ (viz (3.5)) je podle (i) $\pi_0 = 1$. Vztah (ii) představuje rekurentní formuli, pomocí níž je posloupnst skalárů (π_n) definována jednoznačně s pomocí (i). Požadavek (iii) říká, že posloupnost (π_n) leží v prostoru skalárních posloupností ℓ_1. Nerovnost (iii) zaručuje, že formální řada (3.25) definuje jistý prvek v Banachově algebře $\overline{\wp(B)}$.

Příklad 3.5.1 Nechť $\psi(B) = I - B$ a $\pi(B) = I + B + B^2 + \cdots$. Ve smyslu formálních mocninných řad je $\psi(B)\pi(B) = I - B + B - B^2 + B^2 - \cdots = I$. Operátor $\psi(B)$ není však regulárním prvkem v $\mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$, tj. neexistuje k němu prvek inverzní. Mocninná řada $I +$

$B + B^2 + \cdots$ tak může být uvažována pouze jako formální řada. Její formální součet $\pi(B)$ nedefinuje žádný prvek v $\overline{\wp(B)}$, neboť, jak jsme ukázali ve spektrální analýze operátoru (3.15), neexistuje $(I - B)^{-1}$. Lze též argumentovat pomocí věty z odst. 2.3.6 o reprezentaci spojitého lineárního operátoru v prostorech posloupností, tvrzení (iii).

Příklad 3.5.2 Nechť $\psi(B) = I - \theta_1 B$, kde θ_1 je skalár, a $\pi(B) = I + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \cdots$. Ve smyslu formálních mocninných řad je $\psi(B)\pi(B) = I$. Z věty o Neumannově řadě (viz 2.3.1) plyne $\pi(B) \in \overline{\wp(B)}$ pro $|\theta_1| < 1$ (viz (2.16)). Jelikož $\psi(B) = \theta_1 \left(\frac{1}{\theta_1} I - B\right)$, nemá operátor $\psi(B)$ inverzní operátor pro $|\theta_1| \geq 1$ v $\overline{\wp(B)}$.

Vyslovme nyní větu, která charakterizuje Banachovu algebru $\overline{\wp(B)}$.

Věta (o reprezentaci Banachovy algebry $\overline{\wp(B)}$). Banachova algebra $\overline{\wp(B)}$ mocninných řad (3.13), jejichž součet je spojitý lineární operátor na prostoru $\ell_\infty(L_2)$ je izometricky izomorfní Banachově algebře ℓ_1 skalárních posloupností (viz 2.1.5), v níž součin je tzv. Cauchyův součin řad.

Důkaz: Mocninná řada je ve vzájemně jednoznačné korespondenci s posloupností svých koeficientů. Vzhledem k nerovnosti (3.24) stačí dokázat, místo nerovnosti platí rovnost. K tomu stačí najít prvek $U \in \ell_\infty(L_2), \|U\|_{\ell_\infty(L_2)} = 1$ té vlastnosti, že $\|\psi(B)U\|_{\ell_\infty(L_2)} = \|(\psi_n)\|_{\ell_1}$. Lze volit $U = (U_{t-n})$ tak, že $U_{t-n} = \frac{\psi_n}{|\psi_n|}$, je-li $\psi_n \neq 0$, jinak $U_{t-n} = 1$.

Vraťme se nyní k lineárnímu procesu (3.5) definovanému v odstavci 3.4. Je-li X stochastická posloupnost (3.14) a $\mathcal{E} = (\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$ je bílý šum, pak v operátorové symbolice (viz (3.13)) můžeme psát

$$X = \psi(B)\mathcal{E}\,.$$

Operátoru (3.13) se v uvedeném kontextu říká *lineární filtr*. Předpokládáme $\psi(B) \in \overline{\wp(B)}$. Stacionární bílý šum $\mathcal{E}$ je transformován lineárním filtrem na stacionární proces X. Nyní charakterizujme invertibilitu lineárního filtru:

Věta (o invertibilitě lineárního filtru) Lineární filtr definovaný řadou (3.13), jejíž koeficienty splňují podmínku (3.9) je v prostoru $\overline{\wp(B)}$ invertibilní, tj. je regulárním prvkem Banachovy algebry $\overline{\wp(B)}$, právě když má funkce $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n$ komplexní proměnné z všechny kořeny vně uzavřeného jednotkového kruhu $K = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$.

Důkaz: Tvrzení je důsledkem spektrálních vlastností operátoru zpětného posunutí (3.15) a vlastností analytického funkčního kalkulu, viz odst. 2.4.5. Pro operátor zpětného posunutí (3.15), jehož spektrum je jednotkový kruh v komplexní rovině připadají v úvahu všechny funkce holomorfní (analytické) v kruhu se středem v počátku a poloměrem konvergence $1 < r \leq \infty$. Tyto funkce patří do Banachovy algebry $\mathcal{A}(B)$ a analytický funkční kalkulus jim přiřazuje prvky Banachovy algebry $\overline{\wp(B)}$. Prvek $\psi(B)$ je pak regulární (invertibilní), právě když funkce $\psi(z)$ nemá kořeny ve spektru operátoru (3.15), tj. v kompaktním jednotkovém kruhu $K = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq 1\}$. Funkce $\pi(z) = {}^{1}/_{\psi(z)}$ je prvkem $\mathcal{A}(B)$, tj. $\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n$, kde posloupnost koeficientů (π_n) splňuje vlastnosti (3.27) (i)-(iii).

Prvky algebry $\mathcal{A}(B)$ jsou např. celé funkce $\psi(z) = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ nebo $\psi(z) = \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, naopak do $\mathcal{A}(B)$ nepatří $\psi(z) = \frac{1}{1-z}$, nebo obecněji jakákoli racionální funkce, která má póly v kompaktním jednotkovém kruhu v komplexní rovině.

3.6 Stacionární procesy s polynomiálním a racionálním filtrem

Velice důležitou třídu procesů tvoří procesy s lineárním filtrem typu polynom, resp. racionální funkce v neurčité *B*. Tyto procesy jsou v literatuře (viz např. Arlt, 1999, str. 44) označovány jako ARMA(p,q).

Stochastická posloupnost (X_t) se nazývá *procesem typu* ARMA(p,q), je-li stacionární a je-li zároveň řešením stochastické diferenční rovnice

$$\phi(B)X = \theta(B)\mathcal{E}, \tag{3.28}$$

kde $\phi(B) = I - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$, resp. $\theta(B) = I - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$ jsou nesoudělné polynomy stupně *p*, resp. *q*, přičemž $p, q \in \mathbb{N}_0$ a $\mathcal{E}$ je pevně daný bílý šum. Operátor $\phi(B)$ je označován jako *autoregresní operátor řádu p* a operátor $\theta(B)$ jako *operátor klouzavých součtů řádu q*.

Existence stacionárního řešení operátorové rovnice (3.28) je, jak již bylo diskutováno v předchozím odstavci, ekvivalentní podmínce, že všechny kořeny polynomu $\phi(z)$ leží vně kompaktního jednotkového kruhu. To je totiž totéž, jako když řekneme, že autoregresní operátor $\phi(B)$ je invertibilní. V takovém případě je lineární filtr transformující bílý šum na stacionární řešení rovnice (3.28) tvaru

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B) = \theta(B)\phi^{-1}(B). \tag{3.29}$$

Lineární filtr (3.29) je racionální funkcí v neurčité *B*. Invertibilita tohoto operátoru je ekvivalentní podmínce, že všechny kořeny polynomu $\theta(z)$ leží vně kompaktního jednotkového kruhu. Inverzní operátor je pak lineární filtr typu racionální funkce v neurčité *B*

$$\pi(B) = \theta^{-1}(B)\phi(B) = \phi(B)\theta^{-1}(B).$$

Je-li speciálně $\phi(B) = I$, je řešení rovnice (3.28) lineárním procesem (3.5) s polynomiálním lineárním filtrem (3.13). Tím je zřejmě operátor klouzavých součtů $\theta(B)$. Vzhledem k tomu, že nekonečná řada v (3.9) zde přechází v konečný součet, je stacionarita procesu zaručena. Tento proces

$$X = \theta(B)\mathcal{E} \tag{3.30}$$

se nazývá *pocesem klouzavých součtů řádu q* a značí se MA(q). Střední hodnota tohoto procesu je zřejmě nulová, rozptyl je

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2\left(1 + \sum_{j=1}^{q}\theta_j^2\right)$$

a autokovarianční funkce procesu (3.30) má tvar

$$\gamma_h = \sigma_\varepsilon^2(-\theta_1^2 + \textstyle\sum_{j=1}^{q-h}\theta_j\theta_{j+h}) \text{ pro } 1 \le h \le q, \text{ resp. } \gamma_h = 0 \text{ pro } h > q.$$

Vraťme se k příkladu 3.5.2, kde je uveden proces MA(1) a diskutována jeho invertibilita.

Příklad 3.6.1 Proces $= (I - \theta_1 B)\mathcal{E}$, tj. proces MA(1) je stacionární. Jeho autokovarianční struktura je:

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2), \gamma_1 = -\sigma_\varepsilon^2\theta_1^2, \gamma_h = 0 \text{ pro } h > 1, \tag{3.31a}$$

tj. autokorelační funkce tohoto procesu je

$$\varrho_1 = \frac{-\theta_1^2}{1+\theta_1^2}, \varrho_h = 0 \text{ pro } h > 1. \tag{3.31b}$$

Invertibilita procesu MA(1), tj. invertibilita operátoru klouzavých součtů $I - \theta_1 B$ je ekvivalentní podmínce $|\theta_1| < 1$. Stejnou autokovarianční strukturu (3.31a) má ale také proces MA(1) tvaru $X = (I - \frac{1}{\theta_1} B)\mathcal{E}$. Totiž zřejmě platí

$$\frac{-\frac{1}{\theta_1^2}}{1+\frac{1}{\theta_1^2}} = \frac{-\theta_1^2}{1+\theta_1^2} \ .$$

Nyní je jasné, že pokud zrovna nenastane případ, že $|\theta_1| = 1$, pak buď $|\theta_1| < 1$ anebo $\frac{1}{|\theta_1|} < 1$ a tedy právě jeden z uvažovaných procesů s autokorelační funkcí (3.31b) je invertibilní.

Jak ukazuje uvedený příklad, autokorelační funkce neurčuje stochastický proces jednoznačně. Z druhé strany ale platí, že je-li $X = (X_t)$ centrovaný stacionární proces s autokovarianční funkcí γ_h té vlastnosti, že pro nějaké $q \in \mathbb{N}$ je $\gamma_q \neq 0$ a $\gamma_h = 0$ pro $h > q$, pak tento proces je typu MA(q), tj. existuje bílý šum $\mathcal{E}$ tak, že lze psát (3.30), viz Brockwell, Davis, str. 89. V každém případě je autokorelační funkce procesu MA(q) od zpoždění $q + 1$ nulová.

Zvolíme-li v rovnici (3.28) operátor klouzavých součtů $\theta(B) = I$, není, na rozdíl od procesu (3.30), stacionarita řešení rovnice (3.28) zřejmá. Rovnice (3.28) má pak tvar

$$\phi(B)X = \mathcal{E}. \tag{3.32}$$

Pokud existuje stacionární řešení rovnice (3.32), nazývá se toto řešení *autoregresním procesem řádu p* a značí se AR(p). Stacionární řešení rovnice (3.32) existuje a je možno ho vyjádřit ve tvaru konvergentní řady (3.5), právě když je autoregresní operátor $\phi(B)$ invertibilní. Invertibilita tohoto operátoru je, jak jsme již výše poznamenali, ekvivalentní podmínce, že polynom $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ nemá v kompaktním jednotkovém kruhu komplexní roviny žádné kořeny. Pak je tedy $\psi(B) = \phi(B)^{-1}$.

Střední hodnota tohoto procesu je nulová, rozptyl je

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j \varrho_j)^{-1}$$

a autokovarianční funkce procesu (3.32) je

$$\gamma_h = \sum_{j=1}^{p} \phi_j \gamma_{h-j} \text{ pro } h = 1,2, \ldots$$

neboli pro autokorelační funkci tohoto procesu platí

$$\varrho_h = \sum_{j=1}^{p} \phi_j \varrho_{h-j} \text{pro } h = 1,2,\dots \tag{3.33}$$

To znamená, že autokorelační funkce procesu (3.32) je řešením lineární diferenční rovnice p-tého řádu (3.33) (jde přesně o homogenní rovnici, viz. 1.3.4). Z teorie těchto rovnic pak vyplývá, že obecné řešení rovnice (3.33) je tvaru

$$\rho_h = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{s=0}^{r_k-1} \alpha_{ks} h^s \right) \lambda_k^h$$

kde $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_m}$ jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$ s násobnostmi $r_1, \dots, r_m$, $\sum_{k=1}^{m} r_k = p$ a α_{ks} jsou skalární koeficienty (v počtu p), které lze dourčit z počátečních podmínek.

Příklad 3.6.2. Uvažujme stochastickou diferenční rovnici (3.32) s autoregresním operátorem $\phi(B) = I - \phi_1 B$. Tento operátor je invertibilní, právě když $|\phi_1| < 1$. Argumentace je stejná jako v příkladu 3.5.2. Lineární filtr (3.13) je zde tvaru $\psi(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_1^n B^n$, tj. posloupnost vah $\psi_n = \phi_1^n$ je geometrická. Řešením rovnice (3.32) je proces AR(1)

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_1^n B^n \mathcal{E}.$$

Cílem analýzy časových řad je vytvoření předpovědí. Ty lze tvořit až tehdy, zvolíme-li jisté kriterium. Tím je standardně požadavek na minimální čtvercovou chybu předpovědi. Uvažujme centrovaný stacionární proces (3.14), tj. $X = (X_{t-n}) \in \ell_\infty(L_2)$ s autokovarianční funkcí γ_h. Nejprve předpokládejme proces s konečně mnoha nenulovými členy, řekněme

$$X = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_1, 0,0, \dots) \in c_{00}(L_2),$$

kde $c_{00}(L_2)$ je proctor stochastických posloupností s konečným počtem nenulových členů (viz 2.1.5). Proces (3.34) odpovídá realizaci stochastického procesu, kdy je k dispozici jen konečný počet měření. Náhodnou veličinu $\hat{X}_{t+1} \in K = [\![X_t, X_{t-1}, \dots, X_1]\!]$ nazveme *předpovědí veličiny* $X_{t+1} \in L_2(\Omega)$ *s nejmenší čtvercovou chybou*, pokud

$$E\left|X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}\right|^2 = \left\|X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}\right\|_2^2 = 0. \tag{3.35}$$

Požadavek (3.35) říká, že předpověď s nejmenší čtvercovou chybou je ortogonální projekcí prvku X_{t+1} na prostor $K = [\![X_t, X_{t-1}, \dots, X_1]\!]$, podprostor Hilbertova prostoru $L_2(\Omega)$. To znamená, že lze aplikovat větu o projekci na uzavřený podprostor (viz 2.3.7), neboť prostor K je konečně dimenzionální, a proto uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $L_2(\Omega)$ (viz tvrzení B) v 2.1.3). Označíme-li tuto ortogonální projekci $P: L_2(\Omega) \to K$, je $PX_{t+1} = \hat{X}_{t+1}$. Určit $\hat{X}_{t+1}$ znamená určit koeficienty $\hat{\alpha}_j(t)$ ve vyjádření

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{t} \hat{\alpha}_j(t) X_{t+1-j}. \tag{3.36}$$

Vzhledem k ortogonalitě prvku $X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}$ k prostoru K musí být splněna rovnost

$$E\left(\left(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}\right)Y\right) = 0 \tag{3.37}$$

pro každé $Y \in K$. Zvolíme-li postupně $Y = X_{t+1-j}, j = t, \dots, 1$, dostaneme z (3.37) soustavu lineárních algebraických rovnic pro t neznámých $\hat{\alpha}_j(t), j = 1, \dots, t$:

$$\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t), \tag{3.38}$$

kde $\boldsymbol{C}(t) \in M(t)$ je matice řádu t s prvky $\left(\boldsymbol{C}(t)\right)_{ij} = \gamma_{i-j}$, tj. kovarianční matice procesu (3.34) pro posledních t časů (viz Věta 3.2.1), $\boldsymbol{\alpha}(t)$ je vektor neznámých a vektor pravých stran $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1, \dots, \gamma_t)$ je vektor příslušných hodnot autokovarianční funkce procesu.

Soustava (3.38) má vždy řešení, neboť ortogonální projekce existuje, nemusí však být jednoznačné. Matice soustavy (3.38) je pozivně semidefinitní, jak víme z Věty o nezápornosti kovarianční matice (viz odst. 3.2), může být ovšem singulární. V takovém případě je možno předpověď (3.36) vyjádřit nekonečně mnoha způsoby pomocí generující skupiny lineárního obalu K.

Předchozí úvahu lze na základě Věty o projekci na uzavřený podprostor Hilbertova prostoru zobecnit pro libovolný centrovaný stacionární proces (3.14). V takovém případě je ale podprostor $W = [\![X_t,\ X_{t-1}, \dots]\!]$ obecně nekonečně dimenzionální a nemáme zaručenu jeho uzavřenost. Proto je třeba vzít projekci na jeho uzávěr $K = \overline{W}$. Nakonec ještě poznamenejme, že ortogonální projekce z Věty o projekci na uzavřený podprostor Hilbertova prostoru se v terminologii teorie pravděpodobnosti označuje jako podmíněná střední hodnota:

$$PX_{t+1} = E(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots).$$

Kapitola IV

Nestacionární procesy. Samoadjungované operátory

V této kapitole je věnována pozornost nestacionárnímu procesu, jehož autoregresní operátor je diferenční operátor. Věta o spektrálních vlasnostech operátoru zpětného posunutí ukazuje, že operátor diference není v prostoru omezených stochastických posloupností invertibilní. Situace se změní, přejdeme-li do prostorů $\ell_p(L_2), p \in [1,\infty)$, z nichž nejvýznačnější je případ Hilbertova prostoru pro $p = 2$. V odst. 4.1 jsou tyto prostory popsány. Je zaveden pojem stochastického procesu až do úrovně N, neboť klasicky definovaný stacionární proces nemůže ležet v $\ell_p(L_2), p \in [1,\infty)$ Rovněž je v tomto odstavci věnována pozornost spektrálním vlastnostem operátoru zpětného posunutí v těchto prostorech. V odst. 4.2 jsou připomenuty důležité symetrické a samoadjungované operátory, zejména vlasnost uzavřenosti samoadjungovaného operátoru. Jde o partii, která představuje přípravu pro odst. 4.3, ve kterém je provedena symetrizace diferenčního operátoru ve snaze získat tzv. zobecněné řešení stochastické diferenční rovnice (4.6). Jedná se fakticky o hledání řešení rovnice (4.6) ve smyslu nejmenších čtverců. Ukazuje se, že oba problémy, původní i symetrizovaný, jsou tzv. špatně podmíněné úlohy. Špatně podmíněné úlohy se vyskytují v hojném množství ve všech oblastech aplikovaných věd, např. Horowitz, 2014 pro oblast ekonomie. Moderní přístup k řešení těchto úloh spočívá v tzv. regularizaci. Té je věnován odst. 4.4. V závěrečném odst. 4.5 je pak zmíněno klasické diferencování časových řad, jako jistý způsob regularizace. Regularizace úlohy znamená převedení dané špatně podmíněné úlohy na úlohu dobře podmíněnou. Dobře podmíněné úlohy mají stabilní řešení. V teorii stochastických procesů je stabilizaci věnována značná pozornost a obvykle se provádí diferencováním. Závěrečné poznámky jsou věnovány problému předifferencování řady a vztahu diferencování a regularizace. Použitá literatura v této kapitole je zejména literatura z oblasti funkcionální analýzy (Lukeš, 2012), stochastických procesů (Arlt, 1999) a teorie regularizace (Hansen, 1998, Nair, 2009, Morozov, 1984, Klebanov, Kozubowski, Rachev 2006) a články uvedené v seznamu literatury týkající se nestability a regularizace řešení (Sanchez, 2002, Tichonov, 1963). Problematiku předifferencování časové řady obsahuje článek Bell, 1987

4.1 Spektrální analýza operátoru zpětného posunutí v prostorech $\ell_p(L_2)$

V odstavci 3.5. jsme ukázali (též Příklad 3.5.1), že diferenční operátor

$$I - B \in \mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)] \tag{4.1}$$

není invertibilní. Formální inverze, mocninná řada $I + B + B^2 + \cdots$, není konvergentní v normě prostoru $\mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$. Důvodem neinvertibility operátoru (4.1) je existence vlastního vektoru (konstantního stochastického procesu) $E = (1,1,1,\dots)$ příslušného vlastnímu číslu 1 operátoru (3.15). V tomto odstavci ukážeme, že v prostorech $\ell_p(L_2)$, kde $p \in [1,\infty)$, tj. v prostorech posloupností, jejichž členy jsou funkce z prostoru $L_2(\Omega)$, pro které platí (4.2), operátor (4.1) invertibilní je. Norma v těchto prostorech je definována analogicky k případu klasických prostorů (číselných posloupností) $\ell_p, p \in [1,\infty)$, viz (2.9), tj.

$$\|X\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|X_{t-n}\|_2^p\right)^{1/p} < \infty, \tag{4.2}$$

přičemž $X = (X_t, X_{t-1}, \dots)$ je stochastická posloupnost (3.14).

Nutnou podmínkou pro konvergenci číselné řady na pravé straně v (4.2) je rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \|X_{t-n}\|_2 = 0. \tag{4.3}$$

Rovnost (4.3) ukazuje vztah prostorů $\ell_p(L_2)$, kde $p \in [1,\infty)$, k prostoru omezených stochastických posloupností $\ell_\infty(L_2)$ s normou (3.16). V odst. 2.1.5 byl popsán vzájemný vztah mezi číselnými ℓ_p prostory a ten je platný i v našem případě stochastických posloupností: pro libovolné $1 \le p \le q \le \infty$ je $\|X\|_q \le \|X\|_p$, tj. $\ell_p(L_2) \subset \ell_q(L_2)$, přičemž pro různá p a q je inkluse ostrá. Všechny $\ell_p(L_2)$, $p \in [1,\infty)$ jsou podprostory prostoru $c_0(L_2)$ posloupností (3.14) splňujících (4.3). Prostor $c_0(L_2)$ je uzavřeným podprostorem prostoru $\ell_\infty(L_2)$ vzhledem k (3.16), tudíž se jedná o Banachův prostor. Podle tzv. Banachovy alternativy (Lukeš, 2012, str. 46) jsou $\ell_p(L_2)$ podprostory 1.kategorie v $c_0(L_2)$ (tím spíš v $\ell_\infty(L_2)$), (Lukeš, 2012, str. 304).

Vzhledem k (3.17) neleží ale bohužel stacionární procesy v prostorech $\ell_p(L_2)$. Jinak řečeno, konstantní rozptyl a konstantní nenulovou střední hodnotu nemůže mít žádný stochastický proces, který splňuje (4.2). Centrováním procesu lze sice docílit nulové střední hodnoty procesu, ale rozptyl zůstává konstantní. Vzdát se stacionarity může působit nezvykle, na druhou stranu neměnnost rozptylu, či střední hodnoty veličin v procesu působí z hlediska reality poněkud uměle. Při řešení reálných problémů je známa pouze konečná časová řada. Stochastický proces lze také uvažovat jako stacionární až do jakkoli vzdálené minulosti, tj. $EX_{t-n}^2 = \sigma^2, n = 0, \cdots, N$, kde N je libovolně velké přirozené číslo a pro $n > N$ uvažovat

$EX_{t-n}^2 = \sigma_{t-n}^2 \to 0$. Lze se oprávněně domnívat, že velmi vzdálená část uvažovaného stochastického procesu má na současný průběh procesu malý vliv. Takový proces můžeme nazývat např. jako *proces stacionární až do úrovně N*. Speciálně je třeba upravit pojem bílého šumu $\mathcal{E} = (\varepsilon_{t-n})$ tak, aby rozptyl veličin v tomto procesu začal od jistého N konvergovat k nule. Přitom ortogonalita (nekorelovanost) jeho veličin zůstává zachována.

Nyní přistoupíme ke spektrální analýze operátoru (3.15) v prostoru $\ell_p(L_2)$, $p \in [1,\infty)$. Prostor $\ell_p(L_2)$ je Banachův prostor (vzhledem k (4.2)). I v tomto případě je operátor (3.15) spojitý s normou jedna. Vlastní číslo operátoru (3.15) je nyní každé komplexní číslo λ, pro které $|\lambda| < 1$. Jemu příslušný vlastní vektor (stochastická posloupnost) je

$$\Lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots), \tag{4.4}$$

viz také (3.18). Na rozdíl od případu prostoru $\ell_\infty(L_2)$ však posloupnost (4.4) nepatří pro $|\lambda| = 1$ do prostoru $\ell_p(L_2), p \in [1,\infty)$, a proto prvky hranice spektra operátoru (3.15) nejsou vlastní čísla. To ale znamená, že pro $|\lambda| = 1$ operátor $(\lambda I - B)^{-1}$ existuje. Komplexní jednotky, tj. čísla λ splňující $|\lambda| = 1$, jsou součástí spektra operátoru B, neboť spektrum spojitého operátoru je uzavřená množina (viz 2.4.2). Obor hodnot operátoru $\lambda I - B$, tj. prostor $\mathcal{R}(\lambda I - B)$ je hustý v prostoru $\ell_p(L_2), p \in [1,\infty)$, neboť obsahuje posloupnosti s konečným počtem nenulových členů, tj. prvky prostoru $c_{00}(L_2)$ (viz 2.1.5). Avšak $\mathcal{R}(\lambda I - B) \neq \ell_p(L_2)$, neboť v opačném případě by podle věty o lineárním homeomorfismu Banachových prostorů (viz 2.3.1) byl $(\lambda I - B)^{-1}$ spojitý a tedy číslo λ by patřilo do rezolventní množiny operátoru B (viz 2.4.1). V každém případě je tedy pro $|\lambda| = 1$ operátor $(\lambda I - B)^{-1}$ nespojitý, definovaný na množině $\mathcal{R}(\lambda I - B)$ husté v prostoru $\ell_p(L_2), p \in [1,\infty)$. Pro úplnost ještě poznamenejme, že pro $|\lambda| < 1$ je $\mathcal{R}(\lambda I - B) = \ell_p(L_2)$, $p \in [1,\infty)$, což platí i pro $p = \infty$ (viz Věta o spektrálních vlastnostech operátoru zpětného posunutí, odst. 3.5).

Stochastický proces $X = (X_{t-n})$, označovaný jako *náhodná procházka*, definovaný rovnicí

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t\,, \tag{4.5}$$

kde $\mathcal{E} = (\varepsilon_{t-n})$ je bílý šum, není v $\ell_\infty(L_2)$ konvergentní. Zřejmě lze (4.5) přepsat do tvaru operátorové rovnice

$$(I - B)X = \mathcal{E}\,. \tag{4.6}$$

Uvažujme nyní $I - B \in \mathcal{L}[\ell_p(L_2)]$, $p \in [1,\infty)$ a bílý šum $\mathcal{E}$ je prvek prvek $\ell_p(L_2)$, $p \in [1,\infty)$, tj. stacionární bílý šum do úrovně *N*. Podstatné zjištění je to, že rovnice (4.6) nemá řešení pro libovolnou pravou stranu z prostoru $\ell_p(L_2)$, ale pouze pro $\mathcal{E} \in \mathcal{R}(I - B)$, kde $\mathcal{R}(I - B)$ je prostor hustý v $\ell_p(L_2)$, různý od $\ell_p(L_2)$, tj. podle Banachovy alternativy množina 1.kategorie v $\ell_p(L_2)$. Prvky $\mathcal{R}(I - B)$ jsou např. stochastické posloupnosti $\mathcal{E} \in c_{00}(L_2)$, tj. posloupnosti mající jen konečný počet nenulových složek. Nespojitost operátoru $(I - B)^{-1}$ způsobuje nestabilitu řešení operátorové rovnice (4.6), či jinak řečeno rovnice (4.6) je špatně podmíněná (anglicky ill-posed problem).

4.2 Symetrické, samoadjungované a nezáporné operátory v Hilbertových prostorech

V tomto odstavci připomeneme některá známá fakta, která se týkají samoadjungovaných a symetrických operátorů v Hilbertově prostoru. Rozsáhle a velmi srozumitelně je tato problematika zpracována v dnes již klasické literatuře Riesz, Nagy 1955.

V odstavci 2.3 jsme se zabývali spojitými operátory a spojitými lineárními funkcionály v Hilbertových prostorech. Připomeňme, že pro spojitý operátor $T \in \mathcal{L}[H]$, kde H je Hilbertův prostor, je při pevně zvoleném $w \in H$ zobrazení $\varphi_w(u) = (Tu, w)$ spojitý lineární funkcionál definovaný v H, tj. prvek duálního prostoru H^*. Podle Rieszovy věty o reprezentaci (viz 2.3) existuje jediný prvek $w^* \in H$ takový, že $\varphi_w(u) = (u, w^*)$ pro každé $u \in H$. Tím je jednoznačně definován operátor $T^*: H \to H, T^*w = w^*$, tzn.

$$(Tu, w) = (u, T^*w) \tag{4.7}$$

pro každé $u, w \in H$. Operátor T^* se nazývá adjungovaný operátor k operátoru *T*.

V uvedené úvaze hraje hlavní roli spojitost skalárního součinu. Lze dokonce i pro nespojitý operátor T na Hilbertově prostoru zavést pojem adjungovaného operátoru, přičemž nutnou i postačující podmínku pro existenci takového operátoru, který splňuje (4.7) alespoň pro nějaké $w \in H$ je hustota definičního oboru operátoru *T*, tj. $D(T) \subset H$ a $\overline{D(T)} = H$. Jestliže pro daný vektor $w \in H$ existuje $w^* \in H$ té vlastnosti, že pro všechna $u \in D(T)$ je

$$(Tu, w) = (u, w^*)\,, \tag{4.8}$$

je prvek w^* určen jednoznačně. Skutečně, pokud by existovaly dva prvky $w_1^*, w_1^* \in H$ s vlastností (4.8), pak by pro každé $u \in D(T)$ platilo $(u, w_1^*) = (Tu, w) = (u, w_2^*)$ a odtud $(u, w_1^* - w_2^*) = 0$. Z hustoty $D(T)$ v H a spojitosti skalárního součinu (viz 2.3) plyne $w_1^* - w_2^* = o$ a tedy jednoznačnost w^* splňujícího (4.8). Tak je definován adjungovaný operátor T^* rovností $T^*w = w^*$ minimálně na triviálním podprostoru prostoru H. Linearita operátoru T^* plyne z linearity skalárního součinu. Navíc je tento operátor vždy uzavřený (viz 2.3.2), jak plyne ze spojitosti skalárního součinu:

Je-li (w_n) posloupnost v $D(T^*)$ taková, že $w_n \to w$ a $T^*w_n \to w^*$, pak $(Tu, w) = \lim_{n\to\infty}(Tu, w_n) = \lim_{n\to\infty}(u, T^*w_n) = (u, w^*)$ pro každé $u \in D(T)$ a tedy $w \in D(T^*)$ a $T^*w = w^*$.

Z uvedených úvah není nijak patrné, jak velký je definiční obor operátoru T^*. Zřejmě vhodný případ je takový, aby $D(T^*)$ byl hustý v H. Toho lze docílit takto:

Věta o adjungovaném operátoru k uzavřenému operátoru. Je-li T uzavřený operátor s definičním oborem hustým v H, je $D(T^*)$ hustý v H. Pak také existuje $T^{**} = (T^*)^*$ a platí rovnost $T^{**} = T$.

Pokud T není uzavřený, ale má definiční obor hustý v H, je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby $D(T^*)$ byl hustý v H, existence uzavřeného rozšíření operátoru T. V tom případě je T^{**} nejmenší takové rozšíření operátoru T. Mezi lineární operátory, které mají uzavřené rozšíření patří symetrické operátory:

Operátor T, $D(T) \subset H$ a $\overline{D(T)} = H$, se nazývá *symetrický*, jestliže

$$(Tu, w) = (u, Tw) \tag{4.9}$$

platí pro všechny $u, w \in D(T)$. Rovnost (4.9) nápadně připomíná rovnost (4.7). Skutečně, je-li dokonce $D(T) = H$ je zřejmě

$$T = T^* \tag{4.10}$$

a z uzavřenosti T^* definovaného nyní na celém Hilbertově prostoru platí dokonce podle věty o uzavřeném grafu (viz 2.3.2), že T je spojitý, tj. $T \in \mathcal{L}[H]$. Obecně ale rovnost $D(T) = H$ nepředpokládáme. Platí-li pro operátor T i za našeho obecnějšího předpokladu na jeho definiční obor rovnost (4.10), říkáme, že operátor T je *samoadjungovaný*.

Jak jsme již uvedli, v obecném případě je symetrický operátor rozšiřitelný na uzavřený operátor (např. T^{**}) a ten již má adjungovaný operátor definovaný na hustém podprostoru prostoru H. Přitom je zřejmé, že nebude-li symetrický operátor uzavřený (a tedy ani spojitý), nemůže splňovat (4.10), tedy být samoadjungovaný. Vzniká otázka, zda je každý symetrický operátor rozšiřitelný na samoadjungovaný operátor? Na tuto otázku je odpověď záporná. Nicméně, pokud samoadjungované rozšíření existuje, je maximálním symetrickým rozšířením operátoru T.

Pokud má symetrický operátor s hustým oborem hodnot inverzní operátor , je tento inverzní operátor opět symetrický: $(T^{-1}u, w) = (T^{-1}u,\ TT^{-1}w) = (TT^{-1}u, T^{-1}w) = (u, T^{-1}w)$.

Věta (o inverzním operátoru k samoadjungovanému operátoru).. Je-li samoadjungovaný operátor invertibilní, je jeho inverzní operátor také samoadjungovaný.

Důkaz: Podle předpokladu platí pro samoadjungovaný operátor T rovnost $(T^*)^{-1} = T^{-1}$. Chceme dokázat, že $(T^{-1})^* = T^{-1}$. Existence adjungovaného operátoru k inverzu T^{-1} je ekvivalentní hustotě $D(T^{-1})$ v prostoru H. Platí, že $D(T^{-1}) = \{Tu: u \in D(T)\}$. Jestliže $(Tu, w) = 0$ pro každé $u \in D(T)$, pak $w \in D(T^*)$. Potom ale platí, že $(Tu, w) = (u, T^*w) = (u, Tw) = 0$ pro každé $u \in D(T)$ a z hustoty $D(T)$ a spojitosti skalárního součinu plyne $Tw = o$. To však implikuje díky existenci T^{-1} rovnost $w = o$. Jediný ortogonální vektor k prostoru $D(T^{-1})$ je tedy nulový, a proto $(T^{-1})^*$ existuje. Dále platí rovnost $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ a tím je důkaz hotov.

Není-li operátor T symetrický, lze provést jeho symetrizaci (viz 2.3.4), tj. přejít k operátoru T^*T. Tento operátor je podle naší definice symetrický, pokud je T hustě definovaný v H a např. uzavřený. Je-li T dokonce definovaný na celém H a uzavřený, je podle věty o uzavřeném grafu (viz 2.3.2) spojitý, pak je také spojitý T^* (viz 2.3.5) a z toho plyne, že T^*T je samoadjungovaný. Přitom inverzní operátor k T^*T (pokud existuje) nemusí být spojitý, ale v každém případě je samoadjungovaný. Právě příklad takového operátoru je naším tématem v následujícím odstavci.

Symetrický operátor A v Hilbertově prostoru H se nazývá *nezáporný operátor,* jestliže pro každý vektor $u \in H$ platí $(Au, u) \geq 0$. Je-li dokonce $(Au, u) > 0$ pro libovolný $u \neq o$, říkáme, že A je *kladný operátor*. Tyto pojmy v konečně dimenzionálních prostorech odpovídají pojmům *pozitivně semidefinitní,* resp. *pozitivně definitní matice.* Např. kovarianční matice (3.2) je pozitivně semidefinitní a je-li regulární, je dokonce pozitivně definitní.

Symetrizace operátoru T, tj. operátor T^*T, je vždy nezáporný operátor (v konečné dimenzi pozitivně semidefinitní matice). Pro každé $u \in D(T)$ totiž platí $(T^*Tu, u) = (Tu, Tu) = \|Tu\|^2 \geq 0$. Kladnost operátoru T^*T je ekvivalentní invertibilitě operátoru T. Přitom v nekonečné dimenzi není nespojitost T^{-1} i $(T^*\,T)^{-1}$ vyloučena.

4.3 Symetrizace modelu náhodné procházky a problém nestability řešení

V odstavci 4.1 jsme ukázali, že diferenční operátor

$$I - B \in \mathcal{L}\big[\ell_p(L_2)\big], p \in [1,\infty) \tag{4.11}$$

je invertibilní, přičemž inverze $(\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1}$ je nespojitá a definovaná na hustém podprostoru prostoru $\ell_p(L_2)$. Abychom mohli využít poznatků z předchozího odstavce, omezíme se na případ $p = 2$. Prostor $\ell_2(L_2)$ je Hilbertův prostor, vzhledem ke skalárnímu součinu $(X, Y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} E(X_{t-n}Y_{t-n})\right)^{1/2}$. Lze ukázat (viz odst. 2.2), že je izometricky izomorfní s klasickým prostorem ℓ_2. Jeho prvky jsou centrované stochastické posloupnosti, jejichž členy jsou náhodné veličiny s konečnými druhými momenty, přičemž rozptyl těchto veličin, byť by byl konstantní pro libovolný konečný počet členů, musí konvergovat k nule.

Nespojitost inverze diferenčního operátoru působí značné problémy z hlediska jak problému existence řešení operátorové rovnice (4.6), tak nestability tohoto řešení. První problém je dán tím, že obor hodnot operátoru (4.11.) je hustý v $\ell_2(L_2)$, ale různý od $\ell_2(L_2)$, zatímco nestabilitu při již vhodně zvolené pravé straně v (4.6) způsobuje nespojitost inverze. Jisté zmírnění (a zároveň východisko pro další konstrukce) těchto nepříjemných vlastností rovnice (4.6) v $\ell_2(L_2)$ lze získat symetrizací diferenčního operátoru. Proto rovnici (4.6) vynásobíme adjungovaným operátorem $(I - B)^* = I - B^*$. Pro porozumění vlastnostem tohoto operátoru nejprve analyzujeme operátor B^*, adjungovaný k operátoru zpětného posunutí *B*.

Uvážíme-li maticovou reprezentaci operátoru zpětného posunutí (3.15), víme (viz 2.3.6), že operátor B^* je reprezentován maticí transponovanou k (3.15), tj.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

kterou ztotožníme s B^*. Víme, že norma i spektrum spojitého lineárního operátoru a operátoru k němu adjungovaného jsou stejné: $\|B^*\| = \|B\| = 1$ (viz 2.3.5) a $\sigma(B^*) = \sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq 1\}$ (viz 2.4.4 a 4.1). Na druhou stranu struktura spektra operátoru B^* je jiná než v případě B. Operátor B^* nemá žádná vlastní čísla, vnitřek jednotkového kruhu je reziduové spektrum (inverzní operátor existuje, ale je definován na vlastním podprostoru prostoru $\ell_2(L_2)$, který není v $\ell_2(L_2)$ hustý, níže je označený M). Operátor B^* je hezkým příkladem izometrického izomorfismu, tj. operátoru zachovávajícího skalární součin, který však není operátorem unitárním v $\ell_2(L_2)$ (viz. 2.3.5). Na hranici spektra, tj. pro $|\lambda| = 1$, je klasifikace stejná, jako v případě operátoru B, tj. $(\lambda I - B^*)^{-1}$ existuje, není spojitý a je definován na hustém podprostoru prostoru $\ell_2(L_2)$.

Operátor B^* lze nazvat operátorem dopředného posunutí. Je-li $X = (X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots)$, je $Y = B^*X = (0, X_t, X_{t-1}, \cdots)$. První složka obrazu Y centrovaného procesu X je nulová, tj. střední hodnota centrovaného stochastického procesu Y. Operátor B^* není v žádném případě inverzním operátorem k operátoru B. Součin $BB^* = I_{\ell_2(L_2)}$, ale $B^*B = I_M$, kde M je podprostor prostoru $\ell_2(L_2)$ tvořený stochastickými procesy s nulovou první složkou. M je uzavřený vlastní podprostor prostoru $\ell_2(L_2)$. Matice operátoru B^*B je

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \end{bmatrix}.$$

Operátor B^* lze přesně označit jako tzv. Moore Penroseovu pseudoinverzi operátoru B.

Vraťme se nyní k adjungovanému operátoru $I - B^*$. Víme nyní o něm, že má nespojitý inverzní operátor definovaný na hustém podprostoru prostoru $\ell_2(L_2)$. Symetrizace operátoru $I - B \in \mathcal{L}[\ell_2]$ je tedy nezáporný operátor $(I - B^*)(I - B) = I - B^* - B - B^*B$, jehož maticová reprezentace je

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \\ 0 & -1 & 2 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Označme tento operátor S. Jedná se o spojitý a symetrický operátor definovaný na celém prostoru $\ell_2(L_2)$, tedy (viz odst. 4.2) jde o samoadjungovaný operátor. Operátorová rovnice (4.6) přechází symetrizací do tvaru

$$SX = (I - B^*)\mathcal{E}\,. \tag{4.14}$$

Vlastnosti operátoru S jsou uvedeny v (2.22). Z nich vyplývá, že inverzní operátor k operátoru S existuje, je nespojitý, definovaný na hustém podprostoru prostoru $\ell_2(L_2)$. Rozdíl oproti původní úloze (4.6) je ten, že S^{-1} je uzavřený, neboť je samoadjungovaný, jak víme z věty o inverzním operátoru k samoadjungovaného operátoru (viz 4.2). Operátor S je dokonce kladný (nula není jeho vlastním číslem, neboť existuje S^{-1}). Z věty o zobrazení spektra pro polynomy (viz 2.4.2) plyne, že $\sigma(I - B) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}$, a proto $\sigma(S) = [0,4]$ (viz poslední vztah v (2.22) a 2.4.4). Horní mez 4 je rovna spektrálnímu poloměru $r(S)$ a tedy normě samoadjungovaného operátoru S (viz 2.4.4 věta o spektrálním poloměru samoadjungovaného operátoru). Podstatná pro řešení rovnice (4.14) je ale dolní mez 0, která patří do spojité části jeho spektra (viz 2.4.3).

Uzavřenost operátoru S^{-1} nám dává jediné řešení rovnice (4.14) v následujícím smyslu (viz 2.3.2): je-li $\zeta^{(n)} = (I - B^*)\mathcal{E}^{(n)} \in \mathcal{R}(S)$, $\mathcal{E}^{(n)} \to \mathcal{E}$ a tedy $\zeta^{(n)} \to \zeta = (I - B^*)\mathcal{E}$, a je-li zároveň $\xi^{(n)} = S^{-1}\zeta^{(n)} \to \xi$, pak $\zeta = (I - B^*)\mathcal{E} \in \mathcal{R}(S)$ a $S^{-1}\zeta = \xi$ je jediné řešení rovnice (4.14).

Členy posloupnosti $\mathcal{E}^{(n)}$ je přirozené volit tak, aby se na prvních n složkách shodovaly s prvními n členy daného procesu bílého šumu $\mathcal{E}$. V tom případě i členy posloupnosti $\zeta^{(n)}$ budou mít jen konečný počet nenulových členů a budou díky spojitosti operátoru $I - B^*$ konvergovat k procesu $\zeta = (I - B^*)\mathcal{E}$. Nicméně předpoklad konvergence posloupnosti $\xi^{(n)}$ nelze díky nespojitosti S^{-1} zaručit.

Problém špatné podmíněnosti rovnice (4.14) je dobře patrný už v konečně dimenzionální aproximaci S_n operátoru (4.13), tj. u operátoru reprezentovaného maticí

$$\boldsymbol{S}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & \\ & \vdots & & \ddots & -1 \\ & 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M(n) \tag{4.15}$$

($M(n)$ má význam jak v 1.3.3). Inverzní matice k (4.15) má tvar

$$\boldsymbol{S}_n^{-1} = \begin{bmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & & 2 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Matice (4.16) jsou kladné matice (ve smyslu kladnosti po prvcích i ve smyslu pozitivní definitnosti). Tyto matice tvoří (po doplnění nulami ne nekonečné matice) neomezenou posloupnost v Banachově algebře spojitých lineárních operátorů, jak plyne z analýzy jejich norem. Největší vlastní číslo matice (4.16) je velikosti $O(n^2)$. To lze snadno nahlédnout pomocí stopy matice, která je součtem vlastních čísel matice a zároveň podle její definice součtem diagonálních prvků matice. Toto největší vlastní číslo je zároveň její spektrální normou a tak je zřejmé, že soustava lineárních algebraických rovnic s maticí soustavy (4.15) je tzv. špatně podmíněná (viz Tebbens, Hnětynková, Plešinger, Strakoš, Tichý, 2012). Lze též argumentovat pomocí Schurovy věty, kterou uvádí Taylor, 1973 na str. 309.

Problém, se kterým jsme konfrontováni patří do třídy tzv. špatně podmíněných úloh. Metodám řešení těchto úloh, zejména z hlediska numerických aspektů, byla věnována řada prací fakticky od počátku historie použití samočinných počítačů. Ústřední myšlenkou je regularizace takové úlohy. V dalším odstavci se budeme zabývat jednou z nejdůležitějších metod regularizace, tzv. Tichonovovou regularizací, přičemž na našem konkrétním případě předvedeme základní myšlenky, které vedou k získání aproximace řešení rovnice (4.14).

4.4 Regularizace a její aplikace na model náhodné procházky

Pojem špatně podmíněné úlohy (angl. ill-posed problem) byl zaveden J.Hadamardem (viz Hadamard 1902). Hadamard se v té době zabýval problematikou parciálních diferenciálních rovnic (Cauchyův problém pro Laplaceovu rovnici). Hadamard definoval, že dobře podmíněná úloha je taková, která má jediné řešení, přičemž toto řešení je spojitě závislé na datech. V opačném případě je problém tzv. špatně podmíněný. Omezíme-li se na úlohu typu lineární operátorové rovnice

$$Ax = b,$$

kde $A: M \to N$ je lineární operátor NLP M do NLP N a $b \in N$ je pevně zvolený, pak v konečné dimenzi se lze setkat s problémem neexistence nebo nejednoznačnosti řešení, nikoli nespojité závislosti řešení na datech. V takovém případě lze neexistující (klasické)

řešení nahradit řešením zobecněným (ve smyslu nejmenších čtverců), kde aplikujeme symetrizaci a následně Moore-Penroseovu inverzi (viz např. Horský, 2012). Spojitá závislost řešení na datech je v konečné dimenzi zajištěna, přičemž jakousi analogií nespojitosti je v tomto případě velké číslo podmíněnosti matice soustavy (viz předchozí poznámka k matici (4.16). Problém nespojité závislosti na datech se objevuje až v úlohách nekonečně dimenzionálních. Na konci 50. a na začátku 60. let se věnovali řešení špatně podmíněných úloh vynikající ruští matematikové vedení A.N.Tichonovem. Do této doby lze datovat začátek éry regularizačních metod. Jedna z nejznámějších, tzv. Tichonovova regularizační metoda, vznikla právě v této době (Tichonov, 1963). Kromě Tichonovovy regularizační metody existují i jiné metody jako např. metoda zaokrouhlené singulární dekompozice nebo Landweberových iterací.

Operátorová rovnice (4.6) je typickým příkladem špatně podmíněné úlohy, jak jsme ukázali v předchozích odstavcích. Aplikujeme nyní klasickou Tichonovovu regularizaci právě na tuto rovnici a to za předpokladu, že operátor diference (4.11) budeme uvažovat v Hilbertově prostoru $\ell_2(L_2)$. Pak budeme moci využít poznatků a pojmů, které jsme zavedli a odvodili v předchozí části. Pro stručnost označíme operátor diference $\Delta = I - B$.

Regularizační systém pro řešení rovnice (4.6) je soubor operátorů

$$\{R_\alpha : \alpha > 0\} \tag{4.17}$$

z prostoru $\mathcal{L}[\ell_2(L_2)]$, pro které platí

$$\lim_{\alpha \to 0+} R_\alpha \Delta X = X. \tag{4.18}$$

Uvedená limita je bodová limita v prostoru $\ell_2(L_2)$ a znamená, že součin operátorů $R_\alpha \Delta$ konverguje bodově k identitě I na prostoru $\ell_2(L_2)$ pro $\alpha \to 0+$. Uvedená konvergence nemůže být a není konvergencí v topologii normy prostoru $\mathcal{L}[\ell_2(L_2)]$ (tj. stejnoměrná konvergence, viz 2.3.1). V opačném případě by totiž $\lim_{\alpha \to 0+} R_\alpha = \Delta^{-1}$ byl spojitý operátor na prostoru $\ell_2(L_2)$, ale to není pravda, jak víme z odst. 4.1. Jinými slovy: množina (4.17) není stejnoměrně omezená množina v prostoru $\mathcal{L}[\ell_2(L_2)]$. Kdyby totiž existovala reálná konstanta $C > 0$ tak, že pro všechna $\alpha > 0$ by platilo, že $\|R_\alpha\| < C$, pak by pro každé $Y = \Delta X \in \mathcal{R}(\Delta) \subset \ell_2(L_2)$ platilo:

$$\|\Delta^{-1} Y\| = \|R_\alpha Y - R_\alpha Y + \Delta^{-1} Y\| \leq \|R_\alpha Y\| + \|X - R_\alpha \Delta X\| \leq C\|Y\| + \|X - R_\alpha \Delta X\| \,.$$

Limitním přechodem pro$\alpha \to 0+$ bychom dostali, vzhledem k (4.18), že $\|\Delta^{-1}Y\| \leq C\|Y\|$ a to by byl spor s nespojitostí Δ^{-1}.

Bílý šum na pravé straně rovnice (4.6) nemusí být obecně prvkem $\mathcal{R}(\Delta)$. Je-li navíc $\mathcal{E}_\delta$ porucha bílého šumu, splňující podmínku

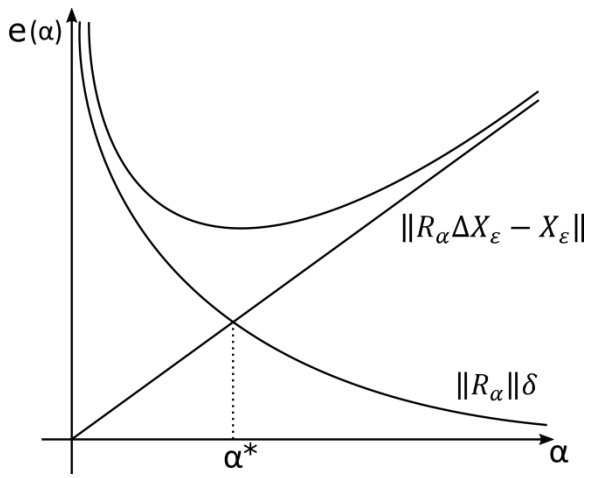
$$\|\mathcal{E}_\delta - \mathcal{E}\| \leq \delta \text{ pro dané } \delta > 0,$$

nemusí ani tato porucha patřit do definičního oboru operátoru Δ^{-1} , tj. prostoru $\mathcal{R}(\Delta)$. V každém případě jsou ale tyto procesy prvky definičního oboru každého z operátoru ze souboru (4.17). Označme $X_{\alpha,} = R_\alpha \mathcal{E}$, resp. $X_{\alpha,\delta} = R_\alpha \mathcal{E}_\delta$. Předpokládejme dále, že rovnice (4.6) má řešení a toto řešení označme X_ε . Platí následující odhad:

$$\|X_{\alpha,\delta} - X_\varepsilon\| \leq \|X_{\alpha,\delta} - X_\alpha\| + \|X_\alpha - X_\varepsilon\| = \|R_\alpha \mathcal{E}_\delta - R_\alpha \mathcal{E}\| + \|R_\alpha \mathcal{E} - X_\varepsilon\| \leq$$

$$\leq \|R_\alpha\|\delta + \|R_\alpha \Delta X_\varepsilon - X_\varepsilon\| = e(\alpha). \tag{4.19}$$

Druhý sčítanec na pravé straně v (4.19) konverguje podle (4.18) k nule. První sčítanec může však nabývat libovolně velkých hodnot, neboť vzhledem k tomu, že množina (4.17) není omezená, existuje posloupnost $\alpha_n \to 0+$ taková, že $\|R_{\alpha_n}\| \to \infty$. Pozorujeme tedy, že jsou zde dvě protichůdné tendence. Malá hodnota parametru α způsobí velký první a malý druhý sčítanec. A opačně velká hodnota α bude působit zmenšení prvního, ale zároveň zvětšení druhého sčítance. Je tedy jasné, že vhodná volba parametru α musí představovat kompromis a tato volba je ústředním tématem teorie regularizace. Situace je znázorněna na obr.5.



Obr.5 Diskrepance regularizačního efektu a efektu špatné podmíněnosti.

Tichonovova regularizační metoda je klasická regularizační metoda. Lze ji použít pro řešení operátorové rovnice (4.6). Postup začíná symetrizací rovnice (4.6), tj. přechodem k rovnici (4.14). Jak jsme ale viděli v odst. 4.3, nejen úloha (4.6), ale i (4.14) nese znaky špatně podmíněné úlohy. Klasická Tichonovova regularizace probíhá tak, že k operátoru (4.13) $S = \Delta^*\Delta$ přičteme kladný násobek identity, tj. budeme pracovat s operátorem

$$\alpha I + S, \tag{4.20}$$

kde $\alpha > 0$. Operátor (4.20) je zřejmě samoadjungovaný, tj. spojitý lineární operátor na prostoru $\ell_2(L_2)$. Navíc je spojitě invertibilní, neboť $\alpha I + S = -(-\alpha I - S)$ a $-\alpha < 0$ patří do jeho rezolventní množiny. V dalších zápisech budeme opět místo S používat symbolu $\Delta^*\Delta$ pro zdůraznění symetrizace.

Regularizovaná rovnice (4.14) má tvar

$$(\alpha I + \Delta^*\Delta)X = \Delta^*\mathcal{E}, \tag{4.21a}$$

resp. s poruchou $\mathcal{E}_\delta$ bílého šumu $\mathcal{E}$ tvar

$$(\alpha I + \Delta^*\Delta)X = \Delta^*\mathcal{E}_\delta. \tag{4.21b}$$

Obě rovnice, (4.21a) i (4.21b), mají jediné řešení. Řešení rovnice (4.21a), resp. (4.21b) zapíšeme pomocí výše uvedeného značení $X_\alpha = R_\alpha\mathcal{E}$, resp. $X_{\alpha,\delta} = R_\alpha\mathcal{E}_\delta$, kde

$$R_\alpha = (\alpha I + \Delta^*\Delta)^{-1}\Delta^*. \tag{4.22}$$

Soubor operátorů (4.22) je tzv. *Tichonovův regularizační systém*. Poznamenejme ještě, že jak rovnici (4.21a), tak rovnici (4.21b) lze ekvivalentně formulovat v rámci variačního počtu jako problém hledání minima jistého (kvadratického) funkcionálu (viz Nair, 2009, str. 155). Pro rovnice (4.21a), resp. (4.21b) platí tato věta:

Věta (variační formulace): Označme $J_{\alpha,}(X) = \|\Delta X - \mathcal{E}\|^2 + \alpha\|X\|^2$, resp. $J_{\alpha,\delta}(X) = \|\Delta X - \mathcal{E}_\delta\|^2 + \alpha\|X\|^2$. Rovnice (4.21a), resp. (4.21b) má jediné řešení $X_{\alpha,}$, resp. $X_{\alpha,\delta}$, právě když

$$J_\alpha(X_\alpha) = \min_{X\in\ell_2(L_2)} J_\alpha(X), \tag{4.23a}$$

resp.

$$J_{\alpha,\delta}(X_{\alpha,\delta}) = \min_{X\in\ell_2(L_2)} J_{\alpha,\delta}(X). \tag{4.23b}$$

V takovém případě je proces X_α, resp. $X_{\alpha,\delta}$ jediný, ve kterém se minimalizuje funkcionál (4.23a), resp. (4.23b). Proces X_α, resp. $X_{\alpha,\delta}$ se nazývá *regularizované řešení* problému (4.14), resp. *regularizované řešení* problému (4.14) s porušenou pravou stranou

Vraťme se nyní k odhadu (4.19) pro případ Tichonovovy regularizační strategie. První sčítanec na pravé straně v (4.19) obsahuje $\|R_\alpha\|$. V případě, že R_α má tvar (4.22) platí, že

$R_\alpha = (\alpha I + \Delta^*\Delta)^{-1}\Delta^* = (\alpha I + \Delta^*\Delta)^{-1}(\Delta^*\Delta)^{1/2}U^*$, kde jsme použili polární rozklad pro operátor Δ (viz odst. 2.3.5 Věta o polárním rozkladu omezeného lineárního operátoru) a fakt, že symetrizace operátoru Δ má odmocninu (viz opět odst. 2.3.5). Použijeme-li nyní spojitý funkční kalkulus (viz odst. 2.4.5) operátoru $S = \Delta^*\Delta$, vidíme, že funkce $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\alpha+z}$ je definována na spektru $\sigma(S) = [0, \|S\|] = [0,4]$ (viz odst. 4.3), a proto je $f(S) = R_\alpha$. Protože S je samoadjungovaný, je také samoadjungovaný operátor $f(S)$ a tedy (viz odst. 2.4.5 o spojitém funkčním kalkulu pro samoadjungovaný operátor) je

$$\|R_\alpha\| = \|f(S)\| = \sup_{z\in\sigma(S)} \frac{\sqrt{z}}{\alpha + z} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = f(\alpha). \tag{4.24}$$

Analyzujme ještě druhý sčítanec v odhadu (4.19). Za tím účelem předpokládejme, že řešení rovnice (4.6) splňuje $X_\varepsilon = \Delta^* Z$ pro nějaké $Z \in \ell_2(L_2)$. Označíme-li ještě pro pohodlí symbolem G_α inverzní operátor k (4.20), platí, že

$$\|R_\alpha \Delta X_\varepsilon - X_\varepsilon\| = \|G_\alpha S X_\varepsilon - X_\varepsilon\| = \|G_\alpha(SX_\varepsilon - \alpha X_\varepsilon - SX_\varepsilon)\| = \alpha\|G_\alpha X_\varepsilon\| = \alpha\|G_\alpha \Delta^* Z\| \leq$$
$$\alpha\|G_\alpha\Delta^*\|\|Z\| = \alpha\|R_\alpha\|\|Z\| = \alpha\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\|Z\| = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\|Z\|,$$

kde předposlední rovnost plyne ze vztahu (4.24). Je tedy zřejmé, že pro $\alpha \to 0+$, je $\|R_\alpha \Delta X_\varepsilon - X_\varepsilon\| \to 0$ a odhad (4.19) má pro Tichonovův regularizační systém tvar

$$\left\|X_{\alpha,\delta} - X_\varepsilon\right\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\|Z\|}{2}\sqrt{\alpha}. \tag{4.25}$$

Odhad (4.25) vzdálenosti regularizovaného řešení od skutečného řešení rovnice (4.6) tak závisí na dvou kladných parametrech α a δ, přičemž δ kontroluje poruchu pravé strany a α poruchu operátoru v rovnici (4.14). Abychom docílili konvergence regularizovaného řešení $X_{\alpha,\delta}$ ke skutečnému řešení X_ε , je třeba volit parametry α a δ tak, aby pro $(\alpha,\delta) \to (0,0)$ platilo, že $\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} \to 0$. To lze např. zajistit volbou $\alpha = C\delta^{2(1-\mu)}, \mu > 0,\ C > 0$ nezávislé

na δ. Předpoklad $X_\varepsilon = \Delta^* Z$ je ovšem dosti silný, vezmeme-li v úvahu, že nemůžeme zatím nic říci o existenci řešení rovnice (4.14). Pokud bychom předpokládali dokonce $X_\varepsilon = \Delta^* \Delta Z$ lze ukázat, že $\|X_{\alpha,\delta} - X_\varepsilon\|$ je $O\left(\delta^{2/3}\right)$ a tento odhad nelze zlepšit (Nair, 2009, str. 169).

Uvedené úvahy o výběru parametru jsou označovány jako apriorní strategie vyběru. Je celkem přirozené, že pro aplikace bude výhodnější nečinit žádné předpoklady na řešení. Pak hovoříme o tzv. aposteriorních strategiích. Mezi ně patří tzv. Morozovův diskrepanční princip. V rámci tohoto principu hledáme hodnotu tohoto parametru jako řešení rovnice

$$\|\Delta X_{\alpha,\delta} - \mathcal{E}_\delta\| = \delta. \tag{4.26}$$

Lze ukázat (Nair, 2009, str. 175), že funkce $h(\alpha) = \|\Delta X_{\alpha,\delta} - \mathcal{E}_\delta\|$ je spojitá rostoucí funkce. To znamená, že rovnice (4.26) má pro každé pevné δ a $\mathcal{E}_\delta$ jediné řešení $\alpha^* = \alpha(\delta, \mathcal{E}_\delta) > 0$, přičemž pro $\delta \to 0$ je $\alpha^* \to 0$.

4.5 Diferencování nestacionárních procesů

V odstavci 3.6 byly definovány procesy typu ARMA. Stochastická diferenční rovnice (3.28) může ovšem vykazovat vlastnosti, které nejsou v souladu se stacionaritou požadovanou v definici procesu ARMA. Jde především o existenci jednotkových kořenů polynomu

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p. \tag{4.27}$$

Typickým příkladem takového polynomu je $\phi(z) = 1 - z$. Dosadíme-li za komplexní proměnou operátor zpětného posunutí *B*, dostaneme diferenční operátor (4.1), který není při klasickém pojetí stacionarity (tj. v prostoru $\ell_\infty(L_2)$) invertibilní. Jestliže polynom (4.27) má nějaké jednotkové kořeny (v komplexní rovině), způsobuje jejich existence neinvertibilitu autoregresního operátoru $\phi(B) = I - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$, tj. nestacionaritu procesu, který je případným řešením rovnice (3.28). Tato rovnice v prostoru $\ell_\infty(L_2)$ totiž žádné řešení mít nemusí, jak vyplývá z věty o spektrálních vlastnostech operátoru zpětného posunutí (3.15),

Jestliže je d kladné celé číslo, říkáme, že proces $X = (X_{t-n})$ je proces typu ARIMA(p,d,q), je-li proces $Y = (Y_{t-n})$ splňující rovnost $Y = (I - B)^d X$ proces typu ARMA(p,q).

Uvedená definice tedy říká, že proces $X = (X_{t-n})$ typu ARIMA(p,d,q) je takový proces, který splňuje stochastickou diferenční rovnici

$$\left(I - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p\right)(I - B)^d X = \left(I - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\right)\mathcal{E} \tag{4.28}$$

Příkladem procesu (4.28) je proces náhodné procházky (4.6), v tomto značení ARIMA(0,1,0), ale obvykleji krátce I(1).

V praxi je věnována velká pozornost otázkám diferencování časové řady, jejímž cílem je získání časové řady stacionární, na kterou již aplikujeme postupy analýzy stacionárních řad. Z teoretického hlediska je třeba si uvědomit, že zatímco pro existenci stacionárního řešení operátorové rovnice (3.28) máme jasnou podmínku (viz 3.6), v případě rovnice (4.28) je existence řešení otazná. I když řešení rovnice (4.28) neexistuje, je možné provést regularizaci úlohy (4.28), viz předchozí odstavec 4.4.

Diferencování časové řady tak vlastně představuje jistý druh regularizace, jejímž výsledkem je stacionární časová řada, tj. řada, o jejímž generujícím procesu se můžeme domnívat, že je typu ARMA(p,q). Pokud ale časová řada pochází ze stacionárního procesu, dostáváme se k problému tzv. *prediferencování řady.* Většina analytiků považuje prediferencování časové řady za škodlivý efekt. Pojďme se nyní podívat z hlediska funkcionálně analytického na problém diferencování stacionárních procesů.

Stacionární proces byl definován v odst. 3.3. Jeho vlastnosti a reprezentace byly dále analyzovány v odst. 3.4. Nechť $\mathcal{E} = (\varepsilon_{t-n})$ je pevně daný proces bílého šumu, tj. ortogonální systém v $L_2(\Omega)$, jehož všechny členy mají roptyl $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, což je kvadrát normy bílého šumu v prostoru $\ell_\infty(L_2)$ (viz (3.16)),

$$\|\mathcal{E}\|^2 = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|\varepsilon_{t-n}\|_2{}^2 = \sigma_\varepsilon^2.$$

Bez újmy na obecnosti lze uvažovat, že norma bílého šumu je rovna jedné (tedy bílý šum je ortonormálním systémem, ne nutně úplným, v $L_2(\Omega)$, viz 2.2.2).

Proces $X = (X_{t-n})$ generovaný tímto bílým šumem je podle (3.5) zřejmě jednoznačně určen posloupností vah (skalárů) $(\psi_n) \in \ell_2$ a naopak jednoznačně tuto posloupnost určuje. Označíme-li normu posloupnosti symbolem $\|(\psi_n)\|_{\ell_2}$, pak $\|(\psi_n)\|_{\ell_2}$=$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^2$ a podle (3.10)

$$\sigma_X^2 = \|X\|^2 = \|(\psi_n)\|_{\ell_2}{}^2. \tag{4.29}$$

Označíme-li prostor stacionárních procesů generovaných pevně daným bílým šumem $\mathcal{E}$ symbolem $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, je podle (4.29) prostor $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ izometricky izomorfní s Hilbertovým prostorem skalárních posloupností ℓ_2. Je tedy prostor $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ Hilbertovým prostorem. Algebra operátorů tvaru (3.13) uvažovaných na prostoru $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ obsahuje i operátor (4.1), tj. diferenční operátor. Platí, že diference stacionárního procesu, je opět stacionárním procesem, tj. prvkem prostoru $\mathcal{S}(\mathcal{E})$. Rovněž pro libovolné kladné d a $X \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ je $(I-B)^d X \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$. Zřejmě ale autokovarianční struktura takto transformovaných procesů je komplikovanější.

Příklad 4.5.1. Uvažujme samotný bílý šum $\mathcal{E} = (\varepsilon_{t-n})$, zde obecně ne nutně s jednotkovým rozptylem $\sigma_{\mathcal{E}}^2 = E\varepsilon_t^2$. Jeho diferencováním dostaneme stacionární proces $Y = (I-B)\mathcal{E}$. Protože $E\varepsilon_t = 0$, je $EY_t = 0$. Dále $\|Y\|^2 = \sigma_Y^2 = 2\sigma_{\mathcal{E}}^2 = 2\|\mathcal{E}\|^2$. Autokovarianční funkce procesu *Y* má v prvním zpoždění hodnotu

$$\gamma_1 = E(Y_t Y_{t-1}) = E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = -E\varepsilon_{t-1}^2 = -\sigma_{\mathcal{E}}^2.$$

Pro hodnotu autokorelační funkce diferencovaného bílého šumu *Y* v prvním zpoždění proto platí

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sigma_Y^2} = -\frac{\sigma_{\mathcal{E}}^2}{2\sigma_{\mathcal{E}}^2} = -\frac{1}{2}.$$

Autokovarianční, resp. autokorelační funkce diferencovaného bílého šumu, tj. procesu *Y* jsou zřejmě od zpoždění dva nulové. Ve srovnání s původním bílým šumem $\mathcal{E}$ má tedy proces *Y* složitější autokorelační strukturu, především (dvakrát) větší rozptyl.

Příklad 4.5.2. Uvažujme proces *X* typu MA(1), viz příklad 3.6.1. Jeho diferencováním dostaneme neinvertibilní stacionární proces *Y* typu MA(2):

$$Y_t = X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t - (1+\theta_1)\varepsilon_{t-1} - (-\theta_1)\varepsilon_{t-2},$$

jehož rozptyl je

$$\|Y\|^2 = \sigma_Y^2 = 2(1+\theta_1+\theta_1^2)\sigma_{\mathcal{E}}^2 = 2(1+\theta_1+\theta_1^2)\|\mathcal{E}\|^2.$$

I v tomto případě dospíváme k procesu, který má větší rozptyl než původní proces MA(1) a složitější autokorelační strukturu.

Hlavním argumentem proti prediferencování časové řady ovšem zůstává fakt, že diferencováním stacionárního procesu ARMA(p,q) vnášíme do části MA faktor jednotkového

kořene a tím činíme tento proces neinvertibilním, viz. (3.29). To je také důvod, proč se většina analytiků staví proti předifferencování. Jistou naději může ale poskytnout přístup Tichonovovy regularizace, který umožňuje řešit problém špatně podmíněných úloh.

Závěr

Nezáporné lineární operátory hrají důležitou roli v rúzných aplikacích. V této práci byl podrobně studován zejména operátor zpětného posunutí a z něj odvozené operátory, zejména diference. Bylo tak učiněno v souvislosti s analýzou časových řad, neboť v teorii stochastických procesů jsou tyto operátory zásadním nástrojem pro popis těchto procesů a pro jejich zkoumání. V literatuře je podrobnějšímu vyjasnění vlastností tohoto operátoru věnována různě velká pozornost. V některých pracech je tento operátor dokonce zaměňován s číslem, což může být zavádějící, ale na druhou stranu díky tzv. funkčnímu kalkulu možná pochopitelné. V této práci je pozornost věnována algebraickým i analytickým vlastnostem uvedných operátorů. Propojení funkcionální analýzy s teorií stochastických procesů je nosné a může přinést řadu plodných podnětů pro další práci. Samotný fakt, že operátor zpětného posunutí uvažovaný v klasických prostorech posloupností má spektrum tvořené uzavřeným jednotkovým kruhem ukazuje na rozdílné spektrální vlastnosti lineárních operátorů v konečné a nekonečné dimenzi. Zároveň je tím řečeno podle analytického funkčního kalkulu tohoto operátoru jak musí vypadat komplikovanější modely než jsou ARMA nebo ARIMA, abychom mohli hovořit např. o invertibilitě takových modelů.

Diferenční operátor souvisí s nestacionárním procesem náhodné procházky. Z pohledu analytiků jistě není problémem fakt, že konečná časová řada generovaná stochastickou diferenční rovnicí existuje. Problémem je spíše otázka existence řešení takové rovnice v nekonečné dimenzi. A diskrétní stochastický proces je prvkem nekonečně dimensionálního prostoru. Regularizační metody jsou účinným nástrojem, jak řešit operátorové rovnice, které jsou špatné podmíněné (ill-posed problem). A takovou rovnicí je např. stochastická diferenční rovnice obsahující operátor diference. Diferencování, jako běžně užívaný nástroj pro stabilizaci časové řady je jistým druhem regularizace. V nabídce jsou ale jiné možné metody jako např. Tichonovova regularizace. Takové metody mohou představovat alternativní přístupy k řešení problému nestacionarity procesu. Práce ve čtvrté kapitole zkoumá nestacionární proces náhodné procházky a jeho teoretické pozadí, přičemž ukazuje na možnost užití regularizační metody na tento případ.

Vlastní výsledky:

- Věta o spektrálních vlastnostech operátoru zpětného posunutí B v prostoru omezených stochastických procesů (odst. 3.5).
- Věta o reprezentaci algebry operátorů definovaných mocninnými řadami v neurčité B se skalárními koeficienty (odst. 3.5).
- Věta o invertibilitě lineárního filtru (odst. 3.5).
- Zavedení pojmu procesu stacionárního až do úrovně N (odst. 4.3).

Náměty pro další práci:

- Konstrukce zobecněného řešení operátorové rovnice (4.6) ve vhodné struktuře (výhled: aplikace teorie lokálně konvexních prostorů, jaderných prostorů a jaderných operátorů)
- Regularizace operátorové rovnice (4.6) s využitím vlastnosti, že diferenční operátor je operátor s nezáporným inverzem.
- Regularizace operátorové rovnice (4.6) v Banachově prostoru omezených stochastických posloupností.

Seznam literatury

[1] ANDĚL, J. (1976): *Statistická analýza časových řad.* SNTL, Praha, 1976

[2] ANDERSON, T.W. (1971): *The Statistical Analysis of Time Series.* John Wiley, New York, 1971.

[3] ARLT, J. (1999): *Moderní metody modelování ekonomických časových řad*. Grada Publishing 1999

[4] ARLT, J., ARLTOVÁ, M. (2003): *Finanční časové řady*. Grada Publishing 2003

[5] BROCKWELL, P. J., DAVIS, R.A. (1987): *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag New York Inc. 1987.

[6] BEČVÁŘ, J. (2000): *Lineární algebra,* Matfyzpress, Praha 2000.

[7] BELL, W. (1987): *A Note on Overdifferencing and the Equivalence of Seasonal Series Models with Monthly Means and Models with (0,0,1)12 Seasonal Parts when Theta=1*, Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 5, 383-387. 1987.

[8] BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. (1970): *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1970.

[9] DUPAČ, V., HUŠKOVÁ, M. (2009): *Pravděpodobnost a matematická statistika,* Univerzita Karlova v Praze, nakl. Karolinum 2009

[10] DHRYMES, P.J. (1980): *Distributed Lags. Problems of Estimation and Formulation.* North Holland, Amsterdam, 1980.

[11] CIPRA, T. (1986): *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. SNTL, Alfa, Praha 1986.

[12] FABIAN, F., KLUIBER Z. (1998): *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*. Prospektrum Praha 1998.

[13] FIEDLER M. (1981): *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL Praha 1981.

[14] GELFAND, I.M., VILENKIN N.Y. (1964): *Generalized Functions*, Volume 4. Academic Press, New York and London, 1964.

[15] HADAMARD, J. (1902): *Sur les problemes aux derivees partielies et leur signification physique*. Bull. Univ. Princeton, 1902, v.13, 49-52. 1902.

[16] HANSEN P. CH. (1998): *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*, Siam Philadelphia 1998.

[17] HEBÁK, P., HUSTOPECKÝ J., JAROŠOVÁ E., PECÁKOVÁ I. (2004): *Vícerozměrné statistické metody 1*, Informatorium, Praha 2004.

[18] HINDLS, R., CYHELSKÝ, L., KAHOUNOVÁ, J. (1996): *Elementární statistická analýza*. Management Press, Praha 1996.

[19] HOROWITZ, J.L. (2014): Ill-posed Inverse Problems in Economics. Annual Review of Economics, Vol. 6, 21-51, 2014.

[20] HORSKÝ, R. (2009). Some Remarks to the Axiom of Choice (AC). *Mundus Symbolicus,* roč. 17, Praha, s. 49-52.2009.

[21] HORSKÝ, R. (2011). Different Modes of Stochastic Convergence. *Mundus Symbolicus,* roč. 19, Praha, s. 31-36. 2011.

[22] HORSKÝ, R. (2013). Remarks on Orthonormal Systems and Cardinalities in Inner Product Spaces. *Mundus Symbolicus,* roč. 21, Praha, s. 13-20. 2013.

[23] HORSKÝ, R. (2014). Ill Posed Problems. *Mundus Symbolicus,* roč. 22, Praha, s. 13-20. 2014.

[24] HORSKÝ, R. (2012). Zobecněné řešení soustavy lineárních algebraických rovnic a zobecněná metoda nejmenších čtverců. In: *Sborník prací účastníků vědeckého semináře doktorského studia. Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Praze*, s. 55-56. 2012.

[25] HORSKÝ, Z. (1987): *Učebnice matematiky pro VŠE I*. SNTL Praha 1987.

[26] JARNÍK, V. (1976): *Diferenciální počet II*, Academia Praha 1976.

[27] LUKEŠ, J. (2012): *Zápisky z funkcionální analýzy*, Univerzita Karlova v Praze, nakl. Karolinum 2012.

[28] Lu, S., Mathe, P. (2014): *Discrepancy Based Model Selection in Statistical Inverse Problem.* Journal of complexity, Vol. 30, 290-308, 2014.

[29] MAREK, I., ŽITNÝ, K. (1983): *Matrix Analysis for Applied Science, Vol. 1*. Teubner Verlagsgesselschaft Leipzig 1983.

[30] MOROZOV V.A. (1984): *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, Springer Verlag New York Inc, 1984.

[31] KLEBANOV, I., KOZUBOWSKI, T.J., RACHEV, S.T. (2006): *Ill posed Problems in Probability and Stability of Random Sums*, Nova Science Publisher, Inc., New York, 2006.

[32] KUROŠ, A.G. (1968): *Kapitoly z obecné algebry,* Academia Praha 1968.

[33] NAIR, M.T. (2009): *Linear Operator Equations, Approximation and Regularization.* World Scientific, ISBN: 978-981-283-565-9, 2009.

[34] RÉNYI, A. (1972): *Teorie pravděpodobnosti*. Academia Praha 1972.

[35] RIESZ, F., NAGY, B. (1955): *Functional Analysis.* Copyright 1955 by Frederick Ungar Publishing, Co, transl. from Lecons d´analyse fonctionelle by Leo F. Boron, Dep. Of Math., University of Michigan. 1955.

[36] RUDIN, W. (1977): *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Academia Praha 1977.

[37] SANCHEZ, I. (2002): *Efficient Forecasting in Nearly Non-stationary Processes.* Journal of Forecasting, Vol. 21, 1-26. 2002

[38] SIKORSKI, R. (1973): *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných*. Academia Praha 1973.

[39] TEBBENS, J.D., HNĚTYNKOVÁ, I., PLEŠINGER, M., STRAKOŠ, Z., TICHÝ, P. (2012): *Analýza metod pro maticové výpočty-základní metody*. Matfyzpress, Praha 2012.

[40] TICHONOV, A.N. (1963): *On the Solution of Ill-posed Problems and the Method of Regularization*, Soviet Math. Dokl., 4, 1624-1627. English translation. 1963.

[41] TICHONOV, A.N. (1965): *Incorrect Problems of Linear Algebra and a Stable Method of Their Solution*, Soviet Math. Dokl., 6, 988-991. English translation. 1965.

[42] VESELÝ, J. (2000): *Komplexní analýza pro učitele*. Nakladatelství Karolinum Praha 2000.

[43] VESELÝ, J. (2001): *Matematická analýza pro učitele*. Matfyzpress, Praha 2001.

[44] VESELÝ J., NETUKA I. (1980). F. Riesz a matematika dvacátého století. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie,* Vol. 25 (1980), No. 3, 128-138. 1980.

[45] TAYLOR, A.E. (1973): *Úvod do funkcionální analýzy*. Academia Praha 1973.

[46] ZICHOVÁ, J. (2011): *Non-negative Time Series and Their Applications*. Matfyzpress, Praha 2011, ISBN 978-80-7378-147-7

Seznam symbolů

KAPITOLA I

$x \in M$	bod je prvkem množiny	*8*
$M = \{x: \propto\}$	množina zadaná vlastností	*8*
$N \subset M$	podmnožina množiny	*8*
$\emptyset$	prázdná množina	*8*
$N = M$	rovnost množin	*8*
$M \cap N$	průnik množin	*8*
$M \cup N$	sjednocení množin	*8*
$M - N$	rozdíl množin	*8*
$\mathbb{N}$	obor celých kladných čísel	*9*
$\mathbb{N}_0$	obor celých nezáporných čísel	*9*
$\mathbb{Z}$	obor celých čísel	*9*
$\mathbb{Q}$	obor racionálních čísel	*9*
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel	*9*
$\mathbb{C}$	obor komplexních čísel	*9*
$M \times N$	kartézský součin množin	*9*
(x, y)	uspořádaná dvojice	*9*
$F: M \to N$	zobrazení množiny *M* do množiny *N*	*9*
$y = F(x)$	hodnota zobrazení v bodě	*9*
$\mathcal{R}(F)$	obor hodnot zobrazení	*9*
$F(U)$	obraz množiny	*9*
$F^{-1}(V)$	vzor množiny	*9*
F^{-1}	inverzní zobrazení	*9*
I	identita na množině	*9*
$F: M \times M \to M$	operace na množině *M*	*10*
$z = e^{i\varphi}$	komplexní jednotka	*11*
$A[B]$	superpozice zobrazení	*11*
$F_a(x) = \exp(ax)$	exponenciální funkce	*11*
$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$	polynom	*13*
$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$	mocninná řada	*13*
$a \sim b$	ekvivalence	*13*
$a \leq b$	uspořádání	*14*
$\exp M$	potence množiny	*14*

$\mathbb{R}^+$	obor kladných reálných čísel	*15*
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	*n*-rozměrný prostor nad tělesem reálných, komplexních, čísel	*17*
V_n	aritmetický *n*-rozměrný prostor	*17*
V_∞	prostor posloupností	*17*
$\mathbb{R}^\infty$	prostor posloupností reálných čísel	*17*
$v_1, v_2, \dots, v_m$	skupina vektorů	*18*
$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m$	lineární kombinace skupiny vektorů	*18*
$[\![v_1, v_2, \dots, v_m]\!]$	lineární obal skupiny vektorů	*18*
$\dim V$	dimenze prostoru	*19*
$e_1, e_2, \dots, e_r$, $e_j = (0,0, \dots 0,1,0, \dots ,0)$	kanonická báze	*19*
$N(F)$	jádro lineárního zobrazení	*20*
$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$	báze *n*-rozměrného prostoru	*20*
$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{A^T} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{A}^* = (\overline{a_{ij}})$	matice, transponovaná, hermitovsky sdružená matice	*20*
$M(m,n), M(n)$	množina matic typu (*m*,*n*), řádu *n*	*20,21*
$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{HAG}^{-1}$	ekvivalence matic reprezentujících lin. zobrazení v aritmet. prostorech	*21*
$p + N(F)$	lineál řešení	*21*
$\boldsymbol{A}x = b$	soustava lineárních algebr. rovnic	*21*
$\lambda I - \boldsymbol{A}$	charakteristická matice	*23*
$\det(\lambda I - \boldsymbol{A})$	determinant charakteristické matice	*23*
$\sigma(\boldsymbol{A})$	spektrum matice	*23*
$\boldsymbol{A}^T$	transponovaná matice	*23*
$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$	podobnost matic	*24*
$\bar{S}$	úzávěr množiny	*25*
$\mathcal{E}(a)$	okolí množiny	*25*
(x_n)	posloupnost prvků	*25*
$x_n \to a$, $\lim x_n = a$	posloupnost konverguje k bodu, limita posloupnosti	*25*
$\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$	rozšířená reálná osa, rozšířená komplexní rovina	*26*
$(a_1, \dots, a_r)$	uspořádaná *r*-tice	*26*
$\mathrm{C}(M)$	prostor spojitých funkcí	*27*
$\sup\limits_{x \in M} \lvert f_n(x) - f(x) \rvert \to 0$	stejnoměrná konvergence	*27*
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	sjednocení spočetného systému	

	množin *27*
F_σ , G_δ	typ množiny *28*
$\mu(S)$	míra množiny *28*
$EX = \int_M X d\pi$	střední hodnota náhodné veličiny *29*
$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$	střední hodnota vyjádřená pomocí distribuční funkce *30*
$f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.v.	rovnost funkcí skoro všude *30*
$L_1(\mu)$	prostor lebesgueovsky integrovatelných funkcí *30*
$\int_M \lvert f \rvert \, d\mu < \infty$	funkce absolutně integrovatelná (náhodná veličina s konečnou střední hodnotou) *30*
$L_2(\mu)$	prostor funkcí lebesgueovsky integrovatelných s kvadrátem *30*
$\int_M \lvert f \rvert^2 \, d\mu < \infty$	funkce integrovatelná s kvadrátem (náhod. veličina s konečným rozptylem) *30*

KAPITOLA II

$\lVert u \rVert$	norma vektoru *32*
$\overline{[\![U]\!]}$	uzávěr lineárního obalu *32*
$\lVert A \rVert$	norma operátoru *33*
$\sum_{n=1}^{\infty} \lVert x_n \rVert$	řada norem prvků Banachova prostoru *35*
$\ell_p(r)$	normovaný prostor *r*-tic skalárů *36*
$\ell_p, 1 \leq p < \infty$	prostor posloupností skalárů *37*
ℓ_∞	prostor omezených posloupností skalárů *37*
$\lVert x \rVert_p$	norma v prostoru $\ell_p(r)$, resp. $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ *35*, resp. *37*
$\lVert x \rVert_\infty$	norma v prostoru $\ell_\infty(r)$, resp. ℓ_∞ *36*, resp. *37*
$Л_r$	prostor posloupností skalárů *37*
c_{00}	prostor posloupností s konečným počtem nenulových prvků *37*
$L_p(M, \mu)$	prostor funkcí lebesgueovsky integrovatelných s *p*-tou mocninou *38*

$\|f\|_p$	norma v prostoru $L_p(M,\mu)$	*38*
$L_\infty(M,\mu)$	prostor funkcí omezených skoro všude	*38*
$\|f\|_\infty$	norma v prostoru $L_\infty(M,\mu)$	*38*
$\mathcal{B}(S)$	prostor funkcí omezených na mn. *S*	*38*
$\mathrm{C}_0(M)$	prostor spojitých funkcí s kompaktním nosičem v prostoru *M*	*38*
(x,y)	skalární součin vektorů	*39*
$\sum_{u\in S}(x,u)u$	Fourierova řada prvku *x*	*41*
$S^\perp$	ortogonální doplněk množiny	*42*
$K \oplus K^\perp$	direktní součet prostorů	*42*
$\mathcal{L}[M,N], \mathcal{L}[M]$	prostor operátorů prostoru *M* do prostoru *N*, resp. na prostoru *M*	*43*
$\mathcal{G}$	množina regulárních prvků	*44*
D	definiční obor operátoru	*45*
M^*	duální prostor k prostoru *M*	*46*
A^*	duální, adjungovaný operátor	*48,49*
$N(A)^\perp$	ortogonální doplněk jádra operátoru	*49*
$\overline{\mathcal{R}(A^*)}$	uzávěr oboru hodnot adjungovaného operátoru	*49*
$\|A\|$	odmocnina z operátoru	*50*
$\mathrm{dist}(x,K)$	vzdálenost bodu od množiny	*52*
$\rho(A)$	rezolventní množina operátoru	*53*
$\sigma(A)$	spektrum operátoru	*53*
$R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$	rezolventa operátoru	*53*
$r(A) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} \|\lambda\|$	spektrální poloměr	*54*
$\sigma_P(A), \sigma_C(A), \sigma_R(A)$	bodové, spojité, reziduální spektrum	*55*
m_A, M_A	dolní, horní mez operátoru	*56*
$\wp$	algebra polynomů	*57*
$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\lambda)\, R_A(\lambda) d\lambda$	funkce operátoru vyjádřená pomocí křivkového integrálu	*58*
$\mathcal{A}(A)$	algebra funkcí operátoru *A*	*58*
$\mathrm{C}(\sigma(A))$	prostor funkcí spojitých na spektru operátoru *A*	*58*

KAPITOLA III

$(\Omega, \mathcal{M}, \pi)$	pravděpodobnostní prostor	*59*
$\mathfrak{J}$	časová doména	*60*
$\mu_t = EX_t$	funkce středních hodnot	*61*
$C(t,s), R(t,s)$	kovarianční, korelační funkce	*61,62*
$\sigma_t^2 = C(t,t)$	funkce rozptylu	*62*
γ_h, ϱ_h	autokovarianční, autokorelační funkce	*63*
$\mathcal{E} = (\varepsilon_t)$	bílý šum	*64*
B	operátor zpětného posunutí	*68*
$\left(L_0(\Omega)\right)^{\mathfrak{J}}$	prostor všech stochastických procesů	*68*
$\psi(B)$	lineární filtr	*68, 75*
$X = (X_t, X_{t-1}, \dots)$	stochastická posloupnost	*69*
$\ell_p(L_2)$	prostor stochastických posloupností	*69*
$\ell_\infty(L_2)$	prostor omezených stochastických posloupností	*69*
$\lVert X_{t-n} \rVert_2$	norma členu stochastické posloupnosti	*70*
$\Lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$	vlastní vektor operátoru B	*71*
$\mathcal{L}[\ell_\infty(L_2)]$	Banachova algebra spojitých lineárních operátorů v prostoru $\ell_\infty(L_2)$	*73*
$\overline{\wp(B)}$	algebra mocninných řad v neurčité B	*73*
$\lVert \psi(B)U \rVert_{\ell_\infty(L_2)}$	norma stochastické posloupnosti	*75*
$\lVert (\psi_n) \rVert_{\ell_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^2$	norma posloupnosti vah	*75, 97*
$\mathcal{A}(B)$	algebra funkcí operátoru zpětného posunutí	*76*
$\phi(B)$	autoregresní operátor	*76*
$\theta(B)$	operátor klouzavých součtů	*76*
$c_{00}(L_2)$	prostor stochastic. procesů s konečným počtem nenulových členů	*79*
$\hat{X}_{t+1}$	předpověď veličiny s nejmenší čtvercovou chybou	*79*
$E(X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, \dots)$	podmíněná střední hodnota	*80*

KAPITOLA IV

$c_0(L_2)$	prostor stochastických procesů s nulovou limitou *82*
T^*T	symetrizace operátoru *T* *86*
$I_{\ell_2(L_2)}$	identita na Hilbertově prostoru stochastic. posloupností *88*
S	symetrizace operátoru diference *89*
S_n	*n*-dimenzionální aproximace symetrizace operátoru diference *89*
Δ	operátor diference *91*
R_α	operátory regularizačního systému *91*
$\mathcal{E}_\delta$	porucha bílého šumu *92*
$X_{\alpha,} = R_\alpha \mathcal{E}$	regularizované řešení *92*
$X_{\alpha,\delta} = R_\alpha \mathcal{E}_\delta$	regularizované řešení problému s porušenou pravou stranou *92*
$e(\alpha)$	odhad chyby regularizovaného řešení *92*
$\mathcal{S}(\mathcal{E})$	prostor stochastických procesů generovaných bílým šumem *97*