

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

Fakulta financí a účetnictví

DIPLOMOVÁ PRÁCE

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

Fakulta financí a účetnictví

Katedra Bankovníctví a pojišťovníctví

Studijní obor: Bankovníctví a pojišťovníctví

Rizika použití VaR modelů při řízení portfolia

Autor diplomové práce: Bc. Zhanna Antonenko

Vedoucí diplomové práce: Ing. Bohumil Stádník, Ph.D.

Rok obhajoby: 2016

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že diplomovou práci na téma „Rizika použití VaR modelů při řízení portfolia“, jsem vypracovala samostatně a veškerou použitou literaturu a další prameny jsem řádně označila a uvedla v příloženém seznamu zdrojů.

V Praze dne

.....

Zhanna Antonenko

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce panu Ing. Bohumilovi Stádníkovi, Ph.D.

Děkuji mé rodině za podporu během studia.

Anotace

Diplomová práce „Rizika použití VaR modelů při řízení portfolia“ se soustřeďuje na odhad VaR portfolia aktiv pomocí základních a modifikovaných metod. Cílem je poukázat na rizika a problémy základních metod a předvést odhad VaR pomocí vylepšených modelů, které se snaží se vypořádat se zmíněnými problémy. Tato problematika bude probírána jak na teoretické úrovni, tak i v rámci praktické části práce. Předmětem zájmu je měření pouze tržního rizika. Prezentovány budou vybrané metody odhadu VaR ze skupiny simulačních a parametrických metod.

The diploma thesis „Risks of using VaR models for portfolio management“ is focused on estimation of the portfolio VaR using basic and modified methods. The goal of this thesis is to point out some weakness of the basic methods and to demonstrate the estimation of VaR using improved methods to overcome these problems. The analysis will be perform theoretically and in practice. Only market risk will be the subject of the study. Several simulation and parametric methods will be introduced.

OBSAH

Úvod	6
1. Teoretická část	7
1.1. Měření rizik vs. řízení rizik	7
1.2. Riziko obecně a finanční rizika	8
1.3. Kvantitativní přístup	12
1.3.1. Spojité a diskrétní náhodné veličiny	12
1.3.2. Normální rozdělení	13
1.3.3. Očekávaný výnos	14
1.3.4. Variabilita očekávaného výnosu	15
1.3.5. Šikmost (Skewness)	18
1.3.6. Špičatost (Kurtosis)	19
1.4. Basilejské dohody a Value at risk metodologie interních modelů	21
1.5. Value at Risk	23
1.5.1. Časový horizont	23
1.5.2. Účely použití VaR	24
1.5.3. Formální odvození Value at Risk	25
1.5.4. Metody odhadu Value at Risk	29
1.5.4.1. Parametrické metody	29
1.5.4.1.1. Portfolio-normal metoda	29
1.5.4.1.2. Asset-normal metoda	30
1.5.4.1.3. Delta-normal metoda	31
1.5.4.1.4. Delta – gamma metoda	33
1.5.4.2. Simulační metody: Metoda historické simulace	35
1.5.4.2.1. Základní metoda historické simulace	36
1.5.4.2.2. EWMA	37
1.5.4.2.3. EWMA model s volatilitou	38
1.5.4.2.4. GARCH modely	40
1.5.4.2.5. Bootstraping	43
1.5.4.3. Srovnání parametrického a simulačního přístupu	45
1.5.5. Backtesting	46
1.5.5.1. Přístup založený na tzv. míře selhání	46
1.5.5.2. Distribution Forecast Models	47
1.5.5.3. Parametric Models	47
1.5.5.4. Basilejský přístup	47

2. Praktická část	49
2.1. Mapování expozice.....	51
2.2. Simulační přístup.....	52
2.2.1. Základní metoda historické simulace.....	52
2.2.2. EWMA	54
2.2.3. EWMA model s volatilitou	55
2.2.4. Model GARCH(1,1)	57
2.3. Variančně kovarianční přístup.....	59
2.3.1. Základní variančně kovarianční metoda	59
2.3.2. Základní variančně kovarianční metoda a přítomnost autokorelace P/L funkce portfolia	61
2.3.3. Variančně kovarianční metoda a nestabilita síly závislosti	63
2.3.4. Variančně kovarianční metoda a špičatost empirického rozdělení	66
2.3.5. Variančně kovarianční metoda a šikmost empirického rozdělení	69
2.3.6. Variančně kovarianční metoda a ztráty přesahující odhad VaR	72
2.4. Srovnání odhadů VaR dle parametrického a simulačního přístupů	73
Závěr.....	75
Literatura.....	76

Vznik konceptu Value at Risk (VaR) je spjat s jménem J.P. Morgan. Celý proces vývoje a implementace systému risk managementu založeného na Value at Risk metodologii začal v této bance z toho, že někdejší šéf banky Dennis Weatherstone požádal o vypracování jednostránkového reportu, který by popisoval s platností na nejbližších 24 hodin rizikový profil banky na celofiremní úrovni, čili se zohledněním aspektů celého obchodního portfolia. Ten report získal přezdívku „4:15“ report kvůli tomu, že měl být předložen na konci každého obchodního dne, a používal VaR pro odhad maximální ztráty, která by se mohla realizovat s určitou pravděpodobností během příštího obchodního dne. Výhodou reportu bylo to, že pomocí jednoho čísla udával absolutní velikost možné ztráty, a byl jednoduše interpretovatelný a srozumitelný pro uživatele bez nutnosti obsáhlého matematického výkladu.

Vybudování nového systému risk managementu J.P.Morgan bylo dokončeno před rokem 1990. V roce 1994 vedení banky rozhodlo zveřejnit zjednodušenou verzi jejich interního systému, RiskMetrics, která byla volně ke stažení online. Od té doby začíná masivní rozšíření Value at Risk metodologie řízení tržních rizik napříč celým finančním systémem. Později koncept Value at Risk se rozšířil na řízení kreditního, likviditního a operačního rizik. Value at Risk zůstává frekventovaně používaným nástrojem měření a řízení rizik dodnes.

Důležitost a význam tohoto přístupu k měření a řízení rizik stačí ozřejmit tím, že je aktuálně používán nejen pro interní „soukromé“ účely nejen bankovních institucí, ale i jako nástroj pro výpočet regulatorního požadavku ke kapitálu bank. Proto problematiku VaR se dá považovat za vhodné téma pro diplomovou práci.

Tato práce se bude věnovat pouze aplikování VaR jako nástroje měření tržního rizika. Cílem práce je seznámit čtenáře s přístupy k odhadu VaR, prezentovat základní metody odhadu VaR, a také poukázat na slabé stránky a rizika použití těchto základních metod při řízení portfolia, a předvést vybrané modifikace základních metod, které se snaží zmíněné problémy překonat. Podnětem ke vzniku modifikovaných verzí VaR byly praktické potřeby upřesnit odhady VaR a tím optimalizovat množství kapitálu drženého za účelem absorpce ztrát.

Práce je rozdělena do dvou částí. První část je teoretického rázu. Věnuje se teorii rizika a risk managementu. Výklad kvantitativních statistických nástrojů analýzy slouží jako odrazový můstek pro vysvětlení konstrukčních prvků VaR modelů jak v teoretické rovině, tak i v rámci praktické aplikace modelů. Určitý prostor je vymezen i pro přehled některých metod zpětné kontroly kvality VaR modelů ve smyslu přesnosti jejich odhadů maximální ztráty – pro backtesting.

Druhá praktická část práce se zabývá kalkulací VaR na reálných časových řadách vstupních údajů nejdříve pomocí základních metod, a následně i pomocí metod modifikovaných s důrazem na to, jaký konkrétně problém se snaží ta která vylepšená metoda vyřešit.

Na konci druhé části je uveden kompletní přehled odhadů VaR dle všech předvedených metod a závěrečný komentář.

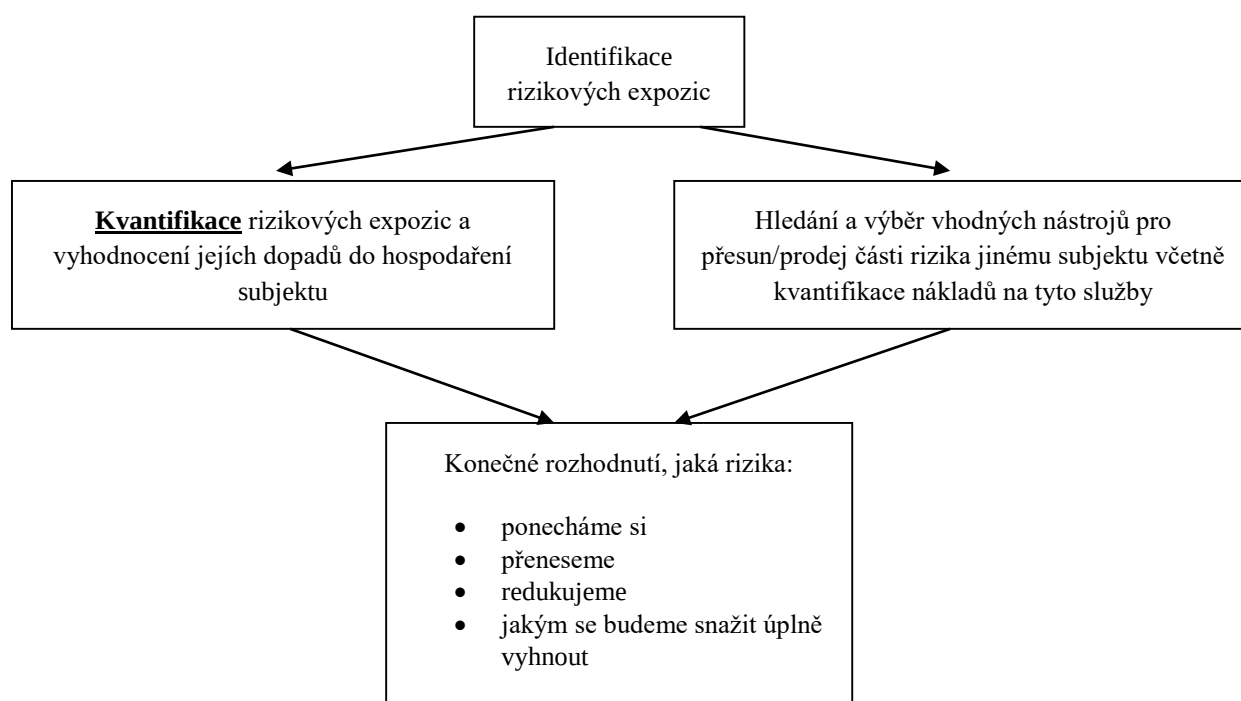
1. TEORETICKÁ ČÁST

1.1. MĚŘENÍ RIZIK VS. ŘÍZENÍ RIZIK

Risk management se dá definovat jako nepřetržitý a kontinuální vnitropodnikový proces snižování rizik, jimž je vystaven. Úplně odstranit veškeré riziko jednak není možné, a jednak to není ani cílem, neboť jediným způsobem zcela se vyhnout riziku je neprovozovat žádné aktivity. Sice nebylo by žádné riziko, ale také žádný zisk. Jakýkoli byznys – finanční není výjimkou – je vždycky spojen s rizikem, otázkou však je, jak velké riziko je ochoten ten který podnikající subjekt podstoupit. Může ale volit podle svého uvážení typy rizik a velikost své expozice vůči zvoleným typům rizika. Díky moderním nástrojům řízení rizik podnikající subjekt může stanovit pro něj přijatelnou míru rizika, kterou je ochoten a může převzít, zbytek přesunout na jiný subjekt. Je zřejmé, že kvalitní risk management a ponechání určité míry rizika nejsou vzájemně se vylučující, ale komplementární pojmy.

Celý proces risk managementu se dá schematicky zobrazit následovně:

Obrázek 1: *Proces risk managementu*



Zdroj: vlastní nákres dle Crouhy, Michel; Galai, Dan; Mark, Robert. *The Essentials of Risk Management*

Risk managementem tedy rozumíme komplexní řešení ve smyslu zjištění rizikového profilu podniku a nejvíce vyhovujícího způsobu vypořádání se s možnými nepříznivými důsledky případné realizace identifikovaných rizik, zatímco **měření rizika** je „pouze“ článkem – i když významným a nepostradatelným – v tomto složitém mechanismu řízení podnikových rizik.

Úkolem risk manažerů by mělo být stanovení hranic rizika, které podnik je ochoten a může převzít bez existenčního dopadu na chod společnosti tím, že pomocí finančních ukazatelů stanoví maximální výši ztráty, kterou ještě může unést. Ztráta je determinována kombinací dvou faktorů: rizikem resp. volatilitou aktiva a expozicí vůči tomuto druhu rizika. Zatímco risk manažer není schopen vzít pod kontrolu volatilitu aktiva, může však to určité míry přizpůsobit rozsah expozice vůči riziku. Problémem však je, že finanční dopad realizace rizika může vyšplhat do mnohem vyšší úrovně. Odhady této výše se dá provádět pomocí pozorování historických časových řad ztrát v relaci k specifikovaným rizikovým faktorům.

Tím pádem proces risk managementu nespočívá ve snižování očekávané ztráty, nýbrž v účinném řízení neočekávané variability finančních výsledků podnikání. A je nutné zdůraznit, že globálním cílem risk managementu na podnikové úrovni je vytvořit a zvyšovat risk kulturu a gramotnost napříč risk manažery všech úrovní, aby matematické modely pro řízení rizik neexistovaly samy pro sebe, ale sloužily jako účinný nástroj, pomocí něhož by každý zúčastněný procesu mohl ovlivňovat rizikový profil byznysu.

1.2. RIZIKO OBECNĚ A FINANČNÍ RIZIKA

V obecném slova smyslu lze riziko definovat jako výsledek náhodného pokusu, který se liší od své očekávané hodnoty. Velikost rizika je vnímána jako míra pravděpodobnosti vzniku této odchylky. V kontextu finančního rizika tento přístup se jeví jako nekompletní, jelikož je podstatná nejen pravděpodobnost realizace rizika, ale i jeho výše. Do popředí se tudíž dostává kvantitativní stránka.

Riziko se dá vnímat dvojím způsobem. Jednak jako nebezpečí realizace pouze záporné odchylky od očekávané hodnoty. V tomto případě hovoříme o čistém neboli downside riziku. To je klasické chápání rizika. Naproti tomu stojí koncept vnímání rizika jako nebezpečí realizace záporné odchylky a zároveň možnosti realizace kladné odchylky od očekávané hodnoty. Druhý způsob vnímání rizika je širší a jmenuje se spekulativní anebo upside riziko. Společným rysem v obou případech je to, že riziko je měřitelné.

Podstatu rizika si přiblížíme nejdříve na příkladu hospodaření domácnosti. Domácnost má určitou strukturu příjmů a výdajů, které dostává a vynakládá v určité výši a s určitou pravidelností. Například, sestavuje si měsíční rozpočet, kde jsou promítnuty běžné příjmy a výdaje. Budeme chápat riziko v souvislosti s nutností hradit životní náklady a udržovat životní úroveň, kterou si můžeme dovolit. Jsou výdajové položky, které se opakují každé období bez významnějších změn (nákup jídla, oblečení, volný čas, doprava aj). Týká se to jak jejich výše, tak i pravidelnosti. Může však nastat situace, kdy se stane něco mimořádného, a tím domácnosti vznikne výdaj, který nemohla dopředu odhadnout. A je tak velký, že nemůže být pokrýt v rámci běžných příjmů aktuálního období. Nepravidelnost a neznámá výše těchto mimořádných výdajů představují právě zdroj rizika pro domácnost. Běžné výdaje, s jejichž existencí domácnost počítala, při sestavování rozpočtu totiž žádné riziko nenesou, nýbrž jsou prvkem běžného

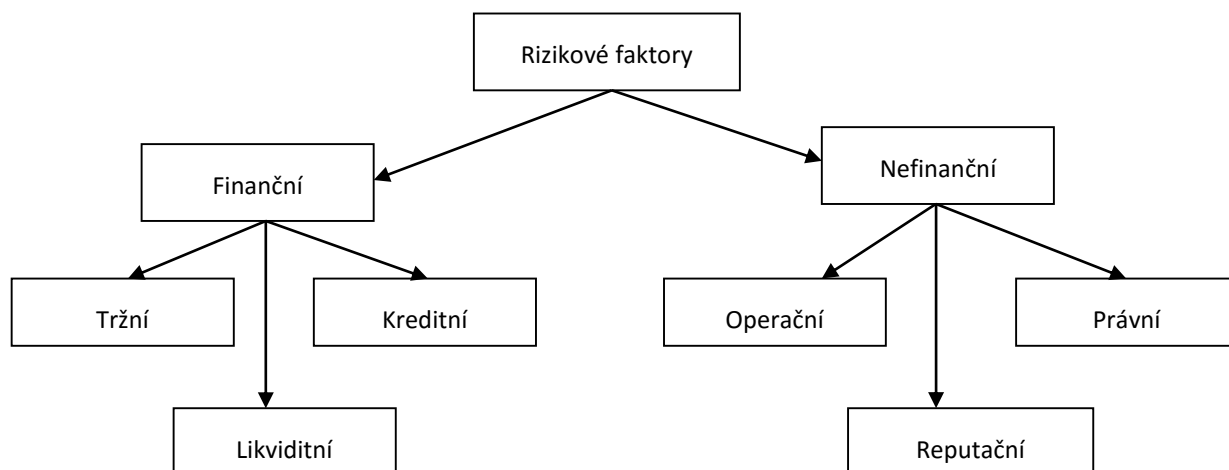
hospodaření. Riziko realizace mimořádné události a tudíž velkých peněžních výdajů musí domácnost ošetřovat tím, že si například sjedná pojištění, nebo bude vytvářet vlastní peněžní rezervu. Tímto byl přiblížen podnikový koncept risk managementu – a sice koncept **očekávané a neočekávané** ztráty.

Očekávaná ztráta je predikovatelná, na ní je nahlíženo jako na běžný náklad byznysu, který je zakalkulovaný do ceny nebo na jehož krytí podnik má vyčleněn kapitál, nikoli jako na riziko.

Riziko se dá definovat jako volatilitu budoucích výnosů vedoucí k neočekávané ztrátě. Vyšší volatilita poukazuje na vyšší riziko. Pro určení výše neočekávané ztráty je třeba specifikovat rizikové faktory, které ovlivňují volatilitu v každém scénáře budoucího vývoje a následně spočítat pravděpodobnost různých scénářů.

Základní rizikové faktory se dá klasifikovat do následujících skupin: tržní riziko, likviditní riziko, kreditní riziko, operační riziko, business riziko a reputační riziko.

Obrázek 2: *Klasifikace rizikových faktorů*



Zdroj: vlastní nákres dle Crouhy, Michel; Galai, Dan; Mark, Robert. *The Essentials of Risk Management*

Kreditní riziko je definováno jako neočekávaná ztráta, kterou ponese věřitel v důsledku neschopnosti nebo nevůle dlužníka plnit své závazky (default), případně v důsledku poklesu jeho bonity (snížení ratingového hodnocení). Rozlišujeme default částečný (protistrana neplní své závazky částečně), nebo kompletní (protistrana neplní své závazky úplně).

Likviditní riziko představuje malou schopnost přeměnit aktiva podniku na hotovost rychle (a)nebo s nízkými náklady. S praktického hlediska jde o nedostatek finančních prostředků pro úhradu aktuálně splatných závazků. S tímto typem rizika se dá častěji setkat na méně vyspělých (tzv. úzkých a mělkých) trzích.

Operační, nebo také **provozní riziko** znamená neočekávané ztráty vzniklé v důsledku působení lidského faktoru (úmyslné jednání – podvod, nebo selhání – nepozornost) nebo selhání systémů (nedostatečná kontrola, chybně (ne)provedené transakce aj.).

Právní riziko představuje situaci, kdy po uzavření obchodu s protistranou se zjistí, že protistrana neměla povolení do toho obchodu vstupovat. Nebo také změnu legislativy např. v daňové oblasti, která bude mít dopad na ziskový profil společnosti.

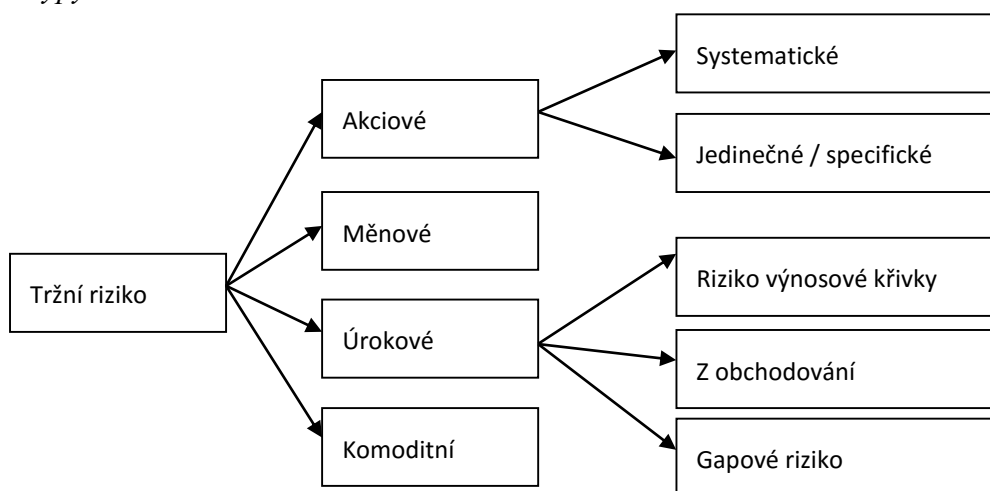
Reputační riziko patří mezi rizika, jejichž realizace má pro společnost nejzávažnější důsledky. Spočívá ve ztrátě (a)nebo přerušení obchodních a zákaznických kontaktů v důsledku poškození image. Dále toto riziko souvisí s nerespektováním etické, sociální a environmentální odpovědnosti podniku vůči společnosti.

Společným rysem rizik nefinančního charakteru je to, že tato rizika jsou relativně špatně měřitelná.

Jen stručně byl uveden přehled základních kategorií rizik. Tyto základní skupiny rizik se dále člení na podskupiny, pro jejichž vymezení není prostor v této práci. Záměrně bylo opomenuto tržní riziko. Jelikož se tato práce bude zabývat výhradně rizikem tržním, bude mu dále věnována větší pozornost.

Tržním rizikem se rozumí neočekávaná ztráta na hodnotě instrumentu nebo portfolia způsobená změnou rizikových faktorů – cen na finančních trzích. Při obchodování s investičními instrumenty tento druh rizika pramení jednak z otevřené tržní pozice, a jednak z nedokonalé korelace mezi zrcadlovými tržními pozicemi, které se mají navzájem kompenzovat. Rozlišuje se čtyři základní typy tržního rizika.

Obrázek 3: Typy tržního rizika



Zdroj: vlastní nákres dle Crouhy, Michel; Galai, Dan; Mark, Robert. *The Essentials of Risk Management*

Akciové riziko je spojováno s volatilitou cen akciových titulů. Akciové trhy se vyznačují určitým stupněm volatility, a proto se akcie považují za relativně rizikový druh aktiv. Akciové riziko se dá rozložit na dvě části, a to na systematické – nediverzifikovatelné v rámci jednoho

vnitřně konzistentního ekonomického prostoru, a jedinečné – vztahující se ke konkrétnímu emitentovi a jehož se dá redukovat vhodnou diverzifikací portfolia.

Úrokové riziko může nabývat několik podob. První z těchto podob je riziko z *obchodování*, které spočívá v tom, že se hodnota cenného papíru s pevným výnosem změní v důsledku změny úrovně tržních úrokových sazeb. Pro tuto relaci platí inverzní vztah, čili s růstem tržních úrokových sazeb klesá tržní cena, a subjekt v dlouhé pozici utrpí ztrátu při prodeji cenného papíru v tento okamžik.

Tzv. *gapové riziko* spočívá v odlišné citlivosti aktiv a pasiv společnosti na změny tržní úrokové míry. V případě vyšší citlivosti aktiv než pasiv na změny tržní úrokové míry – pozitivní gap – a za situace poklesu tržní úrokové míry bude realizovat společnost ztrátu. Dopad realizace gapového rizika na P/L profil shrnuje následující tabulka.

Tabulka 1: *Gapové riziko a P/L profil.*

Vzestup tržních IR	P	L
Pokles tržních IR	L	P
	Aktiva citlivá na $\Delta IR >$ Pasiva citlivá na ΔIR Pozitivní gap	Aktiva citlivá na $\Delta IR <$ Pasiva citlivá na ΔIR Negativní gap

Zdroj: zpracováno dle Ziegler a kol. *Finanční řízení bank*.

Také se v souvislosti s úrokovým rizikem zmiňuje o tzv. *riziku výnosové křivky*, kdy sice portfolio je imunní vůči paralelnímu posunu výnosové křivky, ale není zabezpečeno vůči změně jejího tvaru.

Měnové riziko představuje nebezpečí neočekávané ztráty v důsledku změny tržní ceny zahraniční měny vůči měně domácí za předpokladu, že subjekt drží otevřenou pozici v cizí měně, nebo pokud jeho pozice v cizí měně není zahedgeována perfektně.

Komoditní riziko znamená ztráty způsobené volatilitou tržních cen komodit (např. drahé kovy, nerostné suroviny, některé druhy potravin, elektřina aj.). Zvláštnost tohoto druhu rizika spočívá v zdroji volatility tržních cen komodit. Často se stává, že nabídka komodit je soustředěna v rukou omezeného počtu osob, což přispívá ke zvýšení volatility jejich cen. Dále významnou roli hrají takové specifické faktory, jak náklady skladování a užitek z fyzické držby komodity. Obecně platí, že ceny komodit mají nadprůměrnou volatilitu.

Pro měření očekávaného výnosu a rizika se používají statistické nástroje, a sice míry úrovně resp. polohy a míry variability. K tomuto účelu musíme mít pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny, reprezentující výnos z investičního instrumentu.

1.3.1. SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY

Na tomto místě je vhodné se zmínit o druzích náhodné veličiny. Pokud náhodná veličina může nabývat konečně nebo spočetně nekonečně mnoha hodnot, jedná se o diskrétní náhodnou veličinu. Pro tuto veličinu lze určit pravděpodobnosti výskytu pro všechny její možné hodnoty. Zákon, podle něhož jsou jednotlivým hodnotám přiřazovány pravděpodobnosti jejich výskytu, se jmenuje pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny. V tomto případě je řeč o diskrétních rozděleních.

V případě, že náhodná veličina může nabývat všech hodnot z nějakého intervalu, hovoříme o spojitě náhodné veličině. V tomto případě lze pouze určit pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z určitého intervalu. Rovněž zákon, podle něhož jsou tyto pravděpodobnosti přiřazovány, se nazývá pravděpodobnostní rozdělení spojitě náhodné veličiny.

Pravděpodobnostní rozdělení lze popsat pomocí distribuční funkce a pravděpodobnostní funkce příp. hustoty pravděpodobnosti.

Distribuční funkce $F(x)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší než zvolená její realizace x :

$$F(x) = P(X < x) \quad \text{resp.} \quad (1)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Pravděpodobnostní funkce $P(x)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude přesně hodnoty x :

$$P(x) = P(X = x) \quad (2)$$

Pro spojitá rozdělení je hustota pravděpodobnosti definována jako derivace distribuční funkce. Znalost hustoty pravděpodobnosti slouží k určení pravděpodobnosti, že náhodná veličina X nabude hodnoty z intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$:

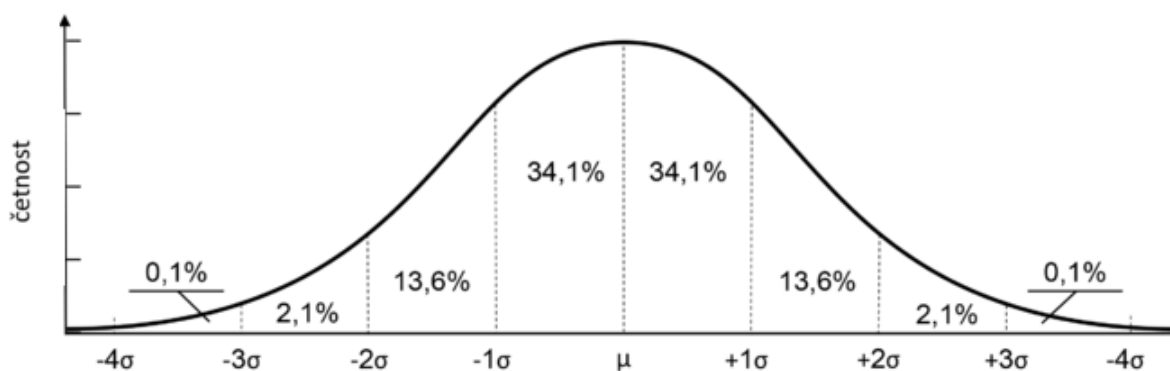
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (3)$$

1.3.2. NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Centrální místo mezi spojitými rozděleními patří normálnímu rozdělení. Má totiž takové vlastnosti, které umožňují používat toto rozdělení jako model chování mnoha náhodných veličin v různých oborech lidské činnosti. Každé pravděpodobnostní rozdělení lze popsat pomocí určitých charakteristik – momentů nebo také parametrů. Prvním momentem je střední hodnota, kterou budeme značit symbolem $\mu = E(X)$. Udává úroveň rozdělení. Druhým momentem je rozptyl ($\sigma^2 = VAR(X)$), případně směrodatná odchylka (σ). Jsou to míry variability a vyjadřují rozptýlení hodnot kolem střední hodnoty. Normální rozdělení náhodné veličiny X budeme značit:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (4)$$

Obrázek 4: Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení



Zdroj: http://www.wikiskripta.eu/index.php/Norm%C3%A1ln%C3%AD_rozd%C4%9Blen%C3%AD

Normální rozdělení má maximum v bodě, který odpovídá střední hodnotě μ rozdělení. Je symetrické kolem střední hodnoty. Tvar hustoty normálního rozdělení vypovídá o tom, že při náhodných pokusech většina hodnot realizace náhodné veličiny X se bude nacházet právě kolem střední hodnoty, odlehlejší pozorování jsou méně pravděpodobná a oboustranně vyvážená. Normální rozdělení je známo tzv. 3s-kritériem, které vyjadřuje četnost výskytu jednotlivých pozorování kolem střední hodnoty. V intervalu $\langle \mu \pm 1\sigma \rangle$ leží 68,2 % realizací náhodné veličiny X , v intervalu $\langle \mu \pm 2\sigma \rangle$ - 95,4 %, a v intervalu $\langle \mu \pm 3\sigma \rangle$ - 99,7 %.

Normální rozdělení je zejména charakteristické tím, že se jeho konce docela rychle přibližují vodorovné ose.

Pro větší pohodlí při výpočtu distribuční funkce normálního rozdělení s libovolnými hodnotami střední hodnoty a rozptylu bylo zavedeno normované normální rozdělení, hodnoty jehož distribuční funkce jsou tabelovány.

Normovaná veličina U je definována pomocí náhodné veličiny X takto:

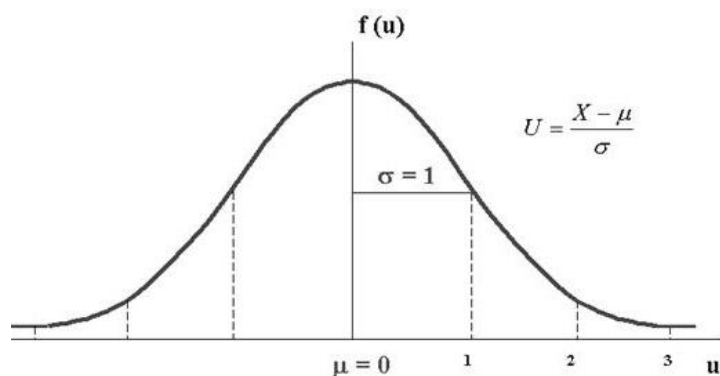
$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad (5)$$

a parametry normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ jsou

$$E(U) = \mu = 0,$$

$$\text{VAR}(U) = \sigma^2 = 1.$$

Obrázek 5: Normované normální rozdělení



Zdroj: <http://cit.vfu.cz/statpotr/POTR/Teorie/Predn2/rozdelZS.htm>

1.3.3. OČEKÁVANÝ VÝNOS

Pokud máme sestrojeno pravděpodobnostní rozdělení výnosů z nějakého investičního instrumentu, můžeme pro odhad očekávaného výnosu z investice do tohoto instrumentu – jeho střední hodnoty – použít nějakou z těchto statistik: průměr (počítá se ze všech hodnot souboru), medián (prostřední hodnota rozdělení) a modus (nejčastěji se vyskytující hodnota).

Střední hodnota (průměr) se počítá jako vážený průměr všech realizací náhodné veličiny X - výnos z investičního instrumentu, kde váhami jsou pravděpodobnosti jednotlivých realizací náhodné veličiny.

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \quad (6)$$

pro diskrétní náhodnou veličinu, a

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (7)$$

pro spojitou náhodnou veličinu, kde

$E(X)$ – očekávaná hodnota náhodné veličiny X ;

p_i – pravděpodobnost i -té realizace náhodné veličiny X ;

x_i – hodnota i -té realizace náhodné veličiny X ;

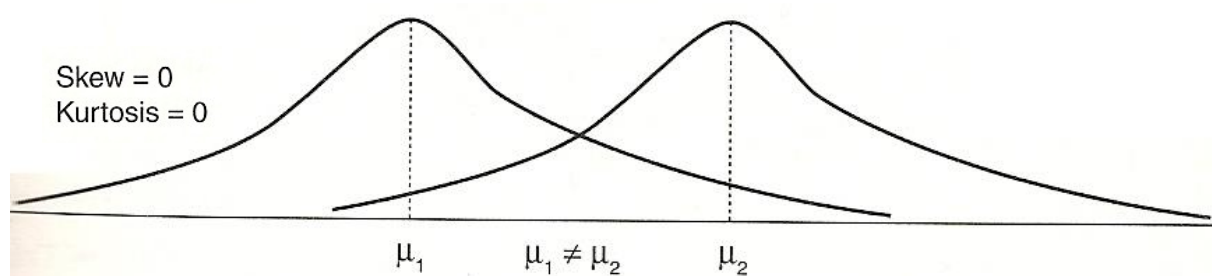
$f(x)$ – hustota pravděpodobnosti.

Pokud počítáme střední hodnotu z konečného vzorku základního souboru, použijeme výběrový průměr:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i \quad (8)$$

Následující obrázek ilustruje střední hodnotu dvou rozdělení.

Obrázek 6: *Střední hodnota dvou rozdělení*



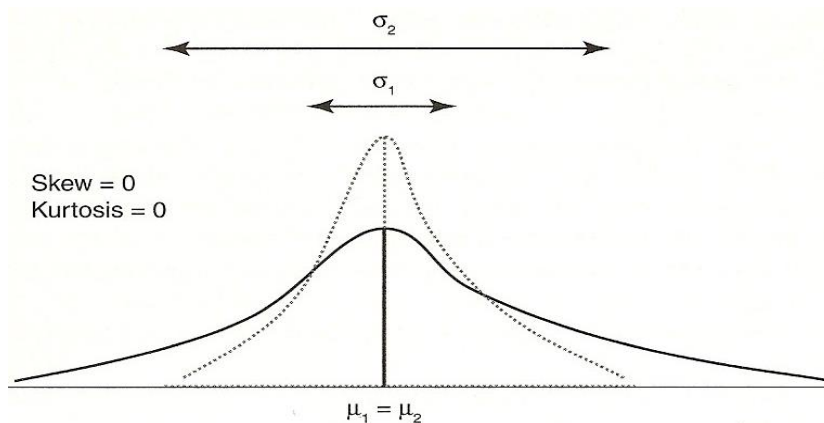
Zdroj: Mun, Johnatan. *Modeling Risk: Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, and Optimization Techniques*.

Je vidět, že oba rozdělení mají podobný tvar, ale odlišnou střední hodnotu.

1.3.4. VARIABILITA OČEKÁVANÉHO VÝNOSU

Riziko neboli variabilita potenciálních scénářů výnosů, se měří nejčastěji pomocí míry variability **rozptyl** příp. **směrodatné odchylky**. Směrodatnou odchylku budeme značit σ .

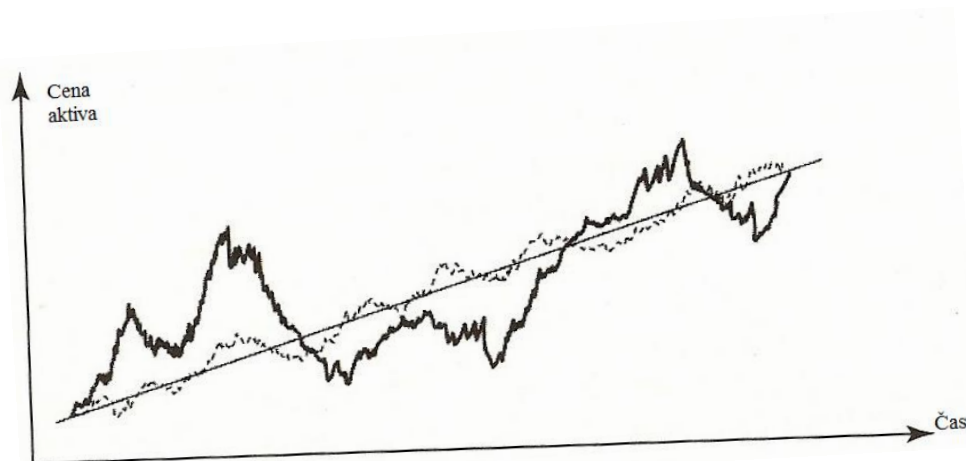
Obrázek 7: *Rozptyl dvou rozdělení*



Zdroj: Mun, Johnatan. *Modeling Risk: Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, and Optimization Techniques*.

Na obrázku vidíme dvě rozdělení, která mají stejnou střední hodnotu, ale výrazně se liší směrodatnou odchylkou. Platí, že čím větší je směrodatná odchylka, tím je rizikovější aktivum. Lépe pochopit zásadní odlišnost dvou uvedených rozdělení pomůže následující graf.

Obrázek 8: *Fluktuace akciových kursů*



Zdroj: Mun, Johnatan. *Modeling Risk: Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, and Optimization Techniques*.

Na grafu dvě časové řady oscilují kolem stejné střední hodnoty. Tenká přerušovaná čára však přiléhá ke střední hodnotě víc, její body nejsou tak rozptýleny kolem střední hodnoty, jak je tomu v případě silné plné čáry. Intuitivně se dá vyvést závěr, že větší volatilitu ceny, a tudíž i riziko, představuje právě silná čára. A racionálně se uvažující investor by měl preferovat investice do aktiva, generujícího výnos, reprezentovaný přerušovanou čarou.

Směrodatnou odchylku a rozptyl lze počítat pro celý soubor pozorování, nebo výběrovou. Pro rozptyl a směrodatnou odchylku platí vztah:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \sigma > 0 \quad (9)$$

Směrodatnou odchylku lze interpretovat jako průměrnou odchylku od průměru.

$$\sqrt{\text{VAR}(x)} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i \times [x_i - \mu]^2} \quad (10)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (11)$$

pro diskrétní náhodnou veličinu, kde

x_i — hodnota i -té realizace náhodné veličiny X ;

μ - střední hodnota základního souboru;

N – rozsah základního souboru;

$\bar{x}$ - výběrový průměr;

p_i - pravděpodobnost i -té realizace náhodné veličiny X ;

s - výběrová směrodatná odchylka;

n - rozsah výběru.

$$\sqrt{\text{VAR}(x)} = \sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx \quad (12)$$

pro spojitou náhodnou veličinu, kde

$f(x)$ - hustota pravděpodobnosti.

Mezi slabé stránky tohoto měřítka rizika patří to, že do výpočtu zahrnuje jak „pozitivní“, tak i „negativní“ volatilitu, čili upside a downside risk. Často je totiž riziko definováno jako pouze potenciální neočekávaná ztráta. Dalším omezením je to, že směrodatná odchylka patří mezi míry absolutní variability, pomocí nichž nelze srovnávat variabilitu souborů, které se liší úrovní nebo měrovými jednotkami.

Směrodatná odchylka resp. rozptyl však nejsou jediným nástrojem pro měření rizika aktiva. Další možnosti jsou uvedeny níže.

Semi-směrodatná odchylka při kalkulaci bere v úvahu pouze „zápornou“ volatilitu, čili počítá pouze downside risk. Tím kompenzuje slabou stránku obyčejné směrodatné odchylky. Počítá se však pouze manuálně.

Volatilita se běžně používá při ohodnocování opcí jako měřítko neurčitosti a rizika. Existuje několik druhů volatility (historická, implikovaná aj.). Počítá se nejčastěji pro data, která mají vlastnosti časových řad.

Beta je dalším měřítkem rizika v investičně finanční teorii. Představuje míru systematického nediverzifikovatelného rizika. Ukazatel beta se dá interpretovat jako citlivost očekávaného výnosu aktiva na vývoj hodnoty tržního portfolia neboli benchmarku.

$$E(r_x) = r_{Rf} + \beta \times (E(r_m) - r_{Rf}), \quad (13)$$

$$\beta = \frac{\rho_{x,m} \times \sigma_x \times \sigma_m}{\sigma_m^2}, \quad \text{kde} \quad (14)$$

$E(r_x)$ - očekávaný výnos aktiva,

r_{Rf} - bezriziková výnosová míra,

β - beta faktor,

$E(r_m)$ - očekávaná výnosová míra tržního portfolia,

$\rho_{x,m}$ - korelační koeficient mezi tržním výnosem a výnosem aktiva,

σ_x - směrodatná odchylka výnosů aktiva,

σ_m - směrodatná odchylka výnosů tržního portfolia,

σ_m^2 - rozptyl výnosů tržního portfolia.

Vyšší hodnota β znamená vyšší míru rizika, a tudíž i vyšší očekávaný výnos aktiva.

$\beta > 1$ znamená, že aktivum je rizikovější než tržní portfolio,

$\beta = 1$ znamená, že aktivum je stejně rizikové jako tržní portfolio,

$\beta < 1$ znamená, že aktivum je méně rizikové než tržní portfolio.

Beta faktor představuje docela výkonný způsob výpočtu rizika, vyžaduje však stanovit benchmark, vůči kterému se bude vyhodnocovat rizikovost příslušného aktiva.

Variační koeficient představuje míru relativní variability. Nemá žádnou měrovou jednotku, je to bezrozměrné číslo. Počítá se jako

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}, \quad \text{kde} \quad (15)$$

v_x – variační koeficient,

s_x – směrodatná odchylka,

$\bar{x}$ – aritmetický průměr (střední hodnota).

Toto měřítko rizika netrpí tou vadou, jako míry absolutní variability, a sice umožňuje srovnávat soubory s různou mírou úrovně a vyjádřené v různých měrových jednotkách. Může nabývat hodnot i intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Nejhorší scénář je jednoduché měřítko hodnoty ztráty vzniklé v důsledku realizace nějakého neúspěšného ztrátového projektu resp. investice, a udává se jako rozdíl mezi aktuální ztrátou z investice a náklady nerealizace žádného projektu. Tato míra rizika není vázána na nějaký konkrétní předem daný časový úsek.

Value at Risk (VaR) představuje maximální velikost ztráty, která nastane s určitou pravděpodobností během předem daného konkrétního časového intervalu.

RAROC (Risk-Adjusted Return on Capital) je ukazatel, který vyjadřuje rentabilitu kapitálu, upravenou o míru rizika. Jinými slovy hodnotí výkonnost s ohledem na riziko.

1.3.5. ŠIKMOST (SKEWNESS)

Šikmost je statistikou, která popisuje symetrii rozdělení náhodné veličiny. Značí se symbolem γ . Rozdělení symetrické kolem střední hodnoty (např. normální rozdělení) má šikmost nula. Šikmost je definována jako

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^T (x_i - E(X))^3}{\sigma^3} \quad (16)$$

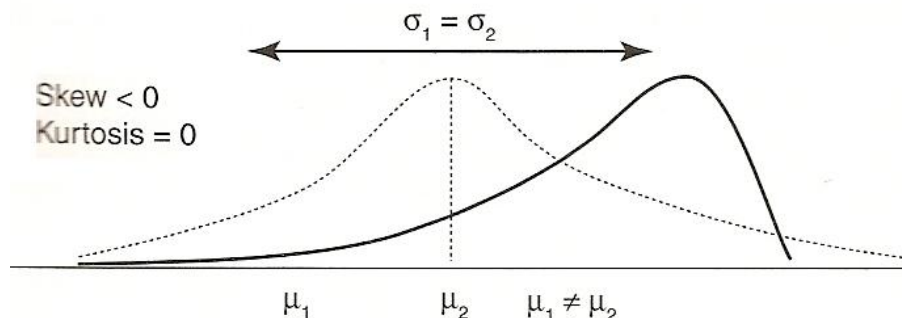
pro diskrétní náhodnou veličinu, a

$$\gamma = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^3 f(x) dx \right\} / \sigma^3 \quad (17)$$

pro spojitou náhodnou veličinu

Negativní šikmost znamená, že rozdělení má delší levý konec a většina hodnot leží vpravo od průměru.

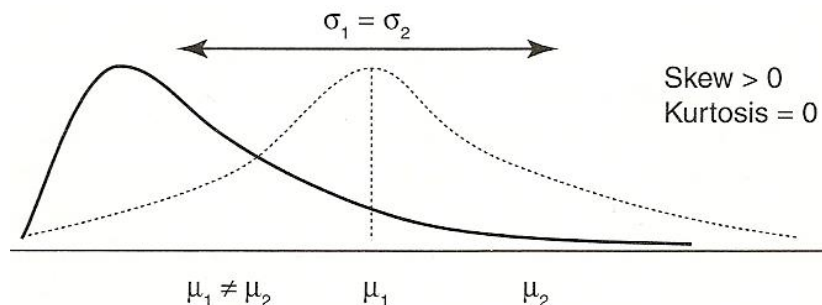
Obrazek 9: *Negativní šikmost*



Zdroj: Mun, Johnatan. *Modeling Risk: Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, and Optimization Techniques*.

S pozitivní šikmostí je to právě naopak. Většina hodnot rozdělení se nachází vlevo od střední hodnoty a pravý konec je delší.

Obrázek 10: *Pozitivní šikmost*



Zdroj: Mun, Johnatan. *Modeling Risk: Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, and Optimization Techniques*.

1.3.6. ŠPIČATOST (KURTOSIS)

Špičatost je další statistikou, porovnávající dané rozdělení s normálním rozdělením. Udává míru, do jaké je rozdělení ploché. Značí se symbolem δ a je definována jako

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^T (x_i - E(X))^4}{\sigma^4} \quad (18)$$

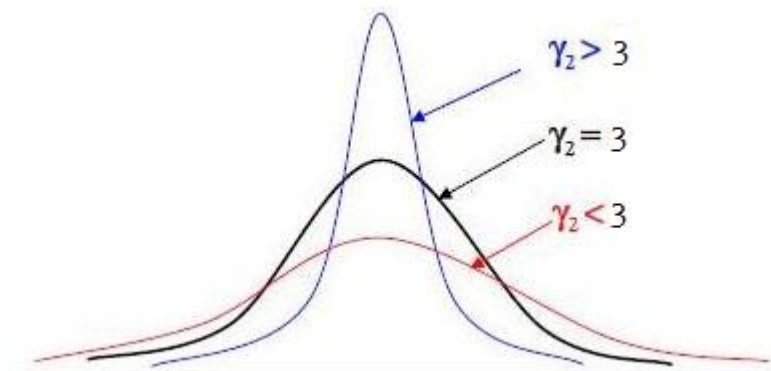
pro diskrétní náhodnou veličinu, a

$$\delta = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^4 f(x) dx \right\} / \sigma^4 \quad (19)$$

pro spojitou náhodnou veličinu.

Normální rozdělení má špičatost rovnou 3. Špičatost větší než 3 znamená, že většina hodnot rozdělení se umístěna blízko střední hodnoty, tvar hustoty je špičatější, a toto rozdělení často má tenké konce neboli málo pravděpodobné vzdálené hodnoty. Velká špičatost svědčí o tom, že míra variability náhodné veličiny kolem μ je nižší, a tudíž je nižší i riziko. Špičatost menší než 3 znamená, že hustota rozdělení má plošší tvar než v případě normálního rozdělení a toto rozdělení má často tlusté konce. Zejména tvar konců (ocasů) rozdělení mají vliv na vyhodnocení rozsahu potenciální ztráty odhadnuté pomocí metody VaR.

Obrázek 11: Špičatost



Zdroj: https://wikisofia.cz/index.php/%C5%A0ikmost_a_%C5%A1pi%C4%8Datost

Koncept rizika jako neočekávané ztráty tvoří základ přístupu k řízení rizik, který se jmenuje Value at Risk.

Regulační kapitálové požadavky Basel k bankovním rizikům se staly významným krokem směrem nejen k posílení stability mezinárodního bankovního systému a sjednocení podmínek působení na mezinárodní úrovni pro banky, ale i k povznesení risk managementu na vyšší úroveň. Ze začátku to byl minimální kapitálový požadavek ke klasickému riziku bankovního byznysu – kreditnímu. Od své původní verzi Basilejské dohody prošly řadou změn a doplnění. Nejvýznamnější z nich se týkala zakomponování tržního a operačního rizik do postupu stanovení minimálního kapitálového požadavku. Basilejské standardy 1988 měly svá slabá místa. Nezohledňovaly například některé techniky snižování rizika (diverzifikace, zajištění aj.) a nebraly v úvahu jiné druhy rizik než kreditní. Novela dohody z roku 1996 částečně odstranila nedostatky verze z roku 1988, konkrétně zohlednila další druh rizika – tržní. Stanovení kapitálového požadavku k tržnímu riziku dle této novely je možné provést aplikací jednoho z přístupů – pomocí standardizované metody nebo interního modelu.

Samotné objekty regulace – banky – vyvinuly vlastní sofistikovanější postupy pro výpočet kapitálu nezbytného ke krytí tržních rizik. Možnost používat preciznější a propracovanější postupy byly vítány bankami, jelikož odpovídaly jejich zájmům – a sice byly šité na míru a umožňovaly bankám provádět efektivnější alokaci kapitálu. Banky získaly možnost volby, jestli se při výpočtu regulatorního kapitálu budou řídit „všeobecnými“ basilejskými standardy, nebo budou za tímto účelem používat modely vlastní. Výběr padá spíše na modely vlastní, jež umožňují lépe kvantifikovat riziko tím, že opouští některé předpoklady, na nichž jsou založeny metody standardizované (např. předpoklad perfektní korelace mezi různými typy rizika) a vyhnout se tak nadhodnocení rizika portfolia a tudíž i nepřiměřeně vysokému kapitálovému požadavku.

Pro to, aby banky mohly používat přístup založený na aplikaci vlastních interních modelů, musí splňovat určité požadavky. Hlavními kritérii jsou:

- Banka vyvinula propracovaný a spolehlivý systém řízení rizik;
- Disponuje dostatečným počtem zaměstnanců, kteří rozumí nejen sofistikovaným modelům, ale i dalším záležitostem interní kontroly – procesům v BackOffice, auditu, controllingu aj.;
- Bankovní modely jsou dostatečně přesnými při měření rizik;
- Banka pravidelně provádí stress testy.

Tyto vlastní modely jsou založeny na VaR metodologii. Pokud banky počítají VaR pro regulatorní účely, musí dodržovat předem stanovené parametry VaR:

- VaR musí být počítán na denní bázi;
- Časový horizont pro výpočet VaR musí být 10 obchodních dní nebo 2 kalendářní týdny;
- Konfidenční interval je stanoven na 99 %;

- Empirická data pro sestrojení rozdělení zisků a ztrát musí tvořit soubor historických dat s délkou pozorování minimálně 1 rok a musí být aktualizována alespoň jednou za čtvrtletí.

Regulatorní orgány mohou bankám nařídit kvantifikovat VaR na základě časového horizontu, kratšího než 10 dní. Důvodem může být například náhlý vzestup volatility na trzích. Nicméně je plně v kompetenci banky, jakou metodou bude počítat VaR. Tady nejsou stanoveny žádné restrikce. Banky tudíž mohou používat jak parametrické metody, tak i simulační. Pokud však bankovní portfolio obsahuje opční instrumenty, musí banka respektovat některé specifické požadavky navíc.

Obecně lze výši kapitálového požadavku k tržnímu riziku stanovenému na základě interního modelu vyjádřit takto:

$$MRC = \max \left(k \times \frac{1}{60} \times \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}; VaR_{t-1} \right) + SF, \quad \text{kde} \quad (20)$$

MRC – kapitálový požadavek k tržnímu riziku;

k – multiplikátor, jehož výši určují národní regulatorní orgány;

SF – specifický faktor.

Vzorec lze interpretovat následujícím způsobem. Výši kapitálového požadavku k tržnímu riziku představuje větší hodnota z VaR předchozího dne a průměrného VaR spočítaného za 60 obchodních dní, vynásobeného multiplikátorem k . Takto definovaný kapitálový požadavek musí banky splňovat na denní bázi.

Multiplikátor slouží za účelem zohlednění faktorů, které nebyly zachyceny VaR modelem. Může to být například nestabilita korelačních vztahů, ne příliš dobrá aproximace empirického rozdělení normálním atd.

Pokud se na základě backtestingu prokáže malá schopnost interního modelu předpovídat riziko, multiplikátor k se zvýší o tzv. penalizační faktor, jehož výše závisí na kvalitě interního modelu a je odvozena od úspěšnosti při backtestingu. Cílem zavedení penalizačního faktoru je motivování bank vyvíjet přesnější a kvalitnější interní modely s vysokou mírou schopností předpovídat budoucí vývoj. Pokud výsledky backtestingu budou uspokojující, a zároveň banka bude splňovat i tzv. kvalitativní požadavky, může mít penalizační faktor nulovou hodnotu.

Mezi kvalitativní požadavky patří zejména:

- Banka má zřízený útvar pro řízení rizik, který je zodpovědný za tvorbu a implementaci bankovního systému řízení rizik, zpracování reportů o vývoji rizikové expozici na denní bázi a který není podřízený obchodnímu útvaru banky, nýbrž vrcholovému managementu.
- Útvar pravidelně provádí ex-post srovnání kvantifikace rizika dle výstupů modelu a aktuálního P/L profilu portfolia – backtesting;
- Příprava interního modelu měření rizika není samoúčelná. Výstupy modelu jsou nedílnou součástí každodenního plánování a monitorování profilu banky z tržního rizika.

Výhody a potenciální slabé stránky použití interních modelů založených na VaR metodologii shrnuje následující tabulka.

Tabulka 2: *Výhody a nevýhody použití interních modelů dle VaR metodologie*

Výhody	Nevýhody
Nízké náklady na implementaci přístupu. Mnoho bank totiž dobrovolně provozuje kvalitní systém risk managementu, kde se VaR metody běžně používají jako nástroj pro měření a řízení rizik. Použití metody VaR i pro regulatorní účely představuje jen malé dodatečné úsilí.	Riziko záměrného snížení hodnoty VaR za účelem držby menšího množství regulatorního kapitálu nelze zcela vyloučit.
Přesnější propočet kapitálového požadavku (nižší hodnota požadavku) a efektivnější alokace kapitálu.	Problematická verifikace kvality interního modelu. Je těžké rozeznat, jestli případné selhání modelu bylo způsobeno jeho špatnou kalibrací, nebo důvodem byla náhodná změna prostředí nepříznivým směrem.
Banky mají zájem o vývoj kvalitních interních modelů. Tady se cíl regulátora a regulovaného shoduje, což je předpokladem účinné spolupráce a úspěšného plnění toho cíle.	Úskalí převedení jednodenního VaR na 10 denní pomocí časového faktoru $\sqrt{t}$ (zejména v případě nelineárního portfolia).

Zdroj: zpracováno dle Basel Committee on Banking Supervision. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*.

1.5. VALUE AT RISK

VaR je systém risk managementu, založený na nástrojích statistické analýzy. Představuje stanovený kvantil rozdělení zisku a ztrát z nějaké investice za určitý časový interval.

1.5.1. ČASOVÝ HORIZONT

Volba časového horizontu, za který sledujeme realizace zisků a ztrát z investice, je subjektivní záležitostí. Odvíjí se od druhu portfolia a účelu, pro něhož kvantifikujeme VaR. Pokud jde o nějaké vysoce likvidní bankovní portfolio například zahraničních měn nebo akcií, je možné časový horizont určit jako 1 obchodní den. Pokud však disponujeme portfoliem, které máme v úmyslu držet a(nebo) vyhodnocovat po dobu v řádu několika měsíců, je vhodné zvolit časový horizont relevantní pro výpočet VaR – např. 3 měsíce. Obecné pravidlo pro určení časového horizontu je to, že musí korespondovat s dobou, nutnou pro úplnou likvidaci portfolia.

Z regulatorního hlediska časový horizont musí být kompromisem mezi náklady na frekvenci sledování pozice a přínosy z včasného odhalení potenciálních problémů.

1.5.2. ÚČELY POUŽITÍ VaR

- Pasivní použití – pouze jako informativní prostředek managementu banky vůči majitelům (denní reporty) nebo pro srovnání v čase a prostoru.
- Nástroj kontroly – slouží ke stanovení limitů pro jednotlivé obchodníky nebo obchodní jednotky.
- Aktivní risk management – klíč pro alokaci kapitálu mezi produkty, obchodními jednotkami aj.
- Stanovení regulatorního kapitálového požadavku k rizikům.

Pokud zjišťujeme VaR v jakosti informativního prostředku pro vnitřní potřeby, nejsou zde žádná pravidla ani doporučení pro volbu kvantitativních faktorů – časového horizontu, konfidenčního intervalu. Volba je zcela na preferencích uživatelů a snad jediným požadavkem na tyto reporty je jejich konzistentnost.

V případě použití VaR jako nástroje kontroly nebo za účelem aktivního risk managementu, by bylo ohleduplné brát zřetel na volbu časového horizontu. Obecně platí, že délka časového horizontu se odvíjí od likvidity aktiv, jež obsahuje portfolio. Například komerční banky budou ve svých VaR modelech používat kratší časový horizont – v řádech dnů. Naopak méně likvidní investiční portfolia například penzijních fondů a dalších institucionálních investorů s podobným časovým horizontem budou volit horizont delší – v řádech měsíců. Pro konfidenční interval platí, že čím je širší, tím vyšší hodnota VaR. Šířku intervalu je možné volit dle vlastního uvážení.

Pro stanovení regulatorního kapitálového požadavku k rizikům pomocí VaR již neplatí taková benevolence, jak ve dvou předchozích případech. Důvodem je to, že v případě realizace větší ztráty než je hodnota VaR, regulatorní kapitál nebude stačit na pokrytí ztráty a hrozí úpadek banky se všemi důsledky. Proto určitá pravidla a požadavky ke kvantitativním konstrukčním prvkům VaR jsou na místě.

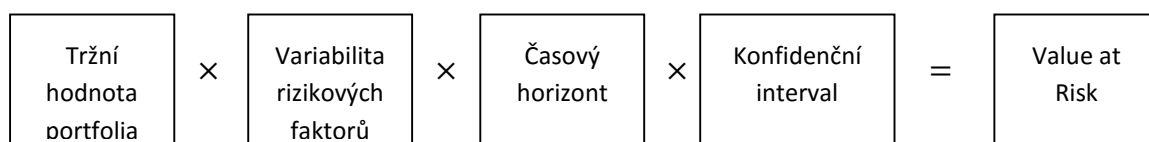
1.5.3. FORMÁLNÍ ODVOZENÍ VALUE AT RISK

VaR vyjadřuje hodnotu downside rizika portfolia aktiv jako maximální možnou ztrátu za určitý časový interval s určitou pravděpodobností. Výpočet VaR předpokládá konstantní rizikový profil portfolia během stanoveného časového horizontu.

Pro sestrojení VaR pro určité portfolio, potřebujeme mít k dispozici následující stavební kameny:

- Tržní hodnotu portfolia – zjistíme součtem jednotlivých tržních cen finančních instrumentů, jež portfolio obsahuje;
- Určení variability (volatility) rizikových faktorů portfolia;
- Stanovení časového horizontu, za něhož bude VaR počítán – závisí na účelu použití VaR;
- Stanovení konfidenčního intervalu pravděpodobnostního rozdělení – taktéž závisí na účelu použití VaR;
- Na základě informací z předchozích bodů – spočítat maximální výši ztráty portfolia.

Obrázek 12: Konstrukční prvky VaR



Zdroj: vlastní nákres

Existuje několik přístupů pro odvození výše VaR. První z nich k tomu nepoužívá směrodatnou odchylku, nýbrž hledá kvantil pravděpodobnostního rozdělení a je aplikovatelný na nějaké empirické pravděpodobnostní rozdělení.

Definujme I_0 jako počáteční investici a R jako výnos z této investice. Výnos z investice má střední hodnotu a směrodatnou odchylku (μ, σ).

Budeme uvažovat nejnižší hodnotu portfolia v konfidenčním intervalu c (např. 0,99) jako

$$I_w = I_0 \times (1 + R_w), \quad \text{kde} \quad (21)$$

I_w - nejnižší hodnota portfolia,
 I_0 - počáteční investice,
 R_w - nejnižší výnos z investice.

Nechť jsme sestrojili empirickou distribuční funkci budoucích hodnot portfolia $f(i)$.

Pravděpodobnost, že se uvnitř konfidenčního intervalu c realizuje ztráta menší než I_w , je

$$c = \int_{I_w}^{\infty} f(i) di, \quad (22)$$

a pravděpodobnost, že se realizuje ztráta větší než I_w je

$$P(i \leq I_w) = \int_{-\infty}^{I_w} f(i) di = 1 - c \quad (23)$$

Jinými slovy, plocha pod křivkou hustoty pravděpodobnosti od $-\infty$ do I_w musí být $(1-c)$, např. 1 %. I_w představuje kvantil pravděpodobnostního rozdělení, pravděpodobnost jehož překročení realizovanou ztrátou je právě $(1-c)$.

Nechť máme střední hodnotu výnosů z investice do portfolia $E(I)$ a počet pozorování realizací výnosů z investice N . Zvolíme si konfidenční interval c . Pro stanovení hodnoty I_w určíme pořadí pozorování n z levého konce rozdělení.

$$n = N \times (1 - c) \quad (24)$$

Následně zjistíme hodnotu I_w tak, že má odpovídat hodnotě realizace výnosu n -tého pozorování zleva.

Na základě zjištěných údajů můžeme VaR počítat jako VaR relativní:

$$\text{VaR (mean)} = E(I) - I_w, \quad (25)$$

nebo také jako VaR absolutní:

$$\text{VaR (zero)} = I_0 - I_w \quad (26)$$

Uvedený postup předpokládá, že výnosy z investice jsou nezávislé. Pro stanovení hodnoty VaR potřebujeme jenom identifikovat příslušný kvantil empirického rozdělení pravděpodobnosti.

Druhý přístup ke stanovení VaR se jmenuje parametrický, jelikož vyžaduje odhad parametru, kterým je směrodatná odchylka. Předpokládá však, že empirické pravděpodobnostní rozdělení se přibližuje rozdělení normálnímu. Právě tento předpoklad je slabým místem přístupu, jelikož není vždy realistický a tudíž je třeba hledat jiné rozdělení. Pokud však předpoklad o normalitě rozdělení můžeme přijmout, usnadní to výpočet VaR.

Prvním krokem je transformace rozdělení $f(i)$ do normovaného normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem rovným 1: $N[0,1]$.

Dále zavedeme vztah mezi R_w a veličinou α tak, že

$$-\alpha = \frac{-|R_w| - \mu}{\sigma} \quad (27)$$

Pro již známou s předchozího případu pravděpodobnost $(1 - c)$ můžeme psát:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{I_w} f(i) di = \int_{-\infty}^{-|R_w|} f(r) dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} F(u) du, \quad \text{kde} \quad (28)$$

$F(u)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Pro výpočet VaR potřebujeme znát hodnotu α , kterou vynásobíme směrodatnou odchylku. Tyto hodnoty jsou tabelovány pro normované normální rozdělení. Dosazením do rovnic

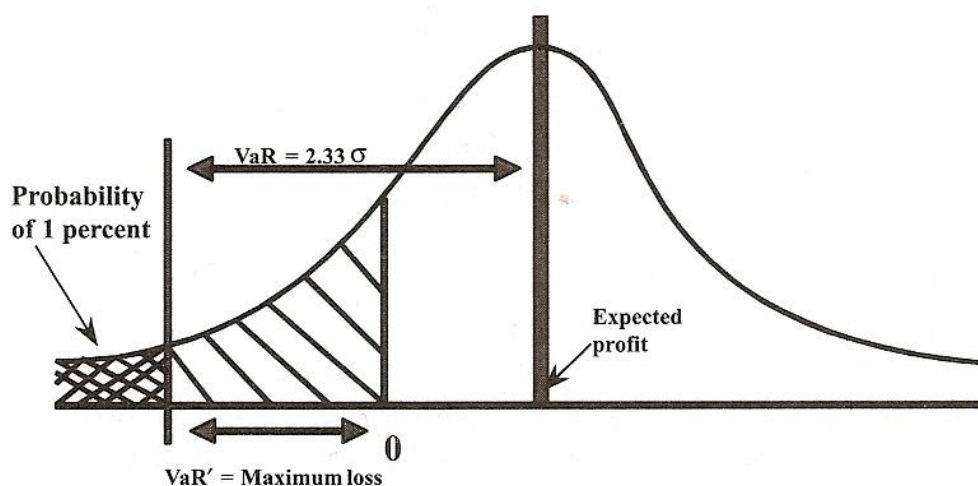
$$R_w = -\alpha\sigma + \mu \quad (29)$$

$$\text{VaR (mean)} = -I_0 (R_w - \mu) \quad (30)$$

spočítáme relativní VaR s použitím časového operátoru Δt (v letech) pro časovou agregaci, pokud směrodatná odchylka a průměr jsou vyjádřeny na roční bázi:

$$\text{VaR (mean)} = I_0 \alpha \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (31)$$

Obrázek 13: Grafické znázornění VaR



Zdroj: Crouhy, Michel; Galai, Dan; Mark, Robert. *The Essentials of Risk Management*.

Hodnotu VaR získáme vynásobením směrodatné odchylky σ tabelovaným faktorem (v závislosti na zvoleném konfidencím intervalu) a případně časovým operátorem Δt .

Pokud se pokusíme porovnat oba přístupy a vytknout jejich silné a slabé stránky, dospějeme k následujícím závěrům. Parametrický přístup ke stanovení VaR se zdá být preciznější, poněvadž zohledňuje informace ze všech pozorování rozdělení při výpočtu směrodatné odchylky, zatímco „kvantilový“ přístup pracuje pouze s několika pozorováními seřazenými dle četnosti výskytu. Riziko dopouštění se chybí roste, pokud je zvolen široký konfidencí interval, jelikož odlehlejší pozorování jsou vzácnější a tudíž možnosti verifikace modelu jsou podstatně menší.

Dosud jsme uvažovali pouze jedno aktivum. V praxi se však pracuje s portfoliem aktiv. Proto by bylo vhodné odvodit VaR pro portfolio. Pro tento účel potřebujeme znát rozdělení

výnosů z portfolia. Pokud předpokládáme, že výnosy z jednotlivých instrumentů portfolia mají normální rozdělení, bude mít normální rozdělení i výnos z portfolia aktiv, jelikož výnos portfolia představuje lineární kombinaci výnosů jednotlivých aktiv.

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t+1}, \quad \text{kde} \quad (32)$$

$R_{p,t+1}$ – výnos portfolia v čase $(t+1)$;

$R_{i,t+1}$ – výnos i -tého aktiva portfolia;

w_i – váha i -tého aktiva portfolia.

V kontextu VaR metodologie se jednotlivým aktivům portfolia říká rizikový faktor, a váhy aktiv v portfoliu se interpretují jako velikost expozice vůči rizikovému faktoru.

Riziko portfolia není lineární kombinací rizik jednotlivých instrumentů. Musí být brán zřetel na provázanost výnosů aktiv, čili na korelaci mezi nimi. Vzorec pro výpočet rizika portfolia vypadá následovně:

$$\text{VAR}(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N w_i w_j \sigma_{ij}, \quad \text{kde} \quad (33)$$

σ_p^2 – rozptyl výnosů aktiv portfolia;

σ_{ij} – kovariance výnosů i -tého a j -tého aktiva.

Na tomto místě použijeme závěr z předchozího odstavce, že výnos portfolia má normální rozdělení. Je tedy možné přeměnit konfidenční úroveň c do α normovaného normálního rozdělení tak, že se pravděpodobnost realizace ztráty větší než $-\alpha$ rovná c . Pak VaR portfolia je:

$$\text{VaR}_p = \alpha \sigma_p W_t, \quad \text{kde} \quad (34)$$

σ_p – směrodatná odchylka výnosů aktiv portfolia;

W_t – hodnota portfolia v čase t .

Hodnota VaR portfolia je funkcí počtu aktiv, rizika a kovariance aktiv portfolia. Portfolio bude mít malé riziko, když intenzita závislosti výnosů aktiv nebude velká – příležitost pro vhodnou diverzifikaci, anebo portfolio bude obsahovat velký počet aktiv.

Metody výpočtu VaR se dá rozdělit do dvou velkých skupin: parametrické a simulační metody.

Parametrické metody jsou nejčastěji používány pro výpočet VaR. Hlavním důvodem jsou výhody těchto metod – jednoduchost a rychlost. Skupina parametrických metod sdružuje několik alternativních přístupů. Mají však společný jmenovatel – jsou založeny na stejných předpokladech:

- normalita rozdělení rizikových faktorů portfolia;
- jako důsledek – normalita rozdělení výnosů celého portfolia.

Kvalita výsledků modelu se odvíjí od míry splnění předpokladů modelu.

Ještě než se pustíme do prezentování jednotlivých přístupů, je vhodné zmínit o jednom technickém prvku parametrických metod výpočtu VaR, a sice o tzv. **mapování portfolia**. Představuje proces transformace reálného portfolia na vektor expozic vůči konečnému počtu náhodných veličin – rizikových faktorů (např. úroková sazba, měnový kurs atd.). Modely tedy běžně dále pracují nikoli s každým jednotlivým instrumentem v portfoliu, nýbrž s expozicemi vůči rizikovému faktoru. Tento technický prvek slouží za účelem zjednodušení výpočtu. Pokud pracujeme s malým portfoliem, řekněme do 10 instrumentů – akcií, přichází v úvahu možnost uvažovat výnos každé jednotlivé akcie jako samostatný rizikový faktor. Problém však nastává v případě většího množství instrumentů v portfoliu. Jak uvidíme, parametrické přístupy k výpočtu VaR pracují s rozptylem a korelacemi instrumentů. Pokud portfolio obsahuje n instrumentů, počet korelačních koeficientů, jež bude třeba odhadnout, je roven

$$n(n-1)/2 \quad (35)$$

Tudíž pokud portfolio bude obsahovat pouze 50 akcií, bude třeba odhadnout 1225 korelací. Za této situace již není možné nahlížet na výnos každé akcie jako na samostatný rizikový faktor, a použije se postup mapování portfolia.

Nyní se podíváme na některé metody podrobněji.

1.5.4.1. PARAMETRICKÉ METODY

1.5.4.1.1. PORTFOLIO-NORMAL METODA

Tato metoda stanovuje velikost VaR jako násobek směrodatné odchylky portfolia, upravený o časový faktor:

$$VaR_p = \alpha \sigma_p \sqrt{t}, \quad \text{kde} \quad (36)$$

VaR_p – Value at Risk portfolia dle portfolio-normal metody;

α – konstanta normovaného normálního rozdělení odpovídající konfidenčnímu intervalu modelu;

σ_P – riziko portfolia měřené směrodatnou odchylkou;

t – časový faktor.

Riziko portfolia v podobě směrodatné odchylky získáme z rozptylu portfolia – odmocněním. Je nutné zdůraznit, že jde o směrodatnou odchylku spočítanou z historických hodnot rizikových faktorů portfolia.

Metoda je založen na předpokladu normality výnosů portfolia a jejich nezávislosti:

$$R_p \sim N(\mu_P, \sigma_P) \quad (37)$$

Doporučuje se aplikovat na velké a diverzifikované portfolio. Pozice v portfoliu musejí být nezávislé. Předpoklad normality výnosů je teoreticky podložen těmito úvahami: jelikož rozdělení výnosů každého instrumentu v portfoliu má konečný rozptyl a průměr, podle centrální limitní věty rozdělení výnosů tohoto portfolia je normální.

Dalším případem, kde se dá aplikovat tuto metodu, je rychlá kalkulace množství kapitálu, který se alokuje na obchodní jednotku. Ideální je situace, kdy jsou k dispozici historické výkony jednotky. V tomto případě je možné spočítat průměr a směrodatnou odchylku výnosů a pak na základě těchto údajů např. stanovit množství kapitálu ke krytí případných ztrát nebo nastavit limity pro obchodování.

Naopak tato metoda není vhodná pro portfolia, obsahující značné množství nelineárních instrumentů (např. opcí).

Hlavní silnou stránkou portfolio-normal metody je jednoduchost. Zejména není nutné odhadovat korelační koeficienty mezi výnosy jednotlivých instrumentů, o to víc je třeba dbát na dodržení předpokladu nezávislosti výnosů instrumentů.

1.5.4.1.2. ASSET-NORMAL METODA

Na první pohled asset-normal metoda vypadá úplně stejně jako portfolio-normal metoda:

$$VaR_P = \alpha \sigma_P \sqrt{t}.$$

Rozdíl je ve způsobu výpočtu směrodatné odchylky, která je tentokrát počítána na základě vah jednotlivých instrumentů v portfoliu a korelací mezi jejich výnosy. Zde se tudíž předpokládá závislost mezi výnosovými měrami instrumentů. Směrodatnou odchylku portfolia tedy spočítáme dle vzorce:

$$\sigma_P = \sqrt{w' \Sigma w}, \quad \text{kde} \quad (38)$$

σ_P – směrodatná odchylka portfolia dle asset-normal metody;

w – vektor vah jednotlivých aktiv v portfoliu;

Σ - korelační matice výnosů instrumentů.

Dále asset-normal metoda pracuje s tím, že může nahrazovat výnosy identických instrumentů v portfoliu výnosem tržního benchmarku. Pokud máme diverzifikované portfolio n akcií, můžeme pomocí aplikace jednofaktorového modelu vyjádřit výnos i -té akcie r_i jako funkci výnosu tržního indexu a specifického komponentu:

$$r_i = \beta_i r_m + \alpha_i + \varepsilon_i, \text{ kde} \quad (39)$$

r_i – výnos i -té akcie;
 β_i – beta faktor i -té akcie;
 r_m – výnos tržního portfolia;
 α_i – konstanta;
 ε_i – specifický komponent.

Předpokládá se, že specifické riziko bylo eliminováno vhodnou diverzifikací, tudíž jednotlivé specifické komponenty se vyruší a mohou být zanedbány. Pak výnos portfolia lze vyjádřit jako:

$$r_P = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i = \sum_{i=1}^n \omega_i (\beta_i r_m + \alpha_i + \varepsilon_i) = \beta_P r_m + \alpha_P + \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon_i \approx \beta_P r_m + \alpha_P \quad (40)$$

r_P – výnos portfolia akcií;
 ω_i – váha i -té akcie v portfoliu;
 β_P – beta-faktor portfolia;
 α_P – konstanta.

Beta faktor portfolia se vypočítá jako vážený průměr beta faktorů akcií v portfoliu.

I u této metody platí předpoklad normality rozdělení výnosů jednotlivých instrumentů v portfoliu. Na tyto instrumenty je nahlíženo jako na náhodné veličiny. Jelikož suma normálně rozdělených náhodných veličin je také normálně rozdělená náhodná veličina, výnosy celého portfolia jsou rovněž normálně rozděleny.

Zde je však opuštěn předpoklad nezávislosti výnosů instrumentů. Pracuje se totiž s korelační maticí. To, že portfolií, jenž obsahují výnosově závislé instrumenty, je většina, představuje výhodu této metody ve srovnání s předchozí. Slabá stránka je opět nevhodnost metody pro nelineární portfolia.

1.5.4.1.3. DELTA-NORMAL METODA

Metoda je založena na předpokladu, že existuje lineární vztah mezi změnou tržních rizikových faktorů a hodnotou jednotlivých instrumentů v portfoliu. Rozlišujeme mezi instrumenty a rizikovými faktory portfolia. Může se stát, že jeden instrument zahrnuje více rizikových faktorů. Rizikovým faktorem rozumíme jednotlivý zdroj rizika, například změna měnového kursu. Příkladem instrumentu, jenž zahrnuje několik rizikových faktorů, může být dluhopis emitovaný v cizí měně. Tady se jedná o dva rizikové faktory, a sice změnu úrokové míry a měnového kursu. Linearitu portfolia se dá vysvětlit pomocí tohoto logického řetězce:

platí lineární vztah mezi změnou tržních rizikových faktorů a hodnotou jednotlivých instrumentů v portfoliu, tudíž změny hodnoty portfolia lze získat díky lineární transformaci změn tržních rizikových faktorů. Portfolio je lineární – čili hodnotu portfolia se dá vyjádřit ve tvaru lineárního polynomu.

Dále platí, že změny tržních rizikových faktorů jsou normálně rozděleny, tudíž to samé platí i pro rozdělení změn portfolia.

P/L funkci pro jednotlivý rizikový faktor zjistíme tak, že vynásobíme změnu rizikového faktoru koeficientem sensitivity:

$$\begin{aligned} P/L_{RF1} &= \delta_1 \times \text{změna}_{RF1} \\ &\vdots \\ P/L_{RFn} &= \delta_n \times \text{změna}_{RFn} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{Portfolio P/L} = \sum_{i=1}^n P/L_{RFi}, \quad \text{kde}$$

δ – koeficient sensitivity P/L funkce rizikového faktoru na změnu rizikového faktoru;
RF – rizikový faktor.

P/L funkce individuálních rizikových faktorů jsou sdruženě normálně rozděleny. Celková P/L funkce portfolia je součtem (lineární kombinací) jednotlivých P/L funkcí a je rovněž normálně rozdělena, jelikož suma normálně rozdělených proměnných má normální rozdělení.

Pokud celková P/L funkce portfolia má normální rozdělení, dá se tuto funkci popsat průměrem a variančně-kovarianční maticí.

Vyjádříme koeficienty sensitivity δ pomocí sloupcového vektoru Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (42)$$

a variančně-kovarianční matici – pomocí operátoru Σ .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Pak riziko portfolia spočítáme jako:

$$\sigma_P^2 = \sum_{ij} \delta_i \delta_j \sigma_{ij} = \Delta' \Sigma \Delta \quad (44)$$

Koeficienty sensitivity se dá představit jako derivaci ceny instrumentu dle rizikového faktoru. Udává, jak se změní cena instrumentu při změně rizikového faktoru o jednotku.

Hodnotu VaR pak zjistíme pomocí již známého vzorce (36):

$$\text{VaR} = \alpha \sigma_P \sqrt{t}.$$

Za výhodu této metody – oproti simulačním metodám – lze považovat relativní rychlost výpočtu. Nabízí kompromis mezi přesností a obtížností. Metoda je aplikovatelná na portfolia s vysokou frekvencí přeceňování – výpočet VaR na denní bázi. Hodí se i pro větší portfolia, jelikož nahrazuje každou pozici lineární expozicí.

Metoda však opět není vhodná pro nelineární pozice. To neznamená, že v portfoliu nesmí být žádná opce, ale je třeba dbát na to, aby opčních instrumentů zase nebylo příliš mnoho. Důvodem je zejména to, že rozdělení opcí není symetrické kolem střední hodnoty, a tudíž delta-normal VaR, jenž pracuje s předpokladem normality rozdělení, není schopný tuto skutečnost zachytit.

Rovněž jako u předchozích metod platí, že ne vždy jsou plně splněny předpoklady, na nichž je založen model. Zejména se to týká předpokladu o normálním rozdělení P/L funkce instrumentů portfolia. Nabízí se problém tlustých konců rozdělení většiny finančních aktiv. Tím pádem na koncích rozdělení finančních aktiv bude více pozorování, než je tomu u normálního rozdělení. Přístup, založený na předpokladu normálního rozdělení tedy bude podhodnocovat proporcii odlehlých hodnot (pozorování) a následně i hodnota samotného VaR bude podhodnocena.

1.5.4.1.4. DELTA – GAMMA METODA

Existují však v rámci parametrických metod přístupy, které řeší omezení výše zmíněných metod. Tzv. delta-gamma přístup je aplikovatelný na nelineární opční portfolia. Pracuje totiž nejen s první derivací ceny instrumentu dle rizikového faktoru, nýbrž uvažuje i druhou derivaci.

Například změnu hodnoty portfolia s pevným výnosem se dá vyjádřit následovně:

$$dV = - (D_m V) dy + 0,5 (CV) dy^2, \quad \text{kde} \quad (45)$$

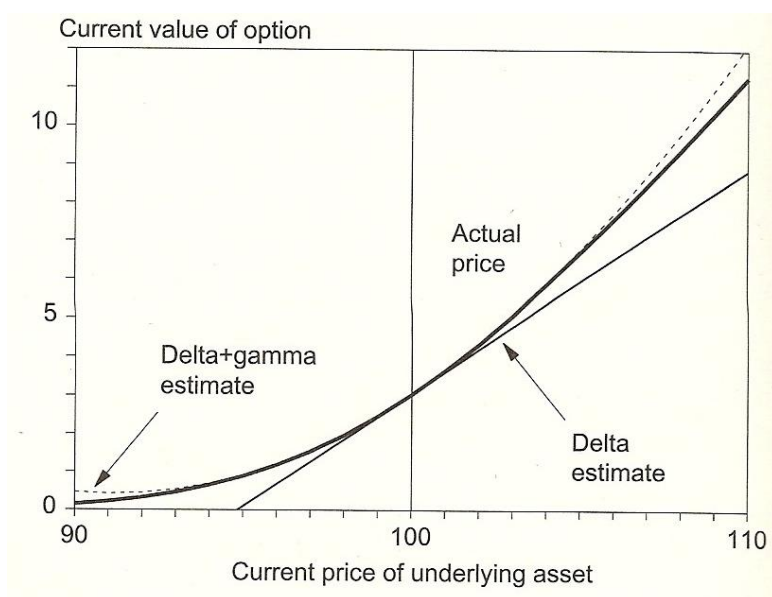
V – hodnota portfolia;

D_m – modifikovaná durace instrumentu;

C – konvexita instrumentu.

U opčních instrumentů druhá derivace opční prémie podle ceny bazického instrumentu se značí Γ - gamma. Vyjadřuje závislost změny hodnoty delty opce – první derivace opční prémie podle ceny bazického instrumentu – na malé změně ceny bazického instrumentu.

Obrázek 14: *Delta-gamma pro long call opci*



Zdroj: Jorion, Philippe. *Value at Risk: the New Benchmark for Managing Financial Risk*.

Jak vidíme na obrázku, delta-gamma přístup lépe vystihuje závislost opční prémie na změně ceny podkladového aktiva.

Delta-gamma metoda je vhodná – jak již bylo naznačeno – pro portfolia, která jsou vystavena několika zdrojům rizika a jejichž podstatnou část tvoří opční instrumenty. Poskytuje totiž uspokojivé řešení situace: relativně precizní výpočet VaR v kombinaci s relativně nízkými náklady na výpočet.

Na druhou stranu, pokud bychom chtěli transformovat VaR na jiný časový horizont, než byl horizont původní, dá se to uskutečnit pouhou úpravou odmocniny časového faktoru. To však platí pouze pro konstantní pozici a nezávislé a identicky rozdělené denní výnosy instrumentů. Tím pádem, úprava denní volatility na jiný časový horizont pomocí přizpůsobení odmocniny časového faktoru nepřichází v úvahu pro opční portfolia.

1.5.4.2. SIMULAČNÍ METODY: METODA HISTORICKÉ SIMULACE

Nyní se zaměříme na druhou skupinu metod odhadu VaR – skupinu simulačních metod. Tyto metody jsou užitečné zejména tehdy, je-li vztah mezi hodnotou portfolia a tržními rizikovými faktory nelineární. Tato vlastnost je typická pro opční portfolia.

Obecně filozofii simulačních metod se dá shrnout následovně: vytvoří se určité předpoklady ohledně rozdělení rizikových faktorů, vezme se vzorek dat z tohoto rozdělení a přehodnotí se portfolio. Když již jsou k dispozici nasimulované hodnoty portfolia, seřadí se sestupně a VaR se určí jako příslušný kvantil rozdělení.

Metoda historické simulace pracuje s historickými denními změnami tržních rizikových faktorů za účelem odhadnout změny hodnoty portfolia mezi dneškem a zítřkem. Metoda je zcela neparametrická, na rozdíl od variančně-kovarianční. Při stanovení hodnoty VaR pracuje výlučně s posloupností budoucích zisků a ztrát vygenerovaných na základě různých algoritmů, a se stanoveným kvantilem vzniklé P/L funkce.

Cílem metody historické simulace tudíž je vygenerovat sérii výnosů a ztrát portfolia s délkou předpovědi 1 den. Připomeňme si, že výnos portfolia je definován jako vážený průměr výnosů jednotlivých aktiv, kde váhami jsou podíly hodnoty aktiva na celkové hodnotě portfolia.

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t+1},$$

Postup stanovení VaR se skládá z následujících kroků.

Krok 1.: Identifikace tržních rizikových faktorů ovlivňujících výnos portfolia. Podíváme se na portfolio a zjistíme, jaké instrumenty jsou v něm obsaženy, a každému přiřadíme tržní rizikový faktor, který ovlivňuje jeho hodnotu – úrokové sazby, měnové kursy, akciové kursy atd.

Krok 2.: Získání dat o změnách identifikovaných rizikových faktorů za historické období. Obvykle se pracuje s historickou časovou řadou délky 500. Tento soubor se jmenuje výběrový soubor neboli vzorek. Rozsah tohoto souboru však může být jiný – větší nebo menší. Při odpovědi na otázku, jaký rozsah souboru zvolit, se doporučuje řídit kompromisem mezi náklady na získání dat, statistickými kvalitami modelu (čím víc pozorování, tím větší spolehlivost modelu) a rizikem, že příliš velký rozsah dat bude obsahovat hodně zbytečných informací. Všechna pozorování se musejí vztahovat ke stejnému okamžiku zjištění – například pro akciové kursy to mohou být uzavírací kursy každý obchodní den.

Krok 3.: Generování scénářů výnosů portfolia mezi dneškem a zítřkem.

Krok 4.: Na základě nasimulovaných hodnot spočítat VaR jako příslušných kvantil rozdělení denních změn hodnoty portfolia v čase $(n + 1)$.

Krok 5.: V případě potřeby převést denní VaR na požadovaný časový horizont.

Pokud zvolíme rozsah vzorku 500 pozorování, budeme moci vygenerovat stejný počet alternativních scénářů pro vývoj hodnoty portfolia mezi dneškem a zítřkem. Označme si první den (nejedlejší pozorování ode dneška) jako Den 0, druhý den – jako Den 1 a tak dále.

Celkem budeme mít 500 scénářů pro jednodenní předpověď vývoje tržních faktorů. Uvažujeme, že dnes je den n . Scénář vývoje rizikového faktoru pro den $(n+1)$, který kopíruje v procentuálním vyjádření vývoj rizikového faktoru mezi dnem i a $(i-1)$, se určí následovně:

$$RF_n \times \frac{RF_i}{RF_{i-1}} \quad (46)$$

$$1 \leq i \leq 500$$

RF_n – hodnota rizikového faktoru dnes;

RF_i – hodnota rizikového faktoru v den i ;

RF_{i-1} – hodnota rizikového faktoru v den $(i-1)$.

Tabulka 3: *Historická simulace – numerický příklad*

B	C	E	I	K
Den	Den	RF ₁	Scénář	RF ₁
$i-1$	0	0,9753	1	0,8264
i	1	0,9277	2	0,8265
	2	0,8825	3	0,8265
	3	0,8395		
	498	0,7985		
	499	0,8153	499	0,8871
n	500	0,8688	500	0,9258

Zdroj: vlastní výpočty

Pro názornost uvedeme krátký numerický příklad. Historická časová řada vývoje rizikového faktoru RF_1 je ve sloupci E. Teď si spočítáme předpověď pro den $(n+1)$, neboli Scénář 1, která se bude v procentuálním vyjádření napodobovat vývoj mezi dnem i a $(i-1)$:

$$0,8264 = 0,8688 \times \frac{0,9277}{0,9753}$$

Sloupec K obsahuje 500 scénářů nasimulovaných hodnot rizikového faktoru RF_1 . Takto spočítáme nasimulované hodnoty pro všechny rizikové faktory, a následně na základě provedených simulací rizikových faktorů určíme budoucí hodnoty celého portfolia. Dostaneme rovněž 500 scénářů vývoje hodnoty portfolia. Pro každý scénář spočítáme absolutní změnu hodnoty mezi dneškem a zítřkem. Soubor těchto hodnot tvoří rozdělení pravděpodobnosti denní změny hodnoty portfolia aktiv. Dále seřadíme výsledky od nejhoršího (maximální ztráta) do nejlepšího. VaR pak bude odpovídat příslušnému kvantilu rozdělení, v závislosti na zvoleném

konfidenčním intervalu. V našem případě 500 scénářů budeme hledat VaR např. pro 99 % konfidenční interval jako pátou nejhorší hodnotu rozdělení.

Metoda historické simulace však pracuje s výběrovým souborem rizikových faktorů, proto odhad velikosti příslušného kvantilu není přesný. Dopouštíme se chyby odhadu. Její velikost je dána vztahem:

$$\frac{1}{f(x)} \sqrt{\frac{q(1-q)}{n}} \quad (47)$$

q – kvantil;

n – počet pozorování;

$f(x)$ – hustota pravděpodobnosti.

Velikost chyby odhadu závisí zejména na šířce konfidenčního intervalu a na počtu pozorování. Platí, že čím konfidenční interval je širší, tím je chyba větší. Chyba však klesá s růstem počtu pozorování.

Hlavní slabou stránkou této verze metody historické simulace je to, že každé pozorování – jak bližší aktuálnímu datu, tak i vzdálenější – má stejnou váhu $1/n$, tedy různě vzdáleným pozorováním je pokaždé přiřazována stejná pravděpodobnost.

1.5.4.2.2. EWMA

Jako pokus o kompenzaci této slabiny se nabízí modifikace základní metody historické simulace – jedná se o tzv. EWMA přístup neboli metodu exponenciálně váženého klouzavého průměru. Metoda založena na použití parametru lambda λ . Tomuto parametru se také říká vyhlazující konstanta. Princip této metody spočívá v tom, že přiřazuje předcházejícímu dni λ -krát menší váhu. Váha, která bude přidělena i -tému dni, se rovná

$$\lambda^{i-1} \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^n} \quad (48)$$

$$0 < \lambda < 1$$

Součet vah se rovná 1. Velikost parametru λ volíme z intervalu (0; 1) s tím, že čím λ se víc blíží 1, tím více se podobá klasické metodě historické simulace. Klasická metoda je speciálním případem EWMA při $\lambda = 1$.

Ať dnes je den i ($i = 1$). Máme k dispozici 500 pozorování. Zvolíme si $\lambda = 0,93$. Předchozímu dnu bude přidělena váha

$$0,93^{1-1} \frac{(1-0,93)}{1-0,93^{500}} = \frac{(1-0,93)}{1-0,93^{500}} = 0,07$$

Stejně jako v případě klasické metody historické simulace, seřadíme všechny změny hodnot portfolia vzestupně – od nejnižší hodnoty k nejvyšší. Stanovíme si úroveň kvantilu pro

zjištění VaR a budeme sčítat váhy jednotlivých výsledků tak dlouho, pokud jejich součet nepřekročí zvolenou úroveň kvantilu. Příslušná denní změna hodnoty portfolia v tomto případě i bude hledaný VaR.

VaR dle klasické metody a dle EWMA přístupu se tudíž mohou dost lišit. Čím vzdálenější od současnosti je pozorování, tím menší se mu přiděluje váha. Rozdíl ve výsledcích obou metod bude o to větší, čím více se budou vzdalovat v čase nejnižší denní změny hodnoty portfolia.

1.5.4.2.3. EWMA MODEL S VOLATILITOU

Jak již napovídá název, jedná se o přístup zohledňující volatilitu. Je odezvou na námitku, že různá pozorování z výběrového souboru se liší tržními podmínkami, za jakých se odehrála, například, volatilitou. Zdá se být logické, že pokud se lišila úroveň volatility před a po i -tém dni, mělo by to být promítnuto i do scénářů změn hodnoty portfolia. Vzorec pro zohlednění volatility vznikl ze simulačního vztahu klasické metody.

$$RF_n \times \frac{RF_i}{RF_{i-1}} = RF_n \times \frac{RF_{i-1} + (RF_i - RF_{i-1})}{RF_{i-1}} \quad (49)$$

Vzorec, zohledňující volatilitu, vypadá následovně:

$$RF_n \times \frac{RF_{i-1} + (RF_i - RF_{i-1}) \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_i}}{RF_{i-1}} \quad (50)$$

σ_n – volatilita dnes;

σ_i – volatilita v i -tém dni.

Na tomto místě použijeme vzorec pro výpočet rozptylu, s tím, že ho upravíme dle předpokladu, že střední hodnota je nula:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_{n-i}^2 \quad (51)$$

r – výnos

σ^2 – rozptyl.

Výnos r se určuje jako procentuální změna hodnoty proměnné S mezi bezprostředně jdoucími po sobě časovými okamžiky. Může to být například tržní uzavírací kurs akcie v den i a v den $(i-1)$.

$$r_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \quad (52)$$

Vzorec (51) přiděluje stejnou váhu všem pozorováním $r_{n-i}^2: r_{n-1}^2, r_{n-2}^2, \dots, r_{n-m}^2$. Za účelem zjištění aktuální úrovně volatility zkusíme přidělit novějším datům větší váhu. Toto je možné provést použitím následujícího vzorce:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{n-i}^2 \quad (53)$$

α_i - váha přidělena pozorování před i dny.

Platí, že všechny α_i musí být větší než nula, a zároveň jejich součet se musí rovnat 1.

Pokud budeme uvažovat, že existuje jakási průměrná dlouhodobá úroveň rozptylu V_L , které přidělíme váhu γ , formule pro výpočet rozptylu se transformuje do podoby

$$\sigma_n^2 = \gamma * V_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i * r_{n-i}^2 \quad (54)$$

Tento vztah je znám jako ARCH (m) model¹. Jeho interpretace je následující: odhad rozptylu je založen na odhadu průměrné dlouhodobé úrovně rozptylu a na vážených m pozorováních. Občas při zápisu modelu se použije substituce: $\omega = \gamma * V_L$. Tehdy ARCH model nabývá této podoby:

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i * r_{n-i}^2 \quad (55)$$

Při praktickém výpočtu odhad rozptylu dle EWMA modelu s volatilitou budeme provádět dle tohoto rekurentního vzorce, který je speciálním případem (53), kdy váhy exponenciálně klesají s posunem v čase směrem do minulosti:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{n-1}^2 \quad (56)$$

který po úpravách nabude následujícího tvaru:

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} r_{n-i}^2 \quad (57)$$

Vzorec (57) je ekvivalentní výrazu (53).

Vztah (56) je vážený průměr rozptylu a výnosu z předchozího dne. Opět se použije parametr λ , který vyjadřuje přidělenou váhu. Výraz $\lambda \sigma_{n-1}^2$ determinuje persistenci ve volatilitě: bez ohledu na to, co se děje na trhu, pokud včera volatilita byla vysoká, bude vysoká i dnes. To platí tím víc, čím vyšší je λ . Výraz $(1 - \lambda) r_{n-1}^2$ zase determinuje míru reakce volatility na změny tržních podmínek. Čím menší je λ , tím intenzivněji reaguje volatilita na změny tržních podmínek. Funkční vztahy shrnuje následující tabulka:

¹ ARCH - Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.

Tabulka 4: Velikost parametru λ .

λ	Reakce na změnu tržních podmínek	Persistence ve volatilitě
Velká	Malá	Velká
Malá	Velká	Malá

Zdroj: zpracováno dle Alexander, Carol. *Market Risk Analysis. Volume II. Practical Financial Econometrics*

Právě byl popsán model EWMA s volatilitou. Tento přístup samozřejmě není jediný, který se zaměřuje na zakomponování volatility do výpočtu VaR pomocí historické simulace. Další velkou skupinou jsou tzv. GARCH modely.

1.5.4.2.4. GARCH MODEL

Jedná se o generalizovaný² ARCH model. ARCH(m) model by se mohl také používat jako alternativní způsob odhadu volatility. Trpí ale určitými nedostatky, zejména:

- řád m musí být dost vysoký, aby umožňoval náležitě popsat vývoj volatility;
- nutnost odhadovat velký počet parametrů;
- nezohledňuje výskyt tzv. asymetrií, kdy znaménka odchylek mohou odlišným způsobem ovlivňovat volatilitu.

Zmíněné nedokonalosti ARCH modelu by měl překonat GARCH model. Existuje „základní“ GARCH model (Symmetric Normal GARCH model), a různé jeho modifikace (Asymmetric GARCH models, Non-Normal GARCH models). Model navrhl T. Bollerslev v roce 1986.

GARCH(1,1) je nejjednodušším, nejznámějším a nejfrekventovaněji aplikovatelným představitelem své skupiny modelů. Lze vypořádat jistou podobnost s ARCH modelem, jelikož GARCH(1,1) také založen na odhadu průměrné dlouhodobé úrovně rozptylu. Matematický zápis GARCH(1,1) vypadá takto:

$$\sigma_n^2 = \gamma * V_L + \alpha * r_{n-1}^2 + \beta * \sigma_{n-1}^2, \text{ kde} \quad (58)$$

γ - váha přidělená průměrné dlouhodobé úrovni rozptylu V_L ;

α - váha přidělená výnosu předchozího období r_{n-1}^2 ;

β - váha přidělená rozptylu předchozího období σ_{n-1}^2 .

² GARCH – Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.

Právě číslice (1,1) ukazují na to, že odhad rozptylu dnes σ_n^2 je založen na bezprostředně předcházející dnešku hodnotě výnosu r_{n-1}^2 a na bezprostředně předcházejícím dnešku odhadu rozptylu σ_{n-1}^2 .

I zde platí, že součet vah se rovná 1:

$$\gamma + \alpha + \beta = 1 \quad (59)$$

Tady opět můžeme použít již známou substituci: $\omega = \gamma * V_L$, a model GARCH(1,1) přepsat do tvaru:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha * r_{n-1}^2 + \beta * \sigma_{n-1}^2 \quad (60)$$

S tímto tvarem modelu budeme dále pracovat.

Rozlišujeme tzv. podmíněnou a nepodmíněnou GARCH volatilitu. Podmíněnou GARCH volatilitu získáme jako druhou odmocninu z výrazu (60). Nepodmíněná GARCH volatilita je definována jako druhá odmocnina z výrazu

$$V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (61)$$

Pokud se zaměříme na odhad parametrů GARCH(1,1) z časové řady historických dat, zjistíme, že za tímto účelem se používá metoda maximální pravděpodobnosti (maximum-likelihood method). Odhadovat se budou váhy, čili parametry γ , α a β . Jako pomocný software je možné použít buď specializované statisticko-matematické programy (např. MATLAB, EViews), tak i běžný tabulkový procesor Excel.

Při odhadu parametrů GARCH(1,1) je nutné respektovat určité omezující podmínky.

$$\omega > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta < 1 \quad (62)$$

Základní myšlenkou metody maximální pravděpodobnosti je takový odhad parametrů γ , α a β , aby byla maximalizována funkce

$$\sum_{i=1}^m \left[-\ln(\sigma_i^2) - \frac{r_i^2}{\sigma_i^2} \right] \quad (63)$$

Stejně jako v případě EWMA modelu s volatilitou, i zde bude uvedena interpretace modelu a nastíněny základní funkční vazby.

- Parametr α determinuje reakci podmíněné volatility na změnu tržních podmínek, například, na výskyt tržních šoků. Platí přímá úměra, čím vyšší hodnotu má α , tím citlivost na změnu tržního prostředí je větší.
- Parametr β měří míru persistence v podmíněné volatilitě bez ohledu na vývoj tržní situace. Pokud β je relativně velké (řekněme, větší než 0,9), bude dlouho trvat, až vyhasne efekt persistence.
- Součet parametru ($\alpha + \beta$) určuje míru konvergence podmíněné volatility k průměrné dlouhodobé úrovni.
- Parametr ω , společně s ($\alpha + \beta$), determinuje úroveň průměrné dlouhodobé volatility, čili nepodmíněné volatility. V případě, kdy výraz $\omega/(1 - \alpha + \beta)$ je poměrně velký, dlouhodobá tržní volatilita je také relativně velká.

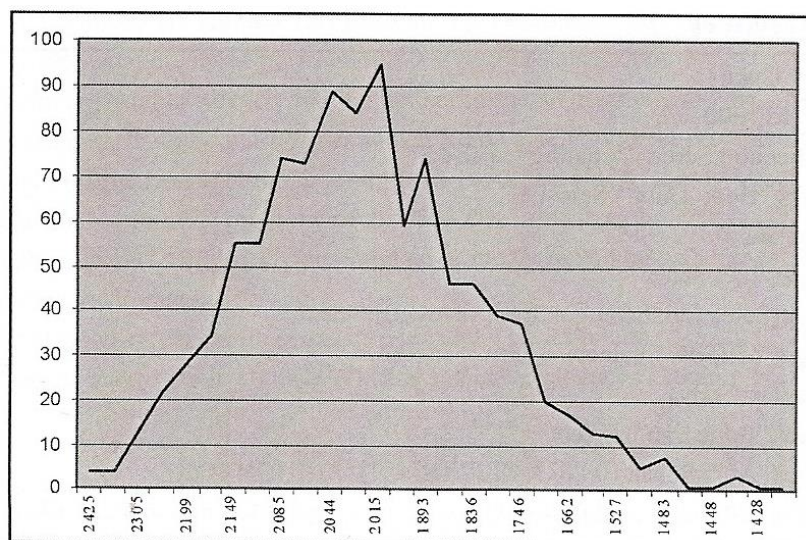
Bude užitečné se zmínit o tom, že EWMA model s volatilitou je speciálním případem GARCH(1,1), za podmínky, že $\gamma = 0$, $\alpha = (1 - \lambda)$, a $\beta = \lambda$. V situaci, kdy odhad parametru ω se ukáže jako negativní, GARCH(1,1) model nebude vykazovat stabilitu, a je smysluplně přiblížit k použití EWMA modelu.

Základní koncepce metody spočívá v náhodném výběru s vrácením hodnot z pořadí stejného souboru hodnot. Simulace se provádí velký počet krát.

Předpokládejme, že máme k dispozici výběrový soubor 500 pozorování historických hodnot portfolia. Necht' jsme spočítali denní změny hodnoty portfolia pro každý den sledovaného období. Tyto změny hodnoty portfolia tvoří vzorek dat, který „umístíme do koše“, z něhož náhodně budeme vybírat s vrácením 500 hodnot. Pokud se provádí výběr s vrácením, znamená to, že některé hodnoty mohou být vybrány více krát, zatímco jiné nebudou vybrány ani jednou. Soubor vybraných 500 hodnot seřadíme vzestupně a určíme hodnotu VaR podle požadovaného kvantilu.

Tento výběr 500 hodnot budeme považovat za jednu sérii výběru. Takových sérií uděláme co nejvíce, třeba několik tisíc krát. A pro každou sérii stanovíme hodnotu VaR. Tímto způsobem dostaneme soubor hodnot VaR o rozsahu, který odpovídá počtu nasimulovaných sérií. Získaný soubor hodnot VaR seřadíme a sestrojíme rozdělení VaR, které může vypadat následovně:

Obrázek 15: Četnosti nasimulovaných hodnot VaR



Zdroj: Ambrož, Luděk. *Měření rizika ve financích*.

Pokud by bylo provedeno iterací víc, byl by graf četnosti VaR uhlazenější. Z uvedeného obrázku se dá vyčíst, že 95 % všech nasimulovaných hodnot VaR se nachází i intervalu 1 662 až 2 199. V tomto rozmezí se nachází hledaná hodnota VaR.

Výhodou základní metody historické simulace je to, že je snadno proveditelná a také lehce interpretovatelná i pro publikum, jež není zasvěcené do detailů postupů modelování volatility. Mezi další výhody patří aplikovatelnost na jakékoli finanční instrumenty, čili metoda je vhodná pro jakékoli složení portfolia, tedy i pro nelineární portfolia obsahující opční instrumenty.

Hlavní předností metody historické simulace je to, že je zcela neparametrická. Metoda, na rozdíl od variančně kovariančního přístupu, nepředpokládá normalitu rozdělení výnosů aktiv, není třeba odhadovat korelační matice. Korelace a volatilita jsou již „zabudovány“ do modelu tím, že jsou obsaženy ve vstupech modelu – v historických datech.

Na druhou stranu, platí předpoklad, že rozdělení denních výnosů aktiv je stacionární³, což není vždy splněno – volatilita se mění v čase – a vnáší tak do modelu zkreslující prvky.

Jak se ukázalo, empirické rozdělení výnosů finančního aktiva není normální, i když se to předpokládá. Empirické rozdělení se sice může blížit rozdělení normálnímu, ale není exaktně normální. Liší se zejména tím, že má vyšší pravděpodobnost výskytu výrazně negativních výsledku, než tomu je v případě normálního rozdělení. Říká se, že levý konec empirického rozdělení finančního aktiva je „tlustší“, než má být. Metoda historické simulace se může vypořádat s touto zvláštností rozdělení, stejně jako zohlednit i takový jev, jako rozpad korelačních vztahů v období šoků na finančních trzích.

Je nutné se zmínit i o slabinách metody historické simulace. Na prvním místě se nabízí postřeh, že metoda a její výsledky jsou velice citlivé na vzorek dat, který byl vybrán pro simulaci. A také citlivá i na rozsah tohoto výběrového souboru. Může se například stát, že vybraný vzorek dat zrovna bude obsahovat období podprůměrně nízké volatility, nebo naopak, období zvýšení nejistoty nebo dokonce poruch na finančních trzích, a jako důsledek – extrémní zvýšení volatility a korelačních vazeb mezi aktivy. Doporučuje se vybrat co nejdelší časovou řadu pozorování, aby výsledné rozdělení změn výnosů bylo co nejuhlazenější. Na druhou stranu lze namítnout, že velice vzdálená pozorování již neobsahují relevantní informace, a musejí mít menší vliv v simulačním procesu. Jako odezva na námitku byly vyvinuty „váhové“ modely historické simulace.

Dalším omezením metody je implicitní předpoklad, že minulost se opakuje. Tady lze vytknout všechny slabiny metod předpovídání budoucnosti založených na historických datech.

Další nevýhodou je nutnost odhadovat VaR pro velice široké konfidencí intervaly. Pokud pracujeme s intervalem 99,97 %, potřebujeme mít k dispozici 10 000 pozorování výnosů portfolia, aby bylo možné určit VaR jako čtvrtý nejhorší výsledek. Časové řady takové délky však většinou nejsou k dispozici. Denní finanční časová řada bude obsahovat pouze cca 250 pozorování v případě ročního sledování.

³ Stochastický proces je stacionární, když jsou charakteristiky jeho náhodných veličin konstantní v čase ($\mu_t = \mu$, $\sigma_t^2 = \sigma^2$ pro všechna t).

1.5.4.3. SROVNÁNÍ PARAMETRICKÉHO A SIMULAČNÍHO PŘÍSTUPŮ

Žádný z přístupů není dokonalý a perfektní ze všech stran. Důležité je, aby uživatelé konceptu VaR si byli vědomi omezení jednotlivých přístupů a mohli preferovat jeden před ostatními optimalizováním poměru mezi přesností modelu a náklady na jeho vybudování.

Následující tabulka uvádí stručnou rekapitulaci výhod a nevýhod jednotlivých přístupů k odhadu VaR.

Tabulka 5: Srovnání parametrického a simulačního přístupů k odhadu VaR

Přístup	Výhody	Nevýhody
Variančně kovarianční	Rychlý a snadný výpočet. Díky platnosti centrální limitní věty přístup je použitelný i v případě jiného než normálního rozdělení rizikových faktorů. Přesnější odhad VaR: pracuje se všemi hodnotami P/L funkce výnosů aktiva resp. portfolia aktiv	Předpoklad normality rozdělení výnosů portfolia. Vyžaduje odhad volatility rizikových faktorů a odhad korelace výnosů Riziko změny volatility nebo síly závislosti mezi rizikovými faktory.
Historická simulace	Snadná interpretovatelnost Nezáleží na složení portfolia (může obsahovat i nelineární instrumenty) Nevyžaduje odhad žádných parametrů ani vzájemných vazeb mezi výnosy aktiv portfolia	Předpoklad, že minulost ovlivňuje bezprostřední budoucnost. Požadavek na vybavenost relativně dlouhou časovou řadou historických dat Závislost výsledku právě na zvoleném vzorku vstupních dat.

Zdroj: zpracováno dle Huynh, Huu Tue; Lai, Van Son; Soumaré, Issouf. *Stochastic Simulation and Applications in Finance with MATLAB Programs*.

1.5.5. BACKTESTING

Konstrukce modelu a výpočet hodnoty VaR nejsou samoučelné. Model musí být dobře kalibrovaný pro odhad VaR do takové míry, aby skutečně realizované ztráty byly v souladu se ztrátami prognózovanými modelem. Backtesting je jednou z validačních technik modelů a musí být schopný posoudit, do jaké míry je VaR model precizní. Pokud výsledek bude nevyhovující, musejí být přehodnoceny konstrukční prvky modelu: zda jsou platné předpoklady, na nichž je model založen, zda byly dobře odhadnuty parametry, anebo chyba se vyskytla někde jinde.

Za dobře kalibrovaný model se bude považovat ten, jehož konfidenční interval bude konzistentní s počtem realizací ztrát větších než hodnota VaR.

Nejtěžší záležitostí backtestingu je rozhodnutí, zda posuzovaný model je opravdu nevyhovující a musí být předělán, nebo došlo k neočekávaným událostem, které nemohly být zohledněny modelem a tím pádem model selhal kvůli „bad luck“.

Nástrojem pro rozhodování o vhodnosti modelu je testování statistických hypotéz. Základní princip spočívá zejména ve stanovení testového kritéria, jeho pravděpodobnostního rozdělení, formulaci nulové a alternativní hypotézy, a vymezení kritického oboru a oboru přijetí. Stejně jako v případě testování „běžných“ hypotéz, i tady se lze dopustit chyby I druhu (zamítnutí správné hypotézy), nebo chyby II druhu (přijetí neplatné hypotézy).

1.5.5.1. PŘÍSTUP ZALOŽENÝ NA TZV. MÍŘE SELHÁNÍ

Nechť α je hladina významnosti, přičemž $\alpha = (1 - c)$, kde c je VaR konfidenční interval. T je počet pozorování (rozsah datového souboru pro výpočet VaR). N budeme značit počet selhání, a tudíž míra selhání bude vyjádřena jako poměr N/T .

Nulová hypotéza H_0 je definována jako vhodnost VaR modelu.

V případě, že N se bude nacházet uvnitř tzv. „pásma nezamítnutí“, nelze zamítnout H_0 ve prospěch alternativní hypotézy. Následující tabulka uvádí „pásma nezamítnutí“ nulové hypotézy H_0 .

Tabulka 6: *Pásma nezamítnutí nulové hypotézy na základě míry selhání při backtestingu*

Probability Level α	VaR Confidence Level	Nonrejection Region for Number of Failures N		
		$T = 255 \text{ days}$	$T = 510 \text{ days}$	$T = 1000 \text{ days}$
0,01	99%	$N < 7$	$1 < N < 11$	$4 < N < 17$
0,025	97,50%	$2 < N < 12$	$6 < N < 21$	$15 < N < 36$
0,05	95%	$6 < N < 21$	$16 < N < 36$	$37 < N < 65$
0,075	92,50%	$11 < N < 28$	$27 < N < 51$	$59 < N < 92$
0,1	90%	$16 < N < 36$	$38 < N < 65$	$81 < N < 120$

Zdroj: Jorion, Philippe. *Value at Risk: the New Benchmark for Managing Financial Risk*

Například, pokud bude testována kvalita VaR modelu sestrojeného dle parametrů $c = 95\%$, $T = 255$, tak nemůžeme zamítnout H_0 , i když $N = 20$. Teprve pokud $N < 6$ dojde k nadhodnocení rizika, zatímco při $N > 21$ model bude riziko systematicky podhodnocovat.

1.5.5.2. DISTRIBUTION FORECAST MODELS

Tento přístup k backtestingu VaR modelů nepracuje pouze s kvantilem rozdělení, nýbrž s celou pravděpodobnostní funkcí. Hodnota VaR se počítá na několika hladinách významnosti α (např. 0,01; 0,03 atd.). Pak pro každou úroveň α se zjišťuje, jestli skutečné realizace P/L byly menší nebo větší než hodnota příslušného VaR. Následně se počítá celkový podíl N/T pro každé α . Pokud model je v pořádku (skutečný tvar rozdělení odpovídá predikovanému), poměr N/T musí vždy odpovídat α .

1.5.5.3. PARAMETRIC MODELS

Jak již napovídá název, přístup je založen na použití parametru rozdělení P/L funkce – směrodatné odchylky. Předpokládá se normální rozdělení. Testové kritérium pro test spolehlivosti modelu se počítá jako funkce denních výnosů na rizikové bázi, funkce rozptylu těchto výnosů a počtu pozorování T . Tento přístup k testování spolehlivosti VaR modelů se používá v tom případě, kdy je dobře znám tvar rozdělení funkce P/L.

1.5.5.4. BASILEJSKÝ PŘÍSTUP

Výsledky backtestingu jsou obzvlášť důležité, pokud banka používá vlastní interní model pro výpočet regulačního kapitálového požadavku. Dohledové instituce posuzují vhodnost VaR modelu na základě přístupu založeného na míře selhání. Postup testování je takový, že se budou sledovat případy překročení hodnoty VaR dle testovaného modelu ($c = 99\%$) na denní bázi za bezprostředně předcházející období – jeden rok. Zaznamenáme kolem 250 pozorování realizace skutečné denní P/L funkce. Počet případů překročení VaR – počet výjimek – nesmí být vyšší než 1 % z celkového počtu realizace denní ztráty. Vyhodnocení výsledků backtestingu se provádí jednou za čtvrtletí.

$$\alpha = (1 - c) = (1 - 0,99) = 1 \%$$

$$T = 250$$

$$N = 0,01 * 250 = 2,5$$

V ideálním případě by mělo dojít nanejvýš ke 2,5 výjimkám za rok. Podle počtu výjimek interní VaR modely jsou zařazovány do tří skupin.

Tabulka 7: *Odvození velikosti multiplikátoru k v závislosti na výsledcích backtestingu*

zone	number of exceedances	multiplier k	cumulative probability assuming $q^* = 0.99$
green	0	3.00	.0811
	1	3.00	.2858
	2	3.00	.5432
	3	3.00	.7581
	4	3.00	.8922
yellow	5	3.40	.9588
	6	3.50	.9863
	7	3.65	.9960
	8	3.75	.9989
	9	3.85	.9997
red	10 or more	4.00	.9999

Zdroj: www.value-at-risk.net/backtesting-coverage-tests/

Tuto tabulku se dá přirovnat k jakési ratingové stupnici interních modelů VaR. Do čím nižšího pásma model VaR spadá, tím horší je jeho kvalita, a tím vyšší náklady bude nést banka používající takový model. Náklady zde rostou v podobě zvýšení multiplikátoru k pro výpočet kapitálového požadavku k tržnímu riziku (20). Čím větší bude multiplikátor, tím vyšší bude i kapitálový požadavek.

Jak ukazuje tabulka, tolerovány jsou maximálně čtyři výjimky ročně. Žlutému pásmu odpovídá rozsah $\langle 5; 9 \rangle$ výjimek, a tyto modely již jsou penalizovány postupným zvyšováním multiplikátoru. Přidělování penalizující přírážky není dáno striktně. Regulátor může podle vlastního uvážení – s přihlédnutím k příčinám výskytu výjimek – určit míru postihu. Klíčovou a poměrně obtížnou záležitostí je určení pravých příčin překročení modelové hodnoty VaR.

Slabou stránkou tohoto přístupu je použití širokého konfidenčního intervalu. Při použití intervalu 99 % budeme pracovat s velice malým počtem výjimek, což působí negativně na spolehlivost testu.

Obecně platí, že zvýšit sílu testu se dá dvěma způsoby: buď zúžit konfidenční interval, nebo zvýšit počet pozorování T .

Jako shrnutí podkapitoly o backtestingu se dá uvést to, že má přispět ke zvýšení přesnosti VaR modelů. Nevyhovující výsledek by měl být podnětem pro hledání zdroje chyb a nápravných opatření.

2. PRAKTICKÁ ČÁST

Cílem praktické části této práce není předvedení numericky složitých výpočtů, nýbrž na poměrně jednoduchém příkladu názorně ukázat, jak moc se liší výsledky klasických metod od jejich modifikovaných verzí, které se snaží překonat nedokonalosti klasických metod.

Všechny použité metody výpočtu VaR budou aplikovány na stejné modelové portfolio obsahující akcie dvou společností obchodovaných na americkém burzovním trhu NASDAQ. Jedná se o akcie společností **Apple Inc.**⁴ a **McDonald's Corporation**⁵. Výběr právě těchto titulů je argumentován odlišností podniku v tom smyslu, že působí v různých odvětvích ekonomiky. Následující obrázky umožňují porovnat tyto dvě akcie dle základních parametrů.

Obrázek 16: Základní tržní parametry akcie společnosti Apple Inc.

Apple Inc. (AAPL) - NasdaqGS			
98.41 ↑ 1.96(2.03%) 2:02PM EST - Nasdaq Real Time Price			
Prev Close:	96.45	Day's Range:	96.79 - 99.11
Open:	98.53	52wk Range:	92.00 - 134.54
Bid:	98.64 x 800	Volume:	50,390,023
Ask:	98.65 x 100	Avg Vol (3m):	44,236,600
1y Target Est:	146.83	Market Cap:	548.67B
Beta:	1.06495	P/E (ttm):	10.70
Next Earnings Date:	26-Jan-16 📅	EPS (ttm):	9.22
		Div & Yield:	2.08 (2.03%)

Zdroj: <http://finance.yahoo.com/>

Obrázek 17: Základní tržní parametry akcie společnosti McDonald's Corporation.

McDonald's Corp. (MCD) - NYSE			
116.65 ↑ 0.99(0.86%) 2:05PM EST - Nasdaq Real Time Price			
Prev Close:	115.66	Day's Range:	115.62 - 117.47
Open:	115.75	52wk Range:	87.50 - 120.23
Bid:	116.67 x 400	Volume:	3,440,131
Ask:	116.69 x 200	Avg Vol (3m):	6,603,390
1y Target Est:	120.24	Market Cap:	107.11B
Beta:	0.747835	P/E (ttm):	25.30
Next Earnings Date:	25-Jan-16 📅	EPS (ttm):	4.62
		Div & Yield:	3.56 (3.01%)

Zdroj: <http://finance.yahoo.com/>

⁴ Americká IT firma, zaměřující se na hardware a software.

⁵ Taktéž americká firma, působící v odvětví potravinářství.

Například, podle výše parametru β se jedná o akcie mající odlišný rizikový profil. Zatímco akcie Apple mají $\beta > 1$, což svědčí o tom, že jejich výnosová míra se pohybuje stejným směrem jako výnosová míra z tržního portfolia, ale dělá to rychleji. Akcie společnosti McDonald's mají $0 < \beta < 1$, což znamená, že se jejich výnosová míra sice pohybuje stejným směrem jako výnosová míra z tržního portfolia, ale tento pohyb je pomalejší.

I z pohledu fundamentální odvětvové analýzy pracujeme s cennými papíry pravděpodobně majícími různou míru citlivosti na střídání fází hospodářského cyklu. Akcie Apple se dá klasifikovat jako procyklické. Pohyb jejich výnosových měr kopíruje cyklický hospodářský průběh, a pohybují se s ekonomikou stejným směrem. V období konjunktury výnosová míra roste, v období deprese zase klesá. Akcie McDonald's budou mít blíže k cyklicky neutrálním akciím. Výnosová míra není pevně vázána na to, v jaké kondici je zrovna ekonomika. Tyto akcie budou mít stabilnější tržby a tedy i výnosnost bez ohledu na změnu vnějších okolností.

Intuitivně se dá předpokládat, že výnosové míry těchto instrumentů budou vykazovat pozitivní závislost, ale síla této závislosti nebude příliš velká.

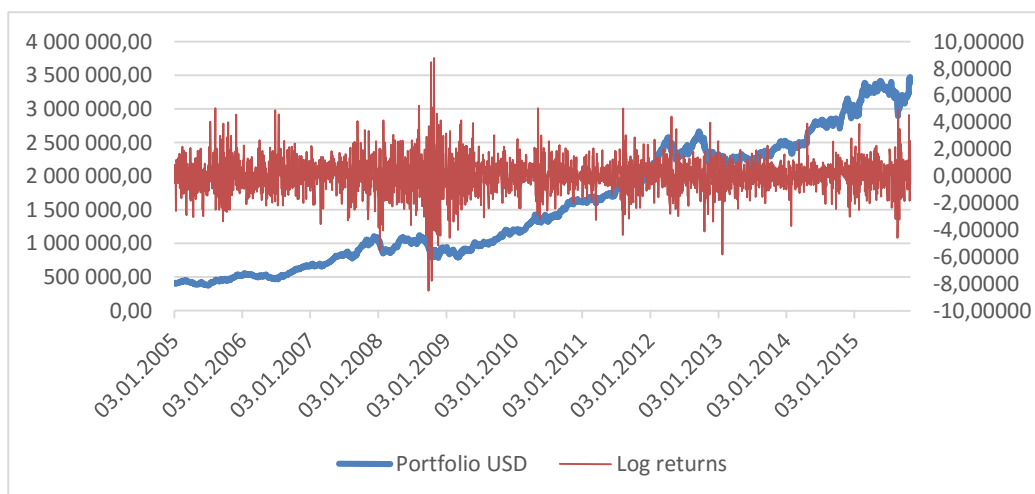
Jako rozhodný den pro výpočet hodnoty VaR byl vybrán 2.11.2015. Časové řady analyzovaných vstupních dat jsou tvořeny upravenými uzavíracími kursy akcií a měnovým kursem USD/CZK. Délka každé časové řady zahrnuje 2 727 pozorování, čili byly použity historické kursy za období od 3.1.2005 do 30.10.2015.

Analyzované portfolio se skládá z:

- 15 000 ks akcií Apple;
- 15 000 ks akcií McDonald's.

Následující graf zobrazuje vývoj tržní hodnoty portfolia v čase za celé období 10 let, a také logaritmy výnosů tohoto portfolia za stejné období.

Obrázek 18: Tržní hodnota portfolia v USD a logaritmy výnosů portfolia



Zdroj: Vlastní výpočty

Na hlavní ose jsou hodnoty portfolia v USD, na vedlejší ose pak jsou logaritmované výnosové míry portfolia v %.

Při rozhodování o délce časových řád byly zohledněny takové faktory, jako dostupnost historických dat, statistické kvality modelů, a zahrnutí období s různou mírou stability tržního prostředí (období nízké a vysoké volatility, pozitivních a negativních výnosových měr).

2.1. MAPOVÁNÍ EXPOZICE

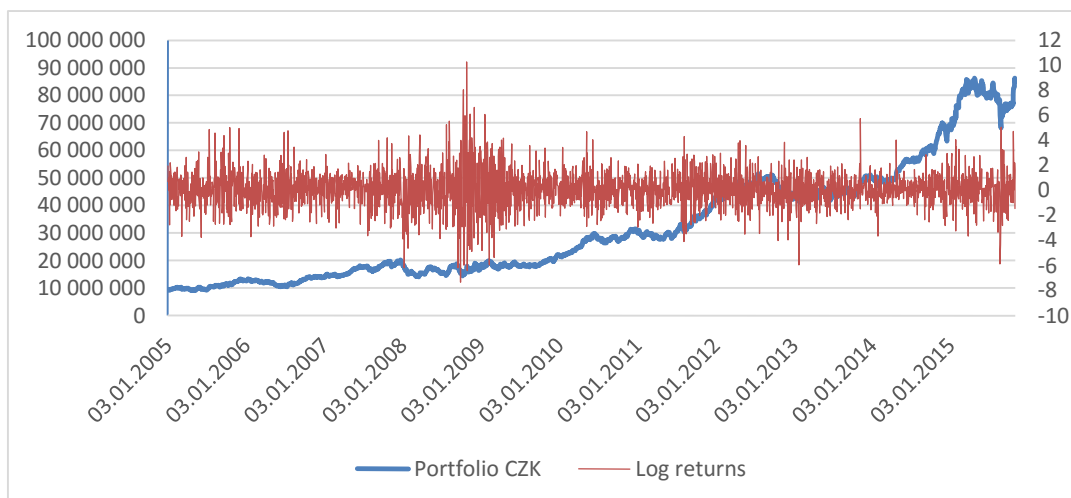
Mapování expozice předpokládá změnu optiky, pomocí níž nahlížíme na analyzované portfolio. Místo jednotlivých instrumentů v portfoliu musíme vidět rizikové faktory, které působí na změnu hodnoty portfolia. V našem případě portfolio se skládá z jednoho druhu instrumentu – akcie. Máme akcie dvou společností. Akcie jsou kótovány na zahraničním trhu, tudíž jejich kursy budou vyjádřeny v cizí měně. Z pohledu českého investora to znamená přidání do modelu dalšího rizikového faktoru – měnového kursu USD/CZK. V rámci aplikování simulačního přístupu budeme provádět simulace pro každou akcii zvlášť. Důvodem je skutečnost, že tento přístup neuvažuje závislost prvků portfolia. V případě variančně kovariančního přístupu akcie budou spojeny do sub-portfolia s přihlédnutím k síle jejich vzájemné závislosti.

Pokud se budeme dívat na portfolio z globálního úhlu pohledu, přikloníme se k názoru, že celkem na analyzované portfolio působí 2 rizikové faktory:

- akciový kurs sub-portfolia;
- měnový kurs USD/CZK.

Takto vypadá vývoj tržní hodnoty portfolia po zohlednění rizikového kursu jako rizikového faktoru.

Obrázek 19: Tržní hodnota portfolia v CZK a logaritmy výnosů portfolia



Zdroj: Vlastní výpočty

Na hlavní ose jsou hodnoty portfolia v CZK, na vedlejší ose pak jsou logaritmované výnosové míry portfolia v %.

Je vidět, že volatilita výnosů je větší na grafu z obrázku 19., obzvlášť to platí pro výchyly oběma směry během krizového roku 2009.

2.2. SIMULAČNÍ PŘÍSTUP

V teoretické části práce bylo v rámci skupiny simulačních metod prezentováno několik přístupů k odhadu hodnoty VaR. V praktické části budou na zvolené portfolio aplikovány postupně pouze některé z nich, a sice klasická metoda historické simulace, EWMA model, EWMA model s volatilitou a model GARCH(1,1).

2.2.1. ZÁKLADNÍ METODA HISTORICKÉ SIMULACE

Uspořádáme všechny tři časové řady chronologicky: od nejvzdálenějšího pozorování až do nejaktuálnějšího. Pomocí vzorců uvedených v teoretické části práce nasimulujeme vývoj každého rizikového faktoru pro den 2.11.2015. Průběh procesu shrnuje následující tabulka:

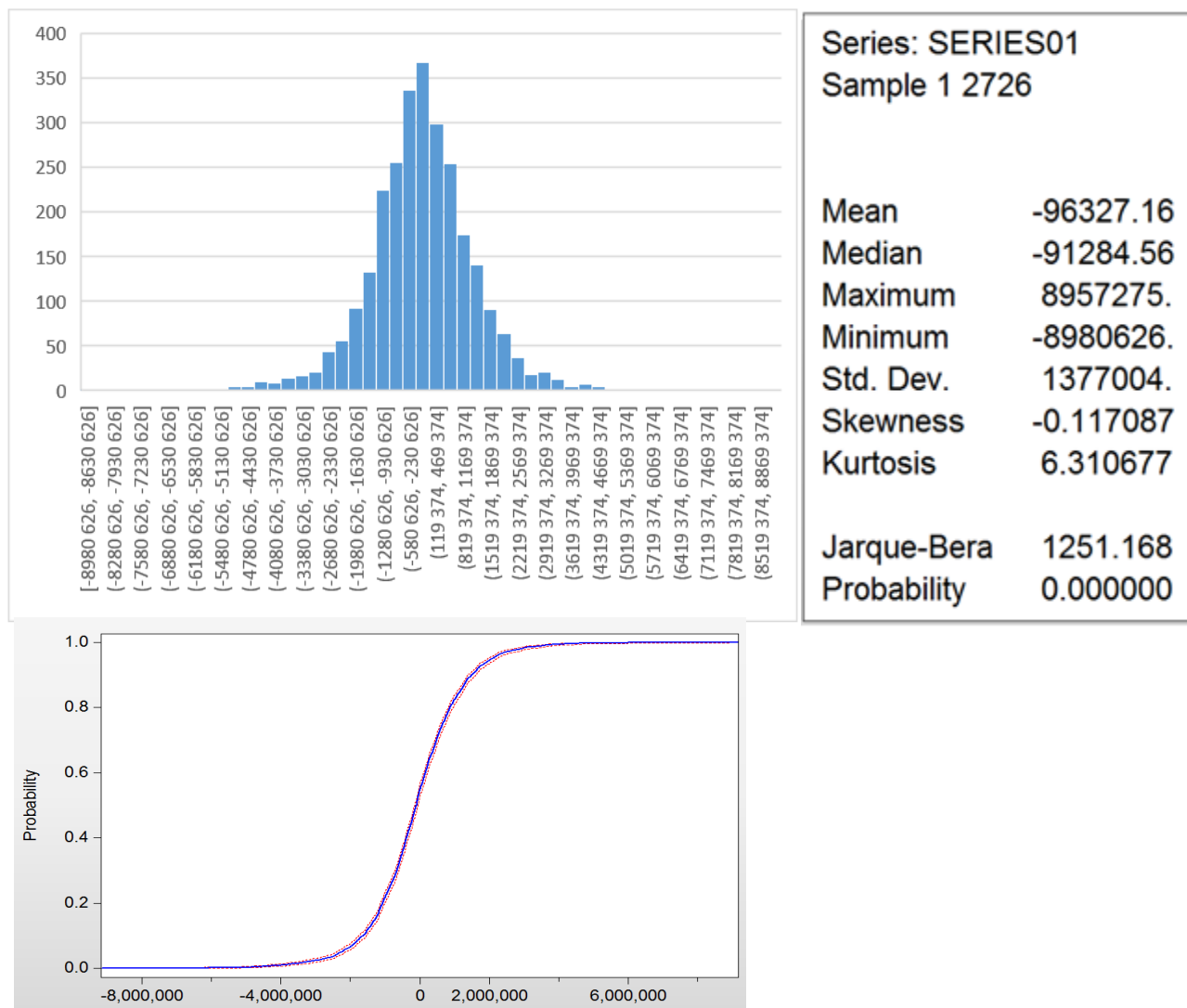
Tabulka 8: *Metoda historické simulace – základní*

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Adj Close	Apple	McD	USD/CZK	sim Apple	sim McD	sim USD/CZK	Portfolio	Diference
03.01.2005	4,21	22,95	22,48	120,21	112,29	24,87	86 732 711	-1 747 878
04.01.2005	4,25	23,14	22,74	120,03	110,51	24,89	86 070 311	-1 085 479
05.01.2005	4,29	22,96	23,01	119,08	112,25	24,68	85 642 006	-657 173
06.01.2005	4,29	23,14	23,09	127,65	110,65	24,46	87 436 156	-2 451 323
07.01.2005	4,61	22,98	22,97	118,49	110,68	24,73	84 999 643	-14 810
10.01.2005	4,59	22,84	23,09	111,40	109,37	24,56	81 317 497	3 667 335
11.01.2005	4,29	22,43	23,05	120,65	112,24	24,75	86 461 700	-1 476 868
12.01.2005	4,35	22,60	23,20	126,88	109,78	24,34	86 405 826	-1 420 994
13.01.2005	4,64	22,28	22,96	119,67	112,89	24,84	86 646 981	-1 662 149
14.01.2005	4,67	22,58	23,19	119,75	112,41	24,66	85 879 478	-894 646
⋮								
19.10.2015	111,25	103,68	23,84	121,16	110,68	24,65	85 735 206	-750 373
20.10.2015	113,29	103,03	23,90	118,98	109,98	24,50	84 152 019	832 813
21.10.2015	113,28	101,74	23,81	120,81	120,42	24,64	89 154 825	-4 169 993
22.10.2015	115,01	110,01	23,85	122,68	113,10	24,67	87 249 083	-2 264 250
23.10.2015	118,57	111,71	23,93	115,19	110,97	25,13	85 265 252	-280 420
26.10.2015	114,79	111,31	24,45	118,24	110,84	24,75	85 041 362	-56 530
27.10.2015	114,06	110,77	24,60	123,89	112,67	24,49	86 917 333	-1 932 501
28.10.2015	118,76	112,06	24,50	120,25	111,06	24,89	86 373 385	-1 388 552
29.10.2015	120,02	111,74	24,80	117,97	111,01	24,39	83 762 900	1 221 933
30.10.2015	118,99	111,38	24,59					

Zdroj: Vlastní výpočty

Na základě výpočtů ve sloupcích E, F a G dopočítáme sadu simulačních scénářů pro hodnotu celého portfolia. Poslední sloupec I obsahuje absolutní hodnoty zisků a ztrát podle jednotlivých scénářů pro den 2.11.2015. Množina těchto hodnot tvoří P/L funkci. Sestrojením histogramu na základě množiny diferencí dostaneme empirické rozdělení realizace zisků/ztrát analyzovaného portfolia. Následující graf zobrazuje histogram P/L funkce dle klasické metody historické simulace.

Obrázek 20: *Histogram, distribuční funkce a statistické vlastnosti – základní metoda HS*



Zdroj: Vlastní výpočty v EViews a Excelu.

Při pohledu na základní statistické charakteristiky rozdělení rychle zjistíme, že se nejedná o normální rozdělení.

Vidíme, že střední hodnota rozdělení není nulová (průměr a medián dosahují záporných hodnot). Sice maximální a minimální hodnoty jsou skoro stejné, ale podmínku normality nesplňují další statistiky rozdělení.

Rozdělení není symetrické kolem střední hodnoty. Má zápornou, neboli levostrannou šikmost. To znamená, že rozdělení má delší levý konec a většina hodnot leží vpravo od

průměru. Podle špičatosti empirické rozdělení je leptokurtické, neboli špičatější než rozdělení normální. Nakonec, můžeme zamítnout nulovou hypotézu Jarque-Bera testu normality

$$H_0: \text{Skewness} = 0; \text{Excess Kurtosis} = 0$$

ve prospěch alternativní $H_1: \text{Skewness} \neq 0; \text{Excess Kurtosis} \neq 0$.

To, že empirické rozdělení není normální, nebrání při odhadu hodnoty VaR. Seřadíme všechny hodnoty P/L funkce od nejmenší do největší a nalezneme kvantil odpovídající požadované hladině významnosti. Budeme hledat $\text{VaR}_{95\%}$ a $\text{VaR}_{99\%}$.

$\text{VaR}_{95\%}$ je 5 % levostranný kvantil rozdělení. V našem případě bude odpovídat $0,05 * 2\,726 = 136$. nejmenší hodnotě. $\text{VaR}_{99\%}$ je 1 % levostranný kvantil rozdělení a bude odpovídat $0,01 * 2\,726 = 27$. nejmenší hodnotě rozdělení. Odhady hodnoty VaR:

Tabulka 9: *Odhady VaR dle základní metody historické simulace*

Hladina významnosti	5%	1%
$\text{VaR}_{0,95\%}$	-2 250 349	
$\text{VaR}_{0,99\%}$		-3 976 913

Zdroj: Vlastní výpočty

2.2.2. EWMA

Tato metoda je založena na stejném principu jako klasická historická simulace s tím rozdílem, že každému scénáři jsou přiděleny váhy. Tím se snaží překonat slabinu předchozí metody, a sice kompenzovat tu skutečnost, že klasická metoda nebere v úvahu časovou souslednost pozorování, když každý nasimulovaný scénář má stejnou váhu. Metoda EWMA přiděluje nejaktuálnějšímu pozorování největší váhu rovnající se $(1 - \lambda)$, a dále váhy exponenciálně klesají s postupováním v čase směrem do minulosti.

Použijeme různé velikosti parametru λ , a sice 0,94; 0,95; 0,97 a 0,99. Metodologie RiskMetrics od J.P.Morgan doporučuje volit $\lambda = 0,94$. Tabulka 8. bude modifikována tímto způsobem:

Tabulka 10: *Metoda historické simulace – EWMA modifikace*

Adj Close	Apl	McD	USD/CZK	0,94	0,95	0,97	0,99	sim Apl	Sim McD	sim USD/CZK	Portfolio	Difference
03.01.2005	4,21	22,95	22,48	3,35E-75	9,408E-63	2,611E-38	1,26E-14	120,21	112,29	24,87	86 732 711	-1 747 878
04.01.2005	4,25	23,14	22,74	3,56E-75	9,904E-63	2,692E-38	1,28E-14	120,03	110,51	24,89	86 070 311	-1 085 479
05.01.2005	4,29	22,96	23,01	3,79E-75	1,042E-62	2,775E-38	1,29E-14	119,08	112,25	24,68	85 642 006	-657 173
06.01.2005	4,29	23,14	23,09	4,03E-75	1,097E-62	2,861E-38	1,3E-14	127,65	110,65	24,46	87 436 156	-2 451 323
07.01.2005	4,61	22,98	22,97	4,29E-75	1,155E-62	2,95E-38	1,32E-14	118,49	110,68	24,73	84 999 643	-14 810
10.01.2005	4,59	22,84	23,09	4,56E-75	1,216E-62	3,041E-38	1,33E-14	111,40	109,37	24,56	81 317 497	3 667 335
11.01.2005	4,29	22,43	23,05	4,85E-75	1,28E-62	3,135E-38	1,34E-14	120,65	112,24	24,75	86 461 700	-1 476 868
12.01.2005	4,35	22,60	23,20	5,16E-75	1,347E-62	3,232E-38	1,36E-14	126,88	109,78	24,34	86 405 826	-1 420 994
13.01.2005	4,64	22,28	22,96	5,49E-75	1,418E-62	3,332E-38	1,37E-14	119,67	112,89	24,84	86 646 981	-1 662 149
14.01.2005	4,67	22,58	23,19	5,84E-75	1,493E-62	3,435E-38	1,38E-14	119,75	112,41	24,66	85 879 478	-894 646

⋮

⋮

19.10.2015	111,25	103,68	23,84	0,03438	0,0315125	0,0228069	0,009135	121,16	110,68	24,65	85 735 206	-750 373
20.10.2015	113,29	103,03	23,90	0,036574	0,033171	0,0235123	0,009227	118,98	109,98	24,50	84 152 019	832 813
21.10.2015	113,28	101,74	23,81	0,038909	0,0349169	0,0242395	0,009321	120,81	120,42	24,64	89 154 825	-4 169 993
22.10.2015	115,01	110,01	23,85	0,041392	0,0367546	0,0249892	0,009415	122,68	113,10	24,67	87 249 083	-2 264 250
23.10.2015	118,57	111,71	23,93	0,044034	0,038689	0,025762	0,00951	115,19	110,97	25,13	85 265 252	-280 420
26.10.2015	114,79	111,31	24,45	0,046845	0,0407253	0,0265588	0,009606	118,24	110,84	24,75	85 041 362	-56 530
27.10.2015	114,06	110,77	24,60	0,049835	0,0428688	0,0273802	0,009703	123,89	112,67	24,49	86 917 333	-1 932 501
28.10.2015	118,76	112,06	24,50	0,053016	0,045125	0,028227	0,009801	120,25	111,06	24,89	86 373 385	-1 388 552
29.10.2015	120,02	111,74	24,80	0,0564	0,0475	0,0291	0,0099	117,97	111,01	24,39	83 762 900	1 221 933
30.10.2015	118,99	111,38	24,59	0,06	0,05	0,03	0,01					

Zdroj: Vlastní výpočty

Byly získány stejné hodnoty portfolia a difference, jako v případě klasické historické simulace. Opět seřadíme všechny hodnoty P/L funkce od nejmenší do největší. Postup odhadu VaR se mění tím, že teď již nebudeme hledat konkrétní realizaci ztráty odpovídající požadovanému kvantilu, nýbrž budeme sčítat váhy λ tak dlouho, až jejich součet překročí požadovanou hladinu významnosti.

Výsledky dle EWMA metody shrnuje následující tabulka:

Tabulka 11: *Odhady VaR dle EWMA metody historické simulace*

Hodnota lambda λ	0,94	0,95	0,97	0,99
VaR _{0,95%}	-2 793 420	-2 766 116	-2 766 116	-2 397 748
VaR _{0,99%}	-4 169 993	-4 169 993	-4 169 993	-4 169 993

Zdroj: Vlastní výpočty

Histogram a kumulativní distribuční funkce budou vypadat úplně stejně, jako v případě klasické historické simulace. VaR je odhadován na základě stejného empirického rozdělení, ale jiným způsobem.

2.2.3. EWMA MODEL S VOLATILITOU

Tento model je další modifikací klasické metody historické simulace. Oproti „jednoduché“ metodě EWMA rozšiřuje svůj záběr o vliv volatility.

Na tomto místě se výpočty trochu komplikují. Pro každý rizikový faktor totiž musíme spočítat rozptyl při různých hodnotách λ . Dále na základě připravených rozptylů nasimulujeme jednotlivé scénáře pomocí vzorce (50):

$$RF_n \times \frac{RF_{i-1} + (RF_i - RF_{i-1})^{\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_i}}}{RF_{i-1}}$$

Ukážeme alespoň část tabulky s výpočty rozptylu a simulacemi pro jednotlivé hodnoty λ na příkladu akcie Apple.

Tabulka 12: Metoda historické simulace – EWMA s volatilitou, akcie Apple

Apple									
r	$\sigma^2 =$	0,94	0,95	0,97	0,99	sim 0,94	sim 0,95	sim 0,97	sim 0,99
0,00876		0,00010548	0,05020568	0,00010548	0,00010548	120,91	123,66	120,91	120,77
0,00078		0,00010375	0,09777210	0,00010461	0,00010519	119,16	119,29	119,16	119,15
0,07281		0,00009756	0,14288410	0,00010149	0,00010414	135,54	141,99	135,27	133,87
-0,00419		0,00040980	0,19104146	0,00025749	0,00015612	118,53	117,85	118,40	118,29
-0,06381		0,00038627	0,23150693	0,00025030	0,00015473	111,70	103,16	109,91	108,29
0,01394		0,00060735	0,27400268	0,00036492	0,00019389	120,26	122,17	120,63	121,08
0,06630		0,00058257	0,31049688	0,00035980	0,00019390	125,16	133,20	126,86	128,92
0,00573		0,00081136	0,34936772	0,00048088	0,00023592	119,44	120,15	119,58	119,77
0,00641		0,00076465	0,38193217	0,00046744	0,00023389	119,51	120,23	119,66	119,86
⋮									
-0,00009		0,00025190	1,00549015	0,00031428	0,00028950	118,98	118,98	118,98	118,98
0,01530		0,00023678	1,00521565	0,00030485	0,00028661	121,22	120,81	120,96	120,87
0,03100		0,00023661	1,00518882	0,00030272	0,00028608	123,51	122,68	123,00	122,81
-0,03191		0,00028006	1,00589011	0,00032246	0,00029283	114,71	115,19	114,99	115,10
-0,00633		0,00032436	1,00661394	0,00034334	0,00030008	118,20	118,24	118,22	118,23
0,04120		0,00030730	1,00632334	0,00033424	0,00029748	124,27	123,90	124,07	123,97
0,01056		0,00039073	1,00770500	0,00037515	0,00031149	120,19	120,25	120,22	120,24
-0,00855		0,00037399	1,00743135	0,00036724	0,00030949	118,00	117,97	117,99	117,98
		0,00035593	1,00713281	0,00035842	0,00030712				

Zdroj: Vlastní výpočty.

Stejný postup musí absolvovat všechny zbývající rizikové faktory. Potom na základě simulací jednotlivých rizikových faktorů vygenerujeme scénáře pro jednodenní předpověď celého portfolia. Tady se již budou nasimulované hodnoty portfolia lišit od těch ze dvou předchozích případů. A samozřejmě dopočítáme i P/L funkci.

Tabulka 13: Odhady VaR dle EWMA s volatilitou metody historické simulace

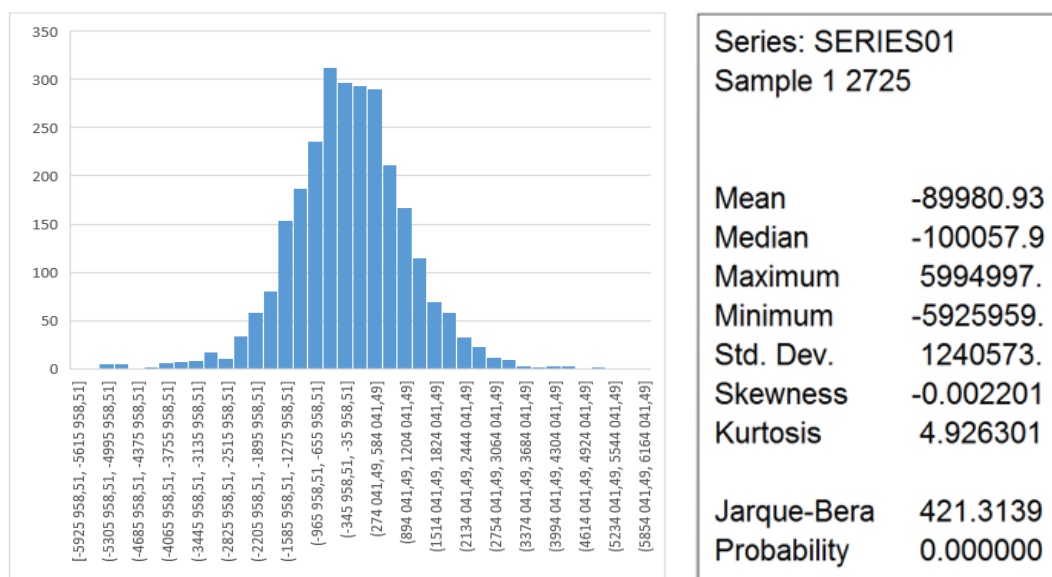
λ	0,94	0,95	0,97	0,99
VaR_{0,95%}	-2 385 225	-2 524 458	-2 236 890	-2 001 351
VaR_{0,99%}	-3 947 762	-4 534 489	-3 902 913	-3 571 308

Zdroj: Vlastní výpočty

Je patrná větší rozmanitost odhadů hodnot VaR, než tomu bylo v předchozím případě.

Pro úplnost uvedeme histogram a statistické vlastnosti P/L funkce. Zvolíme například P/L funkci pro portfolio s $\lambda = 0,99$.

Obrázek 21: Histogram a statistické vlastnosti – EWMA s volatilitou metoda HS



Zdroj: Vlastní výpočty v EViews a Excelu.

Empirické rozdělení i v tomto případě není normální. K tomuto závěru dospějeme na základě analogické analýzy, jak tomu bylo v případě klasické historické simulace.

2.2.4. MODEL GARCH(1,1)

Hlavní zvláštností odhadu VaR pomocí modelu GARCH(1,1) je způsob výpočtu volatility. Při praktickém výpočtu budeme vycházet z tohoto vztahu (60):

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha * r_{n-1}^2 + \beta * \sigma_{n-1}^2$$

Úkolem bude odhadnout parametry ω , α a β při maximalizaci funkce (63) s respektováním omezujících podmínek (62).

Kompletní verze tabulky na obrázku 22. obsahuje změny hodnot rizikových faktorů, iterativní výpočty rozptylu, pravděpodobnostní funkce, a také simulaci rizikových faktorů a hodnoty portfolia, a nakonec i propočet P/L funkce z nasimulovaných hodnot portfolia.

Na konci tabulky najdeme odhady koeficientů GARCH(1,1) pro každý rizikový faktor. Čísla 18 171,79; 21 301,02 a 18 456,5 jsou maximalizované hodnoty likelihood funkce. Všechny tři sady odhadů parametrů ω , α a β splňují omezující podmínky. Zdá se, že byl proveden kvalitní odhad parametrů a iterativní výpočty jsou taktéž v pořádku.

Nyní je možné pokračovat v odhadu VaR s volatilitou stanovenou na základě použití modelu GARCH(1,1).

Obrázek 22: Metoda historické simulace – GARCH model pro volatilitu

Apple				McD				USD/CZK			
r_i	$v = \sigma^2$	likelihood	sim	r_i	$v = \sigma^2$	likelihood	sim	r_i	$v = \sigma^2$	likelihood	sim
0,01027				0,00817				0,01121			
0,00876	0,0001055	8,4298	121,11	-0,00779	0,0000668	8,7047	110,14	0,01201	0,0001256	7,8345	25,46
0,00078	0,0004374	7,7334	119,08	0,00785	0,0001397	8,4345	112,24	0,00352	0,0010860	6,8138	24,68
0,07281	0,0004330	-4,4983	127,70	-0,00655	0,0001398	8,5690	110,66	-0,00541	0,0010788	6,8047	24,46
-0,00419	0,0007458	7,1776	118,61	-0,00628	0,0001385	8,6001	110,68	0,00540	0,0010799	6,8039	24,73
-0,06381	0,0004344	-1,6311	111,37	-0,01800	0,0001383	6,5439	109,39	-0,00156	0,0010799	6,8287	24,56
0,01394	0,0006732	7,0148	120,33	0,00772	0,0001568	8,3807	112,18	0,00638	0,0010782	6,7948	24,75
0,06630	0,0004447	-2,1666	126,81	-0,01436	0,0001396	7,3999	109,80	-0,01030	0,0010806	6,7320	24,34
0,00573	0,0006923	7,2280	119,53	0,01360	0,0001491	7,5711	112,83	0,00993	0,0010847	6,7356	24,84
0,00641	0,0004352	7,6453	119,76	0,00926	0,0001478	8,2393	112,37	0,00272	0,0010842	6,8201	24,66
-0,01090	0,0004354	7,4664	117,69	0,00063	0,0001413	8,8616	111,45	-0,00482	0,0010785	6,8107	24,48
⋮											
0,03100	0,0004468	5,5631	122,64	0,01551	0,0005647	7,0530	112,23	0,00306	0,0010782	6,8237	24,67
-0,03191	0,0004897	5,5422	115,40	-0,00364	0,0001516	8,7066	110,99	0,02194	0,0010786	6,3856	25,13
-0,00633	0,0004931	7,5334	118,28	-0,00481	0,0001366	8,7288	110,84	0,00630	0,0011082	6,7692	24,75
0,04120	0,0004354	3,8398	123,90	0,01164	0,0001372	7,9058	112,67	-0,00406	0,0010806	6,8150	24,49
0,01056	0,0005332	7,3274	120,13	-0,00283	0,0001446	8,7863	111,07	0,01220	0,0010791	6,6937	24,89
-0,00855	0,0004397	7,5634	117,98	-0,00329	0,0001363	8,8217	111,01	-0,00843	0,0010874	6,7587	24,39
	0,0004373	7,7349			0,0001364	8,8996			0,0010825	6,8285	
		18 171,79				21 301,02				18 456,50	
	0,00043282	w			0,000135729	w			0,00107700	w	
	0,899925701	b			0,799941424	b			0,88992628	b	
	0,059000001	a			0,065000009	a			0,062600001	a	

Zdroj: Vlastní výpočty

Opět seřadíme hodnoty P/L funkce vzestupně a najdeme požadovaný kvantil.

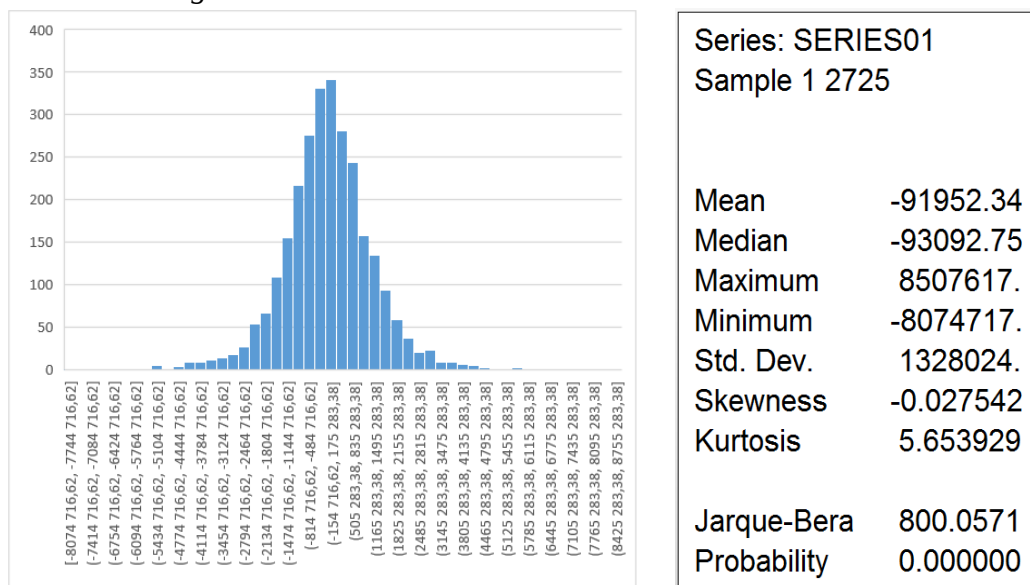
Tabulka 14: Odhady VaR dle GARCH metody historické simulace

Hladina významnosti	5%	1%
VaR_{0,95%}	-2 183 702	
VaR_{0,99%}		-3 793 730

Zdroj: Vlastní výpočty

I v tomto případě empirické rozdělení nesplňuje parametry normálního rozdělení.

Obrázek 23: Histogram a statistické vlastnosti – GARCH volatilita – metoda HS



Zdroj: Vlastní výpočty

2.3.1. ZÁKLADNÍ VARINČNĚ KOVARIANČNÍ METODA

Postup stanovení VaR bude mírně modifikován ve srovnání s postupem prezentovaným v teoretické části práce. Důvodem je skladba portfolia. Právě kombinace zahraničních akciových instrumentů a měnového kursu vnáší některá specifika do postupu výpočtu VaR tohoto portfolia. Postup výpočtu bude dvoustupňový. Začneme „odspoda“.

Budeme uvažovat měnový kurs USD/CZK jako jeden samostatný rizikový faktor, a kursy akcií dvou společností spojíme dohromady a budeme považovat za aditivní druhý rizikový faktor. Z dvou akcií tak v podstatě vytvoříme subportfolio.

Běžným způsobem spočítáme volatilitu obou rizikových faktorů, měřenou směrodatnou odchylkou.

Výpočet jednodenní volatility měnového kursu USD/CZK bude jednoduchý. Spočítáme denní výnosy/ztráty generované tímto rizikovým faktorem. Zjistíme rozptyl této časové řady, a následně i směrodatnou odchylku.

Tabulka 15: *Jednodenní volatilita měnového kursu USD/CZK*

Adj Close	USD/CZK	Return UDS/CZK	...	Adj Close	USD/CZK	Return UDS/CZK
03.01.2005	22,48			21.10.2015	23,81	-0,003731
04.01.2005	22,74	0,011146		22.10.2015	23,85	0,001804
05.01.2005	23,01	0,011936		23.10.2015	23,93	0,003056
06.01.2005	23,09	0,003514		26.10.2015	24,45	0,021706
07.01.2005	22,97	-0,005428		27.10.2015	24,60	0,006279
10.01.2005	23,09	0,005385		28.10.2015	24,50	-0,004073
11.01.2005	23,05	-0,001560		29.10.2015	24,80	0,012128
12.01.2005	23,20	0,006356		30.10.2015	24,59	-0,008462
13.01.2005	22,96	-0,010355		VARIANCE		0,000064
14.01.2005	23,19	0,009881		STND DEV		0,007983

Zdroj: Vlastní výpočty

Jelikož budeme nahlížet na dva akciové instrumenty jako na portfolio, musíme se řídit zásadami výpočtu volatility portfolia. Jinými slovy, budeme pracovat s variančně kovarianční maticí Σ . Matice bude typu $[2: 2]$, symetrická. Na hlavní diagonále jsou rozptyly.

Použijeme vzorec (44)

$$\sigma_p^2 = w' \Sigma w$$

Tabulka 16: *Riziko sub-portfolio*

COVARIANCES		
	Apl	McD
Apl	0,0004852	0,0000970
McD	0,0000970	0,0001545
Portfolio variance	0,000208434	
STND DEV	0,014437241	

Zdroj: Vlastní výpočty

Ted' můžeme přejít na druhý stupeň výpočtu. Budeme počítat VaR pro „hlavní“ portfolio, kde rizikovými faktory jsou akciové kursy a měnový kurs USD/CZK dohromady.

Definujeme denní výnos/ztrátu „hlavního“ portfolio v domácí měně CZK.

$$R_{main} = R_{subport} + R_{ER}, \quad \text{kde} \quad (64)$$

$R_{subport}$ – denní výnos/ztráta subportfolio akcií denimovanáný/á v USD;

R_{ER} – denní výnos/ztráta generovaný/á rizikovým faktorem měnový kurs USD/CZK.

Přičemž $R_{subport}$ zjistíme jako:

$$R_{subport} = \beta * R_{shares}, \quad \text{kde} \quad (65)$$

R_{shares} – denní výnos/ztráta generovaný/á rizikovým faktorem akciový kurs;

β – beta faktor subportfolio.

Výpočet beta faktoru subportfolio uvádí následující tabulka.

Tabulka 17: *Beta faktor sub-portfolio*

Akcie	β	Podíl v portfoliu	$\beta * \text{Podíl}$
Apple	1,06495	0,50	0,532475
McD	0,74783	0,50	0,373915
β sub-portfolio			0,90639

Zdroj: Vlastní výpočty dle <http://www.fool.com/knowledge-center/2015/09/11/formula-for-calculating-beta.aspx>

Konečně je možné se pustit do výpočtu volatility měřené směrodatnou odchylkou „hlavního“ portfolio a vyjádřené v CZK. Formule pro výpočet má tuto podobu:

$$\sigma_{main} = \sqrt{\beta^2 \sigma_{R_{shares}}^2 + \sigma_{R_{ER}}^2 + 2\beta\rho\sigma_{R_{shares}}\sigma_{R_{ER}}} = \sqrt{(\beta \quad 1) \Omega_{main} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}},$$

kde

(66)

ρ – korelační koeficient;

Ω_{main} – denní kovarianční matice výnosu/ztrát generovaných rizikovým faktorem akciový kurs a rizikovým faktorem měnový kurs.

Kovarianční matice bude opět typu $[2:2]$, symetrická. Na hlavní diagonále jsou rozptyly.

$$\Omega_{main} = \begin{pmatrix} \sigma_{R_{shares}}^2 & \rho \sigma_{R_{shares}} \sigma_{R_{ER}} \\ \rho \sigma_{R_{shares}} \sigma_{R_{ER}} & \sigma_{R_{ER}}^2 \end{pmatrix} \quad (67)$$

Spočítáme prvky kovarianční matice.

COVARIANCES		
	Sub-portfolio	ER
Sub-portfolio	0,00017124	-0,00000714
ER	-0,00000714	0,00006373

Záporná hodnota kovariance vypovídá o tom, že se náhodné veličiny pohybují opačným směrem. V následujícím kroku spočítáme směrodatnou odchylku „hlavního“ portfolia.

$$\sigma_{main} = 1,38 \text{ \%}.$$

Výsledkem celého snažení bude odhad VaR pomocí základní varianty variančně kovarianční metody. Připomeňme si, že tato varianta založena na platnosti předpokladu normálního rozdělení a jeho nulové střední hodnoty.

$$VaR_{\alpha} = \Phi^{-1} \alpha \sigma_{main} * \text{Portfolio value}$$

$$VaR_{0,95} = 1,645 * 0,0138 * 84\,984\,832 \approx 1\,934\,413 \text{ CZK}$$

$$VaR_{0,99} = 2,326 * 0,0138 * 84\,984\,832 \approx 2\,735\,225 \text{ CZK}$$

2.3.2. ZÁKLADNÍ VARIANČNĚ KOVARIANČNÍ METODA A PŘÍTOMNOST AUTOKORELACE P/L FUNKCE PORTFOLIA

Při práci s finančními časovými řadami se často můžeme setkat s takovým jevem jako autokorelace časové řady. Autokorelace znamená závislost hodnot časové řady na různě zpožděných hodnotách téže časové řady.

Matematicky autokorelace je definována jako:

$$\rho_k = \frac{\text{covariance}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\text{variance}(y_t)} * \sqrt{\text{variance}(y_{t-k})}} = \text{korelace}(y_t, y_{t-k}), \text{ kde} \quad (68)$$

k – zpoždění, $k \geq 0$.

Přítomnost autokorelace se zdůvodňuje zejména dalším jevem příznačným finančním časovým řadám – shlukováním volatility. V této práci se budeme věnovat způsobu, jak zohlednit přítomnost autokorelace prvního řádu. Čili budeme testovat přítomnost a vypořádávat se s autokorelací P/L funkce v prvním zpoždění. Opustíme totiž předpoklad nezávislosti prvků P/L funkce portfolia aktiv.

Nejdříve provedeme test na přítomnost autokorelace v časové řadě P/L funkce. Podíváme se na korelogram ACF a PACF P/L funkce celého portfolia.

Tabulka 18: *Korelogram ACF a PACF P/L funkce portfolia*

Sample: 1 2726
Included observations: 2726

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.067	-0.067	12.141	0.000
		2 -0.042	-0.047	17.046	0.000
		3 -0.018	-0.024	17.937	0.000
		4 -0.013	-0.018	18.374	0.001
		5 -0.006	-0.010	18.457	0.002
		6 0.025	0.022	20.132	0.003
		7 0.020	0.023	21.270	0.003
		8 -0.000	0.005	21.271	0.006
		9 -0.035	-0.032	24.665	0.003
		10 0.019	0.016	25.670	0.004
		11 -0.042	-0.042	30.516	0.001
		12 0.035	0.029	33.830	0.001
		13 0.023	0.022	35.257	0.001
		14 -0.009	-0.005	35.462	0.001
		15 -0.030	-0.027	37.858	0.001
		16 0.041	0.039	42.480	0.000
		17 -0.028	-0.024	44.708	0.000
		18 -0.025	-0.028	46.480	0.000
		19 -0.011	-0.017	46.783	0.000
		20 0.063	0.056	57.858	0.000
		21 -0.033	-0.023	60.911	0.000
		22 -0.006	-0.008	60.997	0.000
		23 -0.041	-0.042	65.512	0.000
		24 0.020	0.017	66.650	0.000

Zdroj: Vlastní výpočty v EViews

Korelogram zobrazuje hodnoty korelačních koeficientů pro 24 zpoždění. My se budeme zajímat pouze o první řádek. Koeficienty ACF a PACF se pro první zpoždění rovnají hodnotě $-0,067 = \rho_1$. Svědčí o neúplné nepřímé závislosti sousedních hodnot testované časové řady.

Q-Stat je statistikou testu s následujícími nulovou a alternativní hypotézou.

H_0 : *není autokorelace v prvním zpoždění*

H_1 : *non H_0*

Na základě srovnání p -value s hladinou významnosti testu α , dospějeme k závěru, že $p\text{-value} < \alpha$, proto v podstatě na jakékoli hladině významnosti zamítáme nulovou hypotézu ve prospěch alternativní. Přítomnost autokorelace v prvním zpoždění byla prokázána.

Přítomnost autokorelace promítneme do výpočtu hodnoty VaR pomocí nově zavedeného parametru $\tilde{h}$, kterému se také říká scaling faktor. Velikost tohoto faktoru určíme dle vztahu:

$$\tilde{h} = h + 2 \frac{\rho_k}{(1-\rho_k)^2} [(h-1)(1-\rho_k) - \rho_k(1-\rho_k^{h-1})], \text{ kde} \quad (69)$$

h – perioda P/L funkce;
 $k = 1$.

Tím pádem VaR „hlavního“ portfolia upravený o vliv autokorelace odhadneme dle vztahu:

$$VaR_{AFC_{main};\alpha} = \sqrt{h} \Phi^{-1} \alpha \sigma_{main} - h\mu$$

Výsledné odhady VaR po zakomponování vlivu autokorelace prvního řádu uvádí tabulka.

Tabulka 19: Odhady VaR dle VK metody při autokorelaci P/L funkce

0,95	VaR_{ACF_main}	2 642 440
0,99	VaR_{ACF_main}	3 736 362

Zdroj: Vlastní výpočty

Můžeme se přesvědčit o tom, že přítomnost i velice nízké autokorelace se dost výrazně podepíše na korekci odhadu VaR. Existence modelů zohledňujících vliv autokorelace na odhad VaR je opodstatněna.

2.3.3. VARIANČNĚ KOVARIANČNÍ METODA A NESTABILITA SÍLY ZÁVISLOSTI

V rámci variančně kovarianční metody prvkem vyjadřujícím sílu závislosti rizikových faktorů je kovarianční matice. Na úpravu právě tohoto stavebního prvku modelu se zaměříme ve snaze promítnout do modelu vliv změny síly závislosti rizikových faktorů portfolia. Jako nástroj použijeme metodu EWMA.

S touto metodou jsme se již setkali v oddílu věnovaném odhadu VaR pomocí simulačních technik. Tehdy metodologie EWMA byla aplikována na výpočet volatility a také jako pomocný nástroj pro identifikaci n -té nejhorší ztráty, která pak byla považována za odhad VaR. Metoda historické simulace však nebere v úvahu korelačně kovarianční vztahy, proto nebyl prostor pro předvedení způsobu aplikování EWMA na prvek modelu vyjadřující závislost proměnných. Tato příležitost se otevírá v rámci výkladu problematiky parametrických metod.

Připomeňme si, že přístup EWMA byl navržen do jisté míry jako kompromisní řešení sporu o délce časových řad sloužících jako vstupy analýzy. Na jedné straně se ozývají hlasy ve prospěch volby co nejdelších časových řad, aby veškeré výpočty mohly být považovány za statistické významné. Jim oponuje názor, že hodně vzdálená pozorování již nemají žádnou vazbu na aktuální dění na finančních trzích, a tak vnáší do modelů jenom informační šum. Filosofie EWMA přístupu spočívá ve zvýšení váhy aktuálnějších pozorování, aniž by docházelo k vyřazování z analýzy pozorování odlehklých.

Z toho důvodu, že metodologie EWMA byla již aplikována na volatilitu v rámci simulačních metod, tady při modifikaci variančně kovarianční metody o EWMA se pro změnu zaměříme na kovarianci. Tím vneseme do škály všech možných způsobů modifikace základní parametrické metody novou dimenzi, a sice budeme se snažit zachytit aktuální trendy ve vývoji síly závislosti mezi proměnnými (v našem případě mezi rizikovými faktory portfolia).

Pro zajištění srovnatelnosti výsledků a dodržení konzistentnosti výkladu sestrojíme postupně modely s parametrem $\lambda = 0,94; 0,95; 0,97$ a $0,99$.

EWMA model pro zohlednění síly závislosti měřené kovariancí má následující podobu:

$$\sigma_{12t} = (1 - \lambda) r_{1,t-1} r_{2,t-1} + \lambda \sigma_{12,t-1}, \quad \text{kde} \quad (70)$$

σ_{12t} – kovariance rizikových faktorů 1 a 2 v čase t ;

$r_{1,t-1}$ – výnos/ztráta rizikového faktoru 1 v čase $(t - 1)$;

$r_{2,t-1}$ – výnos/ztráta rizikového faktoru 2 v čase $(t - 2)$;

λ – lambda, vyhlazující parametr.

Klíčovou úlohu při modelování síly závislosti bude v rámci sestrojení modelu pro naše analyzované portfolio zahraničních akciových instrumentů hrát kovariance mezi rizikovými faktory subportfolio (akcie Apple a McD v USD) a měnový kurs USD/CZK. Výpočet kovarianční matice těchto rizikových faktorů upravíme o vztah (70).

Tabulka 20: EWMA kovariance subportfolia a měnového kursu

		Cov (Sub-portfolio; USD/CZK)			
Adj Close	Day	0,94	0,95	0,97	0,99
03.01.2005	1				
04.01.2005	2	-7,1399E-06	-7,1399E-06	-7,1399E-06	-7,1399E-06
05.01.2005	3	-1,1486E-06	-2,1471E-06	-4,1442E-06	-6,1414E-06
06.01.2005	4	-7,8864E-07	-1,7973E-06	-3,8744E-06	-6,0315E-06
07.01.2005	5	8,0305E-08	-1,0227E-06	-3,3474E-06	-5,8342E-06
10.01.2005	6	-9,3292E-06	-8,8088E-06	-7,9493E-06	-7,3433E-06
11.01.2005	7	-1,0306E-05	-9,6486E-06	-8,479E-06	-7,5259E-06
12.01.2005	8	-6,1193E-06	-6,1928E-06	-6,4406E-06	-6,856E-06
13.01.2005	9	-2,0306E-06	-2,7819E-06	-4,3866E-06	-6,1672E-06
14.01.2005	10	-1,5912E-05	-1,4312E-05	-1,1257E-05	-8,4394E-06

Zdroj: Vlastní výpočty

Takto vypadají mezivýpočty při použití rekurentního vzorce EWMA pro kovarianci. Z toho důvodu, že provádíme výpočty pro různé velikosti λ , počet výsledných kovariančních matic bude odpovídat počtu scénářů. V našem případě budeme mít čtyři kovarianční matice.

Na hlavní ose jsou rozptyly. Rozptyly byly spočítány běžným způsobem. Pro větší přehlednost pod každou kovarianční matici rovnou umístíme i finální odhady VaR.

Tabulka 21: Odhady VaR dle VK metody při nestabilitě síly závislosti rizikových faktorů

a)

$\lambda = 0,94$	COVARIANCES	
	Sub-portfolio	ER
Sub-portfolio	0,000171237	-1,20904E-05
ER	-1,20904E-05	6,37269E-05

Portfolio variance	0,000182489
STND DEV	0,013508832
VaR 0,95	1 888 535
VaR 0,99	2 670 355

c)

$\lambda = 0,97$	COVARIANCES	
	Sub-portfolio	ER
Sub-portfolio	0,000171237	-2,4181E-06
ER	-2,4181E-06	6,37269E-05

Portfolio variance	0,000200022
STND DEV	0,014142921
VaR 0,95	1 977 181
VaR 0,99	2 795 698

b)

$\lambda = 0,95$	COVARIANCES	
	Sub-portfolio	ER
Sub-portfolio	0,000171237	-8,7841E-06
ER	-8,7841E-06	6,37269E-05

Portfolio variance	0,000188482
STND DEV	0,013728877
VaR 0,95	1 919 298
VaR 0,99	2 713 852

d)

$\lambda = 0,99$	COVARIANCES	
	Sub-portfolio	ER
Sub-portfolio	0,000171237	7,37119E-07
ER	7,37119E-07	6,37269E-05

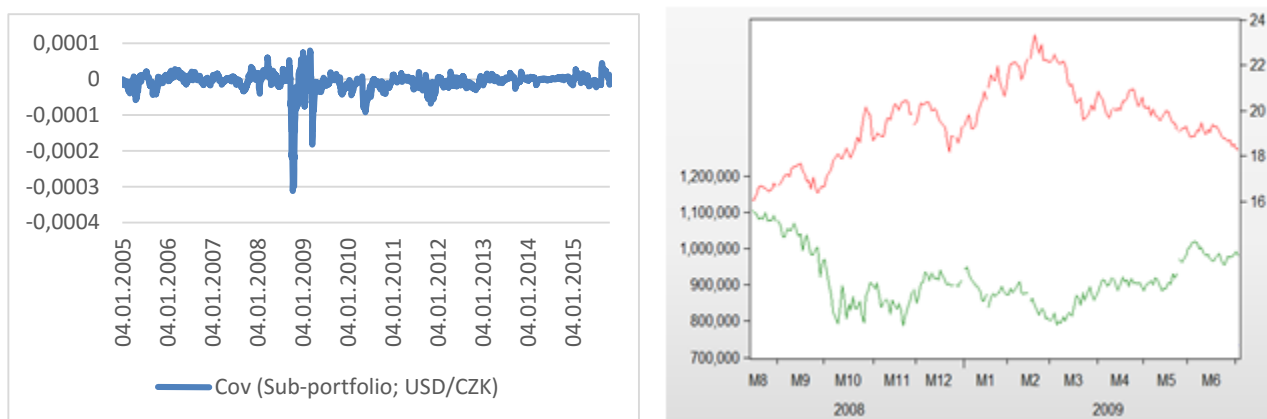
Portfolio variance	0,000205742
STND DEV	0,014343708
VaR 0,95	2 005 251
VaR 0,99	2 835 388

Zdroj: Vlastní výpočty

Zde vidíme tendenci, že s růstem velikosti lambda rostou i odhady VaR. Při pohledu na kovarianční matice lze si všimnout, že obecně síla závislosti není velká.

Podíváme se ještě na graf EWMA kovariance P/L funkcí rizikových faktorů subportfolio a měnový kurs za celou dobu dostupnosti historických dat.

Obrázek 24: a) EWMA kovariance P/L funkcí rizikových faktorů
b) měnový kurs USD/CZK a hodnota subportfolia v USD



Zdroj: Vlastní výpočty v EViews a Excel

Jak vidíme, EWMA kovariance se pohybuje v poměrně těsné blízkosti nuly. Na konci roku 2008 a v první půlce 2009 ukazatel nabývá větších záporných hodnot. To je docela zajímavý fenomén, jelikož v době systémové nestability na finančních trzích je běžné, že

výnosové míry finančních aktiv se chovají velice podobně, i když tomu tak nebylo dřív. V době finanční krize se obecně očekává pokles výnosových měr finančních instrumentů.

Na grafu zprava vidíme vývoj měnového kursu páru USD/CZK (červená čára) a subportfolia (akcie Apple a McD á 15 000 ks každá, zelená čára). Jak se dalo očekávat, výnosová míra subportfolia během sledovaného období srpen 2008 až červen 2009 měla tendenci klesat, zatímco časová řada měnového kursu měla opačný průběh. Je to přímá kotace z pohledu českého investora, takže růst hodnoty měnového kursu znamená depreciaci koruny a apreciaci dolaru. Z pohledu českého investora pokles kursů akcií byl do jisté míry kompenzován apreciací dolaru. Dá se předpokládat příznivější průběh reálných ztrát na modelovém portfoliu během tohoto období v přepočtu na koruny.

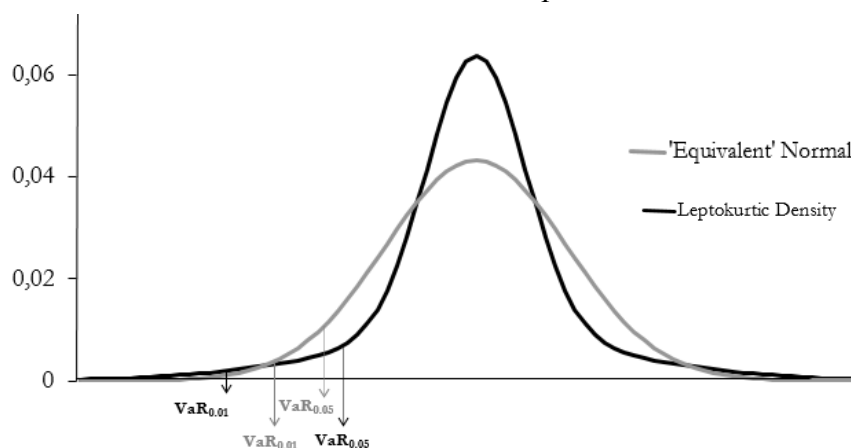
V rámci EWMA metodologie se dá techniku vážení aplikovat nejen na výpočet buď volatility nebo kovariance zvlášť. Je samozřejmě možné v rámci jednoho modelu zkombinovat tyto dva postupy dohromady. Pokud se risk manažer domnívá, že je opodstatněné upravit dle EWMA postupu jak volatilitu, tak i kovarianci rizikových faktorů portfolia, může to bez problému udělat v rámci jednoho modelu. Příslušný EWMA vzorec se souběžně aplikuje na oba ukazatele.

2.3.4. VARIANČNĚ KOVARIANČNÍ METODA A ŠPIČATOST EMPIRICKÉHO ROZDĚLENÍ

Špičatost je statistikou, vyjadřující jak moc je příslušné rozdělení ploché resp. špičaté. Vzorec (18) je matematickým zápisem této charakteristiky rozdělení. Při posouzení míry špičatosti porovnáváme příslušné rozdělení s rozdělením normálním. Často se stává, že empirické rozdělení portfolia finančních aktiv je špičatější než rozdělení normální, čili má špičatost větší než tři. Tomuto rozdělení se říká leptokurtické.

Leptokurtické rozdělení se vyznačuje nejen tím, že je špičatější než rozdělení normální (za podmínky rovnosti rozptylů). Zvláštní tvar mají i konce tohoto rozdělení. Porovnáme tvar hustoty pravděpodobnosti normálního a leptokurtického rozdělení.

Obrázek 25: Srovnání normálního a leptokurtického VaR



Zdroj: Alexander, Carol. *Market Risk Analysis. Volume IV. Value-at-Risk Models*.

Pro odhad hodnoty VaR jsou důležité následující závěry. Na nízké hladině významnosti (5 %) dochází k nadhodnocení odhadu VaR, v případě, že odhad děláme na základě normálního rozdělení, zatímco empirické rozdělení je leptokurtické. Na vysoké hladině významnosti (1 %) situace je zrcadlově opačná. Pokud odhad VaR děláme na základě normálního rozdělení, zatímco empirické rozdělení je leptokurtické, dopouštíme se chyby odhadu ve smyslu výrazného podhodnocení odhadu VaR. Bod, ve kterém levý konec leptokurtického rozdělení protíná konec normálního rozdělení směrem zezdola nahoru (dalo by se říct bod zvratu, bod zrcadlového otočení), se určuje na základě míry nadměrné špičatosti leptokurtického rozdělení oproti normálnímu.

Roli leptokurtického rozdělení při odhadu VaR hraje Studentovo t rozdělení. Vyhovuje totiž podmínce, že při stejném rozptylu je špičatější než ekvivalentní normální rozdělení. A také konce t rozdělení jsou tlustší, než je tomu v případě rozdělení normálního.

Jediným parametrem Studentova t rozdělení je počet stupňů volnosti v . Platí, že s růstem v ($v \rightarrow \infty$) se Studentovo t rozdělení blíží normovanému normálnímu. Veličina t se rovna

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{v}}}, \quad \text{kde} \quad (71)$$

U – náhodná veličina mající normované normální rozdělení

χ^2 – náhodná veličina mající χ^2 rozdělení s v stupni volnosti.

Studentovo t rozdělení je symetrické kolem nulové střední hodnoty. Pro kvantily tohoto rozdělení platí:

$$t_v(\alpha) = -t_v(1 - \alpha) \quad (72)$$

Výhodou variančně kovarianční metody je to, že kvantil příslušného rozdělení vstupuje do výpočtu až v závěrečné fázi celého postupu, kdy dosazujeme tento parametr rovnou do finálního vzorce pro odhad VaR. Abychom odhadli VaR pro jednosložkové portfolio při použití Studentova t rozdělení, je nutné upravit formuli takto:

$$VaR_{\alpha, v} = \sqrt{v^{-1}(v - 2)} t_v^{-1}(1 - \alpha) \sigma - \mu$$

Pro vícesložkové portfolio se použije vzorec

$$VaR_{\alpha, v} = \sqrt{v^{-1}(v - 2)} t_v^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{\Theta' \Omega_h \Theta - \Theta' \mu_h}, \quad \text{kde} \quad (73)$$

Ω – kovarianční matice P/L funkcí rizikových faktorů portfolio;

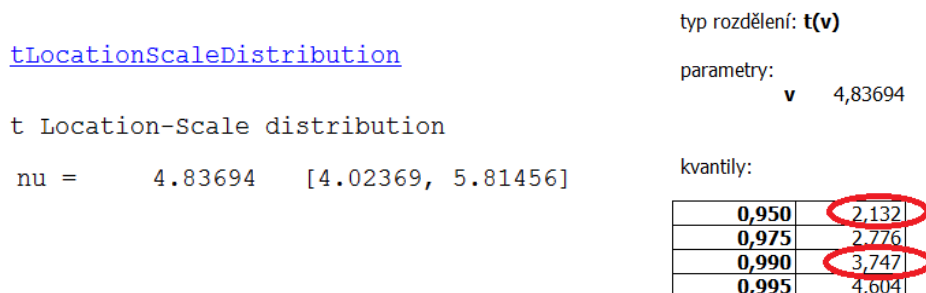
Θ – váhy, koeficienty citlivosti;

μ – nadměrný výnos;

h – perioda, časový horizont.

Jediným neznámým parametrem zůstává počet stupňů volnosti. Musíme ho nějakým způsobem odhadnout. Za tímto účelem je možné použít několik metod. Například MLE⁶ nebo metodu momentů⁷. T rozdělení bylo nafitováno na denní P/L funkci našeho modelového portfolia pomocí programu MATLAB.

Obrázek 26: Odhad počtu stupňů volnosti a kvantilů nafitovaného t rozdělení



Zdroj: Vlastní výpočty v MATLAB a Excel

Ted' už známe počet stupňů volnosti a hodnoty kvantilů pro hladiny významnosti 1 % a 5 %. Můžeme se pustit do odhadu VaR dosazováním do vzorce (73).

Kovarianční matice a volatilita vypadají stejně jako v případě základního variančně kovariančního modelu. Tentokrát ale použijeme kvantily Studentova t rozdělení.

Tabulka 22: Odhady VaR dle VK metody při nadměrné špičatosti empirického rozdělení

COVARIANCES		
	Sub-portfolio	ER
Sub-portfolio	0,00017124	-0,00000714
ER	-0,00000714	0,00006373

Portfolio variance	0,000191463
STND DEV	0,013837001
VaR 0,95	1 919 902
VaR 0,99	3 374 432

Zdroj: Vlastní výpočty

Při porovnání těchto výsledků s odhady VaR dle základní metody (normální rozdělení) si všimneme, že na hladině významnosti 5 % větší hodnota VaR je u základní metody, zatímco na hladině významnosti 1 % větší VaR je u metody upravené o t rozdělení. Dá se usuzovat na to, že se tady projevuje fenomén odlišnosti tvaru hustoty pravděpodobnosti těchto dvou rozdělení. A víc realisticky vypadá riziko podhodnocení odhadu VaR na vysokých hladinách významnosti za použití normálního rozdělení.

⁶ Maximum likelihood estimation

⁷ Method of moments

Pro P/L funkci finančních instrumentů je také typické, že nejsou symetrické kolem střední hodnoty. Jinými slovy, mají nenulovou šikmost. Matematickým zápisem této statistiky je vzorec (16). Při posouzení míry šikmosti se opět srovnává rozdělení empirické s normálním. Normální rozdělení má nulovou šikmost. Nenulová hodnota této statistiky vypovídá o přítomnosti asymetrie, a znaménko vypovídá o směru vychýlení. Záporná šikmost znamená to, že rozdělení má delší levý konec ale většina hodnot leží vpravo od průměru. V případě kladné šikmosti je situace zrcadlově opačná.

Přítomnost zešikmení rozdělení je dalším zdrojem potenciálních rizik při odhadu VaR. Jelikož t rozdělení je symetrické, je nutné nalézt jiný způsob jak se vypořádat s rizikem chybného odhadu VaR v případě asymetrie empirického rozdělení. Řešením je aplikování přístupu založeného na mixování více rozdělení do jednoho modelu.

Obvykle se používá mix dvou normálních rozdělení nebo t rozdělení. Má se za to, že použití mixu rozdělení předpokládá, že P/L funkce portfolia existuje ve dvou dimenzích. V případě první z nich P/L funkce má střední hodnotu μ_1 a rozptyl σ_1^2 , v případě druhé dimenze platí střední hodnota μ_2 a rozptyl σ_2^2 . Každému z těchto dvou režimů se přiřazuje pravděpodobnost „nastání“.

Pro tento mix rozdělení se dá definovat distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti. Pokud budeme uvažovat kombinaci dvou normálních rozdělení, distribuční funkce bude mít podobu:

$$F(x) = \pi F_1(x, \mu_1, \sigma_1^2) + (1 - \pi) F_2(x, \mu_2, \sigma_2^2), \quad (74)$$

$$0 < \pi < 1,$$

kde

$F(x, \mu_i, \sigma_i^2)$ – distribuční funkce normálního rozdělení se střední hodnotou μ_i a rozptylem σ_i^2 ;

π – pravděpodobnost „nastání“ jedné z dimenzí.

Hustotu pravděpodobnosti mixu dvou normálních rozdělení se dá vyjádřit následujícím způsobem:

$$f(x) = \pi f_1(x, \mu_1, \sigma_1^2) + (1 - \pi) f_2(x, \mu_2, \sigma_2^2), \quad (75)$$

$$0 < \pi < 1,$$

kde

$f(x, \mu_i, \sigma_i^2)$ – hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení se střední hodnotou μ_i a rozptylem σ_i^2 .

Je nutné se nějakým způsobem vypořádat se situací, že není možné pomocí explicitní definice odhadnout VaR portfolia při aproximování jeho P/L funkce mixem dvou rozdělení. K tomu použijeme algoritmy založené na iterativním přepočtu.

Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x, \mu_i, \sigma_i^2)$. Z definice distribuční funkce vyplývá, že

$$P(X < x_\alpha) = F(x_\alpha) = \pi F_1(x_\alpha, \mu_1, \sigma_1^2) + (1 - \pi) F_2(x_\alpha, \mu_2, \sigma_2^2) \quad (76)$$

A pokud $P(X < x_\alpha) = \alpha$, potom x_α je α kvantilem mixu dvou normálních rozdělení. Protože $\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} = U_i$ pro normální rozdělení, můžeme psát

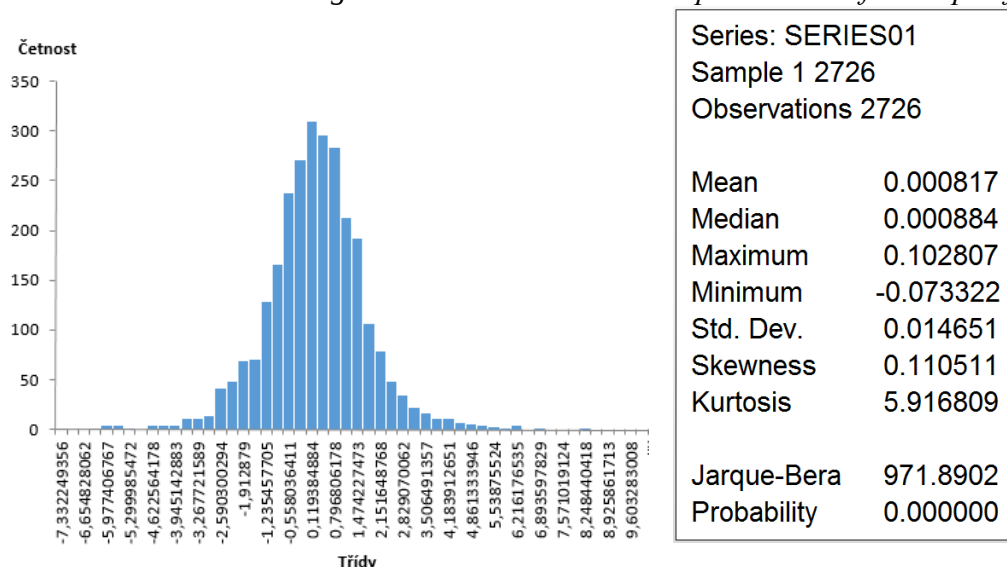
$$\pi P(U_1 < \frac{x_\alpha - \mu_1}{\sigma_1}) + (1 - \pi) P(U_2 < \frac{x_\alpha - \mu_2}{\sigma_2}) = \alpha \quad (77)$$

U_i je normovanou veličinou normálního rozdělení, lze najít kvantil tohoto rozdělení. Jedinou neznámou zůstává kvantil mixu dvou normálních rozdělení x_α . VaR mixu normálních rozdělení odhadneme jako

$$VaR_\alpha = -x_\alpha \quad (78)$$

Náše modelové portfolio se skládá ze zahraničních akciových instrumentů. Podíváme se na histogram původní P/L funkce portfolia a na přehled základních charakteristik rozdělení.

Obrázek 27: Histogram a statistické vlastnosti původní P/L funkce portfolia



Zdroj: Vlastní výpočty v EViews a Excel

Zešikmení je mírně kladné. Pokusíme se přece aplikovat variančně kovarianční metodu zohledňující nenulovou šikmost rozdělení na modelové portfolio. Z důvodu, že odchylka

šikmosti od nulové hodnoty není příliš velká, dá se očekávat jen mírnou korekci odhadu VaR oproti základní metodě.

Parametry mixu dvou rozdělení odhadneme pomocí EM algoritmu⁸ v programu MATLAB. Odhady jejich parametrů obsahuje následující tabulka.

Tabulka 23: *Odhady parametrů modelu mixu dvou normálních rozdělení*

π	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2
0,749439	0,000874257	0,010493331	0,000646573	0,022956481

Zdroj: Vlastní výpočty v MATLAB

Tyto odhadnuté parametry dosadíme do vztahu (77). Dopočet neznámého kvantilu mixu dvou normálních rozdělení, a zároveň i VaR, provedeme pomocí iterativní aproximativní metody Hledání řešení v Excelu. Opět budeme odhadovat VaR na hladině významnosti 1% a 5%. Z empirických studií (Alexander, Carol. *Market Risk Analysis. Volume IV. Value-at-Risk Models*) vyplývá, že VaR odhadnutý na základě mixu rozdělení se liší (převyšuje) VaR odhadnutý pomocí základní metody tím více, čím vyšší hladinu významnosti volíme. Čili největší rozdíl mezi výsledky metod bude u VaR_{99,9%}. Na nízkých hladinách významnosti (např. 5%) se odhady mohou lišit minimálně.

Tabulka 24. uvádí výsledné odhady VaR se zohledněním nenulové šikmosti.

Tabulka 24: *Odhady VaR dle VK metody při nenulové šikmosti empirického rozdělení*

Mix Normal VaR_{95%}	1 894 757
Mix Normal VaR_{99%}	3 305 337

Zdroj: Vlastní výpočty

Tady platí zákonitost zjištěná v empirických studiích. Při srovnání odhadů VaR dle základní a dle právě prezentované metody větší rozdíl mezi metodami pozorujeme na hladině významnosti 1 %.

⁸ Expectation Maximization (EM) Algorithm for Gaussian Mixture Models

Odhad VaR nám říká, jaká maximální výše ztráty se realizuje během určitého časového intervalu s určitou pravděpodobností. Nic ale neříká o tom, co se bude dít, pokud skutečně realizovaná ztráta překročí hodnotu VaR. Existuje však model, který umožňuje nahlédnout do toho, co se bude dít (jak velkou se dá očekávat ztrátu) v případě překročení VaR. Tento model se jmenuje Conditional VaR, neboli ETL (Expected Tail Loss).

ETL je definována jako očekávaná ztráta daná tím, že realizovaná ztráta překročí odhad VaR. Tento model rozšiřuje záběr klasického VaR modelu tím, že nabízí možnost podívat se „víc doleva“ až za kvantil VaR. ETL se dá považovat za dobrý doplněk VaR. Dohromady tyto dva modely poskytují kompletní popis míry rizika portfolia.

Pokud ETL počítáme jako doplněk základního parametrického lineárního VaR modelu, formule má následující podobu:

$$ETL_{h,\alpha} = \alpha^{-1} \varphi(\Phi^{-1}(\alpha)) \sigma_h - \mu_h, \quad \text{kde} \quad (79)$$

φ – hustota pravděpodobnosti.

Podle definice, ETL musí být minimálně stejně velká jako kompatibilní VaR. Často se však stává, že ETL je větší než odhad VaR. Spočítáme ETL pro naše modelové portfolio.

Tabulka 25: *Odhady ETL*

Normal ETL _{0,95}	2 425 617
Normal ETL _{0,99}	3 134 119

Zdroj: Vlastní výpočty

V obou případech, resp. na každé hladině významnosti ETL přesahuje odhad VaR.

2.4. SROVNÁNÍ ODHADŮ VaR DLE PARAMETRICKÉHO A SIMULAČNÍHO PŘÍSTUPŮ

V rámci praktické části této práce bylo na modelové portfolio celkem aplikováno deset metod odhadu hodnoty VaR. Z toho čtyři metody patří do simulačního přístupu, a 6 metod – do variančně kovariančního přístupu. Následující tabulka uvádí přehled výsledků.

Tabulka 26: *Kompletní přehled odhadů VaR dle odprezentovaných metod*

Přístup	Metoda	Odhady hodnoty VaR				
		α	$\lambda = 0,94$	$\lambda = 0,95$	$\lambda = 0,97$	$\lambda = 0,99$
Historická simulace	Základní	0,95	-2 250 349			
		0,99	-3 976 913			
	EWMA	0,95	-2 793 420	-2 766 116	-2 766 116	-2 397 748
		0,99	-4 169 993	-4 169 993	-4 169 993	-4 169 993
	EWMA s volatilitou	0,95	-2 385 225	-2 524 458	-2 236 890	-2 001 351
		0,99	-3 947 762	-4 534 489	-3 902 913	-3 571 308
	GARCH	0,95	-2 183 702			
		0,99	-3 793 730			
Variančně kovarianční	Základní	0,95	-1 934 413			
		0,99	-2 735 225			
	Autokorelace	0,95	-2 642 440			
		0,99	-3 736 362			
	EWMA covariance	0,95	-1 888 535	-1 919 298	-1 977 181	-2 005 251
		0,99	-2 670 355	-2 713 852	-2 795 698	-2 835 388
	Kurtosis	0,95	-1 919 902			
		0,99	-3 374 432			
	Skewness	0,95	-1 894 757			
		0,99	-3 305 337			
	ETL	0,95	-2 425 617			
		0,99	-3 134 119			

Zdroj: Vlastní tvorba

Jak v rámci simulačního, tak i variančně kovariančního přístupu dochází ke korekci odhadů VaR při modifikaci základní metody.

U historické simulace při pouhém použití vah v rámci metody EWMA dochází k nárůstu odhadu VaR na obou hladinách významnosti. To je hezký příklad toho, jak je možné historickou časovou řadu jednoduše updatovat a tím se vyhnout riziku podhodnocení VaR z důvodu přiřazování stejné váhy různě starým pozorováním.

Vliv zakomponování do modelu volatility nelze jednoznačně určit. V případě aplikace GARCH (1,1) jsou odhady VaR menší ve srovnání s klasickou metodou. GARCH (1,1) tedy nenasvědčuje tomu, že právě růst volatility se stane významným faktorem zvýšení VaR. V případě modelování volatility pomocí EWMA hraje roli velikost parametru lambda. Nejmarkantnější rozdíl oproti klasické metodě pozorujeme při $\lambda = 0,95$.

V rámci modifikace základní metody variančně kovariančního přístupu také dochází ke korekci odhadů VaR. Platí, že i přítomnost nepatrné autokorelace P/L funkce portfolio způsobuje signifikantní změny VaR. Modelování síly závislosti rizikových faktorů koriguje odhady VaR v závislosti na tom, jakou hodnotu parametru lambda zvolíme. Risk manažer by měl důkladně promyslet a zdůvodnit volbu hodnoty lambda.

V případě zohlednění nadměrné špičatosti platí postřeh, že na hladině významnosti kolem 5 % je vyšší odhad VaR dle základní metody, zatímco na hladině významnosti kolem 1 % je vyšší odhad VaR dle modifikované metody. Při uvažování nenulové šikmosti větší rozdíl mezi základní a modifikovanou metodou opět spatřujeme na hladině významnosti 1 %. ETL v obou případech převyšují odhady VaR dle základní metody.

Celkové rozpětí mezi minimální a maximální hodnotou VaR je kolem 2,6 mil. CZK. Je nutné ale podotknout, že se jedná o jednodenní VaR. Pro delší časový horizont by samozřejmě platily jiné poměry. A také uvažujeme portfolio v celkové hodnotě kolem 85 mil. CZK. Pokud bychom pracovali s miliardovým portfoliem, toto rozpětí by bylo mnohonásobně širší.

VaR se ukázal jako kvalitní nástroj pro kvantifikaci tržního rizika za krátký časový horizont (cca 10 dní), a za běžných, ideálně konstantních, tržních podmínek. Hlavní předností metody je schopnost pomocí jednoho čísla vyjádřit míru rizika, na kterou působí více rizikových faktorů.

V reálném světě samozřejmě dochází k neustálé změně tržních podmínek a tedy i faktorů působících na průběh P/L funkce portfolia. S těmito okolnostmi se základní metody odhadu VaR nedokázaly náležitě vypořádat. Potřeba praktické aplikace VaR, zejména v roli metody ke stanovení regulatorního požadavku k tržnímu riziku u interních modelů, stala podnětem k tomu, aby základní metoda odhadu VaR byla modifikována takovým způsobem, aby rizika použití VaR modelů byla co nejvíce eliminována.

Cílem této práce bylo identifikovat možné problémy použití VaR modelů při řízení portfolia. A také nastínit možné způsoby řešení těchto problémů.

V rámci simulačního přístupu byl vytknout problém přiřazování stejné váhy různě starým pozorováním. Řešením je použití exponenciálně klesajících vah – čili aplikovat metodu EWMA. Dalším problémem byla proměnlivost volatility v čase. Riziko není konstantní v čase. Období klidu se střídají s obdobími nadprůměrné volatility. Bylo zpozorováno, že volatility P/L funkce finančního aktiva se chová určitým způsobem, zejména při růstu se shlukuje do obrazců určitého tvaru. Mezi hodnotou VaR a mírou rizika platí přímá úměra. Při zvýšení míry rizika VaR také roste. Jako řešení tohoto problému se nabízejí dva postupy modelování volatility: EWMA model s volatilitou a GARCH model.

V rámci parametrického přístupu jako první byl vytyčen problém přítomnosti autokorelace P/L funkce portfolia. Překonat tuto komplikaci se dá pomocí úpravy základní metody o vliv existence autokorelace. Další problém byl pojmenován jako proměnlivost síly závislosti rizikových faktorů portfolia. Řešením je modelování kovariance dle EWMA metody pro kovarianci. Jako řešení problému existence nadměrné špičatosti empirického rozdělení ve srovnání s rozdělením normálním bylo prezentováno nafitování Studentova t rozdělení na skutečná data. Nakonec jako řešení problému existence nenulové šikmosti empirického rozdělení ve srovnání s rozdělením normálním byl nabídnout postup aproximace empirického rozdělení mixem dvou normálních rozdělení. Jako nadstavba parametrického VaR byla ještě uvedena metoda ETL, snažící se odhadnout velikost ztráty v případě překročení hodnoty VaR.

V této práci byly prezentovány pouze některé z možných způsobů vypořádání se s problémy, které mohou vzniknout při praktické aplikaci VaR. Těch způsobů je samozřejmě víc. Možným vývoj této práce by mohlo být právě soustředění se na další problémy použití VaR modelů a způsoby jejich řešení. Bylo by zajímavé zvolit jako analyzované portfolio nelineární portfolio. Dalším potenciální půdou pro zkoumání by mohlo být vyhodnocení kvality modelů na základě úspěšnosti při backtestingu.

Alexander, Carol. *Market Risk Analysis. Volume IV. Value-at-Risk Models*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2008. 449 s. ISBN 978-0-470-99788-8.

Alexander, Carol. *Market Risk Analysis. Volume II. Practical Financial Econometrics*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2008. 396 s. ISBN 978-0-470-99801-4.

Alexander, Carol. *Market Risk Analysis. Volume I. Quantitative Methods in Finance*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2008. 320 s. ISBN 978-0-470-99800-7.

Ambrož, Luděk. *Měření rizika ve financích*. I. vydání Praha: Ekopress, s.r.o., 2011. 232 s. ISBN 978-80-86929-76-7.

Arlt, Josef; Arltová, Markéta. *Ekonomické časové řady*. 1. vydání Praha: Professional Publishing, 2009. 290 s. ISBN 978-80-86946-85-6.

Basel Committee on Banking Supervision. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*. Basel: Bank for International Settlements, 2005. ISBN web: 92-9197-669-5. [Online]. Dostupný z www: <http://www.bis.org/publ/bcbs118.htm>

Cipra, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. 1. vydání Praha: Ekopress, s.r.o., 2008. 538 s. ISBN 978-80-86929-43-9.

Coleman, Thomas Sedgwick. *Quantitative Risk Management: a Practical Guide to Financial Risk*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2012. 558 s. ISBN 978-1-118-02658-8.

Crouhy, Michel; Galai, Dan; Mark, Robert. *The Essentials of Risk Management*. New York: McGraw-Hill, 2005. 414 s. ISBN 0-07-142966-2.

Damodaran, Aswath. *Strategic Risk Taking: a Framework for Risk Management*. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2008. 388 s. ISBN 978-0-13-199048-7.

Haochen, Guo. *Estimating Volatilities by the GARCH and the EWMA model of PetroChina and TCL in the Stock Exchange Market of China*. Ostrava: 6th International Scientific Conference Managing and Modelling of Financial Risks, 2012. [Online]. Dostupný z www: www.ekf.vsb.cz/export/sites/ekf/rmfr/.content/galerie-dokumentu/2014/sbornik/Guo.Haochen.pdf

Hindls, Richard; Hronová, Stanislava; Seger, Jan; Fischer, Jakub. *Statistika pro ekonomy*. Osmé vydání Praha: Professional Publishing, 2007. 415 s. ISBN 978-80-86946-43-6.

Hubbert, Simon. *Essential mathematics for Market Risk Management*. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2012. 335 s. ISBN 978-1-119-97952-4.

Hull, John C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Ninth edition, Pearson, 2015. 869 s. ISBN-10: 0-13-345631-5.

Hull, John C. *Risk Management and Financial Institutions*. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2007. 500 s. ISBN 0-13-239790-0.

Hull, John; White, Alan. *Incorporating Volatility updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk*. University of Toronto: Journal of Risk, 1998. [Online]. Dostupný z www: <http://smartquant.com/references/VaR/var32.pdf>

Huynh, Huu Tue; Lai, Van Son; Soumaré, Issouf. *Stochastic Simulation and Applications in Finance with MATLAB Programs*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2008. 338 s. ISBN 978-0-470-72538-2.

Jorion, Philippe. *Value at Risk: the New Benchmark for Managing Financial Risk*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2000. 544 s. ISBN 0-07-135502-2.

J.P.Morgan. *RiskMetrics™—Technical Document*. Fourth Edition, New York: Morgan Guaranty Trust Company of New York, 1996. 284 s. [Online]. Dostupný z www: www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ae2-3449d5c7e95a

Mina, Jorge; Xiao, Jerry Yi. *Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard*. New York: RiskMetrics Group, Inc., 2001. 111 s. [Online]. Dostupný z www: www.msci.com/resources/research/rmg/RiskMetricsJournal/rrmfinal.pdf

Mun, Johnatan. *Modeling Risk: Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, and Optimization Techniques*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2006. 605 s. ISBN 978-0-471-78900-0.

Pachamanova, Dessislava A.; Fabozzi, Frank J. *Simulation and Optimization in Finance: Modeling with MATLAB, @RISK, or VBA*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2010. 766 s. ISBN 978-0-470-37189-3.

Penza, Pietro; Bansal, Vipul K. *Measuring Market Risk with Value at Risk*. John Wiley & Sons, Inc., 2000. 293 s. ISBN 0-471-39313-4.

Špaček, Miroslav. *Pravděpodobnostní přístupy k analýze rizik investičních projektů a jejich využití v praxi*. První vydání Plzeň: NAVA, 2014. 168 s. ISBN 978-80-7211-472-6.

Ziegler, Kamil; Žalman, Lubor; Šperl, Jiří; Mrkva, Jaromír; Černý, Luboš; Lukáš, Vladimír; Nidetzky, Tomáš. *Finanční řízení bank*. 1. vydání Praha: Seřira, 1997. 341 s. ISBN 80-902243-1-8.

<http://www.value-at-risk.net/backtesting-coverage-tests/>

<http://finance.yahoo.com/>

<http://www.wikiskripta.eu/>

<http://cit.vfu.cz/>

<https://wikisofia.cz>

<http://www.mathworks.com/>

<http://www.fool.com>