VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

FAKULTA INFORMATIKY A STATISTIKY



Využití modelů úrokových měr při řízení úrokového rizika v prostředí českého finančního trhu

Disertační práce

Doktorandka: Mgr. Dana Číchová Králová

Školitel: prof. Ing. Josef Arlt, CSc.

Studijní program: Kvantitativní metody v ekonomice

Studijní obor: Statistika

Praha, říjen 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpala.

V Praze dne .....

V první řadě bych ráda poděkovala svému školiteli prof. Ing. Josefu Arltovi, CSc. za vedení disertační práce, za trpělivé konzultace a za cenné připomínky k textu. Děkuji také všem ostatním pedagogům, kteří svými radami a nápady přispěli ke zlepšení této práce.

Dále mé poděkování patří manželovi, který rošířil můj rozhled v oblasti finančních trhů díky svým zkušenostem z praxe. A také velmi děkuji své rodině za jejich podporu a důvěru během celého mého studia.

Obsah

Seznam zkratek **10**

Úvod **11**

1 Úvod do modelování úrokových měr **16**
1.1 Základní pojmy finančních trhů 17
1.2 Využití modelů úrokových měr 22
1.3 Přístupy k modelování dynamiky úrokových měr 23
1.3.1 Modely okamžité úrokové míry – jednofaktorové 25
1.3.2 Modely okamžité úrokové míry – vícefaktorové 26
1.3.3 Heathův-Jarrowův-Mortonův přístup 26
1.3.4 Tržní modely 27
1.3.5 Makroekonomické modely 28
1.3.6 Multikřivkové modely 29

2 Vybrané modely úrokových měr **30**
2.1 Coxův-Ingersollův-Rossův model 31
2.1.1 Diskretizace 32
2.1.2 Odhad parametrů procesu okamžité úrokové míry 33
2.1.3 Cena bezkuponového dluhopisu a odhad tržní ceny rizika 34
2.1.4 Simulace 36
2.2 Obecný parametrický model 36
2.2.1 Rozšíření na výnosovou křivku 37
2.2.2 Redukce dimenze vstupních dat 37
2.2.3 Odhad parametrů 38
2.2.4 Simulace 41
2.3 Braceův-Gatarekův-Musielův model 41
2.3.1 Odhad parametrů 42
2.3.2 Aproximace forwardových sazeb 44
2.3.3 Binomický strom 46
2.3.4 Simulace 49

3 Aplikace modelů úrokových měr **50**
3.1 Data . . . 53
3.2 Změna charakteru trhu . . . 55
3.3 Volatilita trhů . . . 61
3.4 Coxův-Ingersollův-Rossův model . . . 65
3.5 Obecný parametrický model . . . 72
3.6 Braceův-Gatarekův-Musielův model . . . 79
3.6.1 Data . . . 79
3.6.2 Aplikace v českém prostředí . . . 80
3.6.3 Simulace . . . 84
3.7 Predikční schopnost . . . 96
3.7.1 Systém kritérií . . . 97
3.7.2 Statistické testy . . . 117

4 Kreditní přirážka **124**
4.1 Modelování výnosové křivky státních dluhopisů . . . 125
4.1.1 Svenssonův model . . . 126
4.1.2 Vztahy mezi forwardovými sazbami a výnosy do splatnosti . . . 128
4.1.3 Odhad parametrů . . . 129
4.2 Praktická část . . . 131
4.2.1 Vstupní data . . . 131
4.2.2 Krátký konec výnosové křivky . . . 132
4.2.3 Alikvotní úrokový výnos a typ úročení . . . 134
4.2.4 Aplikace . . . 134

Závěr **140**

Literatura **145**

Příloha **153**

Název práce: Využití modelů úrokových měr při řízení úrokového rizika v prostředí českého finančního trhu
Autorka: Mgr. Dana Cíchová Králová
Katedra: Katedra statistiky a pravděpodobnosti
Školitel: prof. Ing. Josef Arlt, CSc.

Abstrakt: Hlavním cílem práce je zejména nalezení vhodného přístupu k modelování úrokového rizika v prostředí českého finančního trhu při různých situacích na finančních trzích. Analyzována jsou tři zcela odlišná období, která jsou charakteristická různou mírou ohodnocení likviditního a kreditního rizika, rozdílnými vztahy mezi finančními veličinami a účastníky trhu a rozdílnou regulací trhu. Konkrétně se jedná o období před globální finanční krizí, období finanční krize a období po odeznění globální finanční krize a uklidnění následné dluhové krize v eurozóně.

V rámci tohoto cíle je stěžejní aplikace modelu BGM v prostředí českého trhu. Použití modelu BGM pro účely predikce dynamiky výnosové křivky není běžné, neboť primární použití tohoto modelu je oceňování finančních derivátů při zajištění neexistence arbitráže a jeho aplikace je navíc relativně náročná. Přesto v této práci model BGM využiji pro získání predikcí pravděpodobnostních rozdělení úrokových sazeb v prostředí české trhu a trhu eurozóny, protože jeho komplexnost, přímé modelování výnosové křivky na základě tržních sazeb a hlavně možnost odhadu parametrů založená na aktuálních kotacích volatilit swapcí mohou vést k výraznému zkvalitnění predikcí, což se v této práci potvrdilo. Převážně v období bezprecedentního monetárního uvolňování a zvýšených zásahů centrálních bank a ostatních regulátorů do činnosti finančních trhů, ke kterým dochází po finanční krizi, je využití tržních kotací volatilit swapcí výhodné, protože odráží aktuální očekávání trhu se započítáním očekávaných budoucích zásahů do fungování finančních trhů.

Vzhledem k tomu, že v důsledku nerozvinutosti českého finančního trhu neexistují tržní kotace volatilit korunových swapcí, navrhuji jejich aproximace na základě kotací volatilit eurových swapcí s využitím volatilit forwardových korunových i eurových sazeb, díky čemuž jsou v získaných predikcích dynamiky české výnosové křivky započteny aktuální očekávání trhu. Není mi známo, že by nějaký jiný autor dosud publikoval obdobnou aplikace modelu BGM v prostředí českého finančního trhu.

V této práci dále konstruuji predikce dynamiky české a eurové výnosové křivky peněžního trhu pomocí modelů CIR a GP jakožto zástupců různých typů modelů úrokových měr.

Pro posouzení predikční schopnosti jednotlivých modelů a vhodnosti jejich použití v prostředí českého trhu během různých situacích na finančním trhu navrhuji ucelený systém tří kritérií založený na porovnání predikcí se skutečností. Z této analýzy predikční schopnosti vyplývá, že na základě modelu BGM lze získat predikce dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu s vysokou predikční schopností a nejlepší kvalitou ve srovnání s ostatními analyzovanými modely, nicméně i model GP poskytuje relativně kvalitní predikce. Naopak predikce učiněné na základě modelu CIR jakožto

zástupce modelů okamžité úrokové míry při popsání skutečnosti zcela selhaly. V situaci, kdy ekonomika umožňuje záporné sazby a zároveň existuje signifikantní pravděpodobnost jejich zavedení, doporučuji provedení predikcí dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu pomocí modelu GP, který záporné sazby připouští. Součástí této analýzy je i provedení statistického testu predikční schopnosti jednotlivých modelů a informace o dalších možných statistických testech pro zhodnocení kvality modelů. Při aplikaci Berkowitzova testu byla u všech zkoumaných modelů zamítnuta hypotéza o tom, že výsledné predikce přesně popisují skutečnost. Tento fakt je však při aplikaci statistických testů na reálná data běžný i při použití relativně dobrého modelu především z důvodu obtížného splnění podmínek testů v reálném světě. Takovouto analýzu predikční schopnosti vybraných modelů úrokových měr a navíc v prostředí českého finančního trhu jsem doposud v žádných jiných publikacích nezaznamenala.

Posledním cílem této práce je navržení vhodného přístupu k predikci dynamiky rizikové přirážky českých státních dluhopisů, kterou definuji jako rozdíl mezi výnosem státních dluhopisů a fixní sazbou CZK IRS totožné délky. Takto definovaný ukazatel kreditního rizika České republiky modeluji pomocí modelu GP. Pro získání časových řad rizikové přirážky potřebných k odhadu parametrů modelu GP odhadnu nejdříve výnosové křivky českých státních dluhopisů pomocí Svenssonova modelu pro každý obchodní den od roku 2005. Z výsledných simulací je patrné, že model GP relativně dobře predikoval skutečný vývoj rizikových přirážek všech analyzovaných splatností. Navržený postup je vhodný pro modelování kreditního rizika České republiky na základě využití informací z finančních trhů. S takovýmto přístupem k modelování rizikové přirážky státních dluhopisů a navíc v českém prostředí jsem se doposud v žádné jiné publikaci nesetkala.

Klíčová slova: BGM model, CIR model, obecný parametrický model, finanční trhy, volatilita, GARCH model, úrokové riziko, kreditní přirážka

Title: Use of Interest Rate Models for Interest Rate Risk Management in the Czech Financial Market Environment
Author: Mgr. Dana Číchová Králová
Department: Department of Statistics and Probability
Supervisor: prof. Ing. Josef Arlt, CSc.

Abstract: The main goal of this thesis is to suggest an appropriate approach to interest rate risk modeling in the Czech financial market environment in various situations. Three distinct periods are analyzed. These periods, which are the period before the global financial crisis, period during the financial crisis and in the aftermath of the global financial crisis and calming subsequent debt crisis in the eurozone, are characterized by different evaluation of liquidity and credit risk, different relationship between financial variables and market participants and different degree of market regulations.

Within this goal, an application of the BGM model in the Czech financial market environment is crucial. Use of the BGM model for the purpose of predicting a dynamics of a yield curve is not very common. This is firstly due to the fact that primary use of this model is a valuation of interest rate derivatives while ensuring the absence of arbitrage and secondly its application is relatively difficult. Nevertheless, I apply the BGM model to obtain predictions of the probability distributions of interest rates in the Czech and eurozone market environment, because its complexity, direct modeling of a yield curve based on market rates and especially a possibility of parameter estimation based on current swaptions volatilities quotations may lead to a significant improvement of predictions. This improvement was also confirmed in this thesis. Use of swaptions volatilities market quotations is especially useful in the period of unprecedented monetary easing and increased number of central banks and other regulators interventions into financial markets that occur after the financial crisis, because it reflects current market expectations which also include future interventions.

As a consequence of underdevelopment of the Czech financial market there are no market quotations of Czech koruna denominated swaptions volatilities. I suggest their approximations based on quotations of euro denominated swaptions volatilities and also using volatilities of koruna and euro forward rates. Use of this approach ensures that predictions of the Czech yield curve dynamics contain current market expectations. To my knowledge, any other author has not presented similar application of the BGM model in the Czech financial market environment.

In this thesis I further predict a Czech and Euro area money market yield curve dynamics using the CIR and the GP models as representatives of various types of interest rates models to compare these predictions with BGM predictions.

I suggest a comprehensive system of three criteria, based on comparison of predictions with reality, to describe a predictive power of selected models and an appropriateness of their use in the Czech market environment during different situations in the market. This analysis shows that predictions of the Czech money market yield curve dynamics based on the BGM model demonstrate high predictive power and the best

quality in comparison with other models. GP model also produces relatively good quality predictions. Conversely, predictions based on the CIR model as a representative of short rate model family completely failed when describing reality. In a situation when the economy allows negative rates and there is simultaneously a significant likelihood of their implementation, I recommend to obtain predictions of Czech money market yield curve dynamics using GP model which allows existence of negative interest rates. This analysis also contains a statistical test for validating the predictive power of each model and information on other tests. Berkowitz test rejects a hypothesis of accurate predictions for each model. However, this fact is common in real data testing even when using relatively good model. This fact is especially caused by difficult fulfilment of test conditions in real world. To my knowledge, such an analysis of the predictive power of selected interest rate models moreover in the Czech financial market environment has not been published yet.

The last goal of this thesis is to suggest an appropriate approach to obtaining predictions of Czech government bonds risk premium dynamics. I define this risk premium as a difference between government bond yields and fixed rate of CZK IRS with the same length. I apply the GP model to describe the dynamics of this indicator of the Czech Republic credit risk. In order to obtain a time series of the risk premium which are necessary for estimation of GP model parameters I firstly estimate yield curves of Czech government bonds using Svensson model for each trading day since 2005. Resulting simulations of risk premium show that the GP model predicts the real development of risk premiums of all maturities relatively well. Hence, the proposed approach is suitable for modeling of Czech Republic credit risk based on the use of information extracted from financial markets. I have not registered proposed approach to risk premium modeling moreover in the Czech financial market environment in other publications.

Keywords: BGM model, CIR model, general parametric model, financial markets, volatility, GARCH model, interest rate risk, credit premium

Seznam zkratek

ARCH	AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity
ATM	At The Money (při penězích)
AÚV	Alikvotní Úrokový Výnos
b.b.	Bazické Body
BGM	Braceův-Gatarekův-Musielův model
CIR	Coxův-Ingersollův-Rossův model
CZEONIA	CZEch OverNight Index Average
CZK	česká koruna
ČNB	Česká Národní Banka
ECB	Evropská Centrální Banka
EMIR	European Market Infrastructure Regulation
EONIA	Euro OverNight Index Average
EUR	Euro
EURIBOR	EURo InterBank Offered Rate
GARCH	Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity
GO-GARCH	Generalized Orthogonal GARCH
GP	General Parametric model (obecný parametrický model)
HJM	Heathův-Jarrowův-Mortonův přístup
IRS	Interest Rate Swap (jednoduchý úrokový swap)
ITM	In The Money (v penězích)
M	Month (měsíc)
MTS	Mercato Telematico Secondario
OIS	Overnight Indexed Swap
OTM	Of The Money (mimo peníze)
p.b.	Procentní Body
PDE	Partial Differential Equation (parciální diferenciální rovnice)
PRIBOR	PRague InterBank Offered Rate
USD	United States Dollar
VaR	Value at Risk
Y	Year (rok)

Úvod

Disertační práce se zaměřuje na aspekty řízení úrokového rizika v České republice. Hlavním cílem práce je zejména nalezení vhodného přístupu k modelování úrokových měr v prostředí českého finančního trhu při různých situacích na finančních trzích. Analyzována budou tři zcela odlišná období, která jsou charakteristická různou mírou ohodnocení likviditního a kreditního rizika, rozdílnými vztahy mezi finančními veličinami a účastníky trhu a rozdílnou regulací trhu. Konkrétně se jedná o období před globální finanční krizí, období finanční krize a období po odeznění globální finanční krize a uklidnění následné dluhové krize v eurozóně.

Důležitou částí hlavního cíle bude aplikace Braceova-Gatarekova-Musielova modelu (dále zkráceně BGM model) v prostředí českého finančního trhu a následné získání predikcí dynamiky české výnosové křivky peněžního trhu. Model BGM byl primárně zkonstruován pro účely oceňování finančních derivátů navázaných na úrokovou míru v ekonomikách s rozvinutými a likvidními finančními trhy. Jeho použití pro účely řízení úrokového rizika není v praxi pro jeho komplikovanost příliš obvyklé, nicméně dle mého názoru je možné a díky informacím obsaženým v aktuálních tržních kotacích volatilit swapcí může významně zvýšit přesnost predikcí. Následným cílem této práce je navržení vhodného přístupu k získání predikcí dynamiky rizikových přirážek českých státních dluhopisů, díky čemuž lze popsat a predikovat pravděpodobnostní rozdělení takto definovaného ukazatele kreditního rizika České republiky.

Téma predikce úrokových sazeb je velmi aktuální a jeho důležitost roste společně s prudkým nárůstem likvidity po globální finanční krizi, kdy centrální banky prakticky všech vyspělých států bezprecedentně uvolnily svoji měnovou politiku. Díky nárůstu likvidity se výrazným způsobem navýšily prostředky spravované v různých investičních nebo hedgeových fondech zaměřených na úrokové instrumenty, zvýšilo se zadlužení států a finančních i nefinančních institucí a obecně se zvýšil stav peněz v ekonomice, jejichž cena je dána právě úrokovou mírou. Ačkoliv na téma predikce úrokových sazeb již bylo publikováno velké množství odborných článků a studií, nepodařilo se sjednotit přístup k této problematice a navíc se často zdá, že schopnost predikovat budoucí úrovně úrokových měr není o moc větší než na počátku výzkumu. Přesto je však v praxi potřeba úrokové riziko nějakým způsobem kvantifikovat a řídit, protože v opačném případě jsou vysoce pravděpodobné vysoké ztráty nebo krach.

Cílem pro dluhového manažera je v případě řízení úrokového rizika dluhového portfolia především popsání dynamiky výnosových křivek a učinění její předpovědi. Na

základě této předpovědi pak lze například alokovat kapitál potřebný k pokrytí výdajů spojených s dluhovým portfoliem nebo rebalancovat toto portfolio tak, aby se snížila jeho rizikovost. Ideální pro tyto účely je konstrukce předpovědi celého pravděpodobnostního rozdělení jednotlivých úrokových sazeb pro libovolný časový okamžik, ale i jejich vývoj v čase. V této práci získám předpovědi pravděpodobnostních rozdělení pomocí simulací příslušných sazeb.

Pro dluhového manažera není důležité predikovat pouze obvyklé ukazatele jako například střední hodnotu nebo 1% a 99% kvantil, ale je stěžejní pochopit komplexní chování jednotlivých úrokových sazeb. Je například důležité porozumět i chování sazeb nad 99% a pod 1% kvantilem, kdy mohou nastat situace, že se simulace mimo interval daný těmito kvantily drží poblíž těchto hranic nebo naopak tyto simulace nabývají relativně extrémních hodnot vzdálených od těchto kvantilů. Takováto analýza vypovídá o těžkých koncích predikovaných rozdělení a pravděpodobnosti výskytu extrémních hodnot. Predikce celého pravděpodobnostního rozdělení dále umožňuje stanovení libovolného kvantilu, což je pro dluhového manažera taktéž cenná informace. Zajímavou informací může být například i to, že simulace mají tendenci nabývat extrémních hodnot v nějakém časovém intervalu v rámci simulačního horizontu.

V této práci využiji pro získání predikcí pravděpodobnostních rozdělení úrokových sazeb dva modely úrokových měr, které byly primárně zkonstruovány pro účely oceňování finančních instrumentů navázaných na úrokovou míru. Odlišné využití modelů úrokových měr je nutné zdůraznit, protože v opačném případě by práce musela být postavena jinak a zabývat se převážně tématem zamezení existence arbitráže. V případě využití modelů úrokových měr pro účely řízení úrokových rizik je potřeba především správně popsat budoucí dynamiku úrokových sazeb, a tedy i příslušné výnosové křivky, více než zamezit existenci arbitráže.

Problematické se jeví zejména konstrukce predikcí v období finanční krize a v období po této krizi. V období po finanční krizi dochází více než kdy v minulosti k výrazné monetární expanzi a k exogenním zásahům do fungování finančních trhů ve formě politických rozhodnutí a regulatorních opatření. V takovémto prostředí je použití modelů úrokových měr velmi obtížné, neboť budoucí vývoj úrokových sazeb často závisí na rozhodnutí centrální banky nebo jiné autority a spíše než predikce založené na aktuální nebo historické situaci na finančních trzích mají naději na úspěch predikce chování jednotlivých autorit. Navržená aplikace modelu BGM částečně řeší tento problém, když konstruuje predikce na základě aktuálních tržních kotací volatilit swapcí, které v sobě zahrnují aktuální očekávání trhu ohledně jeho budoucího směřování a ohledně více či méně pravděpodobných exogenních zásahů do jeho fungování. Využití swapcí je obzvláště výhodné díky tomu, že jejich trh je jeden z nejlikvidnějších v rámci trhů úrokových derivátů. Ve srovnání například s floory a capy jsou swapce likvidnější v průměru až 6krát, díky čemuž by měla být informace obsažená v jejich kotacích kvalitnější. V důsledku nedostatečné rozvinutosti českého trhu nejsou k dispozici tržní kotace volatilit swapcí, a proto je nutné nalézt jejich aproximaci. V této práci dále učiním predikce dynamiky výnosové křivky peněžního trhu pomocí obecného parametrického modelu

(General Parametric model, zkráceně GP model), které jsou založeny na historických údajích, a pomocí Coxova-Ingersollova-Rossova modelu (dále zkráceně CIR model), které jsou založeny na kombinaci historických a aktuálních údajů. Nevýhodou predikcí učiněných na základě historických dat je fakt, že nemohou okamžitě zareagovat na nové důležité události, avšak na druhou stranu by takovéto predikce měly být robustnější a nepřeceňovat okamžité nálady na finančních trzích, které nejsou podloženy reálným základem. Dílčím cílem této práce je i odpověď na otázku, zda mají v případě České republiky a eurozóny vyšší predikční schopnost predikce založené na základě historických událostí nebo aktuálních očekáváních.

Tato práce se zabývá rovněž modelováním rizikových přirážek českých státních dluhopisů definovaných jako rozdíl mezi výnosem státních dluhopisů a fixní sazbou jednoduchého úrokového swapu se stejnou dobou do splatnosti. Predikce dynamiky této rizikové přirážky poměrně úzce souvisí s predikcemi dynamiky výnosových křivek peněžního trhu pomocí modelů úrokových měr, protože lze předpokládat, že tyto rizikové přirážky vykazují stejně jako úrokové míry vlastnost návratu ke své střední hodnotě, avšak vzhledem k jejich neobchodovatelnému charakteru není potřeba zaručit neexistenci arbitráže. V rámci získání historické časové řady rizikových přirážek je potřeba modelovat výnosovou křivku státních dluhopisů pro každý obchodní den v uvažovaném období. K tomuto účelu využiji Svenssonův model. Predikce pravděpodobnostních rozdělení rizikových přirážek státních dluhopisů jsou jedním z důležitých ukazatelů budoucího vývoje kreditního rizika daného státu, přičemž v kombinaci s predikcemi výnosové křivky peněžního trhu mohou být využity i při predikci dynamiky výnosové křivky státních dluhopisů.

Tato práce je organizována následovně. V kapitole první stručně popíši vybrané pojmy z finančních trhů, které budou využívány v následujících kapitolách. V této kapitole zároveň učiním úvod do problematiky modelování úrokových měr, v rámci něhož představím základní typy modelů úrokových měr včetně jejich charakteristiky a oblasti využití.

V kapitole druhé se zaměřím na popis modelu CIR, GP a BGM jakožto tří zcela odlišných zástupců modelů úrokových měr, které v případě modelu CIR a BGM ovlivnily další vývoj ve směřování výzkumu modelování dynamiky úrokových měr. Zatímco modely CIR a BGM obsahují omezení na existenci arbitráže, model GP toto omezení neobsahuje. Model CIR popisuje dynamiku výnosové křivky na základě nepozorovatelné okamžité úrokové míry, modely BGM a GP modelují dynamiku výnosové křivky přímo na základě pozorovaných sazeb.

Můj osobní přínos k modelování úrokových měr začíná třetí kapitolou, která tvoří zároveň stěžejní část této práce. Na počátku této kapitoly stručně popíši důležitou proměnu charakteru finančních trhů v eurozóně a České republice po začátku finanční krize, kdy došlo k redefinici vztahů platných na těchto trzích. V rámci popisu změn charakteru finančních trhů se dále zaměřím na analýzu vývoje volatility výnosových křivek peněžního trhu pomocí modelu GARCH a taktéž pomocí vývoje tržních kotací volatilit swapcí. Zatímco popis volatility pomocí modelu GARCH je založen na histo-

rických pozorováních, kotace volatility swapcí reprezentují aktuální očekávání budoucí volatility úrokových sazeb.

V této kapitole dále zkonstruuji dvouleté predikce dynamiky výnosové křivky peněžního trhu v období před finanční krizí, během finanční krize a po odeznění finanční a dluhové krize pomocí modelů CIR, GP a BGM v prostředí eurozóny, tj. vyspělého finančního trhu, a v prostředí českého finančního trhu, který je stále relativně málo rozvinutý. I když je mým hlavním cílem modelovat dynamiku českých úrokových sazeb, je aplikace těchto modelů v prostředí eurozóny důležitá především z důvodu validace predikční schopnosti. Modely úrokových měr byly zkonstruovány pro použití na vyspělém a likvidním trhu a jejich případná horší predikční schopnost v prostředí českého trhu může být zapříčiněna právě jeho nedostatečnou rozvinutostí. Komplikace při aplikaci nastávají především u modelu BGM, kde je potřeba vyřešit problém chybějících volatilit swapcí v matici kotací a především problém úplné neexistence spolehlivých kotací volatilit swapcí v případě nerozvinutého českého trhu. V této práci navržený přístup k aplikaci modelu BGM v českém prostředí jsem doposud nezaznamenala v žádných publikacích jiných autorů.

V kapitole třetí taktéž navrhnu ucelený a relativně komplexní aparát pro posouzení predikční schopnosti jednotlivých modelů v prostředí českého trhu jakožto alternativu ke standardním statistickým testům. Analýzu predikční schopnosti provedu na základě predikcí pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých úrokových sazeb, kterých ve formě jednoletých simulací zkonstruuji přibližně 52 v každém uvažovaném období. Výsledné simulace poté porovnám se skutečným vývojem příslušné sazby a vyhodnotím pomocí systému tří různých kritérií kvalitu predikce. Tímto způsobem získám informace potřebné pro alternativní zhodnocení predikční schopnosti jednotlivých modelů a současně i informace potřebné pro důkladnější analýzu této schopnosti, jako je například rozlišení kvality predikcí v různých segmentech výnosové křivky nebo při různých situacích na trhu. V této kapitole taktéž provedu Berkowitzův test predikční schopnosti jednotlivých modelů a popíši další možné statistické testy hodnotící kvalitu modelů. Pokud je mi známo, takováto analýza predikční schopnosti vybraných modelů úrokových měr a navíc v prostředí českého finančního trhu dosud nebyla provedena.

Díky těmto analýzám bude možné odpovědět na dvě zajímavé otázky. První otázka zní: Lze modely CIR a BGM využít pro účely získání predikcí dynamiky úrokových sazeb a navíc v prostředí českého stále ještě nevyspělého finančního trhu, ačkoliv vznikly pro účely oceňování na rozvinutých finančních trzích? Druhá otázka zní: Je předpovědní schopnost modelu BGM oproti modelu GP případně o tolik lepší, aby se „vyplatila“ jeho aplikace i při její výrazně vyšší náročnosti? Připomínám, že model GP neobsahuje restrikci na existenci arbitráže, a proto lze primárně využít pouze pro účely predikcí.

V kapitole čtvrté stručně popíši Svenssonův model z teoretického a hlavně pak z praktického hlediska. Dále v této kapitole zkonstruuji predikce pravděpodobnostních rozdělení rizikových přirážek českých státních dluhopisů za využití modelu GP. Pomocí těchto predikcí lze na základě údajů z finančního trhu získat informaci o odhadu budoucího vývoje kreditního rizika České republiky a schopnosti dostát svým

závazkům. Pro získání rizikových přirážek nejprve použiji Svenssonův model pro modelování výnosové křivky českých státních dluhopisů, čímž získám výnosové křivky pro každý obchodní den od 1. července 2005. Aplikace Svenssonova modelu v českém prostředí není zcela triviální, když je nutné vyřešit několik zásadních problémů při odhadu parametrů. Od roku 2011 jsou pak výnosové křivky českých státních dluhopisů konstruovány na základě exekutivních kotací, což také považuji za přínosné, neboť jsem se s takto uceleným a přesným popisem výnosů českých státních dluhopisů ve veřejně dostupných zdrojích zatím nesetkala. V této kapitole však slouží konstrukce výnosových křivek státních dluhopisů pouze jako pomocný výpočet potřebný pro získání rizikových přirážek, na základě kterých učiním predikci jejich dynamiky, což je cílem této práce. Stejně jako v případě analýzy predikční schopnosti mi není známo, že by takovéto modelování rizikové přirážky státních dluhopisů a navíc v českém prostředí bylo doposud publikováno.

Kromě odhadu modelu GARCH, který jsem vytvořila v programu EViews, jsem všechny ostatní výpočty a analýzy naprogramovala v softwaru Matlab, z něhož pochází taktéž většina grafů. Text této práce jsem vysázela v typografickém programu LaTeX.

Kapitola 1

Úvod do modelování úrokových měr

S jistou nadsázkou lze říci, že současné uspořádání západní civilizace je založeno na využívání úrokových sazeb. Okamžitá spotřeba s do budoucnosti odloženou platbou za tuto spotřebu neboli spotřeba na dluh je elementární pohon ekonomik všech vyspělých zemí světa. Úroková míra potom vyjadřuje hodnotu těchto dluhů a obecně peněz v čase. Je tedy zřejmé, že porozumění chování úrokových měr a jejich dynamice je velmi důležité. Přes veškerou snahu výzkumu v této oblasti dosud nedošlo ke sjednocení přístupu k modelování úrokových měr. Jedním z možných způsobů, který je v současnosti jak analytiky z praxe, tak akademiky patrně nejvíce používán, je popis dynamiky úrokových měr pomocí tak zvaných modelů úrokových měr. Ani zde však nepanuje shoda jaký model nebo alespoň jaký typ modelů je nejlepší a univerzálně využitelný.

Teorie modelů úrokových měr je založena na netriviálních oblastech matematiky, teorie pravděpodobnosti, statistiky, ekonometrie, financí a případně i makroekonomie jako jsou například teorie stochastických procesů, teorie míry, konstrukce a řešení parciálních diferenciálních rovnic (Partial Differential Equation, zkráceně PDE), teorie odhadu včetně neparametrického odhadu, optimalizační techniky, teorie arbitráže. Cílem této práce není poskytnout popis těchto teorií, i když jsou v práci využívány. Práce se tedy, pokud je to vhodné, odkáže na dle mého názoru nejvhodnější literaturu, kde lze načerpat znalosti k pochopení příslušného textu. Teorie stochastických procesů je velmi přehledně vysvětlena například v (Prášková a Lachout, 2012), (Prášková, 2007), (Karlin a Taylor, 1975) a (Karlin a Taylor, 1981), ve spojení s financemi pak v (Oksendal, 2003), (Shreve, 2004a) a (Shreve, 2004b). Teorie míry je dostatečně přehledně popsána v (Lukeš a Malý, 2002), teorie parciálních diferenciálních rovnic v (Doktor a kol., 1983) nebo v (Evans, 1998) a v (Evans, 2014), ve spojení s financemi pak v (Duffy, 2006). Pro tuto práci potřebné statistické a ekonometrické metody jsem čerpala z (Anděl, 2011), (Hebák a kol., 2007), (Arlt, 1999), (Hamilton, 1994), (Tsay, 2010), (Silvermann, 1986) a (McLachlan a Peel, 2000). Baxter a Rennie (1999) poměrně přívětivě vysvětlují aplikaci finanční matematiky v modelech úrokových měr. Teorie oceňování je velmi přehledně přesto však do poměrně velkého detailu popsána v (Pennacchi, 2008). Další velmi dobré publikace zabývající se úrokovými modely jsou (James a Webber, 2000), (Cairns, 2004),

(Joshi, 2008), (Brigo a Mercurio, 2001), (Rebonato, 2002), (Málek, 2005) nebo (Morini a Biancheti, 2013). Praktický avšak zároveň přívětivě teoretický popis finančních instrumentů a základů finanční matematiky lze nalézt v (Cipra, 2013) a v mezi finančními praktiky velmi oblíbeném (Hull, 2014).

1.1 Základní pojmy finančních trhů

Tato podkapitola stručně seznamuje s vybranými pojmy z finančních trhů, s nimiž se bude pracovat v následujících kapitolách. Pro hlubší výklad lze čerpat z (Cipra, 2013) a (Hull, 2014).

Časová struktura úrokových měr
Časová struktura úrokových měr představuje vztah mezi výší úrokové míry a dobou do splatnosti příslušného podkladového instrumentu. Pro konstrukci časové struktury úrokových měr je potřeba znát výši úrokové míry pro totožné nebo z finančního hlediska podobné typy podkladových instrumentů s různou dobou do splatnosti. Podkladovým instrumentem mohou být depozita, půjčky, instrumenty peněžního trhu, státní dluhopisy, korporátní dluhopisy, atd. Další podmínkou nutnou pro správné vyjádření časové struktury úrokových měr je výběr množiny instrumentů s různou dobou do splatnosti v rámci příslušného podkladového instrumentu, které jsou spojeny se stejným či podobným typem věřitele nebo dlužníka a stejnou měnou. Nelze tedy kombinovat například státní dluhopisy České republiky denominované v koruně se státními dluhopisy České republiky denominovanými v jiných měnách, dále pak korporátní dluhopisy s depozity nebo půjčky emitentů s různým ratingem. Časová struktura úrokových měr se též nazývá výnosová křivka. Tato práce se zaměřuje především na výnosovou křivku peněžního trhu a dále pak též na výnosovou křivku státních dluhopisů.

Výnosová křivka peněžního trhu je pro účely této práce tvořena kombinací úrokových sazeb typu ONIA, IBOR a sazeb fixních stran jednoduchých úrokových swapů s roční frekvencí plateb kuponů a s variabilně úročenou stranou navázanou na 6měsíční sazbu typu IBOR, pokud není uvedeno jinak. Mezibankovní sazby typu ONIA označují 1denní (overnight) splatnost, zatímco sazby typu IBOR nabývají doby do splatnosti od 1 týdne do 1 roku. V ČR se konkrétně jedná o sazby CZEONIA (CZEch OverNight Index Average) a PRIBOR (Prague InterBank Offered Rate), kde CZEONIA je konstruována jako vážený průměr úrokových sazeb všech nezajištěných 1denních depozit uložených referenčními bankami na mezibankovním trhu a PRIBOR je získán jako průměr sazeb, za které jsou referenční banky ochotné půjčit jiné referenční bance nezajištěný úvěr s příslušnou dobou do splatnosti. V eurozóně jsou tyto sazby označovány jako EONIA (Euro OverNight Index Average) a EURIBOR (Euro InterBank Offered Rate). Sazby EURIBOR představují referenční úrokové sazby pro mimoburzovní operace v eurozóně a jejich konstrukce je stejná jako konstrukce sazeb PRIBOR. Jednoduché úrokové swapy jsou kotovány se splatnostmi od 1 roku do 30 let.

Výnosovou křivku lze dále rozdělit podle charakteru úrokových plateb spojených s podkladovým instrumentem na parovou nebo bezkuponovou a dále podle data vypořádání obchodu s podkladovým instrumentem na spotovou nebo forwardovou. S výnosovou křivkou je taktéž spojená konvence úročení, která je u konkrétní křivky totožná pro všechny splatnosti.

Parová křivka
Parová křivka, nazývána též kuponová křivka, je výnosová křivka, jejíž podkladový instrument vyplácí během svého života pravidelné úrokové platby označované jako kupony. Stejně jako u následujících typů výnosových křivek je možné rozlišit parovou křivku peněžního trhu a parovou křivku dluhopisů.

Bezkuponová křivka
Bezkuponová křivka je základní křivkou finanční teorie a lze z ní deterministicky dopočítat např. forwardovou nebo parovou křivku. Bezkuponová křivka není většinou přímo pozorovatelná, protože na trhu neexistuje dostatek bezkuponových instrumentů se všemi splatnostmi. Státní pokladniční poukázky jsou bezkuponovými dluhopisy, avšak jejich doba do splatnosti je ohraničena jedním rokem. V prostředí ultranízkých a mnohdy i záporných výnosů státních dluhopisů v některých zemích se na trzích v těchto zemích začaly vyskytovat i bezkuponové státní dluhopisy se splatností delší než 1 rok, avšak zřídkakdy bývají delší než 5 let. Tyto dluhopisy jsou však stále brány jako doplněk ke standardním dluhopisům nesoucím pravidelný fixní nenulový úrok. Je proto nutné bezkuponovou křivku vytvořit z křivky parové.

Bezkuponová křivka bývá též v odborné literatuře nazývána spotová, avšak vzhledem k možné záměně s výnosovou křivkou s okamžitým datem vypořádání budu v této práci výhradně používat pojem bezkuponová křivka.

V textu se bude sazba bezkuponové křivky v čase t na období (t, T) značit $R(t, T)$, dále výraz $B(t, T)$ bude představovat diskontní faktor pro časový interval (t, T) a lze jej chápat také jako cenu bezrizikového bezkuponového dluhopisu v čase t, vyplácí-li tento bezkuponový dluhopis v čase T jednotkový nominál. Diskontní faktory $B(t, T)$ lze odvodit ze sazeb bezkuponové křivky $R(t, T)$ dle vztahů

$$B(t,T) = \frac{1}{[1 + R(t,T)(T-t)]} \tag{1.1}$$

pro situaci jednoduchého úročení (u křivky peněžního trhu pro $(T - t) \leq 1$) a

$$B(t,T) = \frac{1}{[1 + R(t,T)]^{(T-t)}} \tag{1.2}$$

pro situaci složeného úročení (u křivky peněžního trhu pro $(T - t) > 1$). Naopak sazby bezkuponové křivky $R(t, T)$ se z diskontních faktorů $B(t, T)$ odvodí dle

$$R(t,T) = \left[\frac{1}{B(t,T)} - 1\right](T-t)^{-1} \tag{1.3}$$

pro situaci jednoduchého úročení a

$$R(t,T) = \sqrt[(T-t)]{\frac{1}{B(t,T)}} - 1 \tag{1.4}$$

pro situaci složeného úročení.

Forwardová křivka
Forwardová křivka vyjadřuje vztah mezi výší úrokových sazeb a dobou do splatnosti podkladového instrumentu s datem vypořádání v nějakém budoucím okamžiku. Forwardovou křivku lze odvodit z bezkuponové křivky. Forwardovou úrokovou míru v čase t pro období (t', T) bude v textu představovat výraz $F(t, t', T)$.

Bootstrapping
Bootstrappingem se v této práci rozumí rekurzivní metoda odvození bezkuponové křivky z křivky parové. Detailnější vysvětlení metody obsahuje například (Cipra, 2003).

Opce
Opce je termínový kontrakt, kde má kupující právo, ale ne povinnost, uskutečnit ve sjednaném termínu příslušný obchod s podkladovým aktivem za předem sjednanou realizační cenu, zatímco prodávající se podřizuje rozhodnutí držitele opce. Při uzavření opce platí kupující prodávajícímu tzv. opční prémii. Zatímco forwardový nebo futures kontrakt[1] je spojen s povinností obou protistran uzavřít obchod, u opce tato povinnost u kupujícího neplatí. U forwardového a futures kontraktu taktéž při uzavření obchodu neprobíhá žádná platba, avšak u opce platí kupující v okamžiku jejího uzavření prodávajícímu opční prémii.

Finanční opce pokrývají víceméně všechna známá podkladová aktiva obchodovaná na finančních trzích, jako jsou například komodity, akcie, akciové nebo jiné indexy, měnové kurzy, úrokové sazby nebo dluhopisy. Opce však mohou být vypsány i na forwardové případně futures kontrakty nebo dokonce i na opce výše uvedených podkladových aktiv.

Opce lze rozdělit podle typu obchodu na call opce a put opce. Call opce poskytuje držiteli právo nákupu podkladového aktiva za realizační cenu (strike opce) ve stanoveném čase, zatímco put opce poskytuje svému držiteli právo na prodej podkladového aktiva za realizační cenu.

[1]Futures kontrakt je v podstatě burzou standardizovaný forwardový kontrakt. Zatímco forwardový kontrakt je uzavírán mimo burzu s kreditním rizikem protistrany, futures kontrakt tímto rizikem zatížen není, protože vypořádací centrum vypořádává zisky a ztráty jednotlivých protistran na jejich účty s denní frekvencí

Podle možnosti uplatnění opce lze opce dělit na opci evropského typu nebo též evropskou opci, která obsahuje pouze jednu možnost uplatnění v okamžiku její expirace, a opci amerického typu nebo též americkou opci, kterou lze uplatnit během celé platnosti kontraktu. Dále existuje ještě opce bermudského typu, kterou lze uplatnit pouze v předem definovaných okamžicích. Tento typ opce však patří mezi exotické opce a na burzách nebývá obchodován, protože její standardizace je obtížná.

Cenu opce výrazně ovlivňuje i aktuální tržní situace. Pokud je současná tržní cena podkladového aktiva taková, že by opci bylo smysluplné uplatnit, tj. vyšší než realizační cena u call opce a nižší než realizační cena u put opce, opce je nazývána v penězích neboli in the money (ITM). Pokud je současná tržní cena podkladového aktiva taková, že nedává smysl opci uplatnit, tj. současná tržní cena je nižší než realizační cena u call opce a vyšší než realizační cena u put opce, opce je nazývána mimo peníze neboli out of the money (OTM). Při totožné tržní ceně podkladového aktiva a realizační ceně je opce nazývána při penězích neboli at the money (ATM).

Swapce
Swapce je specifický typ opce, kde podkladovým aktivem je úrokový nebo měnový swap. Kupující swapce získává výměnou za opční prémii právo, ale nikoliv povinnost, vstoupit do předem definovaného swapu s prodávajícím swapce ke stanovenému budoucímu datu.

Swap
Swap představuje finanční derivát, při jehož sjednání se dvě protistrany dohodnou na budoucí směně finančních toků či aktiv. V této práci se budu zabývat pouze úrokovými swapy, kterých se týká směna úrokových plateb z dané nominální částky v totožné měně v budoucím období, přičemž pro každou stranu je tento úrok definován odlišně. Nejvíce používaný typ úrokového swapu je swap typu fix-float. Při uzavření tohoto swapu platí jedna protistrana obchodu předem stanovený fixní úrok, přičemž druhá protistrana obchodu platí úrok odvozený od nějaké referenční úrokové sazby (např. od sazby typu IBOR). V této práci se budu zabývat jednoduchými (plain vanilla) úrokovými swapy, dále jen IRS (Interest Rate Swap), není-li uvedeno jinak. IRS jsou typu fix-float se stejnou nominální hodnotou obou stran (noh) swapu, fixní strana swapu vyplácí úrok s roční frekvencí, zatímco floatová strana swapu vyplácí úrok navázaný na 6měsíční referenční sazbu typu IBOR bez přirážky dvakrát ročně s refixací dva dny před začátkem nového úrokového období. V posledních letech získávají na oblibě mezi účastníky trhu úrokové swapy, jejichž floatová strana je úročena s denní frekvencí pomocí referenční sazby typu ONIA. V České republice však zatím nejsou tyto swapy, které se též nazývají OIS (Overnight Indexed Swap), příliš používané, díky čemuž neexistují smysluplné časové řady kotací sazeb těchto swapů na českou korunu.

Typů úrokových swapů existuje na trhu celá řada. Příkladem lze uvést například swapy typu fix-fix, float-float, swapy s různou frekvencí úročení jednotlivých (stran) swapů, swapy s různým obdobím refixace referenční sazby, swapy s různou nominální hodnotou jednotlivých stran, amortizované swapy, atd.

Kromě úrokových swapů existují měnové swapy, devizové swapy, asset swapy, komoditní swapy, atd.

Cap
Cap představuje opční instrument na úrokovou míru. Prodávající zde má závazek plnit rozdíl mezi aktuální a realizační úrokovou sazbou v případě požádání kupujícím. Jako u všech opčních instrumentů zaplatí kupující za právo požadovat toto plnění prodávajícímu prémii. V praxi požaduje kupující plnění pouze v případě, je-li aktuální úroková sazba vyšší než realizační sazba. V jiném případě by byl rozdíl sazeb, jenž má prodávající zaplatit, záporný a plnil by kupující, což nedává smysl. Realizační sazba úrokového capu tedy představuje pro kupujícího capu úrokový strop, nad který za něj přebírá plnění prodávající capu. V rámci řízení úrokového rizika bývá úrokový cap používán jako pojištění proti příliš vysokým úrokovým sazbám, které jsou spojeny s variabilně úročeným dluhem kupujícího.

Úrokový cap se skládá z množiny capletů, které se vztahují vždy pouze k jednomu konkrétnímu datu, které je nejčastěji totožné s datem výplaty úrokové platby.

Floor
Floor je obdobně jako cap opční instrument na úrokovou míru. Prodávající úrokového flooru přijímá závazek plnit rozdíl mezi realizační a aktuální úrokovou sazbou v případě požádání kupujícím. Za právo požadovat toto plněni zaplatí kupující prodávajícímu prémii. V praxi požaduje kupující plnění pouze, je-li aktuální úroková sazba nižší než realizační sazba. Úrokový floor funguje opačně než úrokový cap a jeho realizační sazba představuje pro kupujícího úrokové dno, tj. sazbu kterou obdrží i v případě, pokud aktuální podkladová úroková sazba poklesne pod tuto hranici. V tomto případě mu plnění doplatí prodávající flooru. V rámci řízení úrokového rizika bývá úrokový floor používán jako pojištění proti příliš nízkým úrokovým sazbám, které jsou spojeny s variabilně úročenými aktivy kupujícího.

Úrokový floor se skládá z množiny floorletů, které se vztahují podobně jako caplety vždy pouze k jednomu konkrétnímu datu, které je nejčastěji totožné s datem obdržení úrokové platby.

Wienerův proces
Wienerův proces $\{W(t), t \geq 0\}$ je normální náhodný proces s nezávislými přírůstky, který podle definice z (Prášková, 2007) splňuje následující vlastnosti:

- $W(0) = 0$ skoro jistě a $\{W(t), t \geq 0\}$ má spojité trajektorie.
- Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ jsou přírůstky $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2)$, …, $W(t_m) - W(t_{m-1})$ nezávislé náhodné veličiny.
- Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t < s$ mají přírůstky $W(s) - W(t)$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2(s - t)$, kde σ^2 je kladná

konstanta. Speciálně, pro každé $t \geq 0$ je

$$\mathrm{E}[W(t)] = 0 \qquad \text{a} \qquad \mathrm{var}[W(t)] = \sigma^2 t. \tag{1.5}$$

Normální a Blackova volatilita
U výše popsaných finančních derivátů (například swapů, swapcí, capletů) se lze setkat s normální nebo s Blackovou volatilitou, jejichž odlišnost bude nyní stručně přiblížena. Důkladnější vysvětlení nabízí například (Brigo a Mercurio, 2001). Nechť $S(t)$ značí sazbu daného instrumentu v čase t, potom normální volatilita σ_n je určena vztahem

$$dS(t) = \sigma_n dW(t). \tag{1.6}$$

Normální volatilita je vyjádřena absolutně, tudíž nelze mezi sebou porovnávat normální volatility instrumentů různých splatností. Blackova (log-normální) volatilita σ_b je dána vztahem

$$dS(t) = \sigma_b S(t) dW(t). \tag{1.7}$$

Blackova volatilita je vyjádřena relativně, z čehož plyne, že je zde na rozdíl od předchozí situace smysluplné volatility mezi sebou porovnávat. Jak převést normální volatilitu na Blackovu volatilitu a naopak je popsáno v (Hagan, 2011).

1.2 Využití modelů úrokových měr

Nejdůležitější motivací pro vznik modelů úrokových měr byla potřeba porozumění dynamice úrokových měr pro potřeby ocenění derivátů úrokové míry. Modely úrokových měr však naleznou uplatnění ve všech oblastech finančního a ekonomického světa, kde se vyskytuje úroková míra. Hlavní oblasti využití modelů úrokových měr představuje:

- **Oceňování** – V oblasti oceňovaní úrokových derivátů je použití modelů úrokových měr zcela dominantní a je jen stěží představitelné, že by se obchodníci nebo analytici při stanovení ceny derivátu neřídili cenou získanou z modelu. Tato cena však musí být samozřejmě získána za správné aplikace modelu především s důrazem na zamezení existence arbitráže.

- **Zajištění** – Citlivost ceny na změnu úrokové míry je nejčastěji spojována s pojmem durace finančního instrumentu nebo portfolia, více lze nalézt v (Cipra, 2005), což je však pouze jednorozměrné měření této citlivosti. Ve skutečnosti dochází k tomu, že cena finančního instrumentu nebo celého portfolia je ovlivňována změnami celé výnosové křivky a ne pouze jednoho bodu. Z tohoto důvodu poskytují modely úrokových měr výrazně přesnější a reálnější měření citlivosti ceny v závislosti na změně úrokových měr. Model použitý pro zajištění musí být schopen zachytit pohyby podkladové výnosové křivky v budoucnosti.

- **Řízení úrokových nákladů a příjmů** – V oblasti správy portfolií úrokových instrumentů se využití modelů úrokových měr nabízí při konstrukci ukazatelů typu náklady v riziku (Cost at Risk). Pokud nejsou tyto úrokové instrumenty určeny k obchodování a jsou drženy do splatnosti v případě dluhopisů nebo do expirace v případě úrokových derivátů, není většinou vývoj ceny těchto instrumentů příliš podstatný. Zásadní je však kvantifikace možných nákladů či příjmů spojených s takovýmto portfoliem, tj. stanovení pravděpodobností, že úrokové příjmy či náklady za určitý časový interval přesáhnou určitou mez nebo jí naopak nedosáhnou. Metoda Cost at Risk je podobná známější metodě Value at Risk (dále také VaR), avšak na rozdíl od ní se nezabývá rizikem změny ceny portfolia, ale rizikem přílišných nákladů spojených s portfoliem. Dobrý úvod do metodologie VaR je obsažen např. v (Holton, 2003). Za použití modelů úrokových měr lze zkonstruovat predikci pravděpodobnostního rozdělení úrokových nákladů spojených s portfoliem za libovolný časový interval k libovolnému budoucímu časovému okamžiku. Z tohoto rozdělení je pak možné získat predikci očekávaných úrokových nákladů stejně jako libovolné kvantily. U úrokových modelů použitých pro účely řízení úrokových nákladů a příjmů není zásadní, aby zajišťovaly neexistenci arbitráže, nýbrž je především podstatné, aby dokázaly co nejlépe vystihnout budoucí volatilitu podkladových úrokových sazeb. Použitím modelů úrokových měr pro účely řízení úrokových nákladů a příjmů se budu zabývat v této práci.

- **Monetární politika** – Modelů úrokových měr lze použít na popis vztahů mezi makroekonomickými veličinami a dynamikou výnosové křivky, což může být jistě přínosné pro rozhodování o nastavení monetární politiky. Centrální banky jistě taktéž zajímá vztah mezi krátkodobou úrokovou mírou, kterou mohou ovlivnit v rámci vykonávání monetární politiky, a zbytkem výnosové křivky. Pro tyto účely mohou být použity i čistě finanční modely úrokových měr bez vztahu k makroekonomickým veličinám. Fakt, že centrální banky využívají modelů úrokových měr, dokládá i četný výzkum jejich odborníků v této oblasti.

1.3 Přístupy k modelování dynamiky úrokových měr

V současné době existuje velké množství modelů úrokových měr, které lze však rozdělit na dvě základní skupiny podle toho, jestli zamezují existenci arbitráže či nikoliv. Arbitráž lze definovat jako situaci, kdy je možné s nulovou počáteční investicí dosáhnout pomocí nějaké strategie kladného zisku v budoucnosti s pravděpodobností rovnající se 1. Pokud existuje portfolio s nenulovou počáteční hodnotou a toto portfolio generuje k libovolnému okamžiku v budoucnosti jistý výnos, který byl znám již v okamžiku konstrukce tohoto portfolia, představuje tento výnos výnos bezrizikový. Bezrizikový výnos lze následně převést na bezrizikovou úrokovou míru pro období s počátkem v okamžiku konstrukce portfolia a s koncem při realizaci výnosu. Detailnější a rigoróznější popis konceptu arbitráže lze nalézt např. v (James a Webber, 2000) nebo v (Pennacchi, 2008)

případně v (Joshi, 2008).

Zajištění neexistence arbitráže je extrémně důležité u modelů úrokové míry používaných pro ocenění derivátů úrokové míry, jako jsou například dluhopisy, úrokové swapy, swapce a jiné složitější strukturované deriváty. Důvodem je skutečnost, že ocenění těchto instrumentů je přímo založeno na předpokladu neexistenci arbitráže. V případě použití modelu úrokových měr na ocenění finančních instrumentů je tedy nutné zamezit existenci arbitráže pomocí zavedení omezení na proces určující tento model, což významným způsobem omezuje počet vhodných procesů. V případě využití modelů úrokových měr pro účely řízení rizik (risk management), tj. v oblastech, kde je potřeba předpověď budoucího vývoje úrokových měr, je možné od podmínky zamezení arbitráže upustit.

Další z možných dělení modelů úrokových měr je podle toho, jestli popisují dynamiku úrokové míry pouze jedné splatnosti, tj. pouze jednoho bodu na výnosové křivce, nebo dynamiku celé výnosové křivky.

Modely s omezením na existenci arbitráže lze dále rozdělit následovně:

- Modely okamžité úrokové míry
  - jednofaktorové
  - vícefaktorové
- Heathův-Jarrowův-Mortonův přístup k modelování úrokových měr
- Tržní modely neboli Braceův-Gatarekův-Musielův (BGM) přístup k modelování úrokových měr
- Makroekonomické modely úrokových měr
- Multikřivkové modely

Výše uvedené dělení modelů úrokových měr není úplné, protože vývoj v oblasti modelů úrokových měr stále pokračuje a neustále vznikají nové modely. Některé modely také mohou patřit do více skupin, čímž se stává přesné vymezení skupin prakticky nemožné. Výše uvedené členění však dle mého názoru zachycuje hlavní směry vývoje modelů úrokových měr. V následující pasáži se zaměřím na každou z výše uvedených skupin a popíši její hlavní charakteristiky a základní principy společně s uvedením nejvýznamnějších modelů. Následující text si neklade za cíl důkladný popis různorodých modelů úrokových měr, ale spíše seznámení se základními principy a směry vývoje modelování úrokových měr s odkazem na stěžejní literaturu v této oblasti. Pro tuto práci je však seznámení s různými přístupy k modelování úrokových měr důležité, protože tím bude vlastní výzkum práce zasazen do celkového kontextu možných přístupů.

1.3.1 Modely okamžité úrokové míry – jednofaktorové

Jednofaktorové modely okamžité úrokové míry byly zkonstruovány ze všech modelů nejdříve a v podstatě položily základ následnému modelování dynamiky úrokových měr. Dynamika celé výnosové křivky je u těchto modelů dána jedním faktorem, kterým je okamžitá úroková míra. Okamžitá úroková míra je na trhu nepozorovatelná a je definována jako spotová úroková míra na nekonečně krátké období. Označí-li se okamžitá úroková míra v čase t pomocí $r(t)$ a výraz $R(t,T)$ bude představovat spotovou úrokovou míru v čase t na období (t,T), lze okamžitou úrokovou mírou vyjádřit pomocí limity

$$r(t) = \lim_{T \to t} R(t,T). \tag{1.8}$$

Zatímco vstupem do jednofaktorových modelů je okamžitá úroková míra, výstupem z těchto modelů je potom cena bezkuponového dluhopisu pro libovolný okamžik splatnosti neboli bezkuponová výnosová křivka. I přes nevýhody popisu dynamiky výnosové křivky pomocí popisu dynamiky okamžité úrokové míry jsou jednofaktorové modely okamžité úrokové míry v praxi stále využívány, i když ne tak často jako ostatní typy úrokových modelů.

Jako první z jednofaktorových modelů okamžité úrokové míry byl představen Vasickův model (Vasicek, 1977), který je založen na standardním předpokladu tržní efektivity, což znamená, že všichni investoři mají vždy kompletní relevantní informace a že všichni investoři jednají racionálně tím, že upřednostňují vyšší užitek oproti nižšímu. Na efektivním trhu dále neexistují transakční náklady. Pokud je trh efektivní, neexistuje na něm příležitost k arbitráži. Ve Vasickově modelu je proces okamžité úrokové míry dán exogenně Ornsteinovým-Uhlenbeckovým procesem, viz například (Karlin a Taylor, 1981).

Další velmi důležitý jednofaktorový model okamžité úrokové míry představili Cox, Ingersoll a Ross (1985), tento model bude dále zkráceně nazýván model CIR. Cox, Ingersoll a Ross modifikovali difusní člen Ornsteinova-Uhlenbeckova procesu tak, aby závisel na druhé mocnině okamžité úrokové míry. Touto úpravou je oproti Vasickove modelu zajištěna nemožnost záporných hodnot okamžité úrokové míry a dále je pak umožněna její heteroskedasticita. Oproti Vasickově modelu je CIR model odvozen na základě obecné ekonomické rovnováhy při maximalizaci užitku agenta.

Dalším typem jednofaktorových modelů okamžité úrokové míry jsou modely, které umožňují změnu parametrů procesu v čase. Nejznámější zástupci této kategorii modelů jsou Hullův-Whiteův model (Hull a White, 1993) a rozšířený CIR model. Hullův-Whiteův model je též označován jako rozšířený Vasickův model, který zavádí v čase proměnnou střední hodnotu u Vasickova modelu. Rozšířený CIR model modifikuje model CIR tím, že taktéž umožňuje změnu střední hodnoty procesu v čase. Výhoda těchto modelů spočívá především v tom, že díky časově proměnnému parametru úrovně, ke kterému se navrací střední hodnota, umožňují přesný fit počáteční výnosové křivky. Tuto vlastnost naopak původní nerozšířené modely nemají.

Podkladový proces okamžité úrokové míry vede k vyjádření ceny bezkuponového

dluhopisu pomocí PDE, jejíž řešení má u modelu Vasickova i CIR explicitní tvar, což výrazným způsobem usnadňuje využití těchto modelů v praxi. Více informací o odvození tvaru oceňovací PDE a o způsobu jejího vyřešení u modelů Vasickova a CIR lze nalézt jednak v originálních článcích a dále pak též velmi srozumitelný popis a vysvětlení nabízí např. (Cairns, 2004) nebo (Brigo a Mercurio, 2001). Podrobnější popis modelu CIR lze nalézt v kapitole 2.1. Aplikaci modelu CIR v českém prostředí a prostředí eurozóny je pak obsaženo v kapitole 3.4.

1.3.2 Modely okamžité úrokové míry – vícefaktorové

Hlavním důvodem pro vznik vícefaktorových modelů okamžité úrokové míry byl fakt, že u jednofaktorových modelů je dynamika celé výnosové křivky dána pouze jedním faktorem, kterým je okamžitá úroková míra. Následkem této vlastnosti jsou výnosy bezkuponových dluhopisů s různými splatnostmi perfektně korelovány, což nekoresponduje s realitou na finančních trzích. Chen (1996) vytvořil třífaktorový model, když jako první použil stochastický drift[2] i volatilitu okamžité úrokové míry, čímž přidal další dva faktory k okamžité úrokové míře. Longstaff a Schwartz (1992) a zkonstruovali dvojfaktorový model založený na makroekonomické produkci, kde dva faktory představují stavové veličiny závisející na okamžité úrokové míře a její volatilitě. Modely Vasickův, CIR a Longstaffův a Swartzův jsou představitelé afinního typu modelů úrokových měr, který je velmi rozšířen a oblíben především z důvodu relativní snadnosti použití, tj. odhadu parametrů i následného ocenění bezkuponového dluhopisu, oproti ostatním typům úrokových modelů.

1.3.3 Heathův-Jarrowův-Mortonův přístup

Heathův-Jarrowův-Mortonův (HJM) přístup k modelování úrokových měr (Heath a kol., 1992) byl revoluční v tom smyslu, že zatímco u modelů okamžité úrokové míry je dynamika výnosové křivky určena dynamikou okamžité úrokové míry a případně dalšími faktory, HJM přístup modeluje dynamiku celé výnosové křivky přímo bez pomocných faktorů na základě její volatility. Výnosová křivka je v HJM přístupu popsána ve formě okamžitých forwardových úrokových měr. Označí-li se forwardová úroková míra v čase t na období (t', T) výrazem $F(t, t', T)$, potom lze okamžitou forwardovou míru $f(t, t')$ vyjádřit pomocí limitního vztahu

$$f(t, t') = \lim_{T \to t'} F(t, t', T). \tag{1.9}$$

Oproti modelům okamžité úrokové míry je v HJM přístupu modelováno nekonečně mnoho proměnných, což je poněkud problematické. K vyřešení tohoto problému existuje několik přístupů, z nichž patrně nejpoužívanější navrhli Ritchen a Sankarasubramanian (1995), kteří zavedli omezení na dynamiku okamžitých forwardů tak, že jejich hodnota

[2]Drift je průměrný růst za jednotku času u náhodné veličiny.

v konkrétním čase je dána funkcemi omezeného počtu stavových proměnných. Tato operace převede dynamiku forwardové křivky do dvojrozměrného Markovského procesu. Ačkoliv byl HJM přístup zkonstruován za využití forwardové křivky, je ho možno aplikovat i na spotovou křivku nebo na křivku cen bezkuponových dluhopisů. Takováto reformulace však vede k obtížnější interpretovatelnosti výstupů. S tímto souvisí i skutečnost, že modely okamžité úrokové míry lze vyjádřit pomocí HJM přístupu, nicméně následné ocenění úrokových derivátů založené na řešení PDE u takto modifikovaných modelů není možné, protože HJM modely na rozdíl od modelů okamžité úrokové míry povětšinou nejsou markovského typu (vysvětlení markovské vlastnosti viz (Prášková a Lachout, 2012)), díky čemuž je pro ocenění často používána simulační technika Monte Carlo a to i při použití Ritchenova a Sankarasubramanianova přístupu. Více informací o vyjádření Vasickova a CIR modelu v HJM přístupu lze nalézt např. v (Chaierlla a Kwon, 2001).

1.3.4 Tržní modely

Tržní modely na rozdíl od předchozích přístupů nemodelují nepozorovatelné okamžité úrokové míry ať již ve formě spotové u modelů okamžité úrokové míry nebo ve formě forwardové v HJM přístupu, ale popisují dynamiku výnosové křivky přímo pomocí v reálném světě pozorovatelných tržních úrokových měr typu IBOR nebo IRS. Podle toho se někdy také tržní modely nazývají LIBOR případně Swap modely. Co je dále podstatné, je skutečnost, že oproti HJM přístupu není nutné modelovat nekonečně mnoho proměnných a následně hledat přístupy, jak jejich počet zredukovat, ale lze přímo modelovat pouze konečné množství proměnných, tj. reálných tržních úrokových měr s diskrétní splatností, jejichž počet se již dále nemusí redukovat. Zásadní práci v této oblasti představili Brace, Gatarek a Musiela (1997), podle nichž se nejvíce používaný model jmenuje BGM. Model BGM byl zkonstruován na základě úpravy HJM modelu pomocí restrikcí na podkladové procesy tak, aby výsledné tržní úrokové míry vykazovaly log-normální rozdělení. BGM model přímo modeluje tržní forwardy, které lze z tržních spotových sazeb získat dle

$$F(t, T_{n-1}, T_n) = \frac{1}{T_n - T_{n-1}} \left[\frac{B(t, T_{n-1})}{B(t, T_n)} - 1 \right]. \tag{1.10}$$

Popis diskontního faktoru $B(t, T)$ a jeho odvození ze spotových sazeb bezkuponové křivky obsahuje podkapitola 1.1. Volatility tržních forwardů, které BGM model přímo modeluje, jsou přímo spojeny s finančními instrumenty obchodovanými na trhu, jako jsou např. swapce nebo úrokové opce typu cap a floor. Každý tržní forward je poté pod forwardovou mírou modelován log-normálním procesem, což vede k Blackově formuli pro ocenění capů nebo swapcí. Z tohoto důvodu je odhad parametrů BGM modelu při znalosti cen capů nebo swapcí poměrně přímočarý. Výzkum v oblasti tržních modelů pokračuje i nadále, čehož důkazem jsou práce (Hagan a Lesniewski, 2008), (Mercurio a Morini, 2009) nebo (Ferreiro a kol., 2014), které se věnují propojení tržních modelů

a modelů stochastické volatility typu SABR v případě prvním a druhém, a nalezení efektivního způsobu odhadu parametrů tohoto modelu v případě posledním. SABR je relativně jednoduchý a flexibilní model stochastické volatility, kterým se popisuje křivka volatility (volatility smile) capů nebo swapcí. SABR model zkonstruovali Hagan, Kumar, Lesniewski a Woodward (2002). Další směr výzkumu v oblasti tržních modelů se zabývá jejich reformulací v prostředí existence více výnosových křivek. Velmi zajímavou práci na toto téma představil Mercurio (2010a) a Mercurio (2010b).

Tržní modely dle mého názoru nejvíce odpovídají reálné tržní situaci, a proto se budu v této práci mimo jiné zabývat jejich aplikací, konkrétně pak aplikací modelu BGM především v podmínkách České republiky. Teorie k aplikaci modelu BGM bude podrobněji vysvětlena v kapitole 2.3. Samotná aplikace modelu v českém prostředí a v prostředí eurozóny pak bude obsahem kapitoly 3.6.

1.3.5 Makroekonomické modely

Čistě finanční modely modelují okamžitou úrokovou míru nebo celou výnosovou křivku bez vztahu k makroekonomickým veličinám. Z pohledu makroekonomie je však okamžitá, respektive krátkodobá, úroková míra determinována makroekonomickými veličinami v kontextu vykonávání monetární politiky centrálními bankami. Makroekonomické modely úrokových měr propojují tyto dva pohledy. Makroekonomické modely úrokových měr obecně nemusí obsahovat restrikci na existence arbitráže, ale Ang a Piazzesi (2003) ukázali, že zavedení této restrikce vylepšuje předpovědní schopnost modelů. Rudebush a Wu (2008) navrhli model, který modeluje faktory určující výnosovou křivky společně s makroekonomickými faktory. Konkrétně se pak jedná o kombinaci afinního modelu výnosové křivky s restrikcí na existenci arbitráže a makroekonomického modelu založeným na racionálních očekáváních v neokeynesiánském prostředí. Tento přístup umožňuje interpretaci latentních faktorů výnosové křivky pomocí makroekonomických veličin. Konkrétně je faktor úrovně výnosové křivky vysvětlován jako inflační cíl a faktor sklonu výnosové křivky jako odpověď monetární politiky na stav ekonomiky. Obecně lze říci, že propojení makroekonomických veličin s faktory určujícími výnosovou křivku je stěžejní problém, který musí vyřešit každý makroekonomický model úrokových měr. V tomto směru existuje velmi mnoho přístupů, přičemž jeden z oblíbených přístupů navrhli Diebold, Rudebusch a Aruoba (2006), kteří zkombinovali přístup dynamického Nelsonova-Siegelova modelu a vektorové autoregresní reprezentace makroekonomických veličin, čímž získali tři latentní faktory výnosové křivky, kterými je úroveň, sklon a zakřivení, v závislosti na pozorovatelných makroekonomických veličinách. Na množině státních dluhopisů USA odvodili, že faktor ovlivňující úroveň je vysoce korelován s inflací, sklon je vysoce korelován s ekonomickou aktivitou, avšak nenalezli žádnou důležitou makroekonomickou veličinu, která by ovlivňovala faktor zakřivení. Dynamický Nelsonův-Siegelův model navrhli Diebold a Li (2006), když reformulovali známý model statické výnosové křivky Nelson-Siegel (Nelson a Siegel, 1987) na dynamický faktorový model. Další zajímavé přístupy k modelování dynamiky vý-

nosové křivky za použití makroekonomických proměnných navrhli Joslin, Singleton a Zhu (2011), Joslin, Le a Singleton (2013) a Joslin, Priebsch a Singleton (2014). Výzkum v této oblasti je nyní zaměřen na prostředí extrémně nízkých až záporných úrokových sazeb, což je i případ situace v České republice, kdy se zdá, že předchozí modely nevykazují příliš dobré výsledky. Tuto skutečnost dokládá například nejnovější zaměření jednoho z nejvýznamnějších představitelů výzkumu v oblasti makro-finančních modelů Glenna D. Rudebusche, viz (Bauer a Rudebusch, 2015).

1.3.6 Multikřivkové modely

Modely patřící do všech předchozích skupin popisují dynamiku jedné výnosové křivky, kterou pak používají k oceňování finančních instrumentů. To znamená, že stejná křivka je používána pro výpočet každé platby spojené s instrumentem a zároveň pro diskontování těchto plateb. Tento mechanismus je konsistentní s předpokladem, že ve světě, ze kterého je zkonstruována tato křivka, neexistuje kreditní riziko nebo prémie za nelikvidnost. V případě výnosové křivky peněžního trhu skládající se sazeb PRIBOR a korunových IRS sazeb výše uvedený předpoklad implikuje situaci, kdy na mezibankovním trhu neexistuje riziko krachu a po celé délce křivky neexistuje problém s likviditou, případně není tento problém penalizován přirážkou k příslušné úrokové míře. Podobnou implikaci lze aplikovat i na výnosovou křivku státních dluhopisů České republiky. Tuto situaci řeší tzv. multikřivkové modely úrokových měr, které velmi často jako druhou podkladovou křivku používají výnosovou křivku OIS, kterou považují za bezrizikovou. Multikřivkové modely také většinou předpokládají, že oceňovaný instrument je zajištěn kolaterálem. První model v multikřivkovém světě zkonstruoval Mercurio (2010a), když přeformuloval BGM model. Dále Moreni a Pallavicini (2014) přeformulovali do multikřivkového světa HJM model a Kenyon (2010) a Kenyon a Stamm (2012) ukázali, že v multikřivkovém světě lze vyjádřit i modely okamžité úrokové míry. V oblasti multikřivkových modelů úrokových měr nadále probíhá intenzivní výzkum, což potvrzují i práce (Piterbarg, 2012), (McCloud, 2013), (Pallavicini a Brigo, 2013) nebo nejnověji velmi zajímavé rozšíření problému existence většího množství výnosových křivek do prostředí existence více měn v (Moreni a Pallaviccini, 2015). Zajímavý a přínosný úvod do multikřivkových modelů je obsažen v (Morini a Bianchetti, 2013).

Vzhledem k méně rozvinutému trhu v České republice, kde v současné době OIS neexistují nebo jsou velmi nelikvidní, je možnost aplikace těchto modelů na česká data obtížná.

Kapitola 2

Vybrané modely úrokových měr

V této kapitole se zaměřím na popis tří různých typů modelů úrokových měr, které budu následně aplikovat v prostředí českého finančního trhu a finančního trhu eurozóny. Konkrétně jsem zvolila model CIR, model BGM a obecný parametrický model. Tyto modely jsem vybrala primárně s ohledem na cíl práce, tj. použití modelů úrokových měr pro účely řízení rizika a predikce pravděpodobnostních rozdělení, jako reprezentanty rozdílného přístupu k arbitráži. Zatímco modely CIR a BGM obsahují omezení na existenci arbitráže, obecný parametrický model toto omezení neobsahuje. Další motivací pro výběr těchto konkrétních modelů je fakt, že se hlavně u modelů CIR a BGM jedná o zásadní modely, které ovlivnily další směry ve výzkumu modelování dynamiky úrokových měr.

Model CIR je zástupcem skupiny modelů popisujících dynamiku výnosové křivky pomocí modelování dynamiky nepozorovatelné okamžité úrokové míry. Jeho aplikace je hlavně díky existenci explicitního řešení oceňovací PDE poměrně jednoduchá, díky čemuž je v praxi stále využíván, i když v posledních letech je jeho praktické využití stále menší ve prospěch složitějších modelů. Bude jistě zajímavé pozorovat, zda lze CIR model využít i v současné době a navíc pro účely predikce a nikoliv pro účely oceňování, což byla motivace jeho vzniku.

V případě skupiny jednofaktorových modelů okamžité úrokové míry se nabízí i aplikace Hullova-Whiteova modelu, jehož použití je díky existenci explicitního řešení oceňovací PDE pro bezkupónové dluhopisy stejně jako u modelu CIR relativně jednoduché. Jak jsem již zmínila v předchozí kapitole, lze pomocí Hullova-Whiteova modelu přesně popsat počáteční výnosovou křivku, což model CIR neumožňuje. Tato vlastnost je velmi důležitá při použití modelu pro účely oceňování, nicméně je už méně důležitá při použití pro účely získání predikcí. Úrokové sazby získané na základě Hullova-Whiteova modelu jsou stejně jako u Vasickova modelu normálně rozdělené, díky čemuž mohou nabývat i záporných hodnot s nenulovou pravděpodobností. Tato vlastnost byla dříve považována za značnou nevýhodu tohoto modelu, avšak v současné době je vyzdvihována a Hullův-Whiteův model díky ní získává mezi analytiky na oblibě.

V dalším textu jsem se i vzhledem k rozsahu této práce rozhodla pro aplikaci modelu

CIR díky souběhu několika faktorů. Předně zastávám názor, že modelování úrokových sazeb pod podmínkou normality je problematické a vede k podceňování pravděpodobnosti extrémnějších scénářů, které v realitě nastávají. Dále je dobré zmínit, že vlastnost přesného fitu počáteční výnosové křivky pomocí Hullova-Whiteova modelu s sebou bohužel přináší i vedlejší negativní efekt problematického popsání dynamiky výnosové křivky v dlouhodobějším horizontu, což například zmiňuje i Bolder (2001).

Model BGM je zástupcem tržních modelů a modeluje dynamiku výnosové křivky přímo na základě pozorovaných sazeb. Právě možnost využití tržních sazeb při modelování výnosové křivky a konzistence modelu s Blackovými rovnicemi pro oceňování capů nebo floorů a swapcí, učinila z modelu BGM, i přes jeho poměrně složitou aplikaci, v současnosti patrně nejpoužívanější model pro oceňování úrokových derivátů. Stejně jako v případě modelu CIR bude zajímavé zjistit, zda je model BGM vhodný pro predikování úrokových sazeb a navíc v prostředí českého stále ještě nevyspělého finančního trhu. Další otázkou, kterou budu chtít zodpovědět, je, jestli je předpovědní schopnost modelu BGM lepší než u modelu CIR a „vyplatí“ se tak jeho podstatně vyšší aplikační náročnost.

Model GP je zástupcem modelů, které v sobě neobsahují restrikci na existenci arbitráže. Tento model tedy nelze využít pro účely oceňování, a proto bude jistě zajímavé pozorovat, zda jeho předpovědní schopnost bude vyšší než u modelů CIR a BGM, které byly původně zkonstruovány pouze za účelem oceňování. V současné době je výhoda modelu GP i v tom, že umožňuje modelování záporných sazeb.

V otázce, zda mají modely umožnit modelování záporných úrokových sazeb, zatím neexistuje shoda. Osobně si myslím, že současná situace, kdy v roce 2015 a během roku 2016 lze v některých zemích EU, ve Švýcarsku a Japonsku pozorovat existenci záporných úrokových sazeb, je pouze dočasná a je spíše experimentem, který se během několika let normalizuje. Tento názor podporuje i postoj Německa, které se výrazněji vymezuje vůči politice záporných sazeb ze strany ECB v EU, a snahy Federálního rezervního systému (FED) v USA zvýšit krátkodobé úrokové sazby až k úrovni přes 3 %. Řešení této situace však přinese další vývoj, a pokud se ukáže, že záporné sazby nalezly v ekonomice své stálé místo a jsou považovány za standardní, bude nutné vyřešit otázku, zda případné nízké úrovně záporných sazeb jsou ekonomicky odůvodnitelné a realizovatelné. V současné době mezi ekonomy převládá názor, že záporné sazby mají své dno, pod kterým již jejich existence přímo ohrožuje ekonomický vývoj a model by takovéto dno měl respektovat a nepřiřazovat existenci sazeb pod tímto dnem nepřiměřenou pravděpodobnost.

2.1 Coxův-Ingersollův-Rossův model

Coxův-Ingersollův-Rossův model patří do skupiny tzv. modelů ekvilibria, tj. modelů, které odvozují proces okamžité úrokové míry na základě vztahů různých ekonomických veličin. Okamžitá úroková míra je úroková sazba na nekonečně krátké období a je na

trhu nepozorovatelná. Dynamika okamžité úrokové míry $r(t)$ je dána procesem

$$dr(t) = \alpha\left[\mu - r(t)\right]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \tag{2.1}$$

kde člen $\alpha\left[\mu - r(t)\right]$ představuje drift procesu, člen $\sigma\sqrt{r(t)}$ zastupuje volatilitu procesu, $W(t)$ označuje standardní Wienerův proces a α, μ, σ jsou parametry procesu.

Tento proces má vlastnost „mean reversion“, což je tendence veličiny navrátit se zpět k nějaké dlouhodobé průměrné úrovni. V situaci modelu CIR to konkrétněji znamená, že je-li úroková míra menší než μ, je drift kladný a úroková míra je tlačena nahoru. Naopak, je-li úroková míra větší než μ, je drift záporný a úroková míra je tlačena dolů. Parametr μ se tak de facto může interpretovat jako dlouhodobě očekávaná úroková míra. Zmíněná vlastnost je pro chování úrokových měr zcela typická. Ekonomické argumenty ve prospěch této vlastnosti jsou následující. Pokud je úroková míra vysoká, ekonomika má tendenci zpomalovat a klesá zájem ze strany dlužníků. Výsledkem pak je pokles úrokové míry. Naopak je-li úroková míra nízko, zájem o půjčení finančních prostředků roste a úroková míra má tendencí růst.

Další parametr v modelu α představuje rychlost návratu k úrovni dlouhodobě očekávané úrokové míry a poslední parametr σ zastupuje parametr volatility okamžité úrokové míry $r(t)$. Pokud je splněna nerovnost

$$2\alpha\mu \geq \sigma^2, \tag{2.2}$$

okamžitá úroková míra zůstává kladná. Dále lze ukázat, že $r(t)$ má necentrální χ^2 rozdělení. Výsledkem modelu CIR (2.1) mohou být rostoucí křivky, klesající křivky nebo křivky, které zpočátku rostou a poté se změní na klesající. Podrobnější vysvětlení modelu CIR lze nalézt v originálním v článku (Cox a kol., 1985) a zaměření na praktickou aplikaci v českém prostředí popisuje (Kladívko, 2005).

2.1.1 Diskretizace

Proces okamžité úrokové míry je nyní v časově spojité podobě, pro následující odhad parametrů modelu a pro vytvoření simulací je však nutné tento proces převést do diskrétní podoby. K diskretizaci procesu (2.1) zvolím Eulerovu diskretizaci, v níž se nekonečně malý přírůstek $dr(t)$ nahradí vztahem

$$\Delta r(t + \Delta t) = r(t + \Delta t) - r(t), \tag{2.3}$$

kde Δt je časová změna. Dále se využije teorie stochastických procesů, viz například (Karlin a Taylor, 1975), dle které je v diskrétním případě možné namísto $dW(t)$ uvažovat $\varepsilon(t)\sqrt{\Delta t}$, kde $\varepsilon(t)$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Eulerova diskretizace má potom tvar

$$\Delta r(t + \Delta t) = \alpha\left[\mu - r(t)\right]\Delta t + \sigma\sqrt{r(t)}\varepsilon(t)\sqrt{\Delta t}. \tag{2.4}$$

Další možné diskretizace jsou například Itōova-Taylorova nebo Milshteinova, které jsou sice v aproximaci spojitého procesu mírně přesnější, ale na druhou stranu komplikovanější. Pro účely této práce plně dostačuje Eulerova diskretizace.

2.1.2 Odhad parametrů procesu okamžité úrokové míry

Pro získání simulací výnosové křivky je nejprve nutné provést odhad parametrů modelu. Vzhledem k tomu, že cílem této práce jsou predikce pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých splatností úrokových měr ke konkrétnímu časovému okamžiku získané na základě simulací, použiji pro odhad parametrů modelu (2.1) historická data. Pokud by měl být model CIR využit pro ocenění finančních derivátů, což však není cílem této práce, bylo by nutné provést odhad parametrů modelu na základě aktuální výnosové křivky. Pomocí metody maximální věrohodnosti a diskretizovaného procesu (2.4) se odhadnou parametry procesu a získají se tak odhady parametrů procesu pro situaci reálného světa (real world) $\widehat{\alpha}_R$, $\widehat{\mu}_R$, $\widehat{\sigma}_R$, neboť byly odhadovány na základě historické časové řady.

Při odhadu parametrů procesu okamžité úrokové míry bude tedy využívána metoda maximální věrohodnosti, vysvětlení této metody, přehled všech jejích předpokladů a příklady řešení nabízí například (Anděl, 2011). Vstupní data zde budou v podobě časové řady 3měsíční sazby $\tilde{r}_{t_1}$, $\tilde{r}_{t_2}$, …, $\tilde{r}_{t_n}$, která zde aproximuje okamžitou úrokovou míru. Za hustoty, které se využívají v metodě maximální věrohodnosti, budou dosazeny přechodové hustoty

$$f(x_{t_i}, \boldsymbol{\theta}) = f(t_i, r_{t_i}; t_{i-1}, r_{t_{i-1}}; \boldsymbol{\theta}) \tag{2.5}$$

Přechodová hustota $f(t_i, r_{t_i}; t_{i-1}, r_{t_{i-1}}; \boldsymbol{\theta})$ je hustota náhodné veličiny r_{t_i} v čase t_i při dané hodnotě $r_{t_{i-1}}$ v čase t_{i-1} a při daném vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$. V případě modelu CIR je tato přechodová hustota, viz například (James a Webber, 2000), dána rovnicí

$$f(t_i, r_{t_i}; t_{i-1}, r_{t_{i-1}}; \boldsymbol{\theta}) = ce^{-u-v}\left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}), \tag{2.6}$$

kde

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\alpha}{\sigma^2\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right)}, \\ u &= cr_{t_{i-1}}e^{-\alpha\Delta t}, \\ v &= cr_{t_i}, \\ q &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma} - 1 \\ \Delta t &= t_i - t_{i-1}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

vektor parametrů je $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \mu, \sigma)$ a funkce I_q je modifikovaná Besselova funkce prvního druhu řádu q, jejíž vysvětlení obsahuje například (Abramowitz a Stegun, 1965). Při

takto definované přechodové hustotě se jedná o necentrální χ^2 rozdělení s $(2q + 2)$ stupni volnosti a parametrem necentrality $2u$.

Více možných technik pro konstrukci odhadu parametrů procesu okamžité úrokové míry lze nalézt například v (James a Webber, 2000) a zkušenosti s aplikacemi různých přístupů jsou popsány v (Cícha a Zimmermann, 2006).

2.1.3 Cena bezkuponového dluhopisu a odhad tržní ceny rizika

V dalším kroku je nutné odhadnout tržní cenu rizika (market price of risk), což je výnos nad bezrizikovou úrokovou mírou vztažený k jednotce rizika. V souvislosti s hodnocením výkonnosti portfolia se tržní cena rizika označuje také jako Sharpe ratio. Připomínám, že pokud jsou parametry modelu odhadnuty z historické časové řady pozorovatelné úrokové míry, která je aproximací okamžité úrokové sazby, jedná se o odhady parametrů platné v reálném světě. Vzhledem k tomu, že oceňování dle teorie probíhá vždy pouze v rizikově neutrálním světě (risk neutral world), je potřeba odhadnout tržní cenu rizika, za jejíž pomoci lze odvodit parametry ve světě rizikově neutrálním ze získaných parametrů reálného světa. Pro stanovení tržní ceny rizika lze využít vzorec pro cenu bezkuponového dluhopisu, který je zároveň explicitním řešení PDE určující cenu bezkuponového dluhopisu v modelu CIR. Postup konstrukce PDE pro cenu bezkuponového dluhopisu a následné řešení této PDE lze nalézt například v originálním článku (Cox a kol., 1985) nebo přehledně též v (Cairns, 2004) nebo v (Brigo a Mercurio, 2001). Oceňovací vzorec pro cenu bezkuponového dluhopisu v modelu CIR je tvaru

$$B(t,T) = A(t,T)e^{-C(t,T)r(t)}, \tag{2.8}$$

kde $B(t,T)$ je cena bezkuponového dluhopisu v čase t, který vyplácí v čase T jednotkový nominál. Dále $A(t,T)$ a $C(t,T)$ jsou funkce parametrů procesu α, μ, σ a časů t, T:

$$\begin{aligned} C(t,T) &= \frac{2\left[e^{\gamma(T-t)}-1\right]}{(\gamma+\alpha)\left[e^{\gamma(T-t)}-1\right]+2\gamma}, \\ A(t,T) &= \left[\frac{2\gamma e^{(\alpha+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+\alpha)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2\alpha\mu/\sigma^2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

a

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}. \tag{2.10}$$

Tento explicitní oceňovací vzorec umožňuje v kterýkoliv okamžik z okamžité úrokové míry získat cenu libovolně dlouhého bezkuponového dluhopisu.

V následujícím kroku se odvodí vztah mezi parametry procesu okamžité úrokové míry v reálném světě a parametry v rizikově neutrálním světě. Proces okamžité úrokové míry v reálném světě lze vyjádřit ve tvaru

$$dr(t) = \alpha_R \left[\mu_R - r(t)\right] dt + \sigma_R \sqrt{r(t)} dW(t). \tag{2.11}$$

Při přechodu z reálného světa do rizikově neutrálního, je v případě modelu CIR úměrné snížení driftu procesu o $\lambda_t(r(t))\sigma\sqrt{r(t)}$, kde tržní cena rizika $\lambda_t(r(t))$ je funkcí okamžité úrokové míry $r(t)$. Pro více podrobnosti viz (Hull, 2014). Tržní cena rizika se stanoví jako

$$\lambda_t(r(t)) = \frac{\lambda\sqrt{r(t)}}{\sigma}, \tag{2.12}$$

viz například (Kladívko, 2005), kde λ představuje parametr tržní ceny rizika (třeba odlišovat od funkce tržní ceny rizika $\lambda_t(\cdot)$). Konkrétně se pak drift sníží o $\lambda r(t)$ a proces okamžité úrokové míry v rizikově neutrálním světě vyjádřený pomocí parametrů reálného světa a parametru tržní ceny rizika je tvaru

$$dr(t) = \left[\alpha_R(\mu_R - r(t)) - \lambda r(t)\right] dt + \sigma_R \sqrt{r(t)} dW(t). \tag{2.13}$$

Úpravami se získá

$$\begin{aligned} dr(t) &= \left[\alpha_R\mu_R - \alpha_R r(t) - \lambda r(t)\right] dt + \sigma_R\sqrt{r(t)} dW(t) \\ &= \left[\alpha_R\mu_R - r(t)(\alpha_R + \lambda)\right] dt + \sigma_R\sqrt{r(t)} dW(t) \\ &= (\alpha_R + \lambda)\left[\frac{\alpha_R\mu_R}{\alpha_R + \lambda} - r(t)\right] dt + \sigma_R\sqrt{r(t)}, dW(t). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Z posledního řádku úprav procesu okamžité úrokové míry v rizikově neutrálním světě (2.14) a ze základního vyjádření procesu okamžité úrokové míry (2.1) plyne, že parametry procesu okamžité úrokové míry v rizikově neutrálním světě lze vyjádřit ve tvaru

$$\alpha_N = \alpha_R + \lambda, \qquad \mu_N = \frac{\alpha_R\mu_R}{\alpha_R + \lambda}, \qquad \sigma_N = \sigma_R, \tag{2.15}$$

kde α_N, μ_N, σ_N značí parametry v rizikově neutrálním světě. Z těchto vztahů je zřejmé, že parametry procesu okamžité úrokové míry pro situaci rizikově neutrálního světa mohou být odvozeny z parametrů pro reálný svět a z parametru tržní ceny rizika. Je patrné, že parametr volatility okamžité úrokové míry σ_N zůstává stejný jako v reálném světě, kdežto parametry driftu α_N a μ_N se již liší. Toto pozorování potvrzuje obecnou vlastnost veličin následujících difuzní proces[1], pro které platí, že přesunou-li se od jedné hladiny tržní ceny rizika k jiné, změní se jejich očekávaný růst, ale jejich volatilita zůstává stejná.

V tuto chvíli lze přejít k odhadu parametru tržní ceny rizika λ, který je možné odhadnout z cen aktuálních bezkuponových dluhopisů získaných v prvním případě z aktuální křivky a v druhém případě z okamžité úrokové míry s využitím oceňovacího vzorce pro

[1]Difuzní proces je model, kde se hodnota aktiva mění spojitě (neobsahuje skoky).

CIR model (2.8). Protože tento oceňovací vzorec je platný v rizikově neutrálním světě, je nutné použít parametry okamžité úrokové míry α_N, μ_N, σ_N. S využitím vztahů (2.15) lze parametry α_N, μ_N, σ_N vyjádřit pomocí parametru tržní ceny rizika λ a parametrů reálného světa α_R, μ_R, σ_R, jejichž odhady $\widehat{\alpha}_R$, $\widehat{\mu}_R$, $\widehat{\sigma}_R$ se získají na základě výše popsaného odhadu diskretizovaného procesu (2.4). Jediným neznámým parametrem v úloze bude parametr tržní cena rizika λ. Jeho odhad spočívá v minimalizaci součtu čtverců odchylek mezi pozorovanými cenami bezkuponových dluhopisů a cenami implikovanými oceňovacím vzorcem (2.8). Formální vyjádření odhadu parametru tržní ceny rizika je

$$\widehat{\lambda} = \arg\min_{\lambda} \sum_{j=1}^{J} \left[B(t,T_j) - \widehat{B}(t,T_j) \right]^2, \tag{2.16}$$

kde $\widehat{\lambda}$ je odhad parametru tržní ceny rizika, výraz J představuje počet bezkuponových dluhopisů použitý k odhadu, časy T_j označují splatnosti těchto dluhopisů. Dále $B(t,T_j)$ jsou pozorované ceny bezkuponových dluhopisů a $\widehat{B}(t,T_j)$ představují ceny bezkuponových dluhopisů implikované oceňovacím vzorcem (2.8). Výsledkem popsané minimalizace je odhad parametru tržní ceny rizika λ.

2.1.4 Simulace

Budoucí vývoj okamžité úrokové míry v rizikově neutrálním světě se předpoví s využitím Monte Carlo simulací diskretizovaného procesu (2.4) a parametrů $\widehat{\alpha}_N$, $\widehat{\mu}_N$, $\widehat{\sigma}_N$, viz například (James a Webber, 2000). Protože okamžitá úroková sazba je pouze teoretická veličina a není na ní navázáno úročení žádného finančního instrumentu, je potřeba získat simulace výnosové křivky, podle které jsou úročeny instrumenty, jejichž úrokové náklady mají být predikovány. V praxi je však pro tyto účely postačující, provést simulace pouze několika splatností, tj. bodů na výnosové křivce, které odpovídají refixačním obdobím jednotlivých instrumentů, pro něž je potřeba predikce učinit. Pro každou simulaci okamžité úrokové míry se získají dle formule (2.8) ceny bezkuponových dluhopisů s potřebnou dobou do splatnosti.

2.2 Obecný parametrický model

Obecný parametrický model (General Parametric model, zkráceně GP model) byl definován Ait-Sahaliou (1996). Tento model, při splnění podmínek pro parametry, zachovává, podobně jako většina ostatních modelů úrokových měr, vlastnost návratu modelované veličiny ke své střední hodnotě a popisuje dynamiku okamžité úrokové míry pomocí stochastické diferenciální rovnice ve tvaru

$$dr(t) = \left[\beta_0 + \beta_1 r(t) + \beta_2 r^2(t) + \beta_3 / r(t)\right] dt + \left[\varphi_0 + \varphi_1 r(t) + \varphi_2 \left(r(t)\right)^{\varphi_3}\right] dW(t). \tag{2.17}$$

Výraz $r(t)$ opět označuje okamžitou úrokovou míru v čase t, $W(t)$ je Wienerův proces, člen $[\beta_0 + \beta_1 r(t) + \beta_2 r^2(t) + \beta_3 / r(t)]$ představuje drift procesu a $[\varphi_0 + \varphi_1 r(t) + \varphi_2 (r(t))^{\varphi_3}]$ zastupuje volatilitu procesu.

Vlastnosti stochastické diferenciální rovnice (2.17) stejně jako omezení na její parametry a všechna potřebná odvození lze nalézt v (Ait-Sahalia, 1996). V tomto článku lze nalézt také srovnání procesu (2.17) s ostatními populárními procesy okamžité úrokové míry.

2.2.1 Rozšíření na výnosovou křivku

Kladívko, Zimmermann a Cícha (2007) namísto aplikace procesu (2.17) na popis dynamiky okamžité úrokové míry aplikovali tento model na celou výnosovou křivku, čímž popsali její dynamiku. V tomto případě však bylo potřeba vyřešit problém s vysokým množstvím, respektive s nekonečným množstvím[2], vysoce korelovaných veličin, které všechny následují proces (2.17). K vyřešení tohoto problému autoři nejprve zredukovali nekonečný počet proměnných na konečný počet tím, že výnosovou křivku peněžního trhu aproximovali pouze pomocí několika likvidních splatností. V dalším kroku pak na takto zredukovaný počet proměnných aplikovali metodu hlavních komponent, čímž dále zredukovali počet proměnných. V konečném důsledku je výnosová křivka popsána třemi hlavními komponentami, přičemž každá z nich následuje proces (2.17). Je však potřeba zdůraznit, že takto zkonstruovaný model výnosové křivky v sobě nezahrnuje restrikci na existence arbitráže, a proto jeho použití na oceňování úrokových derivátů by bylo zcela chybné. V případě využití tohoto modelu pro popis dynamiky výnosové křivky s aplikací na predikci budoucího vývoje úrokových měr problém nenastává.

2.2.2 Redukce dimenze vstupních dat

Při následujícím postupu bude využívána metoda hlavních komponent, jejíž vysvětlení lze nalézt například v (Hebák a kol., 2007). Aplikací této metody na výnosovou křivku se provede lineární transformace uvažovaných bodů na křivce, čímž se zredukuje počet vstupních proměnných a získají se nové nekorelované veličiny. Dle (Kladívko a kol., 2007) je vhodné zvolit první tři hlavní komponenty, které v jejich případě vysvětlují více než 99,9 % variability dat, avšak lze předpokládat, že i v jiných případech bude použití tří komponent dostačující. Pokud se pro další popis dynamiky celé výnosové křivky využijí právě první tři komponenty, je velmi výhodné, že je možné z finančního hlediska interpretovat jejich význam, viz (Litterman a Scheinkman, 1991). První komponenta má vliv na úroveň výnosové křivky, druhá komponenta lze interpretovat jako faktor ovlivňující sklon výnosové křivky a poslední třetí komponenta ovlivňuje zakřivení výnosové křivky.

Další významnou výhodou metody hlavních komponent je vzájemná nekorelovanost komponent, z čehož plyne, že lze výsledné komponenty modelovat odděleně.

[2]Připomínám, že výnosová křivka obsahuje nekonečně mnoho splatností.

Použití metody hlavních komponent pro modelování výnosové křivky je dobře zdokumentováno například v (Barber a Copper, 1996), (Soto, 2004) nebo (Diebold a Li, 2006).

Připomínám, že dynamika každé komponenty se následně popíše pomocí procesu vycházejícího z procesu (2.17). Kladívko, Zimmermann a Cícha (2007) upravili drift i volatilitu procesu (2.17). Z důvodu zjednodušení aplikace modelu autoři nahradili kubickou volatilitu konstantní volatilitou

$$[\varphi_0 + \varphi_1 r(t) + \varphi_2 (r(t))^{\varphi_3}] \longrightarrow \sqrt{\varphi}, \tag{2.18}$$

díky čemuž má marginální hustota procesu explicitní tvar. Dále pozměnili drift procesu na kubický, který se ukázal vhodný pro časové řady českých a evropských křivek

$$\left[\beta_0 + \beta_1 r(t) + \beta_2 r^2(t) + \beta_3 / r(t)\right] \longrightarrow \left[\beta_0 + \beta_1 r(t) + \beta_2 r^2(t) + \beta_3 r^3(t)\right]. \tag{2.19}$$

Po této úpravě se proces změní do tvaru

$$dx(t) = \left[\beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 x^2(t) + \beta_3 x^3(t)\right] dt + \sqrt{\varphi} dW(t). \tag{2.20}$$

Dynamika komponent bude tedy nakonec popsána procesem (2.20). Pro přehlednost se zde mění značení procesu z $\{r(t), t \geq 0\}$ na $\{x(t), t \geq 0\}$, protože tento proces bude využíván k modelovaní dynamiky hlavních komponent a ne k modelování krátkodobé úrokové míry. Velmi důležité je, že při splnění podmínek na parametry nadále vykazuje takto modifikovaný proces vlastnost návratu ke své střední hodnotě („mean reversion“), protože jinak by pro modelování dynamiky úrokových měr nebyl příliš vhodný.

2.2.3 Odhad parametrů

Odhad parametrů procesu se provede neparametricky pomocí minimalizace rozdílu neparametrického odhadu marginální hustoty a parametrického tvaru marginální hustoty procesu. Než bude popsán postup minimalizace, z kterého vzejdou odhady parametrů, bude nejprve uveden předpis neparametrické marginální hustoty a parametrické marginální hustoty.

Nechť je proces $\{x(t), t \geq 0\}$ vyjádřen pomocí obecné stochastické diferenciální rovnice

$$dx(t) = \mu(x(t), \boldsymbol{\theta}) dx + \sigma(x(t), \boldsymbol{\theta}) dW(t), \tag{2.21}$$

kde $\boldsymbol{\theta}$ je k-rozměrný vektor parametrů procesu, $\mu(x(t), \boldsymbol{\theta})$ je funkce driftu a $\sigma^2(x(t), \boldsymbol{\theta})$ představuje volatilitu. Parametrický prostor zastupuje výraz $\boldsymbol{\Theta}$ a je podmnožinou k-rozměrného reálného prostoru $\boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{R}^k$. Definiční obor procesu se označí $D(\underline{x}, \overline{x})$. Potom parametrický tvar marginální hustoty $\pi(x, \boldsymbol{\theta})$ tohoto procesu má tvar

$$\pi(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\xi(\boldsymbol{\theta})}{\sigma^2(x, \boldsymbol{\theta})} \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(u, \boldsymbol{\theta})}{\sigma^2(u, \boldsymbol{\theta})} du\right], \tag{2.22}$$

kde $\xi(\boldsymbol{\theta})$ představuje normalizační konstantu. Výběr dolní meze integrálu x_0 z definičního oboru procesu není podstatný. Tuto dolní mez neutralizuje normalizační konstanta $\xi(\boldsymbol{\theta})$ odvozená tak, aby integrace hustoty na definičním oboru $D(\underline{x}, \overline{x})$ byla rovna jedné.

Neparametrický odhad marginální hustoty $\widehat{\pi}_0(u)$ bude proveden z časové řady pozorování procesu $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\widehat{\pi}_0(u) \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_n} K\left(\frac{u - X_i}{b_n}\right), \tag{2.23}$$

kde n zastupuje počet pozorování, b_n je šířka pásma (bandwidth) a $K(\cdot)$ je jádrová funkce (kernel function). Zde použiji normální (Gaussovu) jádrovou funkci

$$K(u) = \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{2.24}$$

Více informací o jádrové funkci nabízí (Scott, 1992). Kvalita odhadu hustoty však více než na výběru jádrové funkce závisí na výběru šířky pásma b_n. Určení šířky pásma b_n provedu podle přibližného pravidla, které navrhl Silverman (1986). Toto empirické pravidlo má podobu

$$b_n = 1,06 \min\left(\widehat{\sigma}, \frac{R}{1,34}\right) n^{-0,2}, \tag{2.25}$$

kde $\widehat{\sigma}$ je výběrová směrodatná odchylka a R je mezikvartilové rozpětí pozorovaných hodnot procesu.

Při odhadu parametrů procesu se bude minimalizovat rozdíl neparametrického odhadu marginální hustoty (2.23) a parametrického tvaru marginální hustoty (2.22). Parametrický tvar marginální hustoty procesu je definován pomocí všech parametrů tohoto procesu, což umožňuje jejich odhad. Při odhadu parametrů bude minimalizována střední čtvercová chyba

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\theta}} &\equiv \arg\min_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \left[\pi(u, \boldsymbol{\theta}) - \pi_0(u)\right]^2 \pi_0(u) du \\ &= \arg\min_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} \mathrm{E}\left\{\left[\pi(X, \boldsymbol{\theta}) - \pi_0(X)\right]^2\right\}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

kde $\pi_0(u)$ představuje neparametrickou marginální hustotu. Při minimalizaci je použita váha, která dává větší význam hodnotám procesu, které nastanou s vyšší pravděpodobností. Naopak je-li pravděpodobnost hodnoty procesu nízká, není rozdíl mezi neparametrickým odhadem marginální hustoty a parametrickým tvarem marginální hustoty příliš penalizován. Odhad parametrů $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ je pak konstruován na základě pozorování $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dle minimalizace

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[\pi(X_i,\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\pi}_0(X_i)\right]^2 . \tag{2.27}$$

Odvození vlastností odhadu $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ je obsaženo v (Ait-Sahalia, 1996), tento článek mi byl současně hlavní inspirací při výběru metody pro odhad parametrů.

Kladívko, Zimmermann a Cícha (2007) z důvodu jednodušší optimalizace při hledání minima obě marginální hustoty před minimalizací zlogaritmovali

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[\ln(\pi(X_i,\boldsymbol{\theta})) - \ln(\widehat{\pi}_0(X_i))\right]^2 . \tag{2.28}$$

Tuto cestu jsem také vyzkoušela, ale vrátila jsem se zpět k minimalizaci (2.27), která z mého pohledu dávala lepší výsledky.

Pozorovaná data vstupující do odhadu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou diskrétní pozorování procesu. Je zajímavé podotknout, že diskrétní data jsou použita při odhadu parametrů, aniž by bylo nutné model ve spojitém čase nahradit aproximací v čase diskrétním, což je rozhodně kladná vlastnost metody pro odhad parametrů, která vede k odstranění zkreslení odhadu. Při diskretizaci procesu totiž dochází k nepřesnosti v odhadu, která se zvětšuje s rostoucím časovým intervalem v pozorovaných datech.

V případě procesu (2.20) jsou funkce driftu a volatility konkrétně tvaru

$$\mu(x(t),\boldsymbol{\theta}) = \beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 x^2(t) + \beta_3 x^3(t), \qquad \sigma^2(x(t),\boldsymbol{\theta}) = \varphi \tag{2.29}$$

a vektor parametrů má podobu

$$\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \varphi). \tag{2.30}$$

Proces hlavních komponent je definován pro všechna reálná čísla, tudíž definiční obor procesu je $D(-\infty, \infty)$. Požaduje-li se, aby měl proces vlastnost „mean reversion“, pak musí platit omezení $\beta_3 < 0$.

Dosadí-li se do obecného předpisu parametrického tvaru marginální hustoty (2.22) funkce driftu a volatility procesu (2.20), získá se konkrétní marginální hustota

$$\pi(x,\boldsymbol{\theta}) = \frac{\xi(\boldsymbol{\theta})}{\varphi} \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{2(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3)}{\varphi} du\right]. \tag{2.31}$$

Stanoví-li se dolní meze integrálu na nulu ($x_0 = 0$), je úprava po integraci tvaru

$$\pi(x,\boldsymbol{\theta}) = \frac{\xi(\boldsymbol{\theta})}{\varphi} \exp\left(\frac{2\beta_0 x}{\varphi} + \frac{\beta_1 x^2}{\varphi} + \frac{2\beta_2 x^3}{3\varphi} + \frac{\beta_3 x^4}{2\varphi}\right). \tag{2.32}$$

2.2.4 Simulace

Po získání odhadů parametrů procesu je dalším krokem vytvoření předpovědí budoucího vývoje jednotlivých komponent, z nichž lze následně zkonstruovat předpovědi budoucího vývoje jednotlivých bodů na výnosové křivce a posléze i předpovědi dynamiky celé křivky [3].

Předpovědi jednotlivých komponent se zkonstruují s využitím Monte Carlo simulací diskretizovaného procesu. Stejně jako v případě modelu CIR použiji i zde Eulerovu diskretizaci, která má v situaci procesu (2.20) tvar

$$\Delta x(t+\Delta t) = \left[\beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 x^2(t) + \beta_3 x^3(t)\right]\Delta t + \sqrt{\varphi}\varepsilon(t)\sqrt{\Delta t}, \tag{2.33}$$

kde Δt je časová změna, $\varepsilon(t)$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením a $dx(t)$ bylo nahrazeno výrazem

$$\Delta x(t+\Delta t) = x(t+\Delta t) - x(t). \tag{2.34}$$

Ze simulací prvních tří hlavních komponent se zpět dopočítají simulace potřebných bodů na výnosové křivce.

Ověření vhodnosti modelu pomocí porovnání statistik historické časové řady výnosových křivek českého peněžního trhu v období 1998–2006 (vstupní data modelu) a statistik zkonstruovaných simulací předkládá práce (Kladívko, 2011).

2.3 Braceův-Gatarekův-Musielův model

V této kapitole popíši Braceův-Gatarekův-Musielův model, který patří do skupiny tržních modelů, díky čemuž je také nazýván LIBOR Market Model. Obecné informace týkající se tržních modelů byly již obsahem části 1.3.4.

BGM model je mezi kvantitativními analytiky velmi populární a často užívaný. Důvodem je především jeho přímočarost v modelování, která umožňuje modelování tržních sazeb, a konzistence s Blackovými formulemi pro oceňování capů/floorů a swapcí. Vytvořili jej v roce 1994 Miltersen, Sandmann a Sondermann (1997), poté v roce 1995 model vylepšili do podoby aplikovatelné v praxi Brace, Gatarek a Musiela (1997). Do současné podoby pak model upravil Jamshidian (1997), přičemž využil abstraktní formulaci BGM modelu z (Musiela a Rutkowski, 1997). Tuto podobu modelu BGM zde budu prezentovat.

V následujícím textu se zaměřím zejména na praktickou aplikaci modelu BGM s využitím především (Gatarek a kol., 2007). Pro důkladný popis podkladové teorie stejně jako pro odvození BGM modelu lze odkázat například na literaturu uvedenou v předchozím odstavci.

Nejprve bude zavedeno značení. Řada

[3] Například pomocí aplikace Nelsonova-Siegelova modelu nebo pomocí splinů.

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_m \tag{2.35}$$

značí posloupnost časových okamžiků, kde vzdálenost mezi sousedními okamžiky je konstantní a bude se značit δ, tedy konkrétně

$$\delta = T_n - T_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.36}$$

Forwardová úroková míra $F(t, T_{n-1}, T_n)$ v čase t pro období (T_{n-1}, T_n) se v této kapitole bude označovat zkráceným tvarem $F_n(t)$. Mezi forwardovou úrokovou míru a diskontním faktorem $B(t, T)$, jenž byl již přesně vysvětlen v podkapitole 1.1, platí vztah

$$F_n(t) = \delta^{-1} \left[\frac{B(t, T_{n-1})}{B(t, T_n)} - 1 \right]. \tag{2.37}$$

Wienerův proces pod forwardovou mírou $W_{T_k}(t)$ (pro zjednodušení zápisu se dále bude značit $W_k(t)$) je definován následovně

$$W_k(t) = W(t) + \int_0^t \Sigma(s, T_k) ds, \tag{2.38}$$

kde $\Sigma(t, T)$ je volatilita diskontního faktoru $B(t, T)$ a Wienerův proces $W(t)$ byl již definován v kapitole 1.1. Detailnější vysvětlení pojmu Wienerův proces pod forwardovou mírou obsahuje například (Gatarek a kol., 2007).

Nyní jsou známy všechny pojmy pro představení stěžejního procesu BGM modelu, konkrétně procesu forwardové úrokové míry. $F_n(t)$ se v BGM modelu pod forwardovou mírou řídí procesem

$$dF_n(t) = F_n(t)\gamma_n(t) \cdot dW_n(t), \tag{2.39}$$

kde deterministická funkce $\gamma_n(t)$ je volatilita příslušné forwardové úrokové míry.

2.3.1 Odhad parametrů

Pro modelování forwardových sazeb podle BGM modelu je třeba odhadnout volatility forwardových sazeb. Existují dva hlavní přístupy – odhad parametrů na základě volatilit capů a odhad parametrů na základě volatilit swapcí. Jsou-li k dispozici volatility capů i volatility swapcí, je pak vhodné zvolit k odhadu parametrů volatility toho instrumentu, který je svým charakterem blíže k oceňovanému derivátu. Algoritmů pro odhad parametrů je celá řada, viz například (Rebonato, 2002) či (Brigo a Mercurio, 2001).

V této práci bude k odhadu parametrů použit lokálně jednofaktorový přístup (Locally Single Factor Approach), který využívá volatility swapcí. V následujícím textu bude zavedeno potřebné značení a následně bude představena tato metoda odhadu.

Matice tržních volatilit swapcí se uspořádá do podoby

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \sigma_{1,4} & \cdots & \sigma_{1,m+1} & - & - & - & - \\ - & \sigma_{2,3} & \sigma_{2,4} & \cdots & \sigma_{2,m+1} & \sigma_{2,m+2} & - & - & - \\ - & - & \sigma_{3,4} & \cdots & \sigma_{3,m+1} & \sigma_{3,m+2} & \sigma_{3,m+3} & - & - \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ - & - & - & \cdots & \sigma_{m,m+1} & \sigma_{m,m+2} & \sigma_{m,m+3} & \cdots & \sigma_{m,M} \end{bmatrix},$$

kde prvek $\sigma_{i,j}$ je volatilita swapce, která expiruje v čase T_i a případný swap se týká období (T_i, T_j). Tedy lze vidět, že uvažováním swapcí přibyly další časové okamžiky až do času T_M:

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_m < \ldots < T_M. \tag{2.40}$$

Kovarianční matice forwardových sazeb se bude značit

$$\mathbf{\Phi}^i = \begin{bmatrix} \varphi^i_{1,1} & \varphi^i_{1,2} & \varphi^i_{1,3} & \cdots & \varphi^i_{1,m} \\ \varphi^i_{2,1} & \varphi^i_{2,2} & \varphi^i_{2,3} & \cdots & \varphi^i_{2,m} \\ \varphi^i_{3,1} & \varphi^i_{3,2} & \varphi^i_{3,3} & \cdots & \varphi^i_{3,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^i_{m,1} & \varphi^i_{m,2} & \varphi^i_{m,3} & \cdots & \varphi^i_{m,m} \end{bmatrix} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

kde

$$\varphi^i_{kl} = \int_0^{T_i} \gamma_l(t) \cdot \gamma_k(t) dt \quad \text{pro} \quad i < k \quad \text{a} \quad i < l, \tag{2.41}$$

v ostatních případech, kdy platí $i \geq k$ nebo $i \geq l$, není prvek matice φ^i_{kl} definovaný. Pro následující výpočty bude třeba znalost parametrů $R^k_{i,j}(0)$, které se určí podle vzorce

$$R^k_{i,j}(0) = \frac{B(0, T_{k-1}) - B(0, T_k)}{B(0, T_i) - B(0, T_j)} \quad \text{pro} \tag{2.42}$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad j = i+1, \ldots, (M-m)+i \quad \text{a} \quad k = i+1, \ldots, j.$$

Lokálně jednofaktorový přístup je založen na předpokladu, že kovarianční matice $\mathbf{\Phi}^i$ jsou jednofaktorové, což znamená, že platí rovnosti

$$\varphi^i_{kl} - \varphi^{i-1}_{kl} = \varphi^i_k \varphi^i_l \qquad \text{a} \qquad \varphi^0_{kl} = 0. \tag{2.43}$$

Na základě tohoto předpokladu lze odvodit následující vztahy

$$\varphi^k_{k+1} = \sqrt{\delta_k \sigma^2_{k,k+1} - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\varphi^j_{k+1}\right)^2}, \tag{2.44}$$

$$\varphi_l^k = \frac{\sqrt{\delta_k \sigma_{k,l}^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=k+1}^{l} R_{k,l}^i(0) \varphi_i^j \right)^2} - \sum_{i=k+1}^{l-1} R_{k,l}^i(0) \varphi_i^k}{R_{k,l}^l(0)}, \tag{2.45}$$

kde $\delta_k = T_k - T_0$.

Jedna z možných cest, jak odvodit volatility forwardových sazeb $\gamma_n(t)$, je předpokládat, že volatility jsou v daných časových intervalech konstantní a závisejí pouze na maturitě podkladové forwardové sazby. Při takovém předpokladu platí

$$\gamma_n(t) = \gamma_n \qquad \text{pro} \quad \forall t \in [0, T_{n-1}] \tag{2.46}$$

Potom platí

$$\varphi_{kl}^i = \int_0^{T_i} \gamma_l(t) \cdot \gamma_k(t) dt = \int_0^{T_i} \gamma_l \cdot \gamma_k dt = \gamma_l \gamma_k \delta_i, \tag{2.47}$$

Cílem je nyní odhad volatilit $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m$. Forwardová sazba $F_1(t)$ pro období (T_0, T_1) je v aktuálním čase $T_0 = 0$ současně i spotovou sazbou, která se do budoucnosti nemodeluje, a tudíž se neodhaduje ani volatilita γ_1. Ze vzorce (2.47) pro $k = l$ a $i = 1$ se dostane

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{\varphi_{kk}^1}{\delta_1}} = \sqrt{\frac{\varphi_k^1 \varphi_k^1}{\delta_1}} = \frac{\varphi_k^1}{\sqrt{\delta_1}}, \tag{2.48}$$

kde druhá rovnost plyne ze vztahů

$$\varphi_{kk}^1 - \varphi_{kk}^0 = \varphi_k^1 \varphi_k^1 \qquad \text{a} \qquad \varphi_{kk}^0 = 0. \tag{2.49}$$

Tudíž pro odhad volatilit stačí určit hodnoty φ_k^1 pro $k = 2, 3, \ldots, m$ podle vzorců (2.44) a (2.45).

2.3.2 Aproximace forwardových sazeb

V situaci Heathova-Jarrowova-Mortonova přístupu jsou všechny forwardové sazby vyjádřeny pomocí deterministické funkce, toto ale u BGM modelu neplatí. Nyní bude popsána jedna z možných aproximací, díky které je i v případě BGM modelu možné vyjádřit forwardové sazby deterministickou funkcí.

Pro zjednodušení zápisu vzorců v této podkapitole bude zavedena pro případ $k \leq n$ úmluva

$$\sum_{j=n+1}^{k} a_j = -\sum_{j=k+1}^{n} a_j. \tag{2.50}$$

Dále je potřeba definovat pojmy potřebné pro odvození aproximace forwardových sazeb vycházející z BGM modelu. BGM martingal $M_k^n(t)$ se určí dle vztahu

$$M_k^n(t) = \int_0^t \gamma_n(u) \cdot dW_k(u). \tag{2.51}$$

Výraz $C_{mn}(s,t)$ představuje BGM kovarianci forwardových sazeb v časovém intervalu (s,t):

$$C_{mn}(s,t) = \int_s^t \gamma_n(u) \cdot \gamma_m(u) du. \tag{2.52}$$

Při aproximaci se bude uvažovat jedno-dimenzionální případ, kde platí

$$\gamma_n(t) = \beta_n \gamma(t). \tag{2.53}$$

Potom BGM martingal $M_k^n(t)$ lze zjednodušit na tvar

$$M_k^n(t) = \int_0^t \gamma_n(u) \cdot dW_k(u) = \beta_n M_k(t), \tag{2.54}$$

kde

$$M_k(t) = \int_0^t \gamma(u) dW_k(u). \tag{2.55}$$

A také BGM kovariance $C_{mn}(s,t)$ získá jednodušší tvar

$$C_{mn}(s,t) = \int_s^t \gamma_n(u) \cdot \gamma_m(u) du = \beta_n \beta_m \int_s^t |\gamma(u)|^2 \, du. \tag{2.56}$$

Pro následující konstrukci binomického stromu byla vybrána lognormální aproximace sazeb $F_n^D(t)$, více informací viz (Daniluk a Gatarek, 2005), která se řídí rovnicí

$$F_n^D(t) = F_n(0) \exp\left[M_k^n(t) - \frac{1}{2} C_{nn}(0,t)\right] Z_k^n\left(M_k(t), t\right), \tag{2.57}$$

kde

$$Z_k^n\left(M_k(t), t\right) = \mathrm{E}_k\left\{\exp\left[-\int_0^t \sum_{j=n+1}^{k} \frac{\delta F_j^D(u) \gamma_k(u) \cdot \gamma_j(u)}{1 + \delta F_j^D(u)} du\right] \mid M_k(t)\right\} \tag{2.58}$$

a E_k (v přesnějším tvaru zápisu E_{T_k}) je střední hodnota vzhledem k forwardové míře. Poté je ještě třeba přiblížit proměnou k, tato proměnná souvisí se zvoleným numeraire $B(t,T_k)$. Vysvětlení významu numeraire při konstrukci BGM modelu lze nalézt v (Brace a kol., 1997).

Pro větší přehlednost zápisu bude zavedeno označení

$$A_k^n(s,t) = \exp\left[-\int_s^t \sum_{j=n+1}^{k} \frac{\delta F_j^D(u)\gamma_k(u)\cdot\gamma_j(u)}{1+\delta F_j^D(u)}du\right]. \tag{2.59}$$

Potom lze rovnici (2.58) jednodušeji zapsat ve tvaru

$$Z_k^n\left(M_k(t),t\right) = \mathrm{E}_k\left[A_k^n(0,t) \mid M_k(t)\right]. \tag{2.60}$$

Tuto rovnici lze dále upravit do podoby

$$\begin{aligned} Z_k^n\left(M_k(t),t\right) &= \mathrm{E}_k\left\{\mathrm{E}_k\left[A_k^n(0,t) \mid M_k(u), s\le u\le t\right] \mid M_k(t)\right\} \\ &= \mathrm{E}_k\left\{\mathrm{E}_k\left[A_k^n(0,s) \mid M_k(u), s\le u\le t\right] A_k^n(s,t) \mid M_k(t)\right\} \\ &= \mathrm{E}_k\left[Z_k^n\left(M_k(s),s\right) A_k^n(s,t) \mid M_k(t)\right], \end{aligned} \tag{2.61}$$

kde platí vztah $s \le t$ a tento vztah mezi proměnnými s a t se bude předpokládat i dále. Integrál v $A_k^n(s,t)$ lze aproximovat Eulerovou metodou do podoby

$$A_k^n(s,t) \cong \exp\left[-\sum_{j=n+1}^{k} \frac{\delta F_j^D(s)}{1+\delta F_j^D(s)} C_{jn}(s,t)\right]. \tag{2.62}$$

Z rovnice (2.61) a (2.62) se získá

$$Z_k^n\left(M_k(t),t\right) \cong \mathrm{E}_k\left\{Z_k^n\left(M_k(s),s\right)\exp\left[-\sum_{j=n+1}^{k} \frac{\delta F_j^D(s)}{1+\delta F_j^D(s)} C_{jn}(s,t)\right] \mid M_k(t)\right\}. \tag{2.63}$$

Nyní je vzorec (2.57) spolu se vzorcem (2.63) rekurzivní definicí $F_n^D(t)$ pro situaci $n < k$. V opačné situaci $n \ge k$ se jedná o soustavu rovnic vedoucí na jednoznačné řešení, které lze získat aproximací.

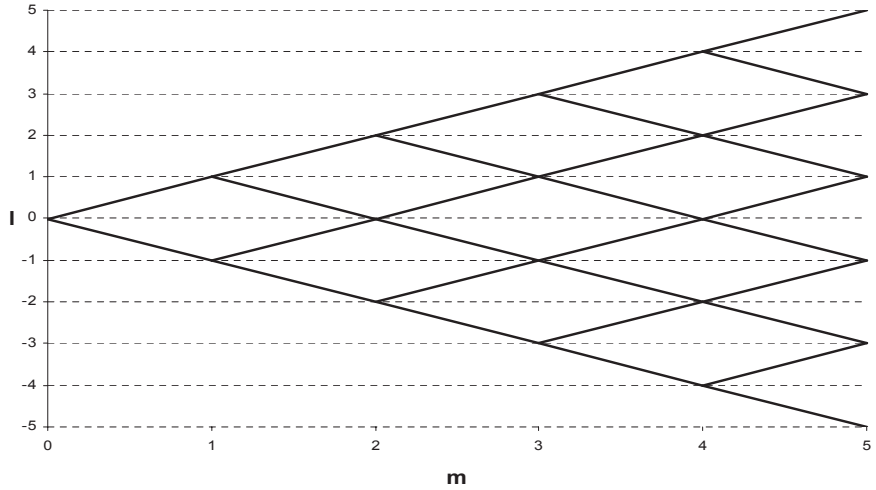
2.3.3 Binomický strom

Tato část se bude zabývat numerickou konstrukcí binomického stromu. Uvažuje se binomický strom v podobě, viz obrázek 2.1. Uzly binomického stromu jsou označeny souřadnicemi m (horizontální) a l (vertikální). Jelikož použitá metoda pro odhad parametrů předpokládá, že volatility jsou v daných časových intervalech konstantní, a aproximace uvažuje jedno-dimenziální případ, dostává se

$$\gamma_n(t) = \beta_n\gamma(t) = \beta_n \qquad \text{a} \qquad \gamma(t) = 1. \tag{2.64}$$

Z čehož plyne, že BGM martingal $M_k^n(t)$ lze zapsat ve tvaru

$$M_k^n(t) = \int_0^t \gamma_n(u)\cdot dW_k(u) = \beta_n W_k(t) \tag{2.65}$$



Obrázek 2.1: Binomický strom

a BGM kovariance $C_{mn}(s,t)$ pak získá na tvar

$$C_{mn}(s,t) = \int_s^t \gamma_n(u) \cdot \gamma_m(u) du = \beta_n \beta_m (t-s). \tag{2.66}$$

Na základě zjednodušení vzorců pro BGM martingal $M_k^n(t)$ a BGM kovarianci $C_{mn}(s,t)$ lze vzorce (2.57) a (2.63) přepsat na tvar

$$F_n^D(t) = F_n(0) \exp\left[\beta_n W_N(t) - \frac{1}{2}\beta_n^2 t\right] Z_N^n\left(W_N(t), t\right), \tag{2.67}$$

kde

$$Z_N^n\left(W_N(t), t\right) \cong \tag{2.68}$$
$$\mathrm{E}_N\left\{ Z_N^n\left(W_N(t-\Delta t), t-\Delta t\right) \exp\left[-\sum_{j=n+1}^{N} \frac{\delta F_j^D(t-\Delta t)\beta_n \beta_j \Delta t}{1+\delta F_j^D(t-\Delta t)} \right] \mid W_N(t) \right\}$$

a Δt je velikost časového kroku v binomickém stromě. Lze si všimnout, že proměnná k zde přešla v konkrétnější N, které se určí dle nejvyššího indexu forwardových úrokových sazeb, jež se budou modelovat. Například budou-li se modelovat forwardové úrokové sazby $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ a $F_4(t)$, potom platí $N = 4$. Proces $F_n^D(t)$ nyní závisí jen na jedno-dimenzionálním Wienerově procesu $W_N(t)$ a proto může být modelovaný pomocí binomického stromu. V každém uzlu konstruovaného stromu je pak $F_n^D(t)$ aproximováno:

$$\widehat{F}_n^D(m,l) = F_n(0)\widehat{Z}^n(l,m) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta_n^2 m\Delta t + \beta_n \widehat{W}(m)\right], \tag{2.69}$$

kde Markovovův řetězec $\widehat{W}(m)$ aproximuje Wienerův proces a je definován jako

$$\begin{aligned}\widehat{W}(0) &= 0\\ \widehat{W}(m) &= \widehat{W}(m-1)+\sqrt{\Delta t} \qquad \text{s pravděpodobností 0,5}\\ &= \widehat{W}(m-1)-\sqrt{\Delta t} \qquad \text{s pravděpodobností 0,5}\end{aligned} \tag{2.70}$$

a

$$\widehat{W}(m,l) = l\sqrt{\Delta t}. \tag{2.71}$$

Diskrétní proces $\widehat{Z}^n(l,m)$ aproximuje $Z_N^n\left(W_N(t),t\right)$ a je definován rekurzivně

$$\begin{aligned}&\widehat{Z}^n(l,m) = \\ &\quad \mathrm{E}_N\left\{\widehat{Z}^n(\cdot,m-1)\cdot\exp\left[-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{\delta\widehat{F}_j^D(m-1,\cdot)\beta_n\beta_j\Delta t}{1+\delta\widehat{F}_j^D(m-1,\cdot)}\right] \mid \widehat{W}(m)=l\sqrt{\Delta t}\right\}.\end{aligned} \tag{2.72}$$

Do uzlu (m,l) se v uvažovaném binomickém stromě lze dostat ze dvou možných uzlů – z dolního uzlu $(m-1,l-1)$ a z horního uzlu $(m-1,l+1)$ v případě, že se uzel (m,l) nenachází na okraji či na počátku binomického stromu. Po této úvaze se dostane

$$\begin{aligned}&\widehat{Z}^n(l,m) = \\ &\qquad P_{Hi}(m,l)\cdot\widehat{Z}^n(l+1,m-1)\cdot\exp\left[-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{\delta\widehat{F}_j^D(m-1,l+1)\beta_n\beta_j\Delta t}{1+\delta\widehat{F}_j^D(m-1,l+1)}\right]\\ &+\quad P_{Low}(m,l)\cdot\widehat{Z}^n(l-1,m-1)\cdot\exp\left[-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{\delta\widehat{F}_j^D(m-1,l-1)\beta_n\beta_j\Delta t}{1+\delta\widehat{F}_j^D(m-1,l-1)}\right].\end{aligned} \tag{2.73}$$

$P_{Hi}(m,l)$ je podmíněná pravděpodobnost, že uzel (m,l) byl dosažen z uzlu $(m-1,l+1)$ za podmínky, že byl dosažen uzel (m,l). $P_{Low}(m,l)$ je podmíněná pravděpodobnost, že uzel (m,l) byl dosažen z uzlu $(m-1,l-1)$ za podmínky, že byl dosažen uzel (m,l). A $P(m,l)$ je nepodmíněná pravděpodobnost, že byl dosažen uzel (m,l). Potom platí

$$P_{Low}(m,l) = \frac{P(m-1,l-1)\cdot 0{,}5}{P(m,l)}, \qquad P_{Hi}(m,l) = \frac{P(m-1,l+1)\cdot 0{,}5}{P(m,l)}, \tag{2.74}$$

$$P(m,l) = 0{,}5\cdot P(m-1,l-1) + 0{,}5\cdot P(m-1,l+1) \tag{2.75}$$

a

$$P(1,-1) = P(1,1) = 0{,}5. \tag{2.76}$$

Na základě těchto vztahů lze jednoduše rekurzivně dopočítat pravděpodobnosti $P(m,l)$, $P_{Hi}(m,l)$ a $P_{Low}(m,l)$ pro každý uzel binomického stromu. Uvažuje-li se velký počet časových kroků v binomickém stromě, může nastat situace, že některé hodnoty $P(m,l)$ budou již tak malá kladná čísla, že je software bude považovat za nulová. Proto je vhodné přidat podmínku: je-li $P(m,l) = 0$ potom i $P_{Hi}(m,l) = 0$ a $P_{Low}(m,l) = 0$, jinak nastane nedefinovaná situace, kdy je do jmenovatele dosazena nula.

2.3.4 Simulace

Tato část popíše, jak se ze zkonstruovaného binomického stromu získají simulace forwardových sazeb.

Bude se postupovat od konce binomického stromu a proměnná M bude značit počet časových kroků v binomickém stromě. Z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0,1)$ se vygeneruje hodnota X, která určí na základě pravděpodobností $P(M,l)$ v koncových uzlech stromu koncový uzel pro aktuální generovanou simulaci (pravděpodobnosti $P(M,l)$ dají v součtu logicky hodnotu 1):

$$l_M = \min\left\{k : \sum_{l\leq k} P(M,l) \geq X\right\}. \tag{2.77}$$

Získá se tak koncový uzel (M, l_M) pro aktuálně generovanou simulaci. Následně se určí uzel pro generovanou simulaci v čase $M-1$ na základě podmíněných pravděpodobností $P_{Hi}(M,l_M)$ a $P_{Low}(M,l_M)$ (jenž logicky i v tomto případě dávají v součtu hodnotu 1). Opět se vygeneruje hodnota z rovnoměrného rozdělení $(0,1)$, pokud je vygenerovaná hodnota menší nebo rovna $P_{Low}(M,l_M)$, potom se pro aktuální simulaci uvažuje uzel $(M-1, l_M-1)$, a je-li větší jak $P_{Low}(M,l_M)$, pak se postupuje do uzlu $(M-1, l_M+1)$. Tento poslední krok se opakuje až do času $m = 1$. Je samozřejmě třeba dát pozor na situace, kdy se dojde na horní, respektive na dolní, okraj stromu, potom pravděpodobnost $P_{Hi}(m,l)$, respektive $P_{Low}(m,l)$, je nulová a jsou již jednoznačně určeny zbylé uzly simulace.

Kapitola 3

Aplikace modelů úrokových měr

V této kapitole provedu predikci dynamiky výnosové křivky peněžního trhu v eurozóně a v České republice pomocí modelů CIR, GP a BGM pro období, která jsou charakteristická různou mírou likviditního a kreditního rizika stejně jako regulací trhu. Konkrétně budu analyzovat chování modelů v období před začátkem finanční krize, tj. v období od 1. července 2005 do 2. července 2007, v období finanční krize, tj. od 2. ledna 2008 do 4. ledna 2010, a v období po odeznění finanční a dluhové krize, tj. od 2. ledna 2013 do 2. ledna 2015. Charakteristickým rysem finančních trhů v obdobích po začátku finanční krize je zvýšená snaha o regulaci finančních trhů, nárůst likviditního a kreditního rizika a odlišné vztahy mezi jednotlivými finančními instrumenty a účastníky trhu oproti situaci, která platila před finanční krizí.

Je nutné zdůraznit, že všechny aplikované modely, stejně jako převážná většina v současnosti používaných modelů úrokových měr, vznikly v době před finanční krizí, kdy na finančních trzích platily odlišné podmínky a vztahy mezi ekonomickými subjekty, a proto je mým cílem ověřit, zda je možné tyto modely používat pro účely řízení rizik i v období po finanční krizi aplikované navíc na sazby českého trhu, který stále vykazuje znaky nedostatečné rozvinutosti.

Dále je nutné uvést, že modely BGM a CIR byly primárně zkonstruovány pro účely oceňování finančních derivátů navázaných na úrokové míry v rozvinutých ekonomikách s rozvinutými a likvidními finančními trhy. Použití modelu BGM pro účely řízení úrokového rizika portfolia, tj. pro získání predikcí pravděpodobnostních rozdělení úrokových výdajů a příjmů portfolia, není v praxi příliš obvyklé z důvodu jeho komplikovanosti. Přesto model BGM pro tento cíl využiji, protože jeho komplexnost a možnost odhadu parametrů z aktuálních kotací volatilit swapcí mohou vést k výraznému zkvalitnění predikcí. Využití modelu CIR pro předpovědi není taktéž příliš obvyklé především díky faktu, že proces popisuje dynamiku teoretické na trhu nepozorovatelné okamžité úrokové míry, která musí být aproximována některou z pozorovatelných úrokových měr, a navíc dynamika výnosové křivky není výstupem modelu, nýbrž funkcí okamžité úrokové míry. I přes tato omezení použiji model CIR pro získání předpovědí dynamiky výnosové křivky v ČR i eurozóně a poté porovnám získané výsledky s ostatními aplikovanými

modely. Pokud by model CIR vykazoval podobnou nebo dokonce vyšší přesnost predikcí, bylo by výhodné používat tento model pro účely řízení rizik vzhledem k tomu, že jeho aplikace je především díky existenci explicitního řešení oceňovací PDE méně náročná ve srovnání s ostatními modely úrokových měr.

Oproti modelům CIR a BGM neobsahuje model GP omezení na existenci arbitráže, a proto jeho použití pro účely oceňování finančních derivátů úrokové míry není možné. Pokud tedy vykáží predikce dynamiky výnosové křivky učiněné pomocí tohoto modelu horší vlastnosti oproti ostatním analyzovaným modelům, je výhodnější pro účely predikcí využít modely s omezením na existenci arbitráže. Stále však platí, že aplikace modelu GP je ve srovnání s modelem BGM méně náročná, a proto při podobné predikční schopnosti obou modelů je výhodnější využití modelu GP i přes absenci omezení na existenci arbitráže.

Pomocí modelů CIR, GP a BGM nejprve provedu odhad dynamiky výnosové křivky peněžního trhu s predikčním horizontem dvou let. Tento odhad provedu v prostředí eurozóny, tj. vyspělého finančního trhu, a v prostředí českého finančního trhu, který je stále relativně málo rozvinutý. Predikce dynamiky výnosové křivky popíši pomocí simulací několika vybraných úrokových sazeb s různými splatnostmi, konkrétně pak se splatnostmi 3 měsíce, 6 měsíců a dále pak se splatnostmi vzdálenými od sebe jeden rok počínaje splatností 1 rok a konče splatností 15 let u CZK křivky a 20 let u EUR křivky. Všechny simulace provedu s denní frekvencí. V případě potřeby je možné z těchto simulací zkonstruovat výnosovou křivku peněžního trhu k libovolnému dni, který výsledné simulace pokrývají. Pro konstrukci výnosové křivky lze využít například metody popsané v podkapitole 4.1, která se zabývá konstrukcí výnosové křivky. Odhady parametrů všech uvažovaných modelů jsou provedeny vždy k datu 1. července 2005, 2. ledna 2008 a 2. ledna 2013. Simulace jsou poté zkonstruovány ke stejným datům, ke kterým byly provedeny odhady parametrů, na následující dva roky s denní frekvencí. Například tedy simulace pro období finanční krize jsou konstruovány na základě odhadu parametrů příslušného modelu uskutečněného k datu 2. ledna 2008 se simulačním horizontem do počátku roku 2010. Krach Lehman Brothers, který zásadním způsobem prohloubil v té době již poměrně vážnou finanční krizi, nastal v září 2008, tj. přibližně v jedné třetině simulačního období. V následném kroku porovnám výsledné simulace jednotlivých úrokových sazeb s již známým skutečným vývojem příslušné sazby.

Je nutné upozornit, že při znalosti denních simulací konkrétní úrokové sazby je možné zkonstruovat budoucí pravděpodobnostní rozdělení této sazby k libovolnému dni v rámci simulačního horizontu. Pro konstrukci pravděpodobnostního rozdělení mohou být využity například jádrové funkce. Pro více informací o jádrových funkcích lze odkázat například na (Silverman, 1986). V této práci využívám při konstrukci pravděpodobnostních rozdělení jádrovou funkci s normálním rozdělením. Možnost konstrukce předpovědi pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých úrokových sazeb k libovolnému datu má významný dopad na kvalitu řízení úrokového rizika, neboť kromě bodové předpovědi je možné přiřadit konkrétní pravděpodobnost určitému výsledku, zkonstruovat očekávanou hodnotu předpovědi a samozřejmě též libovolné kvantily předpovědi. Ob-

zvláště pak vyjádření páru 1% a 99% nebo 5% a 95% kvantilů je zásadní. V této práci vždy u každé simulace ke každému uvažovanému dni stanovím střední hodnotu a 1% a 99% kvantil simulací. Na základě těchto ukazatelů pak lze konstruovat například očekávanou hodnotu úrokových výdajů nebo ukazatele typu Cost at Risk, tj. stanovit pravděpodobnost, že úrokové náklady nepřekročí s 99% pravděpodobností určitou hranici nebo naopak, že určitou hranici s 99% pravděpodobností překročí.

V této kapitole dále provedu přesnější analýzu předpovědní schopnosti jednotlivých modelů. V každém analyzovaném období zkonstruuji predikce úrokových sazeb v podobě jednoletých simulací k přibližně 52 různým dnům. První množina jednoletých simulací v daném analyzovaném období bude konstruována ke stejnému dni jako dvouleté simulace, tj. k 1. červenci 2005, k 2. lednu 2008 a k 2. lednu 2013. Následující druhá množina jednoletých simulací bude provedena k datu o jeden týden déle a počátek každé následující množiny jednoletých simulací bude rovněž posunut o jeden týden dále. Toto posunutí provádím po dobu jednoho roku. Poslední množina jednoletých simulací v daném analyzovaném období bude pak konstruována k datu 3. července 2006, resp. 2. ledna 2009, resp. 2. ledna 2014. Tímto způsobem získám pro každé analyzované období a pro každý aplikovaný model úrokových měr predikce úrokových sazeb tvořící výnosovou křivku k přibližně 52 různým dnům. Výsledné jednoleté simulace poté porovnám se skutečným vývojem příslušné sazby. K hodnocení zkonstruovaných jednoletých simulací nejprve vybuduji a aplikuji ucelený systém tří kritérií a dále k hodnocení využiji statistický Berkowitzův test.

Dvouletý simulační horizont považuji pro analýzu předpovědní schopnosti jednotlivých modelů za dostatečný, přestože v některých situacích jsou používány i delší předpovědní horizonty. Dvouletý simulační horizont je taktéž vhodný i vzhledem k faktu, že cíl této práce se nalézá v popisu chování modelů úrokových měr během zcela odlišných situací na finančních trzích, a díky delšímu simulačnímu horizontu by došlo především u období finanční krize k překročení tohoto období. Konstrukcí třikrát cca 52 množin jednoletých simulací v zcela odlišných tržních podmínkách jsem využila maximální možný prostor daný délkou nejkratšího z uvažovaných období, obdobím finanční krize.

Z praktických kapacitních důvodů a taktéž vzhledem k vysoké vzájemné korelaci jednotlivých splatností prezentuji v této práci pouze výsledné simulace popisující vývoj 1leté, 5leté, 10leté a 15leté sazby.

Vzhledem k zásadní proměně charakteru finančních trhů po finanční krizi a k redefinici vztahů platných na těchto trzích, uvedu v úvodu této kapitoly stručný popis změn, které se udály na finančních trzích v eurozóně a České republice po začátku finanční krize. Porozumění těmto změnám a zasazení vztahů platných na finančních trzích do celkového kontextu nového nastavení monetárních politik centrálních bank a regulatorních opatření, je klíčové pro používání modelů úrokových měr v praxi.

V rámci popisu změn charakteru finančních trhů se v této kapitole zaměřím i na analýzu vývoje volatility výnosových křivek peněžního trhu v ČR a eurozóně. Vývoj volatility výnosových křivek popíši jednak pomocí aplikace modelu GARCH při popisu

volatility úrokových sazeb s různými splatnostmi a dále pak pomocí vývoje tržních kotací volatilit swapcí. Popis volatility trhu pomocí těchto dvou přístupů je důležitý zejména díky faktu, že popis volatility pomocí modelu GARCH je založen na historických pozorováních, zatímco kotace volatility swapcí reprezentují aktuální očekávání budoucí volatility.

3.1 Data

V následujícím textu budou popsána data využívaná v této kapitole, přičemž v rámci zjednodušení bude v souladu s finanční terminologií označována splatnost v řádu měsíců příslušným číslem a zkratkou M (Month) a analogicky splatnost v řádu let zkratkou Y (Year), tj. například 6M označuje splatnost 6 měsíců a 10Y splatnost 10 let.

V této kapitole využívám časové řady sazeb peněžního trhu v eurozóně a v České republice. Konkrétně ze sazeb trhu v eurozóně využívám denní časové řady sazby EONIA[1] (Euro OverNight Index Average), sazby 3M, 6M a 9M EURIBOR[2] (Euro InterBank Offered Rate) a taktéž sazby IRS se splatnostmi od 1Y po jednom roce do 10Y a dále pak 15Y, 20Y, 25Y a 30Y. Všechny výše uvedené sazby mají společnou charakteristickou vlastnost takovou, že jsou pevně spojeny s měnou euro (EUR). Pokud by některá ze sazeb byla spojena s jinou měnou, nebylo by ji možné kombinovat s ostatními sazbami v EUR. Všechny časové řady výše uvedených úrokových EUR sazeb začínají 4. ledna 1999 a končí 31. prosince 2015.

Ze sazeb peněžního trhu v eurozóně dále využívám denních časových řad EUR OIS se stejnými splatnostmi jako mají výše uvedené EUR sazby EURIBOR a IRS, přičemž vybrané splatnosti do jednoho roku jsou kotovány od konce ledna roku 1999, tj. v podstatě od počátku existence eura. Do konce roku 1999 se pak začaly kotovat i ostatní splatnosti až do dvou let. Poté přibyly kotace 3Y splatnosti v březnu 2004 a zbývající EUR OIS do splatnosti 10 let se začaly kotovat během první poloviny roku 2005. EUR OIS se splatností od 11 do 30 let jsou kotovány počínaje květnem 2008. Z výše uvedených údajů je patrné, že OIS je ve srovnání s IRS relativně nový typ úrokových derivátů i na rozvinutém finančním trhu eurozóny. Konec EUR OIS časových řad je totožný s koncem časových řad EURIBOR a IRS.

Dále v této kapitole využívám denní časové řady matic kotací Blackovy volatility EUR ATM swapcí evropského typu v období od 1. ledna 2005 do 31. prosince 2015 s expiracemi 1M, 3M, 6M, 1Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 7Y, 10Y, 15Y, 20Y, 25Y a 30Y a

[1]Referenční úroková sazba pro mimoburzovní operace v eurozóně. EOINA je konstruována podobně jako sazby EURIBOR pro poskytnutí nezajištěného depozita se splatností 1 den. Výrazný rozdíl oproti sazbám EURIBOR je však ten, že EONIA je počítána jako průměrná sazba všech uskutečněných operací, zatímco sazby EURIBOR jsou určeny jako průměr kotací.

[2]Referenční úroková sazba pro mimoburzovní operace v eurozóně. Sazby EURIBOR jsou konstruovány jako průměrné indikace sazeb pro poskytnutí nezajištěného depozita příslušné splatnosti jiné bance v eurozóně referenční bankou. Celkem existuje 8 splatností nabízených depozit od 1 týdne do 1 roku.

podkladovými IRS se splatnostmi od 1Y po jednom roce do 10Y a poté do 30Y po pěti letech.

Konkrétně v případě modelu CIR používám pro odhad parametrů modelu celou dostupnou historii denních pozorování sazby 3M EUR OIS od počátku uveřejňování do data, k němuž jsou konstruovány odhady parametrů. V případě odhadu parametrů modelu GP používám denní pozorování sazeb EURIBOR a EUR IRS se splatností do 20 let začínající 4. ledna 1999, tj. na počátku existence eura, a s koncem k datu konstrukce odhadů. Pro účely odhadu parametrů modelu BGM využívám aktuální sazby EURIBOR a EUR IRS k datu konstrukce odhadu modelu se splatnostmi do 15 let a dále aktuální kotace Blackových volatilit EUR at-the-money swapcí evropského typu k datu konstrukce odhadu s expirací 3 měsíce a délkou podkladového IRS od 1 roku do 15 let.

Ze sazeb peněžního trhu v České republice využívám denní časové řady sazby CZEONIA[3] (CZEch OverNight Index Average), sazby PRIBOR[4] (Prague InterBank Offered Rate) a dále pak sazby IRS. V práci využívám sazby PRIBOR a IRS se stejnými splatnostmi jako u jejich protějšků v eurozóně, které byly popsány výše. Stejně jako u sazeb v eurozóně platí, že všechny použité sazby českého trhu jsou pevně svázané s českou korunou (CZK). Základní splatnosti sazeb PRIBOR jsou uveřejňovány od 1. dubna 1993. Sazby CZK IRS se splatností od jednoho roku do pěti let se kotují od 19. září 1996, CZK IRS se splatností šest let a sedm let se kotují od 21. listopadu 1996, splatnosti od osmi do desíti let se kotují od 11. února 1997, splatnosti od jedenácti do patnácti let se kotují od 25. srpna 2000, dvacetiletá splatnost je kotována počínaje 17. červencem 2002 a splatnosti nad dvacet let se kotují od 17. února 2004. Sazba CZEONIA je konstruována a uveřejňována od počátku roku 2002.

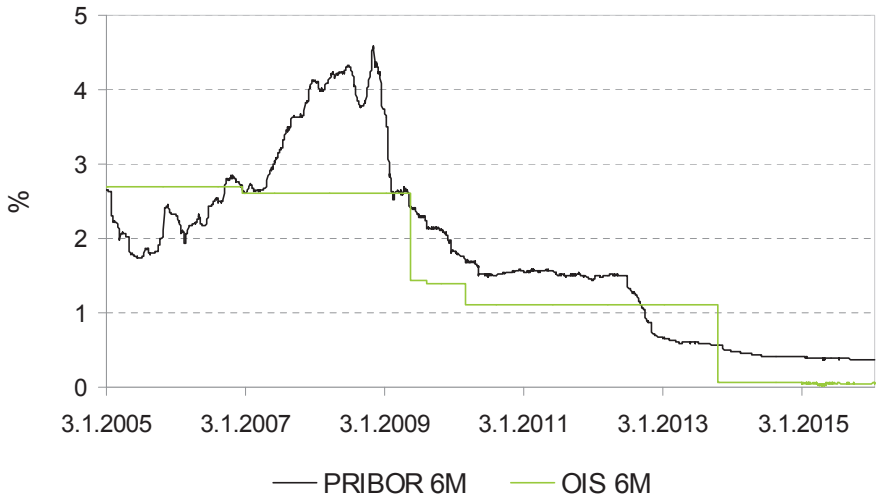
Dále v této kapitole používám denní časové řady CZK OIS. Vybrané splatnosti CZK OIS jsou kotovány od počátku srpna 2004, avšak kotace širšího rozsahu splatností CZK OIS jsou k dispozici až od 16. října 2013. CZK OIS zatím nejsou na trhu ještě příliš etablované a využívané, což se projevuje na kvalitě jejich kotací, díky čemuž je jejich využití pro konstrukci výnosové křivky peněžního trhu a popis její dynamiky nevhodné.

V případě modelu CIR používám pro odhad parametrů modelu celou dostupnou historii denních pozorování sazby 3M PRIBOR od počátku uveřejňování do data, k němuž jsou konstruovány odhady parametrů. V případě odhadu parametrů modelu GP používám z praktického důvodu denní pozorování sazeb PRIBOR a CZK IRS s počátkem 25. srpna 2000 a koncem k datu konstrukce odhadů, čímž získám maximální historii denních pozorování pro množinu splatností až do patnácti let. Pro účely odhadu parametrů modelu BGM využívám aktuální sazby PRIBOR a CZK IRS k datu konstrukce odhadu modelu se splatnostmi do 15 let.

Zdrojem dat použitých v této práci je primárně informační a analytický terminál Bloomberg.

[3] Analogie EONIA v České republice

[4] Analogie EURIBOR v České republice



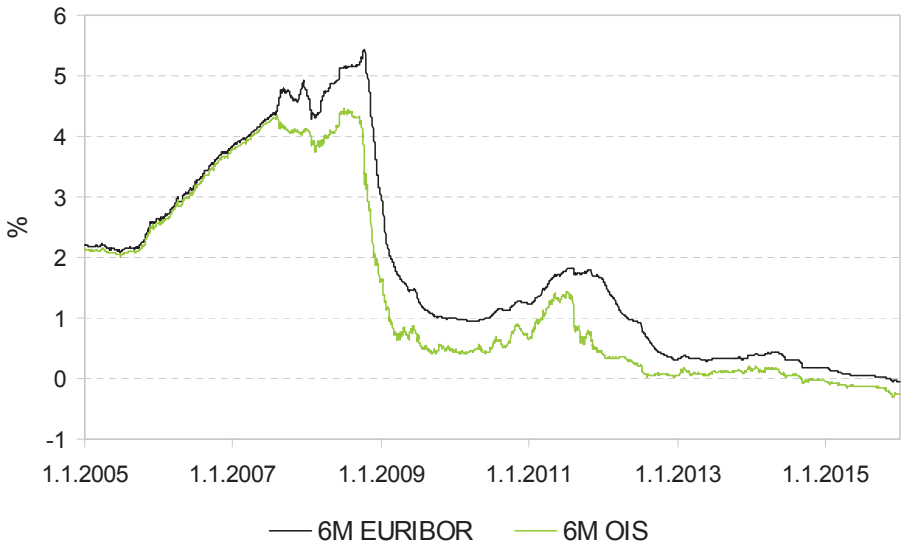
Obrázek 3.1: Vývoj sazeb 6M PRIBOR a 6M CZK OIS
Zdroj: Bloomberg

3.2 Změna charakteru trhu

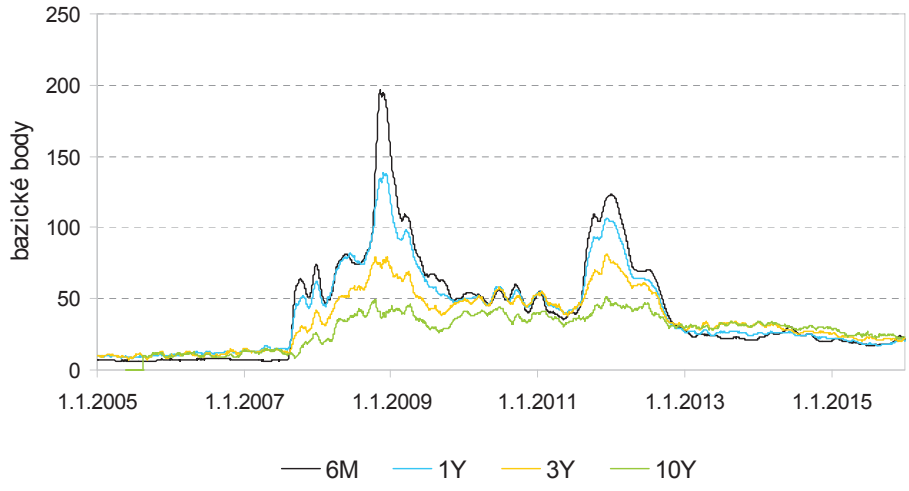
Poslední velká finanční krize začala v druhé polovině roku 2007 a způsobila otřesení důvěry v doposud známý finanční systém jako celek. Vztahy, které platily po desetiletí do počátku krize, byly najednou porušeny a finanční trh se začal chovat zcela odlišně oproti předpokladům, za nichž vznikaly populární úrokové modely. Například modely oceňující finanční aktiva byly konstruovány za předpokladů, že kreditní a likviditní riziko podkladového aktiva ovlivňuje cenu aktiva pouze marginálně.

Nárůst likviditního a kreditního rizika lze dobře dokumentovat na vývoji tržních kotací jednoduchých ale i složitějších úrokových instrumentů jako např. IRS, depozit, úrokových forwardů nebo swapcí, kde jsou vidět znatelné změny v charakteru jejich vývoje před krizí, tj. před polovinou roku 2007, v krizi, tj. mezi roky 2007–2011, a po krizi, tj. po roce 2011. Přibližně od poloviny roku 2007 vykazují primární úrokové sazby mezibankovního trhu vysoké bazické spready, tj. spready mezi stejně dlouhými instrumenty s rozdílnou frekvencí úročení. Stejný vývoj vykazují bazické spready zohledňující rozdíl mezi mezibankovní sazbou typu IBOR, tj. EURIBOR v eurozóně a PRIBOR v ČR, a EUR a CZK OIS. Vzhledem ke krátké splatnosti sazby ONIA lze považovat kreditní a likviditní riziko za minimální, což dělá z OIS swapů nejlepší aproximaci bezrizikových tržních sazeb mezi dostupnými sazbami na finančních trzích.

Vývoj sazby 6M PRIBOR a 6M CZK OIS zobrazený na obrázku 3.1 dokumentuje, že vzhledem k relativně málo rozvinutému a nelikvidnímu finančnímu trhu v ČR jsou OIS denominované v CZK velmi nelikvidní a jejich použití pro finanční analýzy je nevhodné. Pokud by však český finanční trh byl více rozvinutý, bylo by dle mého názoru vzhledem k otevřenosti ekonomiky ČR možné očekávat podobný vývoj bazických spreadů mezi PRIBOR/CZK IRS a CZK OIS jako vývoj spreadů mezi EURIBOR/EUR IRS a EUR OIS v eurozóně. Vývoj sazeb 6M EURIBOR a 6M OIS je zobrazen na obrázku 3.2.



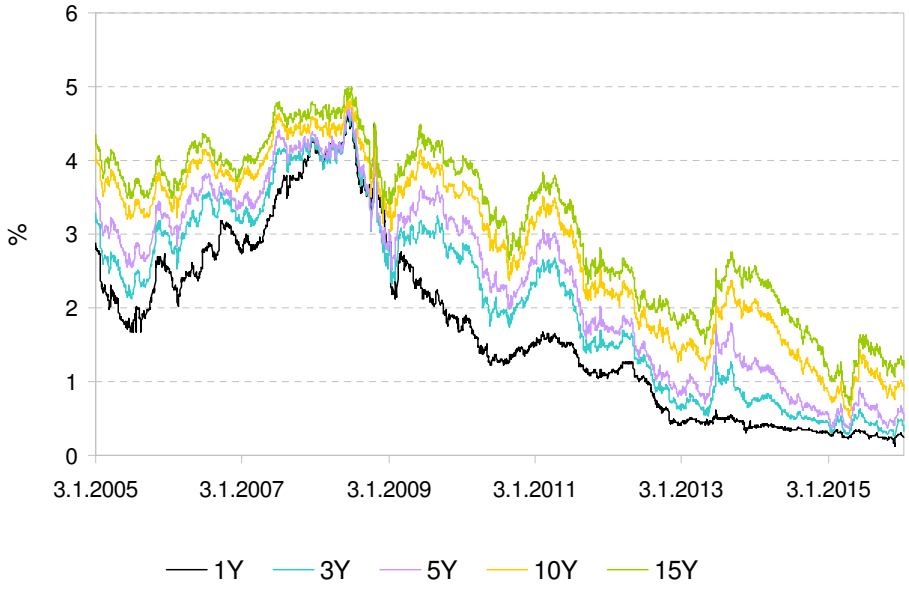
Obrázek 3.2: Vývoj sazeb 6M EURIBOR a 6M EUR OIS
Zdroj: Bloomberg



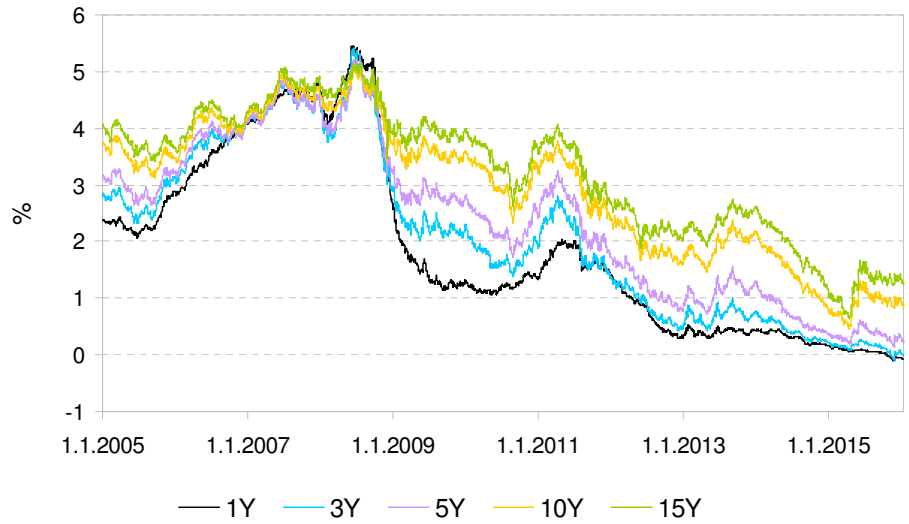
Obrázek 3.3: Vývoj bazických spreadů mezi EURIBOREM/IRS a EUR OIS
Pozn.: 30denní jednoduché klouzavé průměry
Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

Pro přesné vyjádření bazických spreadů je potřeba získat pomocí bootstrappingu bezkuponové křivky IBOR/IRS a OIS. Rozdíl těchto křivek je potom časová struktura bazických spreadů. Dynamika časové struktury bazického spreadu je zobrazena na obrázku 3.3 v podobě vývoje spreadů 6M, 1Y, 3Y a 10Y splatností. Z důvodu přehlednosti uvádím 30denní jednoduché klouzavé průměry bazických spreadů, díky čemuž dojde k potlačení jejich krátkodobé volatility při současném zdůraznění jejich dlouhodobého vývoje. Z obrázku 3.3 je patrné, že bazické spready ve všech čtyřech zobrazovaných splatnostech vykazují podobný vývoj, což lze očekávat, avšak tvar časové struktury bazických spreadů se mění. Před zářím 2007 bazické spready oscilovaly ve velmi úzkém pásmu o šíři cca 5 bazických bodů (b.b.). Po září 2007 začaly tyto spready vykazovat zvýšenou volatilitu a dosahovaly krátkodobě úrovně až 230 b.b. u 6měsíční splatnosti, až 150 b.b. u 1leté splatnosti, až 85 b.b. u 3leté splatnosti a až 50 b.b. u 10leté splatnosti. Po odeznění finanční krize ve 2. polovině 2009 lze pozorovat pokles bazických spreadů na úrovně cca 50–60 b.b. u 6M, 1Y a 3Y splatnosti a na úrovně cca 40 b.b. u 10Y splatnosti při zvýšené volatilitě těchto spreadů. Další výrazný nárůst bazických spreadů lze pozorovat v průběhu roku 2011 a hlavně pak v první polovině 2012. Tento nárůst se týká především splatností do 7let. V tomto období vrcholila v EU dluhová krize, kdy bylo zachraňováno Řecko a reálně hrozilo, že o pomoc budou muset požádat také ostatní země na periferii Evropy jako Itálie, Španělsko a Portugalsko. Uklidnění trhů přišlo po vytvoření záchranných programů EU a po vyhlášení neomezených nákupů dluhopisů postižených zemí na sekundárním trhu ze strany Evropské centrální banky (dále jen ECB). Od 2. poloviny roku 2012 se spready pohybují podobně jako před finanční krizí v úzkém intervalu širokém cca 10 b.b. avšak na úrovních o cca 30 b.b. vyšších než před krizí. Z obrázku 3.3 lze vyvodit zajímavý poznatek, že čím více jsou trhy ve stresu, tím více se rozšiřují rozdíly mezi hodnotami bazických spreadů jednotlivých splatností. Po roce 2013 se hodnoty jednotlivých bazických spreadů různých splatností začaly k sobě přibližovat, až v průběhu roku 2015 nabývaly všechny velmi podobné hodnoty a časová struktura bazických spreadů tak byla zcela plochá. Riziková prémie spojená s různě dlouhými IBOR/IRS je tedy téměř totožná.

Současný trend vedoucí k širšímu využívání OIS při aplikaci modelů úrokových měr je zřejmý, viz například (Smith, 2012). Nové přístupy v oceňování finančních derivátů, viz například již jmenovaná publikace (Morini a Bianchetti, 2013), pracují většinou s již před krizí známými modely úrokových měr, které se upravují o vliv vývoje ceny kolaterálu, jelikož v rámci ISDA smluv, podle kterých jsou uzavírány derivátové transakce, se Credit Support Annex upravující kolateralizaci stal tržním standardem. Tyto úpravy ve spojitosti s využívání OIS vedou k modelování několika křivek najednou. Pro praktické účely řízení úrokového rizika v českém prostředí je dle mého názoru využívání výše zmíněných přístupů nevhodné z následujících důvodů. Hlavním důvodem je fakt, že trh OIS není v České republice rozvinut, díky čemuž neexistují smysluplné kotace OIS, viz obrázek 3.1. Z tohoto důvodu nejsou OIS obsaženy v reálných portfoliích, když například převážná část úrokové expozice státního dluhu ČR a českých finančních institucí je navázána na sazby typu PRIBOR a klasické IRS. Využívání nějakého typu aproxi-



Obrázek 3.4: Vývoj vybraných sazeb CZK IRS
Zdroj: Bloomberg



Obrázek 3.5: Vývoj vybraných sazeb EUR IRS
Zdroj: Bloomberg

mace CZK OIS kotací by vedlo ke zkreslení skutečného úrokového rizika, kterému jsou vystavena portfolia zmíněných institucí. Dále ani využívání nějaké formy kolateralizace finančních derivátů není v českých podmínkách příliš rozšířeno na rozdíl od eurozóny.

Vývoj CZK IRS a EUR IRS je zobrazen na obrázku 3.4 a 3.5 a dokumentuje klesající charakter všech splatností IRS v letech 2009 až 2015 v České republice i v eurozóně.

Od roku 2008 dochází k různým formám ovlivnění přirozeného vývoje trhu v podobě zásahů ze strany centrálních bank a ostatních autorit. Nejsilnějším konvenčním nástrojem centrálních bank k ovlivnění mezibankovních sazeb je nastavení tzv. automatických facilit, tj. depozitní facilita pro depozita uložená u centrální banky a zápůjční facilita pro vypůjčení likvidity od centrální banky. Mimo konvenčně používané nástroje monetární politiky začaly centrální banky během finanční krize stejně jako po jejím skončení používat za účelem podpory ekonomiky a odvrácení hrozby deflace další mimořádné facility jako např. měnové intervence u České národní banky (dále jen ČNB) nebo dodávání v podstatě neomezené likvidity do bankovního systému ve formě dlouhodobých refinančních operací, podstatné rozšíření cenných papírů přijímaných jako kolaterály, nákup dluhopisů na sekundárním trhu nebo i primárním trhu, zavedení záporné depozitní sazby ve výši -10 b.b. v červnu 2014, další snížení této sazby v září 2014 na -20 b.b. a na -30 b.b. v prosinci 2015 u ECB. V lednu 2015 rozšířila ECB nákupy aktiv o dluhopisy vládních institucí, neboli zavedla kvantitativní uvolňování, v předpokládaném měsíčním objemu do 60 mld. EUR původně ohlášeného minimálně do září 2016 avšak dále prodlouženého do března 2017. Na počátku roku 2016 se však předpokládá, že ECB dále výrazně uvolní měnové podmínky a sníží depozitní sazbu dále do záporu, navýší a rozšíří nákupy aktiv a současně tyto nákupy dále prodlouží. Již před zahájením kvantitativního uvolňování bylo v systému poměrně velké množství volné likvidity, která buďto skončila zpět na účtech ECB nebo způsobovala růst cen finančních aktiv a související pokles výnosů dluhopisů bez ohledu na rizika emitenta. Pro vyhodnocení dopadů kvantitativního uvolňování na ekonomiku eurozóny je však příliš brzy. Avšak faktem je současný dle mnohých neopodstatněný pokles výnosů státních dluhopisů i předlužených států na periferii Evropy, nárůst cen akcií a nemovitostí, zatímco se inflace drží dále poblíž nulových hodnot. Levné peníze patrně zapříčinily i krizi na trhu komodit.

Situace na finančních trzích v České republice na počátku roku 2016 není, co se týče monetární expanze a pokřivení trhu díky zásahu centrální banky, tak nezdravá jako v eurozóně, avšak i ČNB provádí masivní monetární expanzi a vše nasvědčuje tomu, že tuto expanzi pomocí nějaké formy nestandardních nástrojů monetární politiky dále rozšíří. ČNB po rychlém snížení základních úrokových sazeb (2týdenní repo sazba[5])

[5]Repo (Repurchase Agreement) je zápůjční operace zajištěná převodem cenných papírů, přičemž cenné papíry nemění vlastníka. Jako kolaterál mohou sloužit například pokladniční poukázky, dluhopisy nebo akcie. Repo sazba ČNB je hlavní ze tří úrokových sazeb stanovovaných ČNB, stanovování těchto sazeb je jeden ze stěžejních nástrojů monetární politiky. Při repo operacích ČNB přijímá od bank přebytečnou likviditu a bankám předává jako kolaterál dohodnuté cenné papíry. Obě strany se zároveň zavazují, že po uplynutí doby splatnosti proběhne reverzní transakce, v níž ČNB jako dlužník vrátí věřitelské bance zapůjčenou jistinu zvýšenou o dohodnutý úrok a věřitelská banka vrátí ČNB poskytnutý kolaterál. Základní doba těchto operací je stanovena na 2 týdny. Dalšími monetárněpolitickými

v roce 2012 na technickou nulu, čímž byl vyčerpán potenciál primárního nástroje monetární politiky, vyhlásila v listopadu 2013 zahájení intervencí proti koruně nastavením capu na korunu s realizačním kurzem (strikem) na úrovni 27,0 Kč za euro, zatímco floor nebyl nastaven, tj. ČNB nechá korunu libovolně oslabovat nad úroveň 27,0 Kč za euro, avšak při posílení koruny pod hranici 27,0 Kč za euro začne nakupovat eura za „natištěné“ koruny, čímž oslabí kurz koruny. Tímto vyhlášením došlo k jednorázovému skokovému oslabení koruny vůči euru z úrovně cca 25,5 na 27,0, kde se až na několik výjimek obchodovala z důvodu pokračování intervencí v pásmu 27,0 až 28,0 do začátku roku 2016. Původní vyhlášení intervencí počítalo s jejich ukončením v roce 2014. V červnu 2014 však ČNB prodloužila trvání intervencí nejméně do roku 2016 a na počátku roku 2016 pak dále do roku 2017. I když na rozdíl od eurozóny ČNB z trhu likviditu na jednu stranu dlouhodobě stahuje, na druhou stranu díky intervencím likviditu do trhu dodává. V týdnu zahájení intervencí proti koruně se zvýšily závazky ČNB vůči domácím bankám o 44 % v absolutním vyjádření pak o cca 200 mld. CZK, což znamená, že v tomto týdnu přibyla do systému nová likvidita minimálně v téže výši.

Přebytek likvidity v systému působí další pokles výnosů korunových státních dluhopisů. V 1. čtvrtletí 2015 se poprvé objevuje záporný výnos do splatnosti, kdy proběhly na elektronické platformě pro obchodování státních dluhopisů MTS obchody s 2letým dluhopisem se záporným výnosem do splatnosti. Během roku 2015 se pak dostaly výnosy domácích státních dluhopisů ČR do záporu až do splatnosti 6–7 roku, přičemž výnosy dvouletých dluhopisů ke konci roku 2015 klesly až na $-0,4$ %. To vše při 14denní repo sazbě ČNB na úrovni 0,05 %. O nárůstu likvidity svědčí i vývoj agregátu M3, který se v eurozóně mezi roky 2005 a 2015 zvýšil cca o 65 %, zatímco v ČR se agregát M3 za totéž období zvýšil o cca 130 %. V období od počátku roku 2014 do konce roku 2015 pak vzrostl agregát M3 v ČR i eurozóně shodně o 30 %.

Přestože růst ekonomiky ČR v roce 2015 překonal všechny odhady, když růst reálného HDP dosáhl více než 4 %, je stále brzy hodnotit dopady těchto intervencí. Míra inflace se i přes všechny pokusy ČNB drží blízko nuly[6] a nachází se tak hluboko pod cílem ČNB, který je stanoven na úrovni 2 %, respektive pod pásmem širokým 1 procentní bod (p.b.) na každou stranu od této úrovně. Právě z tohoto důvodu uvažuje ČNB o další měnové expanzi v podobě dalšího oslabení koruny nebo zavedení záporných sazeb. Důležitá bude zejména forma opuštění režimu intervencí. V případě ukončení devizových intervencí Švýcarskou národní bankou (Swiss National Bank) v lednu 2015 došlo k posílení švýcarského franku vůči euru o více než 30 % během několika málo minut a rozkolísání celosvětových devizových trhů na několik měsíců s dopadem na finanční trhy ostatních finančních aktiv.

Dopady devizových operací centrálních bank na finanční trhy a na ekonomiku ve státech, kde centrální banky používají nebo použily tento nástroj monetární politiky jako např. v Maďarsku, České republice, Izraeli, Hong Kongu, Chile, se zabývá kompilát

sazbami jsou diskontní sazba a lombardní sazba.

[6]Míra inflace vyjádřená přírůstkem průměrného ročního indexu spotřebitelských cen ke konci roku 2015 činila 0,3 %.

BIS (2013). Součástí tohoto kompilátu je i příspěvek (Lízal a Schwartz, 2013), který přijímá ne neočekávaný[7] závěr, že v podmínkách ČR jsou devizové intervence nejefektivnější cesta k dosažení inflačního cíle. Fratzscher et al. (2014) v analýze politiky ECB na finanční trhy v letech 2007 až 2013 přijímají závěr, že po finanční krizi došlo v důsledku nekonvenční monetární politiky ECB k výraznému zvýšení cen finančních aktiv a současnému snížení rizikové prémie hlavně na trzích v eurozóně a z části i na globálních trzích.

Obecně lze říci, že zásahy centrálních bank a jejich bezprecedentní expanzivní monetární politika po roce 2008 zásadním způsobem ovlivňují nejen úrokové sazby a výnosy dluhopisů po celé délce výnosové křivky, které neustále prohlubují svá historická minima, ale i ceny všech ostatních finančních aktiv jako např. měnových párů, akcií, komodit, stejně jako ceny nemovitostí.

Na počátku roku 2016 zcela neočekávaně snížila do záporu svou hlavní úrokovou míru i Japonská banka (Bank of Japan), čímž podle mnohých analytiků spustila ve světě tzv. „měnovou válku“, tj. soupeření jednotlivých centrálních bank o nejpodhodnocenější měnu. Tento fakt s nejvyšší pravděpodobností finančním trhů na stabilitě nepřidá a bude se tak patrně projevovat vysokou až extrémní volatilitou a extrémními „rallye“ na cenách aktiv, jako byl např. vývoj ceny ropy Brent, která v průběhu roku 2014 atakovala hranici 120 USD za barel a na počátku roku 2016 se pak pohybovala kolem úrovně 25 USD za barel, přičemž někteří analytici předpovídali její další vývoj v extrémním případě až k 10 USD za barel.

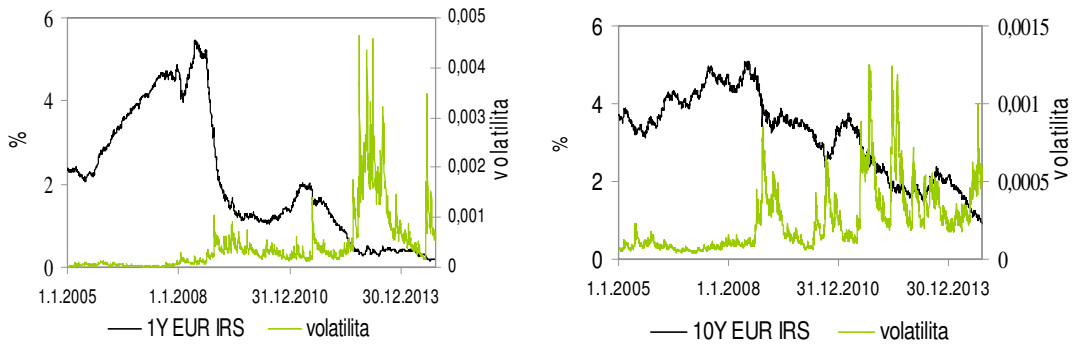
Další velmi důležité faktory, které silně ovlivňují vývoj tržních cen aktiv, jsou snahy o regulaci finančních trhů jako např. zákazy prodeje na krátko (short sell) některých aktiv, zavedení směrnic typu EMIR (European Market Infrastructure Regulation) nebo požadavky typu BASEL na kapitálovou přiměřenost bank atd.

Výše popsané exogenní zásahy do fungování finančních trhů znamenají velmi složité prostředí pro aplikaci jakýchkoliv finančních modelů, neboť více než popisovat statistické závislosti mezi jednotlivými proměnnými, které byly platné v historii, je vhodné předpovídat chování centrálních bankéřů a ostatních finančních autorit.

3.3 Volatilita trhů

V této části se zaměřím na popis volatility sazeb peněžního trhu v EUR i CZK, protože spolu s nárůstem likviditního a kreditního rizika lze pravděpodobně pozorovat i změny ve vývoji volatility jednotlivých úrokových sazeb tvořících výnosovou křivku peněžního trhu. V rámci této části se taktéž zaměřím na srovnání vývoje volatility mezi EUR a CZK trhem. Pro modelování volatility obou trhů použiji model GARCH. Pro úplnost uvádím, že popisem vývoje volatility konkrétní sazby získám popis volatility jednoho konkrétního bodu na příslušné výnosové křivce.

[7] Lubomír Lízal je na začátku roku 2016 členem bankovní rady ČNB, kam byl jmenován v roce 2011, a je zastáncem oprávněnosti devizových intervencí ČNB.



Obrázek 3.6: Vývoj volatility 1letého a 10letého EUR IRS
Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

Model ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), aplikovaný Englem (1982) na modelování inflace ve Velké Británii, položil základní kámen rozsáhlé třídě modelů, které charakterizují podmíněnou volatilitu. Jejich význam spočívá v tom, že umožňují zachytit měnící se podmínky nejistoty na trhu. Do této třídy modelů patří i model GARCH (Generalized ARCH), který odstraňuje některé nedostatky základního modelu ARCH. Model GARCH(m,s) má tvar

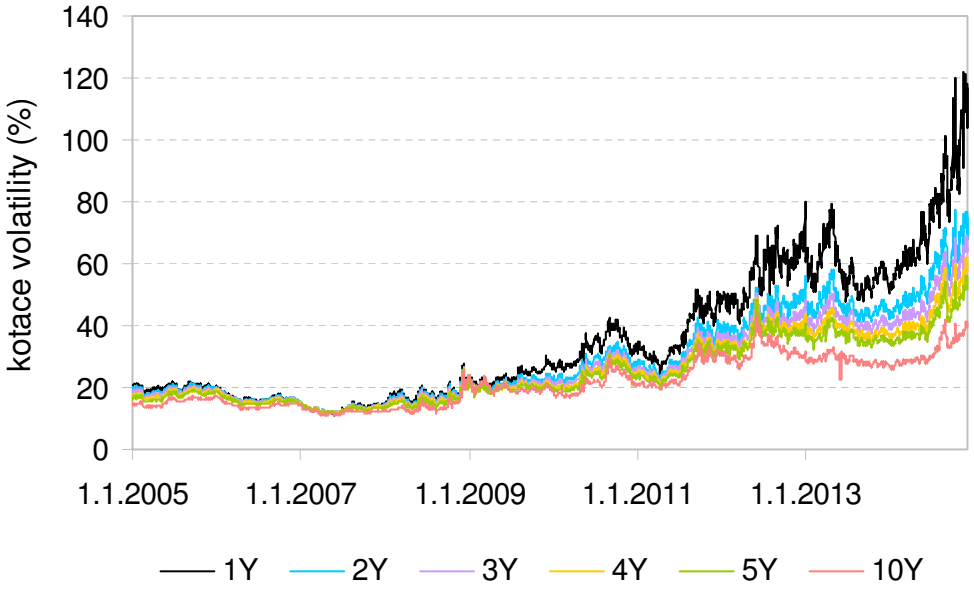
$$y_t = \mu_t + e_t, \qquad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{3.1}$$

kde y_t je časová řada, μ_t označuje podmíněnou střední hodnotu a σ_t^2 představuje podmíněný rozptyl. Podmíněná střední hodnota μ_t je modelována pomocí vhodné rovnice střední hodnoty, která je obvykle lineární (často se jedná o lineární regresní model nebo ARMA proces). Dále v rovnici figurují odchylky od podmíněné střední hodnoty e_t, které jsou nekorelované stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou, a ϵ_t značí nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Parametry modelu α_i, β_j splňují následující omezení

$$\alpha_0 > 0, \qquad \alpha_i \geq 0, \qquad \beta_j \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1, \tag{3.2}$$

kde poslední nerovnost je postačující podmínkou pro existenci rozptylu var(e_t). Více informací o modelování volatility pomocí modelů typu GARCH ale i pomocí jiných modelů lze nalézt například v (Arlt a Arltová, 2009).

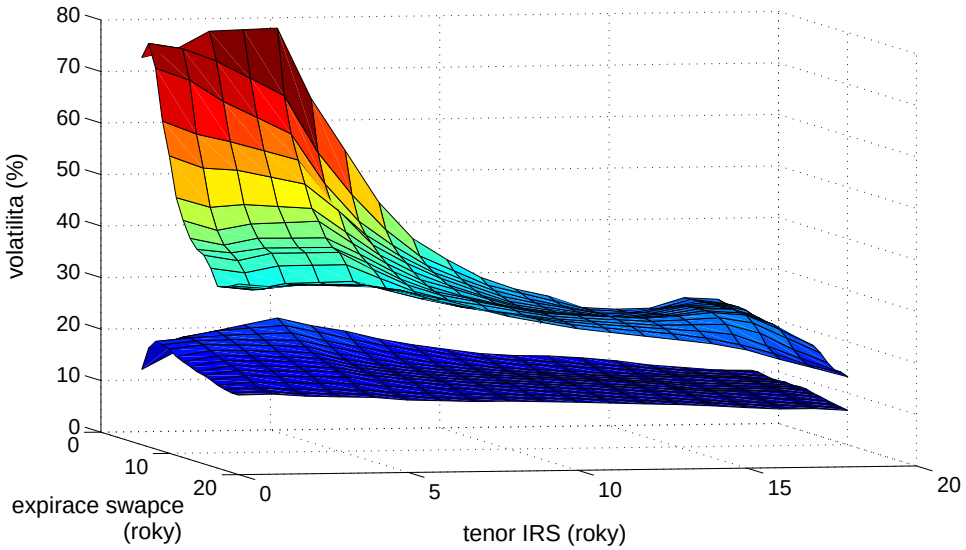
Na obrázku 3.6 jsou zobrazeny volatility 1leté a 10leté EUR IRS sazby modelované pomocí modelu GARCH, ze kterých je patrné, že volatilita úrokových sazeb se před začátkem finanční krize vyvíjela odlišně oproti období po krizi. Volatilita sazeb před finanční krizí je ve srovnání s obdobím po krizi poměrně nízká a pohybovala se v relativně úzkém koridoru. V průběhu roku 2008 lze pozorovat výrazný, několikanásobný nárůst volatility oproti období před rokem 2008. Je zajímavé, že ačkoliv bazické spready EURIBOR–OIS vykazovaly nervozitu trhů již od září 2007, volatilita sazeb reaguje na



Obrázek 3.7: Vývoj kotací volatilit evropských ATM EUR swapcí
Pozn.: Kotované Blackovy volatility evropských ATM swapcí s podkladovým EUR IRS s datem expirace 3 roky a délkou IRS 1, 2, 3, 4, 5 a 10 let.
Zdroj: Bloomberg

tyto změny pomaleji, což lze pozorovat hlavně u 1leté EUR IRS sazby, když hodnota volatility sice od první poloviny roku 2007 roste, avšak na úrovně vyšší než v roce 2005 se dostane až v druhé polovině roku 2008. Vysokou nervozitu trhů dle vývoje volatility lze pozorovat u 1leté i 10leté EUR IRS sazby po krachu Lehman Brothers v září 2008. Zajímavé je však, že volatilita úrokových sazeb se po odeznění finanční krize nesnížila, ale naopak vzrostla a na konci roku 2014 se i po znatelném uklidnění nervozity trhů pohybuje zejména u 10leté EUR IRS sazby v průměru na svých maximálních hodnotách, což je o cca 300 % více oproti úrovním před finanční krizí. Volatilita 1leté EUR IRS sazby se po odeznění finanční krize během první poloviny roku 2013 prudce zvýšila na přibližně čtyřnásobek svých úrovní z období finanční krize, poté rychle klesla pod své úrovně z období finanční krize a na podzim 2014 opět skokově narostla na úrovně vyšší než v období finanční krize avšak nižší než v roce 2013. Pomocí modelu GARCH jsem dále popsala volatility ostatních splatností EUR IRS s podobnými závěry jako u vývoje volatility 10leté EUR IRS sazby.

Výše popsaný vývoj volatilit EUR IRS sazeb získaný pomocí modelu GARCH je částečně konzistentní s vývojem kotací volatilit swapcí. Obrázek 3.7 zobrazuje kotace Blackových volatilit evropských ATM swapcí s datem expirace 3 roky a délkou podkladového EUR IRS od 1 roku do 10 let. I z těchto tržních kotací je patrné, že volatility swapcí spojenými s příslušnými podkladovými IRS všech zobrazených délek se nacházejí po odeznění finanční krize na několikanásobně vyšších úrovních oproti jejich úrovním před finanční krizí. Na konci sledovaného období, tj. na konci roku 2014, se kotované volatility nacházejí na svých maximálních úrovních. Dále je patrné, že s delší dobou do expirace podkladového IRS kotovaná volatilita klesá. Je nutné připomenout, že zatímco

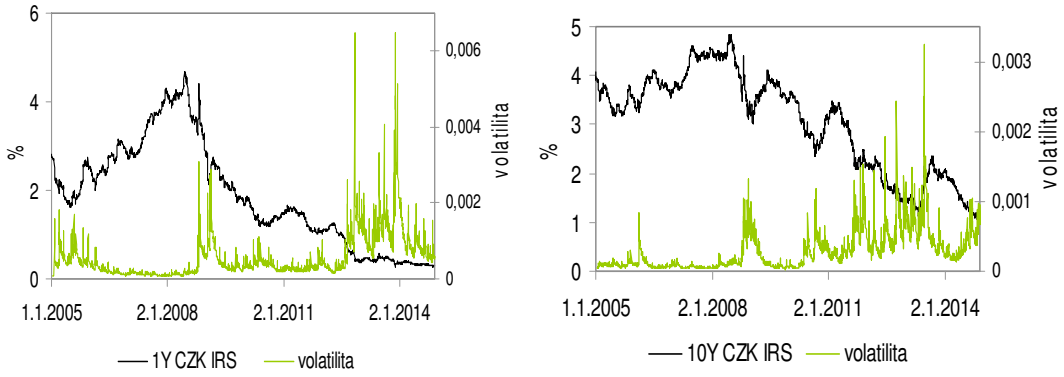


Obrázek 3.8: Kotace volatilit evropských ATM EUR swapcí k 1. 10. 2005 a 1. 10. 2012
Pozn.: Kotované Blackovy volatility evropských ATM swapcí s podkladovým EUR IRS. Spodní plocha zobrazuje matici volatilit kotovaných ke dni 1. 10. 2005, horní plocha zobrazuje matici volatilit kotovaných ke dni 1. 10. 2012.
Zdroj: Bloomberg

volatility modelované pomocí GARCH jsou založené na historických pozorováních, kotované volatility v sobě obsahují pouze aktuální očekávání obchodníků se swapcemi (volatility swapcí kotuje např. mezibankovní broker ICAP). Uvedené vlastnosti volatilit dokumentuje i obrázek 3.8, který zobrazuje celou matici kotací Blackových volatilit ATM evropských swapcí k datu 1. říjnu 2005 a k 1. říjnu 2012. Z obrázku 3.8 je jasně patrný posun celé plochy volatilit směrem k vyšším úrovním, když matice kotací volatilit k pozdějšímu datu dosahuje vyšších hodnot. Obecně lze říci, že při relativně normální situaci na trhu klesá volatilita swapcí spolu s prodlužující se délkou podkladového IRS stejně jako s prodlužující se dobou do expirace swapce.

Vysoké úrovně kotací volatilit swapcí po ukončení finanční krize částečně souvisí dle mého názoru s historickou zkušeností obchodníků, kteří do svých kotací volatilit reflektují zkušenosti z finanční krize, umocněné vysokou nejistotou pramenící ze zásahů centrálních bank a snahy autorit o regulace finančních trhů, neboť pro obchodníky je značně rizikové předpovědět chování politiků a centrálních bankéřů. V neposlední řadě je vysoká volatilita swapcí pravděpodobně způsobena i samotnými úrokovými sazbami nacházejícími se na historicky nejnižších úrovních, kdy i relativně malá změna absolutní úrovně sazby v rámci minimálního možného přírůstku kotace znamená relativně vysokou procentuální změnu oproti situaci, kdy se absolutní úrovně úrokových sazeb nacházely na několikanásobně vyšších úrovních.

Na obrázku 3.9 jsou zobrazeny volatility 1leté a 10leté CZK IRS sazby, které byly modelovány stejně jako v případě EUR IRS modelem GARCH. Ve srovnání s vývojem volatility EUR IRS stejné splatnosti dosahuje volatilita hlavně 1leté CZK IRS sazby



Obrázek 3.9: Vývoj volatility 1letého a 10letého CZK IRS
Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

během roku 2005 výrazně vyšších úrovní. Stejně tak na počátku roku 2009 po krachu Lehman Brothers v září 2008 byla průměrná volatilita 1leté CZK IRS sazby vyšší o cca 50 % než volatilita stejné sazby v EUR. Naopak po odeznění finanční krize se průměrná volatilita CZK IRS sazby snížila a dostala se na úroveň průměrné volatility EUR IRS v tomto období. V případě volatility 10leté CZK IRS sazby se její vývoj před rokem 2008 podobá vývoji volatility EUR IRS sazby s tím rozdílem, že pravděpodobně z důvodu nedostatečné likvidity nabývají maximální volatility CZK IRS vyšších hodnot než volatility EUR IRS, avšak v průměru se nacházejí na podobných úrovních. V průběhu finanční krize lze u obou splatností opět pozorovat vyšší maxima u volatility CZK IRS, avšak průměrná volatilita 10leté CZK IRS sazby se během finanční krize nachází na podobných úrovních jako průměrná volatilita EUR IRS sazby. V období po finanční krizi vzrostla průměrná volatilita 10leté CZK i EUR IRS sazby na vyšší úrovně než v průběhu finanční krize.

3.4 Coxův-Ingersollův-Rossův model

Pro získání predikcí pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých splatností úrokových měr ke konkrétnímu časovému okamžiku zkonstruovaných na základě simulací nejprve provedu odhad parametrů procesu modelu CIR na základě historického vývoje okamžité úrokové míry. Vzhledem k tomu, že okamžitá úroková míra je teoretická a na trhu nepozorovatelná veličina, je nejprve nutné provést její nahrazení pomocí pozorovatelné tržní úrokové sazby.

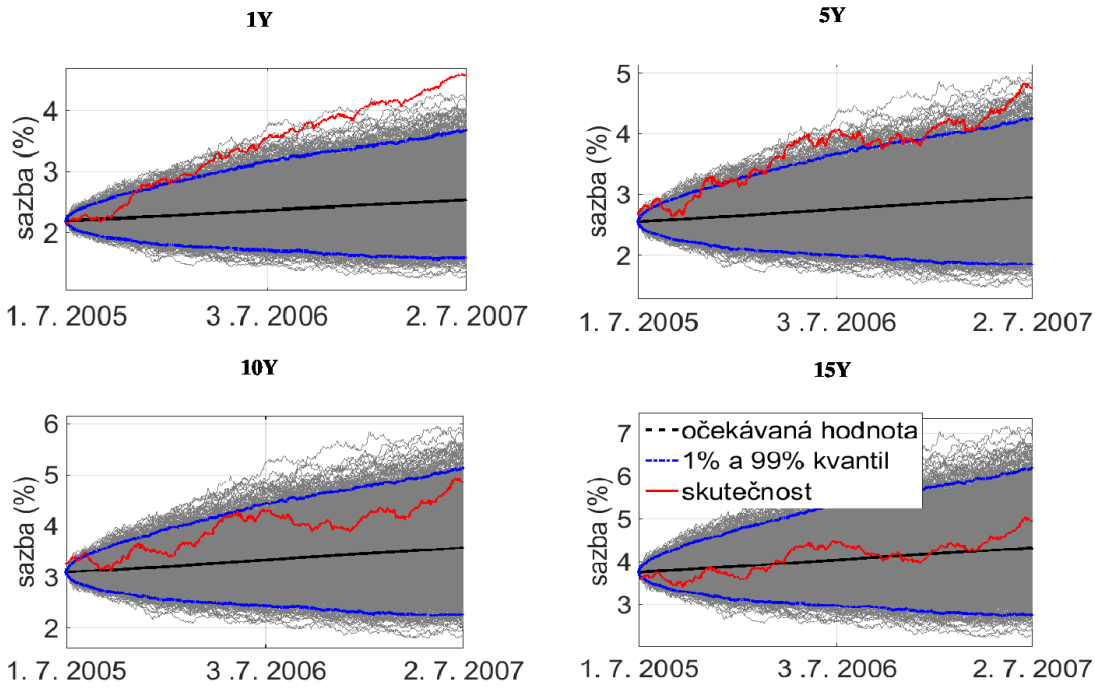
Pro aproximaci okamžité úrokové míry se logicky nabízí jednodenní sazba, případně jiná dostupná kotovaná sazba s velmi krátkou splatností. Bylo by však chybou použít monetárně-politickou sazbu, což je například v případě České republiky 14denní repo sazba ČNB. Takováto sazba většinou vykazuje minimální volatilitu a nepopisuje situaci na trhu. Připomínám, že výnosová křivka musí být konstruována ze zcela homogenních sazeb, což monetárně-politická sazba s jedinou splatností ve vztahu k sazbám na mezi-

bankovním trhu nesplňuje. Na většině vyspělých trhů existuje jednodenní (overnight) úroková míra, která by již vzhledem ke své homogenitě s ostatními sazbami mezibankovního trhu a své velmi krátké splatnosti mohla být považována jako vhodná aproximace okamžité úrokové míry. Sdílím však názor některých akademiků a analytiků, že jednodenní sazba je často ovlivněna zcela jinými faktory než tržními, jako je například řízení likvidity finančních institucí, a proto následuji doporučení například z (James a Webber, 2000) a jako aproximaci okamžité úrokové míry zvolím 3měsiční sazbu. V případě modelování dynamiky výnosové křivky peněžního trhu v České republice zvolím aproximaci okamžité úrokové míry ve formě sazby 3M PRIBOR a v případě eurozóny sazbu 3M OIS, která je dle mého názoru vysvětleného výše vhodnější aproximací bezrizikové úrokové míry.

Při samotné aplikaci používám tedy vstupní data v podobě časové řady 3M EUR OIS / PRIBOR sazby. Nejprve z procesu okamžité úrokové míry modelu CIR (2.1) získám pomocí metody maximální věrohodnosti odhady parametrů procesu v reálném světě $\widehat{\alpha}_R$, $\widehat{\mu}_R$, $\widehat{\sigma}_R$. Po získání odhadu parametrů procesu v reálném světě přistoupím k provedení druhého odhadu, který má za cíl odhadnout tržní cenu rizika. Při tomto odhadu jsou vstupními daty aktuální ceny bezkuponových dluhopisů. Při odvození těchto vstupních dat jsem postupovala následovně. Z aktuální parové křivky jsem pomocí bootstrappingu odvodila aktuální bezkuponovou křivku, z níž se ceny bezkuponových dluhopisů $B(t,T)$ odvodí dle vztahů (1.1) a (1.2). Získané ceny bezkuponových dluhopisů $B(t,T)$ se využijí při odhadu tržní ceny rizika pomocí minimalizace rozdílu mezi pozorovanou cenou a cenou implikovanou modelem způsobem popsaným v části 2.1.3. Za využití získaného odhadu tržní ceny rizika lze na základě odhadů parametrů procesu v reálném světě $\widehat{\alpha}_R$, $\widehat{\mu}_R$, $\widehat{\sigma}_R$ odvodit odhady parametrů procesu v rizikově neutrálním světě $\widehat{\alpha}_N$, $\widehat{\mu}_N$, $\widehat{\sigma}_N$, viz vzorce (2.15). Za znalosti odhadu parametrů procesu v rizikově neutrálním světě získám nejprve simulace okamžité úrokové míry, na základě kterých při znalosti odhadu tržní ceny rizika získám za použití oceňovací formule (2.8) ceny bezkuponových dluhopisů s potřebnou dobou do splatnosti, z nichž lze poté odvodit bezkuponové sazby dle vztahů (1.3) a (1.4). Simulace bezkuponových sazeb pak převedu na výsledné simulace parových sazeb, tj. swapových sazeb, pro více podrobností viz (Hull, 2014). Pro každou úrokovou míru zkonstruuji 5 000 simulací. Teoretický rámec a přesný postup aplikace modelu CIR je popsán v sekci 2.1.

Nejprve vždy aplikuji model CIR na prostředí eurozóny, které je obecně díky svému rozvinutému finančnímu trhu vhodnější kandidát na aplikaci modelů úrokových měr než prostředí České republiky. Následně aplikuji model CIR na prostředí českého relativně nerozvinutého trhu a učiním srovnání výsledných simulací.

V první fázi se zaměřím na období před finanční krizí, tj. před rokem 2008. Připomínám, že toto období se vyznačovalo nižším likviditním a kreditním rizikem stejně jako nižší regulací finančních trhů a nižší aktivitou centrálních bank ve smyslu zásahů do ekonomik jednotlivých států oproti ostatním analyzovaným obdobím. Z tohoto důvodu lze předpokládat, že simulace provedené v tomto období budou vykazovat nejlepší vlastnosti oproti simulacím provedeným v obdobích po začátku finanční krize.



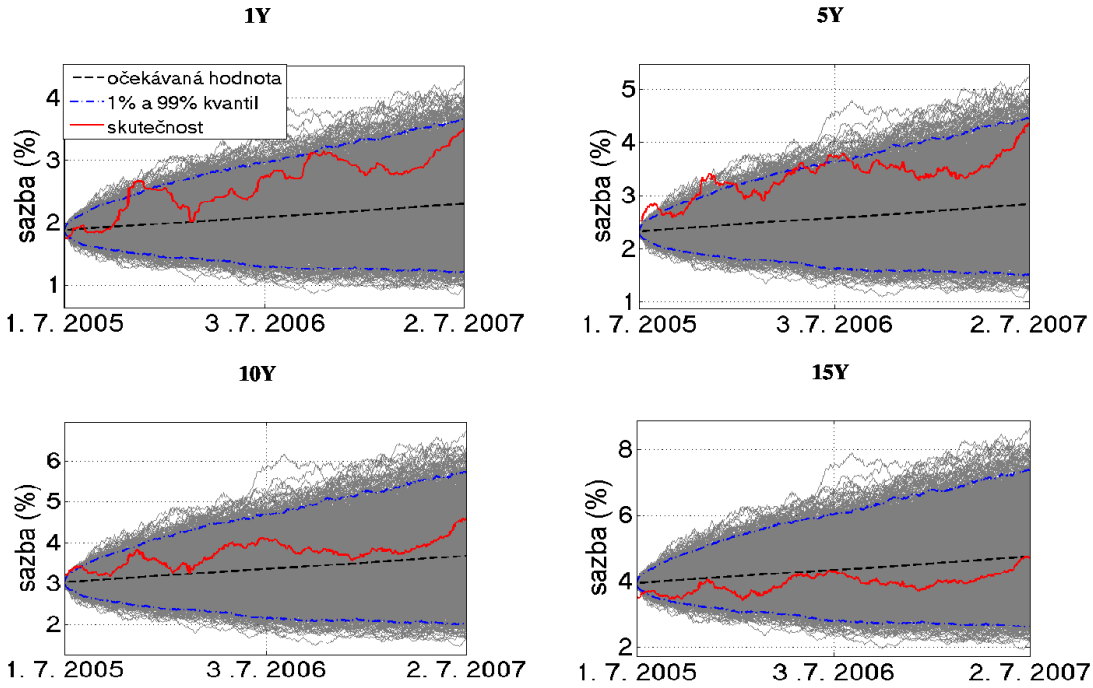
Obrázek 3.10: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu CIR v období před krizí

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

Na obrázku 3.10 jsou zobrazeny výsledné simulace 1Y, 5Y, 10Y a 15Y EUR IRS sazeb provedené k datu 1. července 2005 na období 2 roky. Obrázek 3.10 dále zobrazuje 1% a 99% kvantil simulací a jejich střední hodnotu stejně jako skutečný vývoj příslušné EUR IRS sazby. Tyto a následující grafy stejného charakteru mají na svislé ose různé měřítko, které je závislé na maximální a minimální hodnotě zobrazované na grafu. Pokud by se měřítko svislé osy u grafů sjednotilo, byla by často větší část plochy grafu nevyužita a vzájemný vztah zobrazovaných simulací, kvantilů a skutečnosti by byl tím pádem hůře rozpoznatelný.

Z obrázku je patrné, že model CIR neodhadl správně 1Y EUR IRS sazbu, která přibližně po dvou měsících od počátku simulací překročila 99% kvantil simulací a v posledních několika měsících se nacházela zcela mimo prostor simulací. Podobný vývoj jako u 1Y sazby lze pozorovat i u 5Y EUR IRS sazby avšak s tím rozdílem, že se skutečná hodnota této sazby několikrát během simulačního období vrátila nepatrně zpět pod 99% kvantil a ke konci simulačního horizontu neopustila prostor simulací. Přibližně od 8leté splatnosti pak lze pozorovat, že skutečná sazba setrvává v prostoru simulací vymezeným 1% a 99% kvantilem.

Obrázek 3.11 zobrazuje simulace 1Y, 5Y, 10Y a 15Y CZK IRS sazeb v období 1. července 2005 až 2. července 2007. Simulace v období před finanční krizí učiněné za použití modelu CIR popisují skutečnou dynamiku výnosové křivky českého peněžního trhu poněkud překvapivě lépe než dynamiku výnosové křivky peněžního trhu v eurozóně a to především díky přesnějšímu odhadu volatility krátkodobých a střednědobých splatností. Tuto skutečnost dokumentují na obrázku 3.11 simulace 1Y a 5Y CZK IRS, kdy



Obrázek 3.11: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu CIR v období před krizí

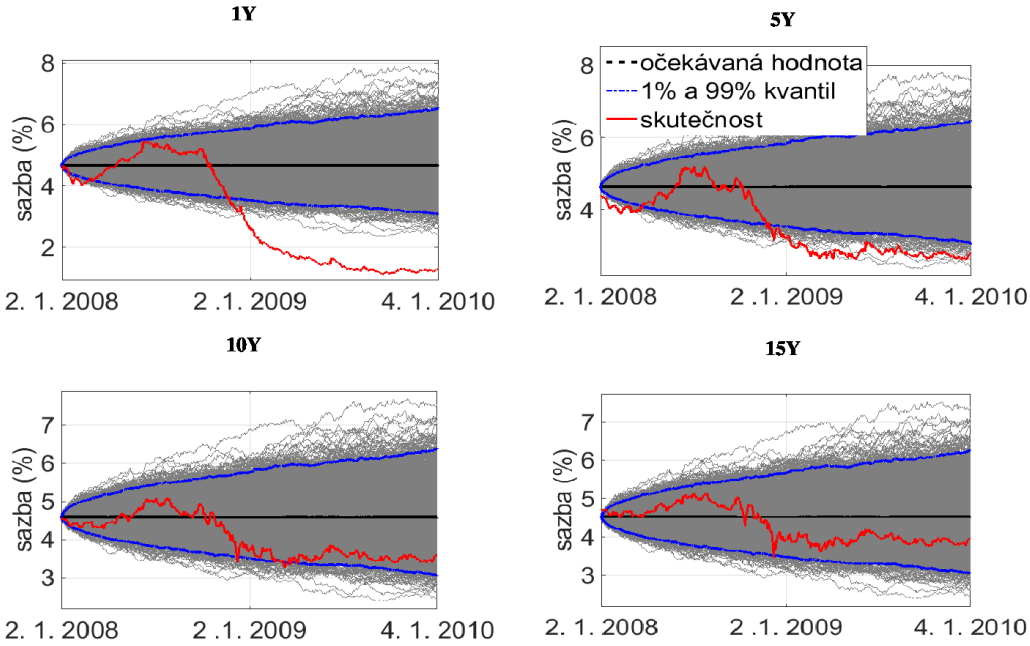
Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

k překročení 99% kvantilu simulací skutečnou sazbou došlo jen během několika málo dnů a na konci simulačního horizontu setrvávala hodnota skutečné sazby pod 99% kvantilem. V případě 15Y CZK IRS sazby se hodnota skutečné sazby na konci simulačního horizontu nacházela přibližně na očekávané hodnotě získané ze simulací.

Z výše uvedených důvodů se aplikace modelu CIR v českém prostředí v období před začátkem finanční krize jeví jako poměrně vhodná. Pro to, aby bylo možné ověřit toto tvrzení a stejně tak i tvrzení, která budou v textu následovat, však bude nutné provést ještě další pozorování. Jak jsem již uvedla v úvodu této kapitoly, s využitím modelů CIR, GP a BGM provedu ještě 52 predikcí splatností CZK výnosové křivky pro každé sledované období a porovnám je se skutečným vývojem příslušné sazby, díky čemuž vyhodnotím jejich předpovědní schopnost. Výsledky uvedu v závěru této kapitoly.

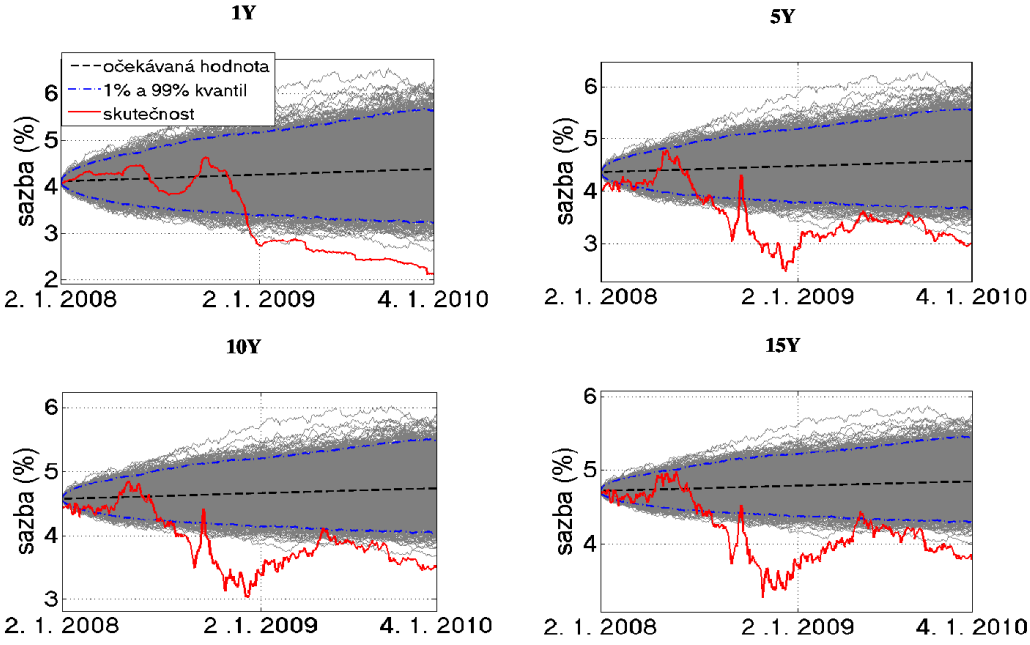
Jistě bude zajímavé porovnat predikční schopnost modelu CIR s predikční schopností ostatních analyzovaných modelů, což provedu taktéž v závěru této kapitoly.

Simulace provedené v období finanční krize jsou zobrazeny na obrázcích 3.12 a 3.13. Simulace jsou konstruovány na základě odhadu parametrů modelu CIR uskutečněného k datu 2. ledna 2008 se simulačním horizontem do počátku roku 2010. Jak jsem již uvedla výše, krach Lehman Brothers, který zásadním způsobem prohloubil v té době již poměrně vážnou krizi, nastal v září 2008, tj. přibližně v jedné třetině simulačního období. Díky tomuto faktu, lze očekávat, že turbulence na globálních finančních trzích zapříčiní prudkou reakci úrokových sazeb a skutečný vývoj příslušné sazby se dostane mimo prostor simulací ohraničený 1% a 99% kvantilem simulací, obzvláště pak v situaci, kdy byly odhady parametrů provedeny na základě historie, ve které takovéto selhání



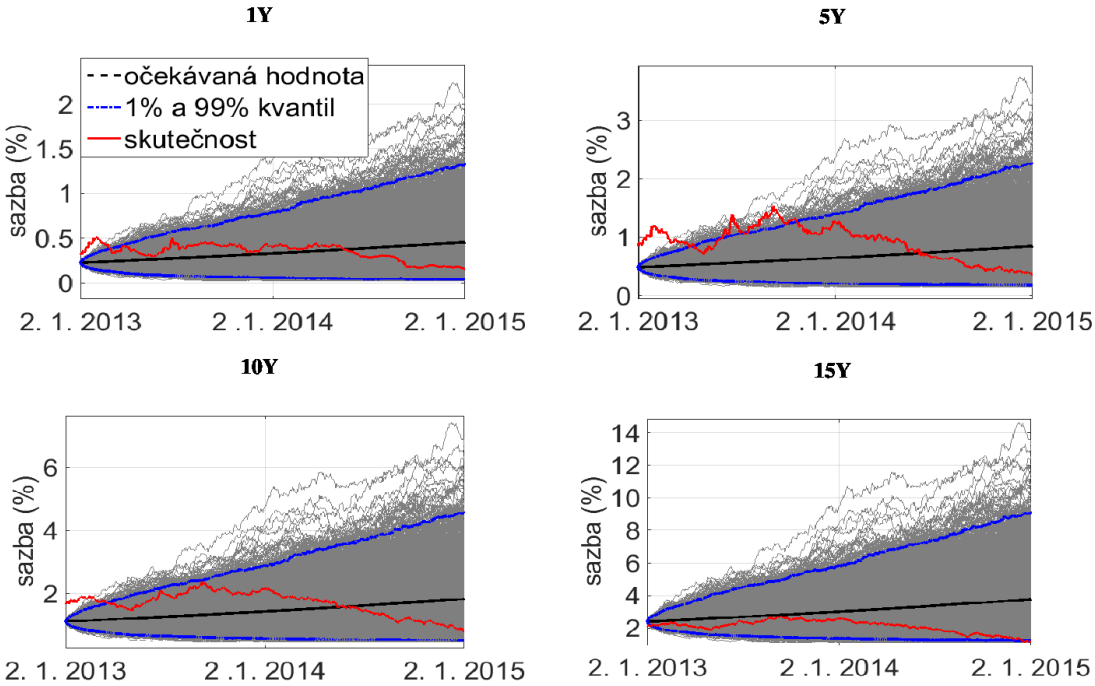
Obrázek 3.12: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu CIR v období finanční krize

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty



Obrázek 3.13: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu CIR v období finanční krize

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty



Obrázek 3.14: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu CIR v období po krizi

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

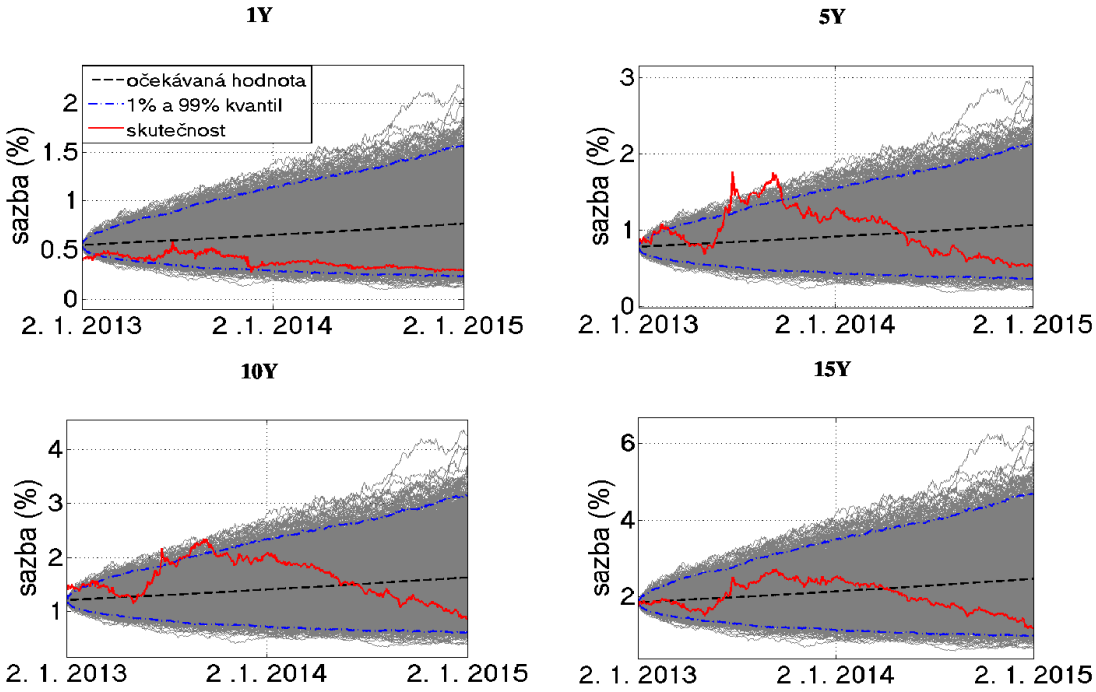
globálních trhů není obsaženo.

Tento předpoklad se zcela potvrdil u všech analyzovaných splatností výnosové křivky peněžního trhu v ČR, když se skutečná úroková sazba všech sledovaných splatností dostala pod 1% kvantil simulací již v průběhu roku 2008 a po celý rok 2009 se nacházela až na několik málo výjimek pod 1% kvantilem simulací a povětšinou i zcela mimo prostor simulací. Z pohledu predikční schopnosti dopadly u CZK sazeb opět nejhůře spíše kratší splatnosti do tří let. Výše uvedené závěry dokumentuje obrázek 3.13.

V případě EUR výnosové křivky se předpoklad o tom, že simulace správně nepopíší skutečný vývoj příslušné úrokové sazby, naplnil pouze částečně a to především u splatností do přibližně šesti let. Jak dokládá obrázek 3.12, sazby 10Y a 15Y EUR IRS setrvaly vyjma několika málo dnů v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem simulací a v případě sazby 15Y EUR IRS se skutečná hodnota sazby ke konci simulačního horizontu blížila ke střední hodnotě simulací. Model CIR se v případě eurozóny tedy jeví jako využitelný pro predikce delšího konce výnosové křivky i v období finanční krize, zatímco je zcela nevhodný pro predikci dynamiky výnosové křivky peněžního trhu v českém prostředí.

Na obrázcích 3.14 a 3.15 jsou zobrazeny simulace provedené po finanční a dluhové krizi s odhady parametrů modelu ke 2. lednu 2013. Toto období se vyznačovalo odlišným charakterem situace na finančních trzích oproti předchozím analyzovaným obdobím, a proto bude jistě zajímavé, zda model CIR popíše vhodně skutečný budoucí vývoj výnosových křivek.

Jak dokumentuje obrázek 3.14, model CIR nebyl schopen zachytit vývoj skutečných



Obrázek 3.15: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu CIR v období po krizi

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

sazeb 1Y, 5Y a 10Y EUR IRS na počátku simulací. S tímto problémem souvisí a na obrázku 3.14 je dobře dokumentována nepříjemná vlastnost modelů okamžité úrokové míry, a sice že výsledná výnosová křivka, tj. všechny splatnosti vyskytující se na výnosové křivce, je dána funkcí okamžité úrokové míry. Konkrétně u modelu CIR jsou úrokové míry všech splatností dány formulí (2.8). Je přirozené, že ne všechny skutečné hodnoty všech splatností lze zcela přesně vyjádřit pouze pomocí okamžité úrokové míry a konstantního parametru tržní ceny rizika. Například skutečná sazba 5Y EUR IRS pro den 2. ledna 2013 dosáhla hodnoty 0,846 %, zatímco tato sazba implikovaná modelem CIR nabývá hodnoty 0,48 %. Tuto nepříjemnou vlastnost modelů okamžitých úrokových měr lze pozorovat prakticky na všech zde uveřejněných obrázcích zobrazujících porovnání simulací provedených na základě modelu CIR a odpovídajících skutečných úrokových sazeb. U některých úrokových sazeb se tato nepřesnost projevuje ve větší míře, jinde v menší, ale v praxi lze říci, že víceméně žádný počátek simulací neodpovídá skutečné sazbě platné pro tento den, i když tato sazba byla použita stejně jako sazby ostatních splatností pro odhad tržní ceny rizika. Ačkoliv je tato vlastnost nepříjemná a poměrně negativně ovlivňuje výsledky při použití modelu CIR pro oceňování, při použití modelu CIR pro účely predikcí není tak stěžejní. Důležitější je celkový charakter simulací a jejich schopnost postihnout skutečný vývoj úrokových sazeb. Ze skupiny jednofaktorových modelů okamžité úrokové míry poskytuje přesný fit počáteční křivky například Hullův-Whiteův model nebo rozšířený CIR model, což jsem již zmínila v předchozím textu.

Jinak lze konstatovat, že simulace učiněné pomocí modelu CIR kromě počátečního

období vystihly skutečný vývoj sazeb peněžního trhu eurozóny i v období po finanční a dluhové krizi, když skutečné hodnoty příslušných sazeb setrvaly v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem. Na obrázcích je dobře patrné, že model CIR předpovídal spíše růst sazeb, když rozdíl mezi očekávanou hodnotou simulací a 1% kvantilem je menší než rozdíl mezi 99% kvantilem a očekávanou hodnotou simulací. Skutečné hodnoty úrokových sazeb se však ke konci roku 2014 blíží 1% kvantilu simulací a v případě 15Y EUR IRS sazby se v úplném závěru roku dostanou pod tento kvantil. Vzhledem k vlastnosti modelu CIR návratu ke své střední hodnotě bylo však možné, tento výsledek očekávat, protože průměrná hodnota sazby tříměsíční EURIBOR jakožto aproximace okamžité úrokové míry se nachází výše, než činí jeho hodnota k počátku simulací. Je možné konstatovat, že od konce finanční krize dochází k neustálému trendovému poklesu úrokových sazeb všech splatností po celé délce výnosové křivky

V případě CZK výnosové křivky lze pozorovat, že se skutečné hodnoty sazeb se splatnostmi okolo pěti let přibližně v polovině roku 2013 dostaly nad úroveň 99% kvantilu simulací i mimo prostor simulací, po několika týdnech se však vrátily zpět do prostoru simulací ohraničeného jejich 1% a 99% kvantilem. Obecně lze však říci, že simulace za použití modelu CIR vystihly vývoj skutečných sazeb, když po většinu simulovaného období setrvaly skutečné sazby v prostoru ohraničeným 1% a 99% kvantilem simulací. Stejně jako u EUR sazeb však model CIR díky vlastnosti návratu ke své střední hodnotě předpovídal růst i CZK sazeb, avšak ve skutečnosti došlo k jejich poklesu. Stejně jako v eurozóně i v České republice platí, že od konce finanční krize dochází k neustálému trendovému poklesu úrokových sazeb všech splatností. Kromě výše zmíněné nepříjemné vlastnosti modelu CIR týkající se nesouladu počátku simulací se skutečností se jeví model CIR jako použitelný pro predikce dynamiky výnosových křivek i v prostředí českého peněžního trhu.

Další nepříjemná vlastnost modelu CIR a modelů okamžité úrokové míry obecně, kdy jsou výrazně podhodnocovány volatility sazeb na delším konci výnosové křivky, jak je popsáno například v (Králová, 2013), se v konkrétních výše uvedených případech neprokázala.

3.5 Obecný parametrický model

Pro získání predikcí budoucí dynamiky výnosové křivky ve formě předpovědí pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých splatností úrokových měr ke konkrétním časovým okamžikům na základě využití modelu GP je nejprve nutné stejně jako v ostatních případech odhadnout parametry podkladového procesu (2.20). Připomínám, že následuji přístup (Kladívko a kol., 2007) a výnosovou křivku zredukuji pomocí metody hlavních komponent na tři hlavní komponenty, které vysvětlují nejvyšší podíl na celkové variabilitě dat. Každá z těchto komponent pak následuje proces (2.20), díky čemuž v konečném důsledku odhaduji parametry procesu hlavních komponent. Odhady parametrů procesu získám neparametricky pomocí minimalizace rozdílu mezi neparametrickým odhadem

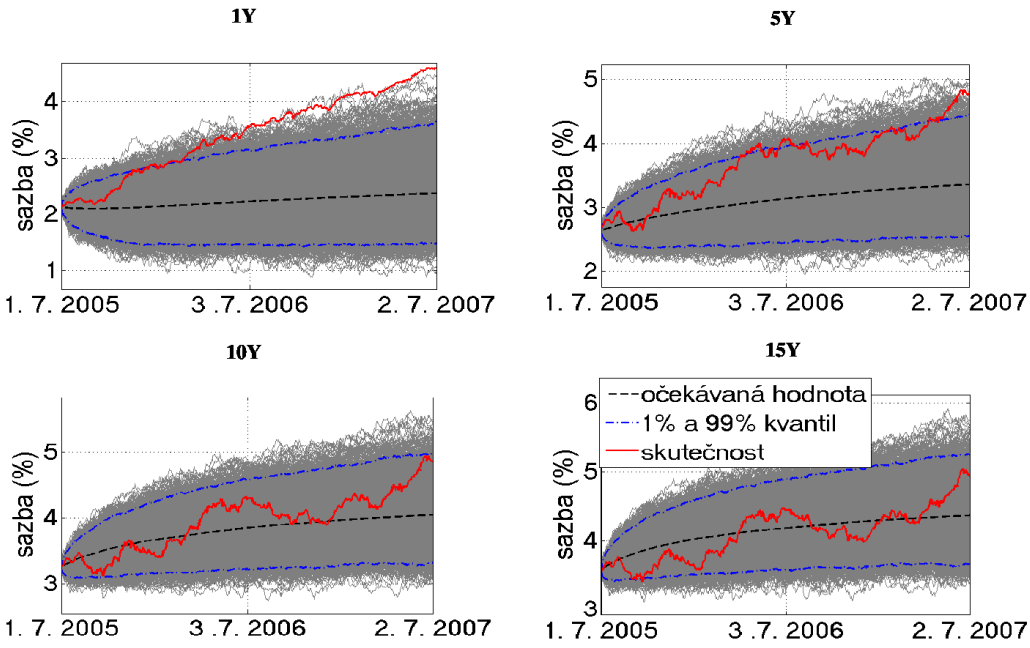
marginální hustoty dat a parametrickým tvarem marginální hustoty podkladového procesu. Po získání odhadu parametrů provedu stejně jako v případě modelu CIR 5 000 simulací každé hlavní komponenty. Na základě simulací jednotlivých hlavních komponent pak získám zpětnou transformací simulace příslušných úrokových sazeb těch splatností, které jsem na počátku za použití metody hlavních komponent zredukovala do tří komponent. Teoretický rámec a přesný postup aplikace modelu GP je popsán v sekci 2.2.

Aplikaci GP modelu provedu na základě vstupních dat v podobě časové řady parových výnosových křivek, které aproximuji sazbami 3M, 6M a 9M EURIBOR/PRIBOR na krátkém konci a dále pak sazbami 1Y, 3Y, 5Y, 10Y a 15Y EUR/CZK IRS. Kladívko, Zimmermann a Cícha (2007) aplikují na vstupní časové řady úrokových sazeb logaritmickou transformaci z důvodu, že variabilita časových řad vykazuje tendenci závislosti na úrovni časové řady. Logaritmickou transformací zmínění autoři tuto závislost snižují, což do jisté míry umožní lépe popsat volatilitu, avšak dle mého názoru není vylepšení popisu volatility příliš významné. Faktem však je, že v době vzniku výše uvedeného článku neexistovaly záporné sazby, přičemž dokonce na modely úrokových měr připouštějící záporné sazby bylo pohlíženo velmi negativně, a proto již při konstrukci modelu byly hledány možnosti, jak modelu zamezit v generování záporné sazby s nenulovou pravděpodobností. Nezápornost sazeb byla zajišťována například výslednými sazbami s lognormálním rozdělením nebo začleněním flooru se strikem 0 % s nenulovou cenou. V současné době je ale situace zcela odlišná a se zápornými sazbami se lze v dnešním světě již setkat (například v eurozóně) a modely úrokových měr by je neměly ignorovat. Vzhledem k tomu, že logaritmus ze záporné hodnoty není definovaný, není již aplikace logaritmické transformace na vstupní data vhodná.

Model GP tedy jako jediný z analyzovaných modelů umožňuje existenci záporných sazeb, čehož využiji v kapitole 4 při modelování rizikových přirážek. Dále připomínám, že simulace získané na základě modelu GP nezamezují existence arbitráže.

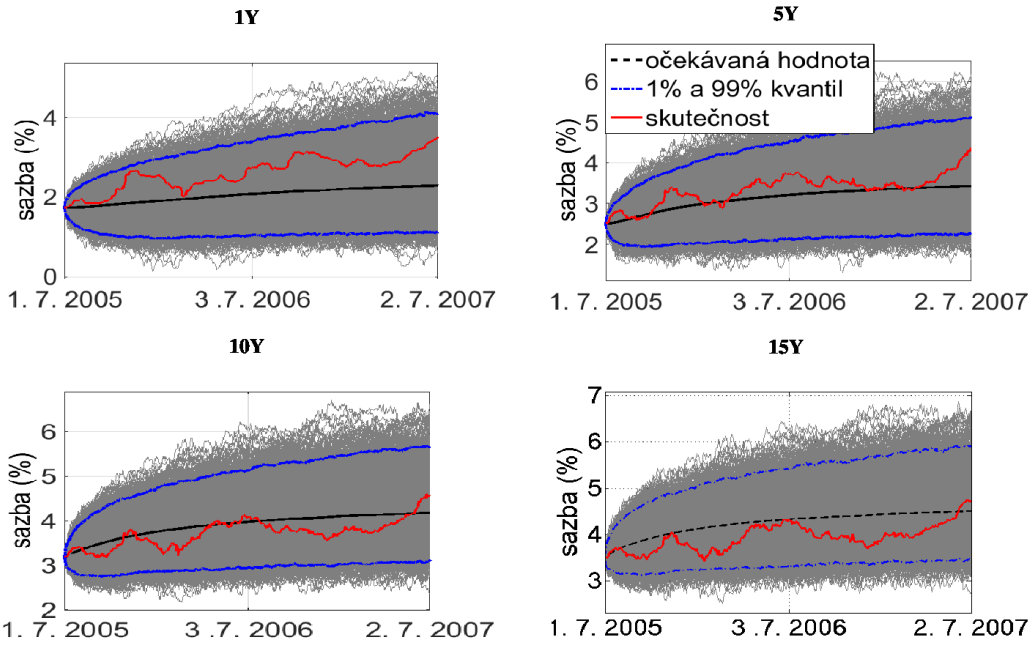
Model GP stejně jako model CIR nejprve vždy aplikuji na prostředí eurozóny s rozvinutým finančním trhem a následně na prostředí České republiky s relativně nerozvinutým finančním trhem a učiním srovnání výsledných simulací. Vzhledem k absenci restrikce na existenci arbitráže u modelu GP bude jistě zajímavé pozorovat, zda simulace učiněné na základě tohoto modelu popíší nedokonalý český trh lépe než simulace učiněné na základě modelů zamezující arbitráži. V této sekci vždy provedu jednu množinu simulací EUR a CZK úrokových sazeb s dvouletým horizontem v každém z analyzovaných období.

Simulace provedené v období před finanční krizí, tj. před rokem 2008, jsou zobrazeny na obrázku 3.16 a 3.17. Stejně jako u modelu CIR zde platí, že simulace provedené v tomto období by teoreticky měly vykazovat lepší vlastnosti ve srovnání se simulacemi provedenými v obdobích po začátku finanční krize. Při pohledu na zmíněné obrázky je zřejmé, že hodnota skutečné úrokové sazby příslušné splatnosti na počátku simulačního období odpovídá počátku simulací. Simulace učiněné na základě modelu GP nevykazují nepříjemnou vlastnost simulací učiněných na základě modelu CIR. Tato skutečnost je



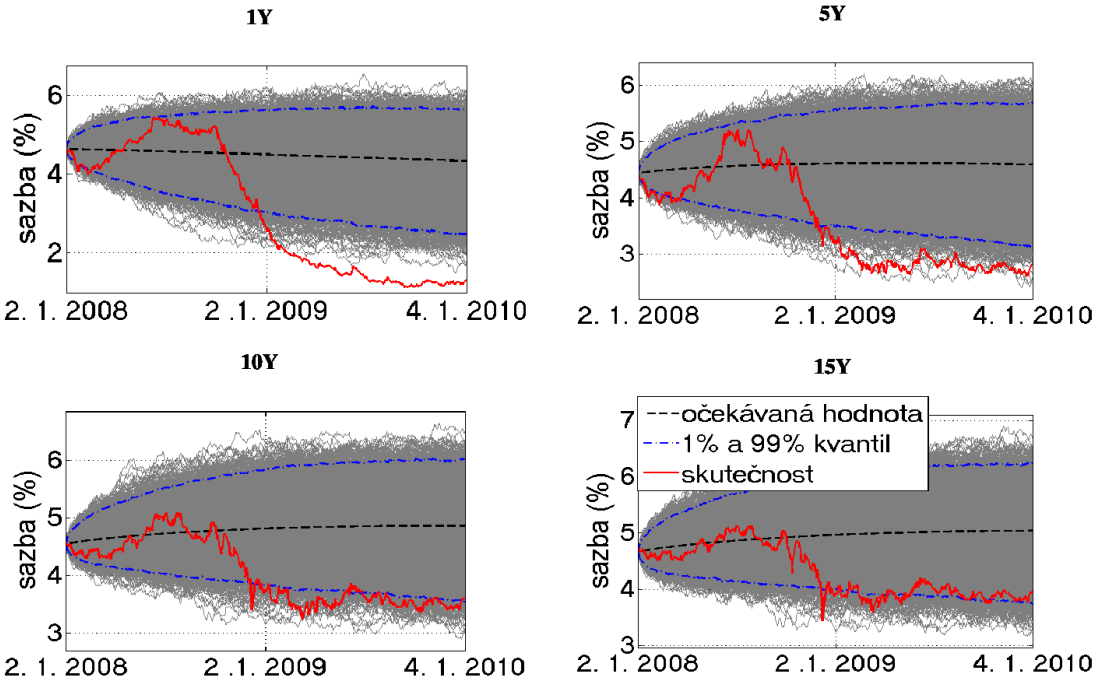
Obrázek 3.16: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu GP v období před krizí

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty



Obrázek 3.17: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu GP v období před krizí

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty



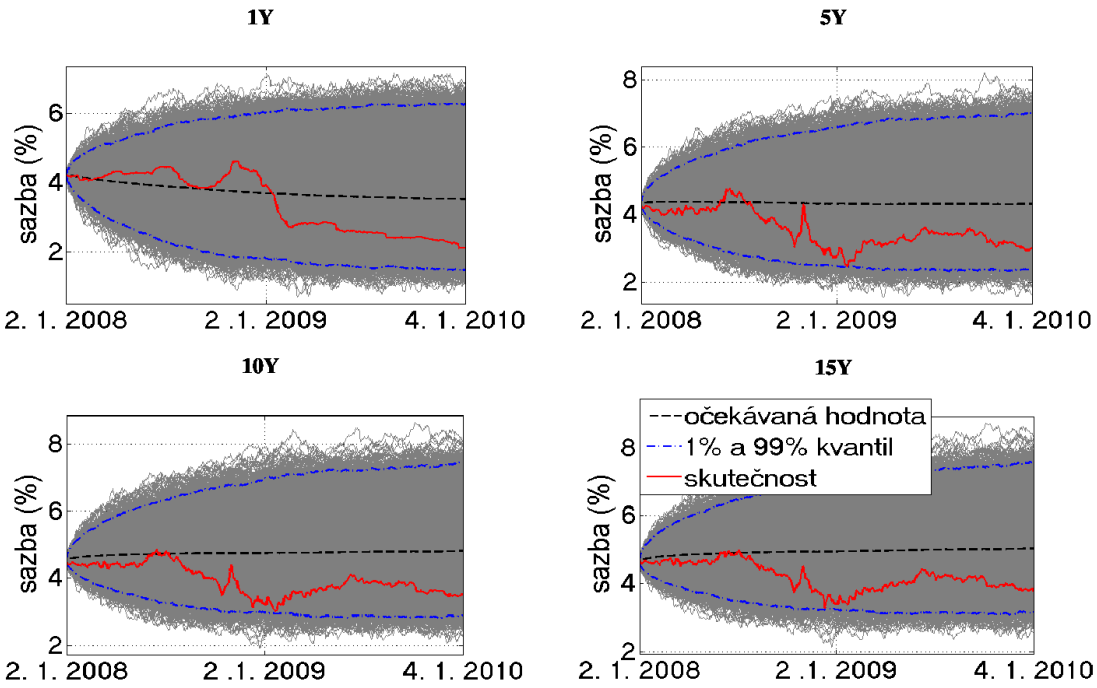
Obrázek 3.18: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu GP v období finanční krize

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

dána faktem, že dynamika výnosové křivky, tj. dynamika úrokových sazeb příslušných splatností, je modelem GP popsána přímo a nikoliv implicitně přes funkci okamžité úrokové míry jako u modelu CIR.

Poněkud překvapivě model GP nebyl schopen zachytit růst sazeb EUR IRS se splatnostmi do 6 let, přičemž sazby CZK IRS všech analyzovaných splatností setrvaly v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem po celé sledované období, což dokládá obrázek 3.17. Spolu se zkracující se splatností roste v případě EUR sazeb nepřesnost simulací při zachycení skutečného vývoje příslušné sazby. Z obrázku 3.16 je patrné, že např. skutečná sazba 1Y EUR IRS překročila 99% kvantil simulací již na konci první poloviny prvního roku simulací, tj. na konci roku 2005, a poté dále rostla, až se ke konci analyzovaného období dostala mimo prostor simulací. Skutečná hodnota sazby 5Y EUR IRS pak překročila 99% kvantil simulací vždy na několik málo dní, aby se poté vrátila zpět pod tento kvantil, avšak přibližně poslední měsíc analyzovaného období zůstala nad 99% kvantilem. Skutečný vývoj EUR IRS se splatnostmi od 6 let pak setrval v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem.

Při analýze období finanční krize se opět jeví, že simulace provedené na základě modelu GP lépe vystihují dynamiku výnosové křivky peněžního trhu v prostředí ČR než prostředí eurozóny. Simulace byly učiněny na základě odhadu ke 2. lednu 2008, kde leží zároveň počátek dvouletého simulačního období. Při pohledu na obrázek 3.18 je patrné, že skutečný vývoj EUR IRS se v případě všech analyzovaných splatností dostal pod 1% kvantil při platnosti již pozorované vlastnosti simulací, kdy s klesající splatností úrokové sazby klesá predikční schopnost příslušných simulací. Zatímco se



Obrázek 3.19: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu GP v období finanční krize

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

skutečné hodnoty sazby 1Y EUR IRS nacházely pod 1% kvantilem a dokonce též pod prostorem simulací téměř po celý rok 2009, skutečná sazba 15Y EUR IRS překročila 1% kvantil simulací pouze na několik krátkých období, avšak i v těchto obdobích stále setrvala v prostoru simulací. Jinak se skutečná hodnota 15Y EUR IRS držela stále poblíž 1% kvantilu, což lze považovat za úspěšnou predikci, vzhledem k turbulencím na finančních trzích, jaké nastaly v době finanční krize a hlavně v období po krachu Lehman Brothers.

Obrázek 3.19 dokumentuje skutečnost, že simulace výnosové křivky českého peněžního trhu poměrně dobře popsaly skutečnou dynamiku jednotlivých sazeb i během finanční krize v letech 2008 a 2009. Skutečné hodnoty CZK IRS sazeb se během celého analyzovaného období držely v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem, přičemž vzhledem ke globálnímu poklesu úrovně úrokových sazeb zůstaly převážnou část analyzovaného období pod očekávanou hodnotou simulací. Myslím si však, že spíše než výrazně vyšší predikční schopnost modelu GP v českém prostředí oproti prostředí eurozóny, je tento výsledek zapříčiněn faktem, že finanční krize způsobila větší turbulence na finančních trzích v eurozóně, zatímco český trh zůstal poněkud stranou. Tento fakt podporuje i pozorování, že po krachu Lehman Brothers došlo k poklesu sazby 1Y EUR IRS o více než 70 %, zatímco sazba 1Y CZK IRS poklesla pouze o cca 40 %, přestože sazba 1Y CZK IRS vykazovala v období finanční krize vyšší průměrnou volatilitu než sazba 1Y EUR IRS, což je patrné z obrázků 3.6 a 3.9 zobrazujících popis volatility těchto sazeb pomocí modelu GARCH. Při analogickém porovnání sazeb 15Y EUR IRS a 15Y CZK IRS došlo u obou sazeb ke srovnatelnému poklesu ve výši

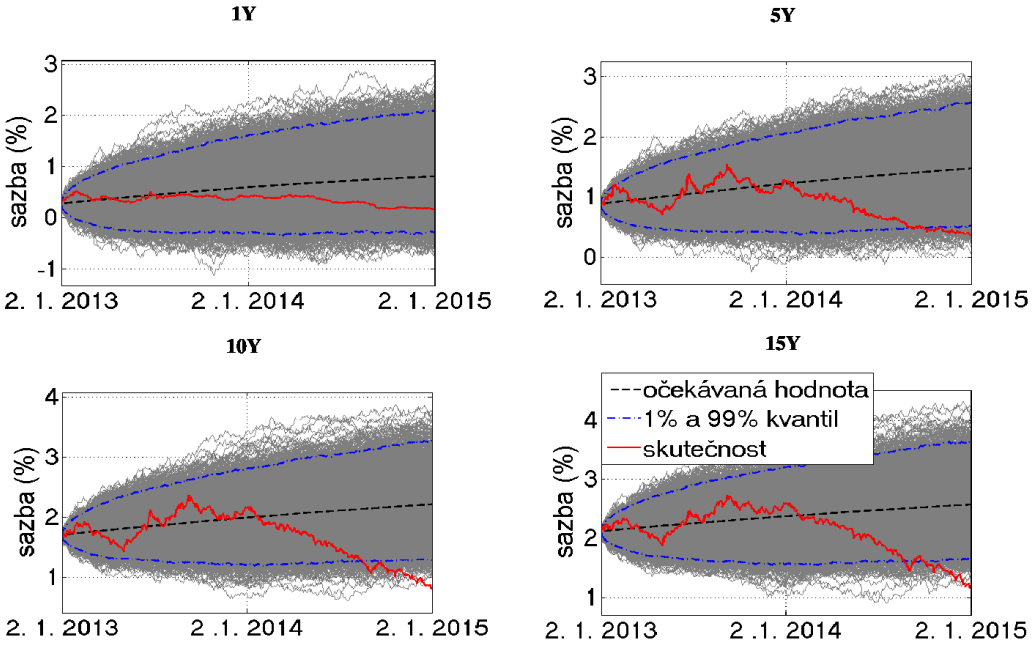
cca 30 %.

Oproti simulacím provedeným na základě modelu CIR se jeví, že simulace provedené na základě modelu GP vykazují výrazně vyšší kvalitu a predikční schopnost. Pro ověření tohoto tvrzení a stejně tak i ostatních tvrzení, jež jsou obsahem této sekce, však bude nutné zanalyzovat další pozorování, což učiním v závěru této kapitoly pomocí konstrukce série predikcí úrokových sazeb a jejich srovnání s realitou pro každý analyzovaný model.

Obrázky 3.20 a 3.21 zobrazují simulace IRS sazeb v eurozóně a ČR v období po odeznění finanční a dluhové krize s odhadem parametrů a počátkem simulací k datu 2. ledna 2013 pro dvouletý simulační horizont. Toto období je poznamenáno zvýšenou snahou autorit o regulace finančních trhů a často zcela neočekávanými zásahy centrálních bank do fungování finančních trhů při současném bezprecedentním uvolňování monetární politiky a snahou učinit peníze co nejlevnější. V takovémto prostředí je aplikace modelů úrokových měr s cílem predikce dynamiky výnosových křivek velmi náročná, obzvláště pak při použití historických časových řad pro odhad parametrů modelu. Více informací o změně charakteru trhu lze nalézt v podkapitole 3.2.

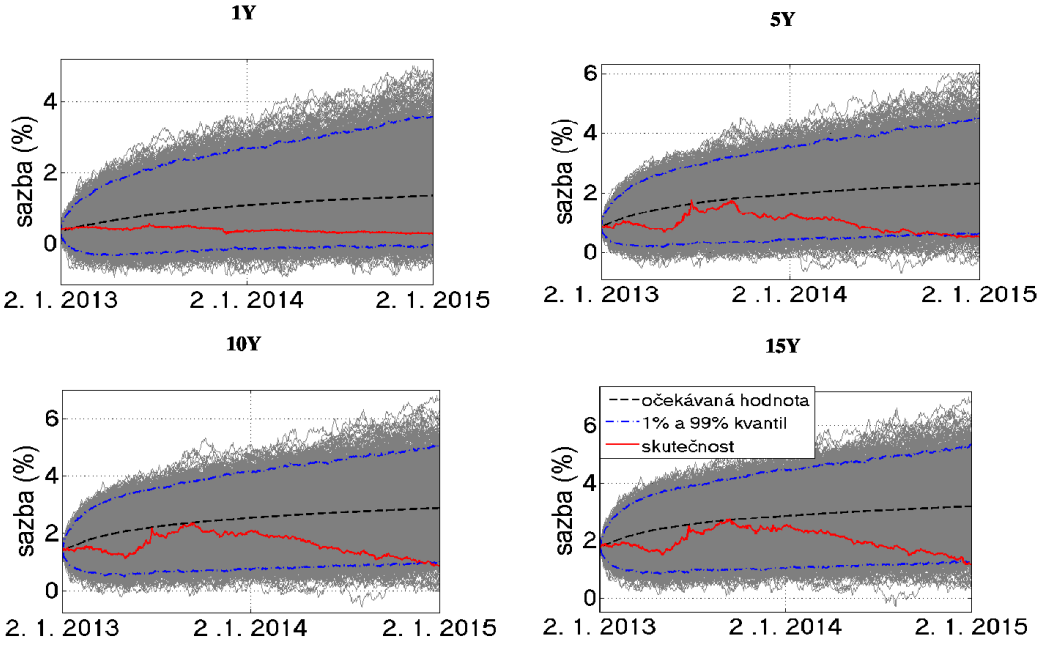
I přes změnu charakteru trhu popsaly simulace skutečnou dynamiku výnosových křivek peněžního trhu v eurozóně i v ČR poměrně dobře. Stejně jako v předchozích obdobích se jeví, že model GP lépe popisuje dynamiku výnosové křivky v ČR než v eurozóně. Z pohledu na obrázek 3.20 je patrné, že tentokrát měl model GP potíž predikovat vývoj skutečné úrokové sazby EUR IRS převážně delších splatností nad 5 let. Skutečné hodnoty sazeb 5Y, 10Y a 15Y EUR IRS se dostaly pod 1% kvantil simulací až v závěru roku 2014, kdy ECB agresivně pokračovala se snižováním základních úrokových sazeb, přičemž se depositní sazba v červnu 2014 historicky poprvé dostala do záporných hodnot. Při pohledu na vývoj simulací 1Y EUR IRS sazby je nutné zdůraznit, že simulace nabývají záporných hodnot, přičemž 1% kvantil simulací setrvává v záporných hodnotách prakticky po celé simulační období. Zde se projevuje významná výhoda modelu GP oproti ostatním analyzovaným modelům, které existenci záporných sazeb neumožňují.

V případě simulací sazeb peněžního trhu v ČR se skutečný vývoj všech analyzovaných sazeb nachází v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem po víceméně celou dobu analyzovaného období, i když ke konci roku 2014 dochází převážně u splatností delších než 5 let k významnému přiblížení k 1% kvantilu simulací a v některých příkladech i k nepatrnému překročení této hranice, což je dobře patrné na obrázku 3.21. Ve srovnání se čtyřmi sníženími základních úrokových sazeb ve sledovaném období ze strany ECB nedošlo ani k jednomu snížení úrokové sazby ze strany ČNB, když 14denní repo sazba setrvala po celé analyzované období na hodnotě 0,05 %, kde se nacházela již od listopadu 2012. ČNB však ohlásila kurzový závazek v listopadu 2013, tj. před polovinou simulačního období, čímž vytvořila tlak na úrokové sazby především kratších splatností s postupným dopadem i na delší splatnosti. Přesto v rámci možností model GP vystihl dopady tohoto rozhodnutí.



Obrázek 3.20: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu GP v období po krizi

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty



Obrázek 3.21: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu GP v období po krizi

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

3.6 Braceův-Gatarekův-Musielův model

Pro získání predikcí pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých splatností úrokových měr ke konkrétnímu časovému okamžiku provedu nejprve odhad parametrů procesu BGM na základě vstupních dat v podobě volatility swapcí a parové křivky peněžního trhu k datu konstrukce simulací T_0.

Vzhledem k tomu, že model BGM je založen na popisu dynamiky forwardových sazeb, je nejdříve nutné ze vstupních parových sazeb získat sazby forwardové, pomocí nich získat predikce jejich dynamiky ve formě simulací a následně tyto simulace forwardových sazeb převést zpět na simulace sazeb parových.

Na základě modelu BGM zkonstruuji 5 000 denních simulací pro stejné sazby peněžního trhu jako v případě předešlých modelů. I když je počet simulací stejný jako v předchozích případech, je jejich konstrukce ve srovnání s konstrukcí simulací na základě modelů CIR a GP výpočetně nepoměrně náročnější vzhledem k potřebě vytvoření binomického stromu, kde se pro každý uzel určí hodnoty uvažovaných forwardových sazeb pomocí lognormální aproximace sazeb.

Teoretický rámec potřebný pro aplikaci modelu BGM jak v prostředí peněžního trhu eurozóny, tak v ČR lze nalézt v kapitole 2.3.

3.6.1 Data

Pro získání forwardových sazeb nejprve převedu vstupních parové sazby pomocí bootstrappingu na bezkuponové sazby $R(T_0, T_n)$, z nichž se následně získají diskontní faktory $B(T_0, T_n)$ na základě vzorců (1.1) a (1.2). V následujícím kroku vypočítané diskontní faktory $B(T_0, T_n)$ využiji k odvození forwardových sazeb pro čas T_0 podle vzorce (2.37). Dle postupu popsaného v části 2.3.3 na základě binomického stromu vygeneruji simulace forwardových sazeb. Dále bude mým cílem převést tyto simulace na simulace parových sazeb, což provedu analogicky jako výše popsané odvození forwardových sazeb z parových s tím rozdílem, že v tomto případě provádím opačné kroky.

Z forwardových sazeb lze získat diskontní faktory použitím následujícího vztahu, který je odvozen ze vzorce (2.37):

$$B(T_i, T_n) = \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{F_j(T_i)\delta + 1}. \tag{3.3}$$

Pro situaci, kdy je třeba určit diskontní faktor mimo uzlové časy $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$, využiji upravený vzorec

$$B(s,t) = \frac{1}{[F_{i+1}(T_i)(T_{i+1} - s) + 1]} \cdot \frac{1}{[F_n(s)(t - T_{n-1}) + 1]} \cdot \prod_{j=i+2}^{n-1} \frac{1}{F_j(s)\delta + 1}, \tag{3.4}$$

kde

$$T_i = \max(T_j : T_j \leq s) \qquad \text{a} \qquad T_n = \min(T_j : T_j \geq t). \tag{3.5}$$

Ze simulací diskontních faktorů se následně získají simulace bezkuponových sazeb s využitím vztahů (1.3) a (1.4). Na základě simulací bezkuponových sazeb lze získat simulace parových sazeb, jenž jsou mým cílem při aplikaci BGM modelu.

Vstupní data dále zahrnují Blackovy volatility swapcí. Pro zvolenou metodu odhadu volatilit (lokálně jednofaktorový přístup) postačí znát volatility swapcí s expirací za čas δ ($\delta = T_n - T_{n-1}$ pro $\forall n$), což plyne ze vzorců (2.44), (2.45) a (2.48), neboť pro určení volatilit forwardových sazeb γ_k jsou třeba znát pouze φ_k^1 pro $k = 2, 3, \ldots$, jejichž výpočet využívá volatilit swapcí $\sigma_{1,k}$ (první řádek matice tržních volatilit swapcí Σ).

Komplikací při aplikaci BGM modelu může být skutečnost, že model potřebuje vstupní data pro všechny časové okamžiky T_n. Já konkrétně volím nastavení $\delta = 3$ měsíce, potom jsou třeba vstupní parové sazby se splatností za 3M, 6M, 9M, 12M, 15M, 18M, 21M, 24M, 27M, atd. A v případě volatilit jsou třeba volatility swapcí, které expirují za 3 měsíce s podkladovým IRS s délkou: 3M, 6M, 9M, 12M, 15M, 18M, 21M, 24M, 27M, atd. Takováto jemná tržní data však bohužel obvykle nejsou k dispozici. Od splatnosti parové sazby (expirace swapu) 1 rok je interval mezi sazbami 1 rok a od splatnosti 10 let je interval ještě širší. Pro aproximaci chybějících volatilit swapcí a parových sazeb navrhuji použít nelineární regresi s funkcí

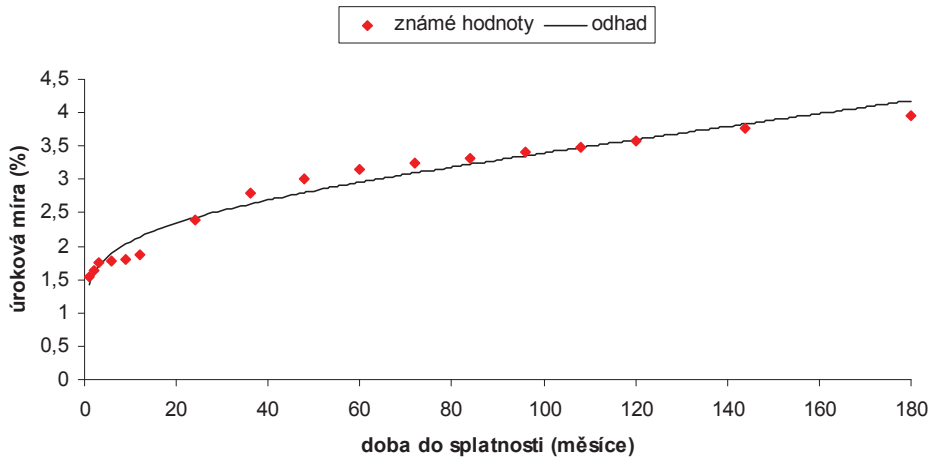
$$g(T_n; \alpha, \beta, \omega) = \alpha T_n^{\beta} \exp(\omega T_n), \tag{3.6}$$

kde α, β a ω představují parametry modelu. Pro snadnější odhad parametrů je vhodné regresní rovnici zlogaritmovat a převést ji tak na lineární regresní rovnici. Detailnější popis této regrese se nalezne v (Bertocchi a kol., 2000). Po zkonstruování regresního modelu na dostupných datech si lze dopočítat volatilitu swapce, respektive parovou sazbu, s libovolnou potřebnou splatností. Názornou ukázku využití této regrese ukazuje obrázek 3.22.

3.6.2 Aplikace v českém prostředí

Použití modelu BGM pro účely řízení úrokového rizika portfolia, tj. pro získání predikcí pravděpodobnostních rozdělení úrokových výdajů a příjmů portfolia, není v praxi příliš obvyklé z důvodu jeho komplikovanosti. Přesto model BGM pro tento cíl využiji, protože jeho komplexnost a možnost odhadu parametrů z aktuálních kotací volatilit swapcí mohou vést k výraznému zkvalitnění predikcí.

Pro aplikaci modelu BGM v českém prostředí je nejprve nutné získat volatility swapcí. Jelikož swapce na CZK IRS nejsou kotovány, je potřeba nalézt jejich vhodnou aproximaci. Touto aproximací implikovaných volatilit swapcí by mohlo být stanovení historické volatility úrokových CZK forwardů příslušných splatností, jejichž kotace existují. Tento přístup by však do velké míry potlačil informaci o aktuálním očekávání trhů ohledně dalšího vývoje, která je obsažena v aktuálních kotacích volatilit swapcí. Dle



Obrázek 3.22: Nelineární regrese – aproximace chybějících splatností parové křivky
Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

mého názoru je využití aktuálních informací při modelování budoucího vývoje úrokových sazeb velmi důležité, neboť tímto způsobem lze v simulacích alespoň v určité míře zohlednit více či méně očekávaný zásah centrálních bank nebo ostatních autorit do fungování finančních trhů. Vzhledem k závislosti ekonomiky České republiky na eurozóně navrhuji pro získání požadovaných aproximací implikovaných volatilit swapcí akceptovat předpoklad, že charakter volatilit EUR a CZK sazeb je podobný, což se ostatně potvrdilo při aplikaci modelu GARCH na EUR a CZK IRS. Za tohoto předpokladu je možné využít následujícího vztahu

$$\sigma_n^{eur} = H\sigma_n^{czk}, \tag{3.7}$$

kde σ_n^{eur} značí normální (Gaussovu) volatilitu evropské EUR ATM swapce a σ_n^{czk} normální volatilitu evropské CZK ATM swapce. H představuje koeficient, kterým je možné zohlednit odlišnou úroveň volatilit EUR a CZK úrokových sazeb v daném období. Rovnici (3.7) je možné interpretovat tak, že implikovaná volatilita swapce se stejně dlouhou expirací na stejně dlouhý podkladový IRS, vyjádřená v absolutních jednotkách (b.b.) neboli normální volatilita, je po vynásobení určitým koeficientem stejná pro EUR i CZK. Tento přístup k aproximaci volatilit CZK swapcí jsem již publikovala v (Cíchová Králová, 2015).

Domnívám se, že při využití modelu k simulacím úrokových sazeb za účelem řízení rizika ve smyslu předpovědi budoucích pravděpodobnostních rozdělení úrokové míry a potažmo i úrokových výdajů navázaných na tyto úrokové míry, není existence arbitráže mezi CZK a EUR swapcemi, která by mohla nastat v důsledku použití rovnice (3.7), zcela zásadní. Pokud by byl model BGM využit pro účely oceňování finančních derivátů, byla by naopak podmínka neexistence arbitráže zcela klíčová. Jak je již uvedeno výše, zásadním argumentem pro nalezení vhodné aproximace aktuálních kotací CZK swapcí je zahrnutí všech dosud známých ekonomických a finančních informací do

těchto kotací, což znamená, že existuje možnost rychlé reakce a přizpůsobení parametrů modelu novým skutečnostem. Jelikož však kotace CZK swapcí neexistují, závisela by případná existence arbitráže na způsobu jejich ocenění. Na základě konzultace s odborníky z praxe lze říci, že obdobný mechanismus převodu volatilit mezi jednotlivými měnami používají i velké finanční instituce při oceňování finančních derivátů.

Vzhledem k tomu, že pro aplikaci modelu BGM je potřeba znát Blackovy volatility ATM swapcí, musí se nejprve převést kotované Blackovy volatility EUR swapcí na normální volatility. Po získání normální volatility CZK swapce dle vztahu (3.7) se tyto volatility převedou zpět na Blackovy volatility CZK ATM swapcí, které jsou vstupem do modelu BGM. Přesný vzájemný vztah normální a Blackovy volatility v případě evropské swapce je

$$\sigma_n = \sigma_b \frac{F-K}{\ln(F/K)} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{24}\left[1-\frac{1}{120}\ln^2(F/K)\right]\sigma_b^2\tau+\frac{1}{5760}\sigma_b^4\tau^2}, \tag{3.8}$$

kde F představuje forwardovou úrokovou míru s příslušnou splatností a příslušnou dobou jejího počátku, K označuje realizační sazbu (strike) příslušné swapce a τ zastupuje dobu do expirace (v jednotkách let). V situaci ATM swapce platí $F \to K$ a rovnici lze zjednodušit do tvaru

$$\sigma_n = \sigma_b F \frac{1}{1+\frac{1}{24}\sigma_b^2\tau+\frac{1}{5760}\sigma_b^4\tau^2}. \tag{3.9}$$

Pro odvození Blackovy volatility z normální volatility je třeba řešit rovnici 4. stupně:

$$\frac{1}{5760}\tau^2\sigma_n\sigma_b^4 + \frac{1}{24}\tau\sigma_n\sigma_b^2 - F\sigma_b + \sigma_n = 0, \tag{3.10}$$

z které jsou získána čtyři řešení, a je vybráno to, které je nejblíže aproximativnímu odhadu $\sigma_b = \sigma_n/F$. Další informace o jednotlivých typech volatilit spojených se swapcemi lze nalézt například v (Hagan, 2011).

Hodnota příslušného úrokového forwardu, který je v případě ATM swapce zároveň i její realizační sazbou, lze získat z kotací některých bank nebo výpočtem za použití rovnice (2.37) ze sazeb peněžního trhu, tj. ze sazeb typu IBOR pro splatnost do jednoho roku a sazeb IRS pro splatnost nad jeden rok nebo ze sazeb OIS. V tomto článku používám ke stanovení úrokových EUR i CZK forwardů rovnici (2.37). Tímto způsobem získám časovou řadu úrokových CZK i EUR forwardů pro každou kombinaci expirace swapce a délky podkladového IRS.

Po získání normálních volatilit evropských EUR ATM swapcí a získání příslušných úrokových EUR i CZK forwardů je potřeba pro získání volatilit CZK swapcí k požadovanému datu stanovit koeficient H, který zohledňuje fakt, že volatilita úrokových CZK a EUR sazeb může být odlišná, jak jsem ukázala při modelování volatility pomocí GARCH. Při stanovení odhadu koeficientu H se použije znalost časových řad jednotlivých úrokových forwardů v EUR a CZK, když se popíše volatilita každého požadovaného úrokového forwardu pomocí GARCH. Odhady koeficientů H pro každou

kombinaci expirace swapce a délky podkladového IRS se stanoví jako podíl průměrných úrovní volatility CZK forwardů za posledních 6měsíců a průměrných úrovní volatility EUR forwardů za totéž období. Pro většinu odhadů koeficientu H platí, že volatilita úrokových CZK forwardů je nižší než volatilita totožných EUR forwardů na kratším konci výnosové křivky, tj. pro dobu expirace swapce či pro délku podkladového IRS do cca 3 až 4 let, zatímco na delším konci výnosové křivky nejsou rozdíly mezi volatilitou CZK a EUR forwardů příliš vysoké.

Tímto postupem byly získány všechny potřebné členy do rovnic (3.7) a (3.10). Z rovnice (3.7) se vypočítají implikované normální volatility evropských ATM CZK swapcí σ_n^{czk}, které se řešením rovnice (3.10) převedou na implikované Blackovy volatility σ_b^{czk}.

Například Vojtek (2004) využívá ke kalibraci BGM modelu GO-GARCH (Generalized Orthogonal GARCH) model a přijímá stejně jako já závěr, že model BGM lze použít i na český neefektivní trh. Na rozdíl od této práce však používá ke kalibraci modelu historii úrokových sazeb, čemuž jsem se snažila vyhnout a využít spíše okamžité informace obsažené v aktuálních kotacích swapcí. Tento článek se však zabývá oceňováním finančních derivátů. Známé modely úrokových měr, jako např. Coxův-Ingersollův-Rossův, Hooův-Leeův, Vasickův, mohou být obecně používány i pro neefektivní trhy s podobnými výsledky jako na vyspělých trzích, což dokumentuje například (Cícha a Zimmermann, 2006).

Pro odhad parametrů modelu BGM lze využít i kotace volatilit floorů a capů. V této situaci lze postupovat podle (Gatarek, 2007). V případě ČR lze na terminálu Bloomberg i Reuters nalézt údaje o kotacích některých splatností volatilit korunových floorů/capů. Bylo by jistě přesnější použít pro odhad parametrů modelu BGM tyto kotace než poměrně složitě aproximovat kotace volatilit korunových swapcí pomocí kotací volatilit eurových swapcí. Dalším důvodem pro využití volatilit korunových floorů/capů je fakt, že kalibrace modelu BGM je za použití jejich aplikace relativně jednodušší oproti kalibraci při využití volatilit swapcí.

Dle mého názoru však kotace volatilit korunových floorů/capů ke kalibraci modelu BGM využít nelze z několika důvodů. Za prvé, trh těchto opčních instrumentů v ČR víceméně neexistuje. Tyto kotace mají pouze indikativní charakter a nejsou aktualizovány i několik měsíců, díky čemuž nereagují na tržní vývoj. Tento fakt dokumentuje obrázek 3.23. Pokud by obchodník požadoval uzavřít obchod s korunovým floorem/capem, získal by zcela jistě cenu odlišnou od zobrazené indikativní ceny. Za druhé, tyto kotace počínají rokem 2008 a ani poté do roku 2010 nejsou k dispozici pro všechny dny, pro které je potřebuji. V této práci potřebuji kotace z roku 2005 a 2006, poté z roku 2008 a roku 2013. Za třetí, existují pouze kotace volatilit pro některé expirace floorů/capů, což by znamenalo dodatečnou aproximaci zbývajících potřebných expirací. Za čtvrté, trh swapcí je jeden z nejlikvidnějších v rámci trhů úrokových derivátů a je přibližně cca 4 až 6krát více likvidní než trh floorů/capů, což je doloženo například v (ISDA, 2014). Toto pozorování platí celosvětově ale současně i speciálně pro eurový trh. Kotace na takto likvidním trhu v sobě obsahuje velké množství informací ohledně budoucího ekonomického vývoje včetně zachycení očekávání například o nadcházejícím nastavení monetární



Obrázek 3.23: Kotace volatility 1Y ATM flooru – dostupná historie (25. 1. 2008–16. 5. 2016)

Zdroj: Bloomberg

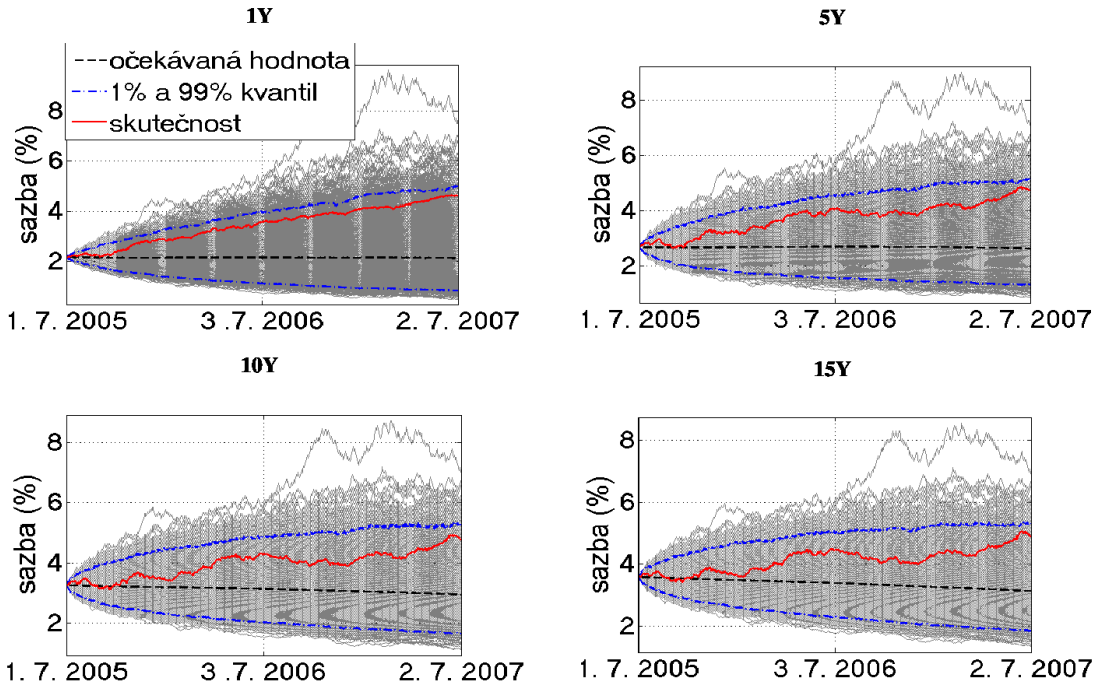
politiky, atd. Oproti kotacím na méně likvidním trhu v sobě obsahují kotace na více likvidním trhu přesnější informace, a proto je využití volatilit swapcí při kalibraci modelu BGM velmi přínosné.

Díky výše uvedeným důvodům jsem hledala možnost, jak aproximovat kotace korunových volatilit swapcí a nalezla ji v použití kotací volatilit eurových swapcí. Dle mého názoru získám tímto způsobem v rámci derivátových instrumentů nejlepší zdroj aktuálních očekávání o budoucím vývoji ekonomické situace v EU, která do značné míry ovlivňuje i ekonomickou situaci v ČR.

3.6.3 Simulace

Obrázky 3.24 a 3.25 zobrazují dvouleté denní simulace EUR IRS a CZK IRS sazeb provedené pomocí BGM modelu v období před finanční krizí, přičemž odhad parametrů byl učiněn k 1. červenci 2005. Stejně jako v případě předešlých aplikovaných modelů i model BGM byl zkonstruován v prostředí finančních trhů před finanční krizí, díky čemuž by v tomto období měla být predikční schopnost modelu lepší ve srovnání s ostatními analyzovanými obdobími. Bude zajímavé zejména to, jak model BGM predikuje budoucí vývoj výnosových křivek, když byl vytvořen za účelem oceňování. Velmi zajímavé bude taktéž pozorovat predikční schopnost modelu BGM v podmínkách českého trhu, kde díky jeho relativní nerozvinutosti aproximuji potřebné volatility swapcí pomocí přístupu popsaném v kapitole 3.6.2.

Model BGM správně predikoval skutečnou dynamiku výnosové křivky peněžního trhu v eurozóně, když skutečný vývoj všech analyzovaných úrokových sazeb setrval



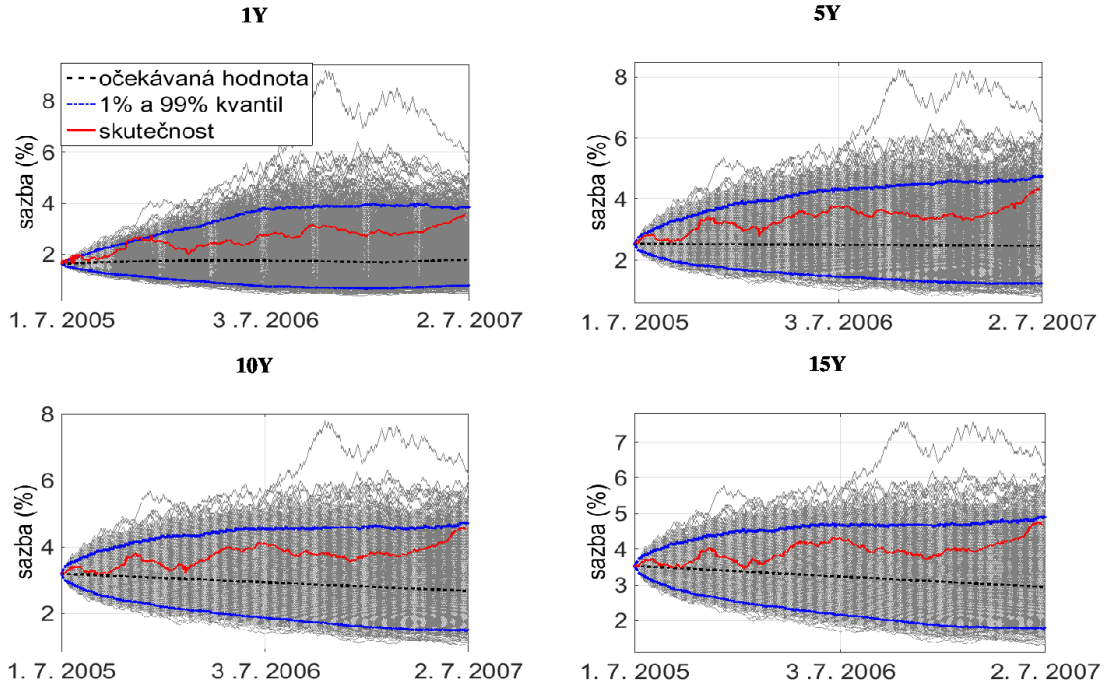
Obrázek 3.24: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu BGM v období před krizí

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

v pásmu simulací daným 1% a 99% kvantilem, a vystihl tak růst sazeb v eurozóně. Tato skutečnost je zobrazena na obrázku 3.24. V tomto období jsme byli svědky růstu úrokových sazeb všech splatností i v ČR. I v případě české výnosové křivky model BGM správně vystihl růst sazeb, když skutečný vývoj úrokových sazeb všech analyzovaných splatností bez větších problémů setrval v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem po celé simulované období, pouze s nepatrnou výjimkou sazby 1Y CZK IRS, která na několik málo dnů překročila 99% kvantil simulací. U všech analyzovaných sazeb jak EUR, tak CZK výnosové křivky peněžního trhu lze pozorovat, že se jejich skutečný vývoj v samém závěru simulačního horizontu přiblížil 99% kvantilu simulací, což bylo dáno globálním růstem úrokových sazeb před začátkem finanční krize, avšak ve všech případech setrval pod touto hranicí. Tuto skutečnost lze pozorovat zejména u sazeb 10Y a 15Y CZK IRS.

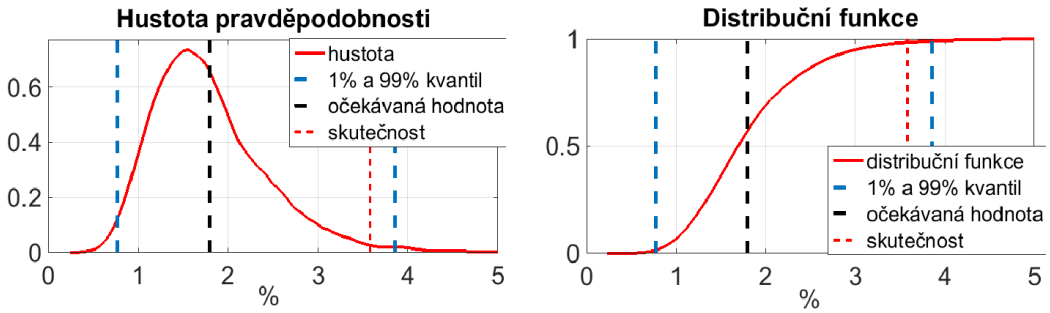
Při srovnání výsledných dvouletých simulací v období od 1. července 2005 do 2 července 2007 učiněných na základě modelů CIR, GP a BGM se jeví simulace učiněné na základě modelu BGM jako nejlépe popisující skutečný vývoj výnosové křivky peněžního trhu v eurozóně a poněkud překvapivě i v ČR vzhledem ke konstrukci modelu BGM pro rozvinuté trhy. Pro ověření tohoto tvrzení a stejně tak následujících tvrzení této sekce bude potřeba provést ještě důkladnější analýzu, která bude obsahem poslední sekce této kapitoly.

Na obrázku 3.26 jsou zobrazeny predikce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 1Y CZK IRS ke dni 2. července 2007, tj. k poslednímu datu simulačního období, získané za použití modelu BGM na základě odhadu parametrů ke dni



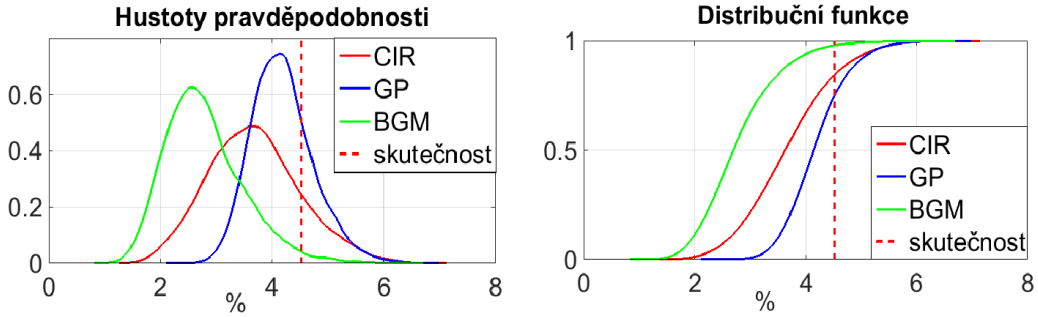
Obrázek 3.25: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu BGM v období před krizí

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty



Obrázek 3.26: Predikce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 1Y CZK IRS na základě modelu BGM pro den 2. července 2007

Zdroj: Vlastní výpočty



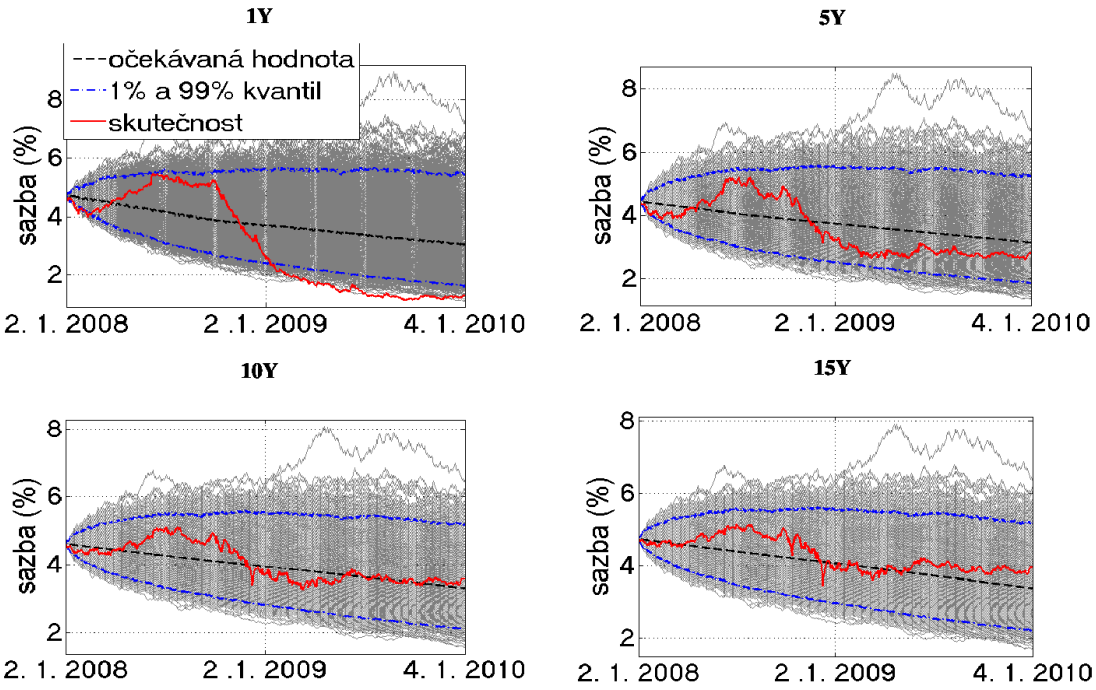
Obrázek 3.27: Predikce hustot pravděpodobnosti a distribučních funkcí sazby 10Y CZK IRS na základě modelů CIR, GP a BGM pro den 2. července 2007
Zdroj: Vlastní výpočty

1. července 2005 z aktuálních tržních dat. Odhad hustoty pravděpodobnosti i distribuční funkce byl získán neparametricky na základě simulací sazby 1Y CZK IRS ke dni 2. července 2007 za použití jádrových funkcí. Na základě grafu distribuční funkce lze konstatovat, že pravděpodobnost, že sazba 1Y CZK IRS bude dne 2. července 2007 menší nebo rovna než její skutečná hodnota platná tento den, byla 1. července 2005 odhadnuta na úrovni 0,98.

Na obrázku 3.27 je zobrazeno porovnání predikcí hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 10Y CZK IRS ke dni 2. července 2007 učiněných dne 1. července 2005 za využití modelů CIR, GP a BGM. Z obrázku 3.27 vyplývá, že předpověď pravděpodobnostního rozdělení sazby 10Y CZK IRS učiněná na základě modelu GP vykazuje největší špičatost, zatímco předpověď uskutečněná na základě modelu CIR vykazuje špičatost nejnižší, a tudíž vykazuje i nejširší interval možných výsledků, které mohou nastat s nenulovou pravděpodobností. Pravděpodobnost, že sazba 10Y CZK IRS bude dne 2. července 2007 menší nebo rovna než její skutečná hodnota v tento den, byla 1. července 2005 odhadnuta modelem BGM na úrovni 0,97, tj. na podobné hladině jako u sazby 1Y CZK IRS, modelem GP na úrovni 0,75 a modelem CIR na úrovni 0,85.

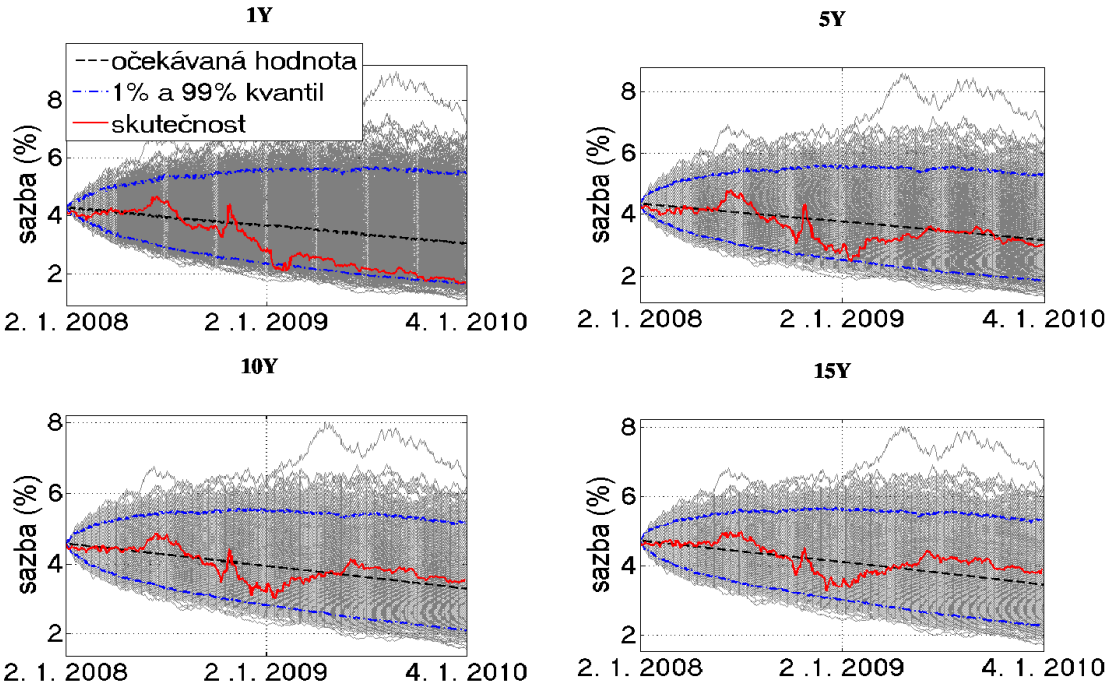
Na obrázku 3.28 a 3.29 jsou zobrazeny simulace EUR IRS a CZK IRS v období finanční krize, tj. v období 2. ledna 2008 až 4. ledna 2010, provedené na základě odhadu parametrů modelu uskutečněnému ke dni 2. ledna 2008.

Bude opět zajímavé, jakým způsobem se simulace učiněné na základě modelu BGM dokázaly vypořádat s turbulencemi na finančních trzích v době finanční krize a jak ovlivní výsledné simulace fakt, že jsou odhadovány z aktuálních kotací a nikoliv z historické časové řady. Z obrázků 3.28 a 3.29 je patrné, že simulace popsaly skutečnost poměrně dobře s výjimkou sazby 1Y EUR IRS, u které simulace sice správně zachytily prudký růst v první polovině roku 2008, ale již nedokázaly popsat masivní propad sazby po krachu Lehman Brothers. Po začátku roku 2009 se dostala skutečná hodnota sazby 1Y EUR IRS pod 1% kvantil simulací a setrvala pod ním až do konce tohoto roku. To-



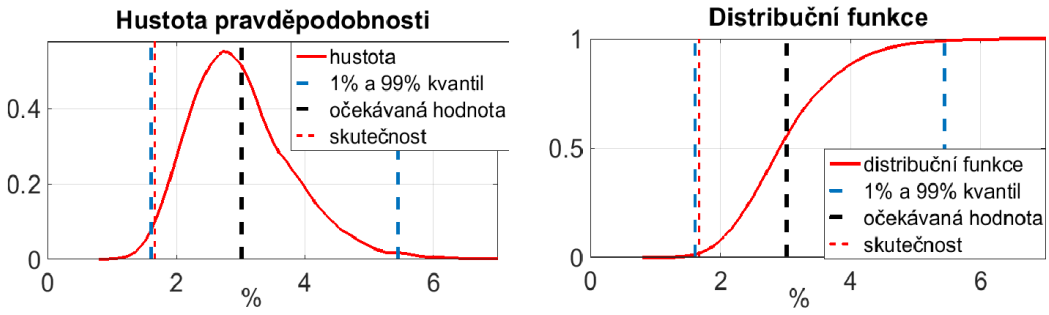
Obrázek 3.28: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu BGM v období finanční krize

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty



Obrázek 3.29: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu BGM v období finanční krize

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty



Obrázek 3.30: Predikce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 1Y CZK IRS na základě modelu BGM pro den 4. ledna 2010

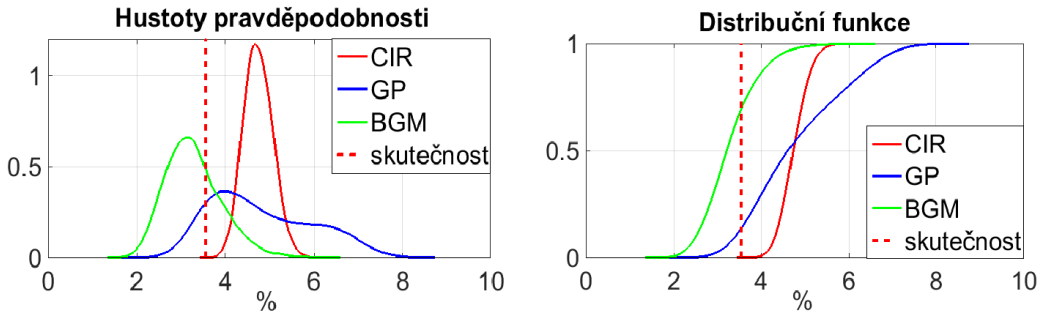
Zdroj: Vlastní výpočty

též je možné říci o analyzovaných avšak v této práci nezobrazených EUR sazbách až do splatnosti 2 let. Přesto je však možné konstatovat, že ve srovnání s ostatními analyzovanými modely, simulace těchto sazeb učiněné na základě modelu BGM popsaly jejich skutečný vývoj nejlépe. Skutečný vývoj všech ostatních analyzovaných EUR i CZK sazeb setrval v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem po celé simulované období, když navíc u většiny sazeb se jejich skutečná hodnota na konci simulačního rámce nacházela poblíž střední hodnoty simulací, což je patrné z obrázků 3.28 a 3.29. Tato skutečnost je poměrně překvapivá a je patrně odrazem faktu, že v tržních kotacích volatilit příslušných swapcí ke dni 2. ledna 2008 byl již víceméně správně započítán budoucí vývoj finančních trhů. Na základě tohoto porovnání simulací a skutečnosti se jeví, že model BGM lépe predikuje dynamiku delšího konce výnosové křivky oproti konci kratšímu.

Modely GP a CIR, které mají parametry odhadnuté na základě historické časové řady, tuto flexibilitu nemají a v případě výnosové křivky peněžního trhu eurozóny a v případě modelu CIR i výnosové křivky peněžního trhu ČR produkovaly výrazně horší simulace oproti modelu BGM. Skutečný vývoj CZK sazeb v období finanční krize se v případě modelu GP taktéž nachází v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem po celé simulační období, nicméně tyto simulace při srovnání se simulacemi získanými na základě modelu BGM vykazují na konci simulačního období vyšší rozdíl mezi 1% a 99% kvantilem. Je možné, že model GP nadhodnotil budoucí volatilitu sazeb, a proto bylo pro výsledné simulace jednodušší pokrýt skutečný vývoj sazeb.

Ačkoliv se zdá, že model BGM popisuje dynamiku výnosových křivek lépe než modely CIR a GP i v období finanční krize, bude nutné učinit další pozorování pro ověření tohoto tvrzení.

Na obrázku 3.30 jsou zobrazeny predikce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 1Y CZK IRS ke dni 4. ledna 2010, tj. k poslednímu datu simulačního období, získané za použití modelu BGM na základě odhadu parametrů ke dni 2. ledna 2008 z aktuálních tržních dat. Odhad hustoty pravděpodobnosti i distribuční funkce byl



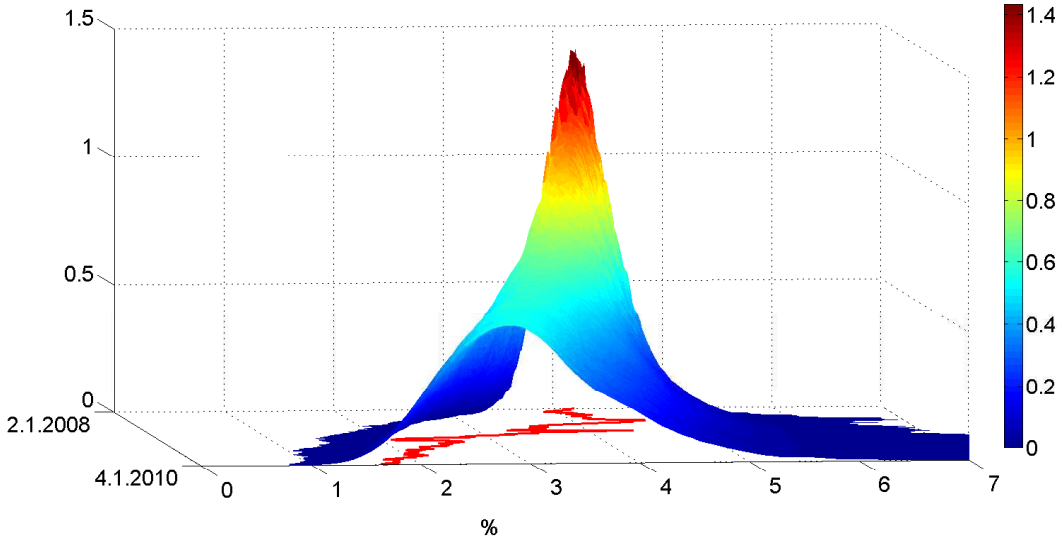
Obrázek 3.31: Predikce hustot pravděpodobnosti a distribučních funkcí sazby 10Y CZK IRS na základě modelů CIR, GP a BGM pro den 4. ledna 2010
Zdroj: Vlastní výpočty

stejně jako v předchozím případě získán neparametricky na základě simulací sazby 1Y CZK IRS. Na základě grafu distribuční funkce lze konstatovat, že pravděpodobnost, že sazba 1Y CZK IRS nabude dne 4. ledna 2010 menší hodnoty než činí její skutečná hodnota v tento den, byla 2. ledna 2008 odhadnuta na úrovni 0,02.

Na obrázku 3.31 je zobrazeno porovnání predikcí hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 10Y CZK IRS ke dni 4. ledna 2010 učiněných dne 2. ledna 2008 za využití modelů CIR, GP a BGM. Na obrázku 3.31 lze pozorovat výraznější rozdíly ve tvaru rozdělení predikovaných jednotlivými modely, než tomu bylo na obrázku 3.27. Nyní vykazuje největší špičatost předpověď pravděpodobnostního rozdělení sazby 10Y CZK IRS učiněná na základě modelu CIR, zatímco předpověď uskutečněná na základě modelu GP vykazuje špičatost nejnižší při nejširším intervalu signifikantně pravděpodobných výsledků. Predikce učiněné na základě modelu BGM vykazují stejně jako v předchozím období špičatost ležící mezi špičatostí odhadů rozdělení učiněných na základě modelů GP a CIR. Tato vlastnost platí pro úrokové sazby všech analyzovaných splatností.

Pravděpodobnost, že sazba 10Y CZK IRS nabude dne 4. ledna 2010 menší hodnoty než skutečná hodnota tento den, byla 2. ledna 2008 odhadnuta modelem BGM na úrovni 0,7, modelem GP na úrovni 0,14 a modelem CIR na úrovni 0. Pravděpodobnost na úrovni 0 u modelu CIR je potvrzena i simulacemi sazby 10Y CZK IRS na obrázku 3.13, kde se skutečná hodnota sazby pohybuje ke konci roku 2009 mimo prostor simulací.

Obrázek 3.32 zobrazuje předpovědi hustot pravděpodobnostních rozdělení sazby 1Y CZK IRS učiněné na základě modelu BGM ke dni 2. ledna 2008 pro období leden 2008 až leden 2010. Z obrázku je patrné, že směrem od data konstrukce předpovědí klesá špičatost predikovaných rozdělení. Tento fakt je očekávatelný vzhledem k prodlužujícímu se horizontu predikce a současně rostoucí nejistotě týkající se budoucího vývoje skutečné sazby. Díky této vlastnosti nejsou na obrázku 3.32 zobrazeny predikce hustoty pravděpodobnosti pro první dva měsíce analyzovaného období, protože špiča-

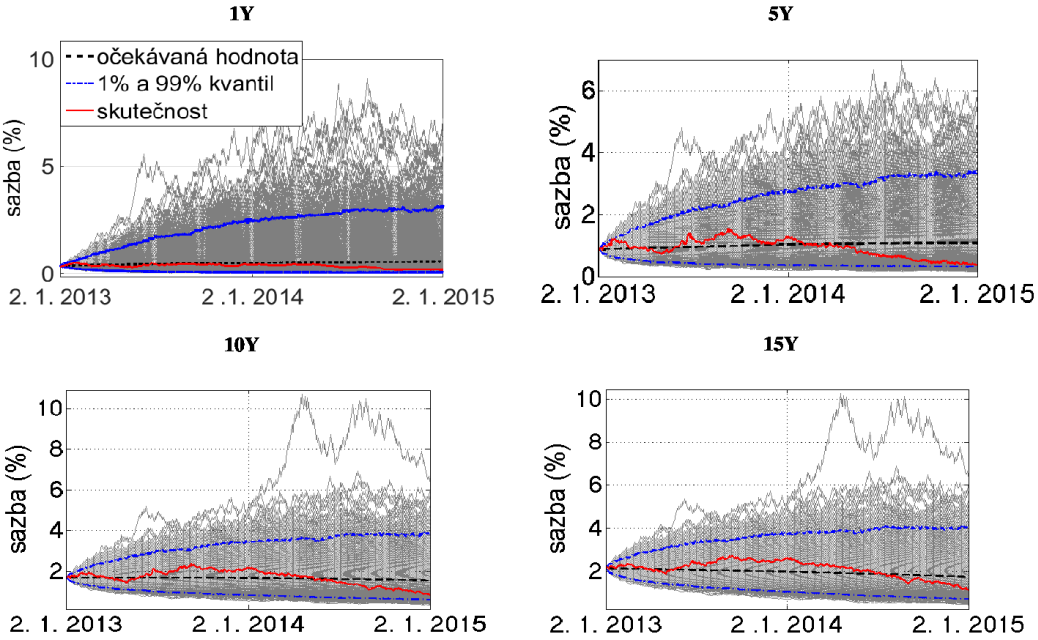


Obrázek 3.32: Předpovědi hustot pravděpodobnostních rozdělení sazby 1Y CZK IRS na základě modelu BGM od 2. ledna 2008 do 4. ledna 2010
Zdroj: Vlastní výpočty

tost odhadů rozdělení v tomto období nabývá hodnot, které by činily výsledný obrázek nepřehledným. Snižující se špičatost rozdělení společně s rostoucím horizontem predikce je konzistentní s rozšiřujícím se prostorem simulací daným 1% a 99% kvantilem a vycházejícím z jednoho bodu na počátku simulací. Tuto vlastnost dokumentují všechny obrázky simulací.

Na obrázku 3.33 a 3.34 jsou zobrazeny simulace EUR IRS a CZK IRS v období po finanční a dluhové krizi, tj. v období 2. ledna 2013 až 2. ledna 2015, provedené na základě odhadu parametrů modelu uskutečněnému ke dni 2. ledna 2013.

Očekávám, že díky odhadu parametrů modelu na základě aktuálních kotací a nikoliv na základě historických časových řad se simulace lépe vyrovnají s vlivem bezprecedentních rozhodnutí centrálních bank na finanční trh v tomto období oproti simulacím získaným na základě modelů CIR a GP. Proti tomu vlivu však může působit redefinice vztahů na finančních trzích po finanční krizi. Při pohledu na obrázky 3.33 a 3.34 je zřejmé, že se charakter simulací uskutečněných na základě modelu BGM změnil oproti simulacím uskutečněným na základě téhož modelu v předchozích obdobích a to jak v eurozóně, tak v ČR. Prostor simulací nad 99% kvantilem je v tomto období ve srovnání s ostatními analyzovanými obdobími relativně široký a maxima simulací dosahují relativně vysokých hodnot. Z grafů byla z důvodu přehlednosti odstraněna jedna cesta vývoje příslušné úrokové sazby, která nabývala výrazně vyšších hodnot oproti ostatním simulacím, když například u sazby 1Y EUR IRS dosáhla v maximální hodnotě úrovně cca 45 %. Převážná většina simulací však nabývá hodnot, které jsou ve skutečnosti relativně reálně dosažitelné, což dokumentuje i 99% kvantil simulací, který například u sazby 1Y EUR IRS dosahuje v maximálním bodě 3,2 %. Tato vlastnost je patrně



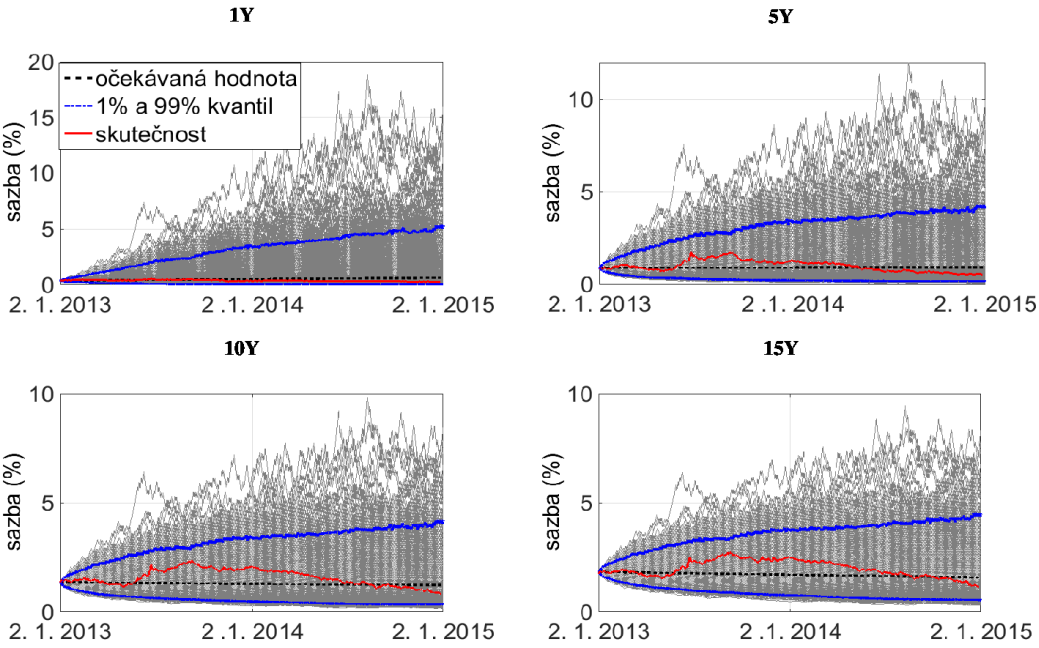
Obrázek 3.33: Simulace a skutečná realizace vybraných EUR IRS na základě modelu BGM v období po krizi

Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

způsobená výrazně vyššími hodnotami kotací volatilit swapcí a nejistý budoucí vývoj s vyšší pravděpodobností extrémních scénářů je tak v podstatě již v kotacích započítán, což se projeví právně ve výsledných simulacích. Vyšší volatilitu peněžního trhu v období po finanční a dluhové krizi dokládá i analýza GARCH uvedená v kapitole 3.3.

Skutečný vývoj všech analyzovaných sazeb peněžního trhu v eurozóně i ČR zůstal v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem, což dokumentují obrázky 3.33 a 3.34. Převážně v případě eurozóny však lze pozorovat vlastnost modelu BGM, díky níž je použití tohoto modelu v prostředí ultra nízkých úrokových sazeb komplikované a v případě záporných sazeb pak díky lognormalitě výsledných sazeb nemožné. Například skutečná 1Y EUR IRS sazba k datu odhadu parametrů modelu na počátku simulačního období 2. ledna 2013 nabývala hodnoty 0,33 %, po celé simulační období tato sazba pak trendově klesala až na hodnotu 0,15 % ke konci 2014. Při pohledu na simulace 1Y EUR IRS sazby je patrné jejich výrazné zahuštění okolo nulové hodnoty, ke které je v podstatě přilepen 1% kvantil simulací. I když by simulace patrně za normálních okolností pokračovaly více do záporu, podmínka lognormality výsledných sazeb jim to neumožňuje. Při porovnání simulací provedených za použití modelu BGM ve všech analyzovaných obdobích je zřejmé, že ve všech obdobích převažuje vyšší pravděpodobnost výraznějších pohybů úrokových sazeb směrem k vyšším hodnotám než obráceně, protože rozdíl mezi 99% kvantilem simulací a jejich střední hodnotou je větší než rozdíl mezi střední hodnotou a 1% kvantilem. Tento nepoměr se však signifikantně zvýšil v období po finanční a dluhové krizi, když například u sazby 1Y EUR IRS činí na konci simulačního horizontu hodnota 99% kvantilu 3,18 %, střední hodnoty simulací 0,56 % a 1% kvantilu 0,04 %.

Přesto i v tomto období extrémně nízkých úrokových sazeb, bezprecedentního ovli-



Obrázek 3.34: Simulace a skutečná realizace vybraných CZK IRS na základě modelu BGM v období po krizi

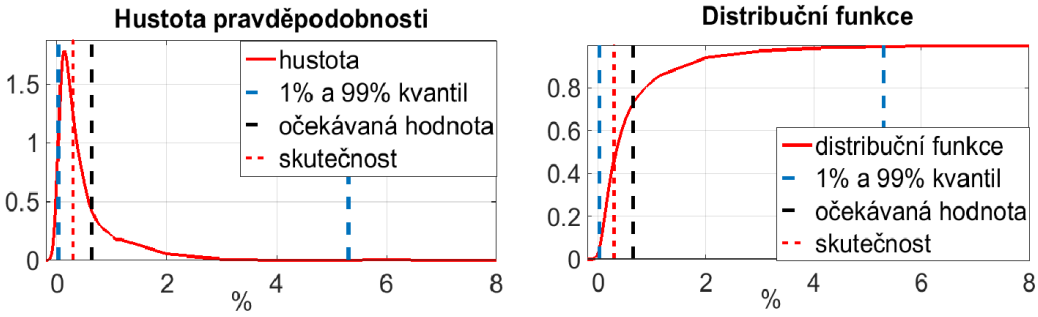
Zdroj: Bloomberg a vlastní výpočty

vňováním finančních trhů ze strany centrálních bank a při redefinici vztahů na finančních trzích lze říci, že model BGM vhodně popsal dynamiku výnosových křivek peněžního trhu v eurozóně i v ČR.

Je však potřeba upozornit, že v období extrémně nízkých sazeb je použití modelu BGM vhodné pouze tehdy, pokud je v příslušné ekonomice nastavena limitní hodnota úrokových sazeb na nulu. I když model BGM vystihl vývoj EUR křivky v letech 2013 a 2014, v roce 2015 by selhal, protože například sazba 1Y EUR IRS poprvé nabyla záporné hodnoty 23. října 2015 a do konce roku 2015 se z negativního teritoria nedostala. Naopak se na počátku roku 2016 očekává, že ECB bude držet záporné sazby i v roce 2016 a pravděpodobně i v roce 2017, což je výrazně déle, než se při zavádění záporných sazeb očekávalo včetně očekávání samotné ECB.

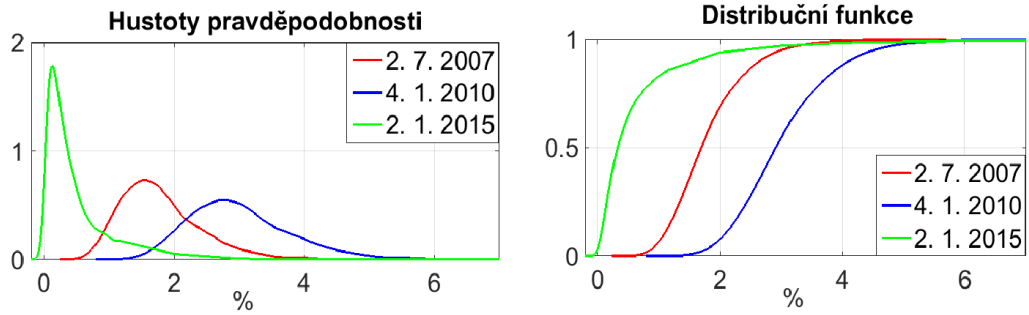
V případě možnosti existence negativních sazeb se pro popis dynamiky výnosové křivky například nabízí model GP, jehož predikční schopnost se jeví taktéž poměrně dobrá. V období po finanční krizi již indikoval možnost záporných sazeb, když například 1% kvantil simulací sazby 1Y EUR IRS nabyl ke konci roku 2014 hodnoty úrovně $-0,3$ %.

Na obrázku 3.35 jsou zobrazeny predikce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 1Y CZK IRS ke dni 2. ledna 2015, získané za použití modelu BGM na základě odhadu parametrů ke dni 2. ledna 2013 z aktuálních tržních dat. Na základě grafu distribuční funkce lze konstatovat, že pravděpodobnost, že sazba 1Y CZK IRS nabude dne 2. ledna 2015 menší hodnoty než činí její skutečná hodnota v tento den, byla 2. ledna 2013 odhadnuta na úrovni 0,47. Na obrázku 3.36 jsou potom zobrazeny predikce pravděpodobnostních rozdělení sazby 1Y CZK IRS učiněné na základě modelu BGM



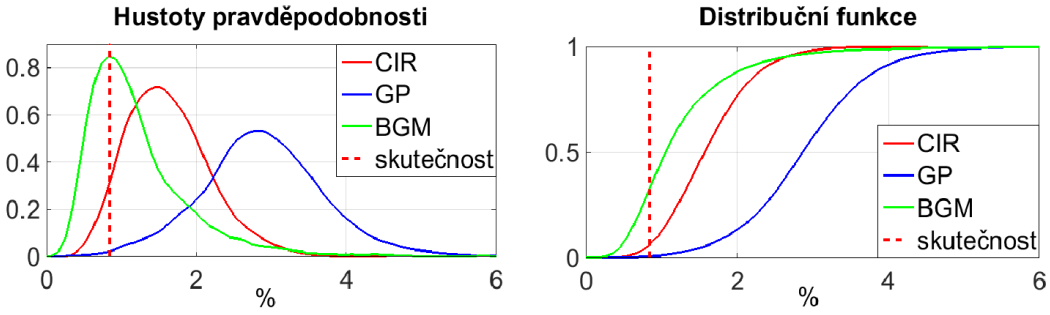
Obrázek 3.35: Predikce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 1Y CZK IRS na základě modelu BGM pro den 2. ledna 2015

Zdroj: Vlastní výpočty



Obrázek 3.36: Predikce hustot pravděpodobnostních rozdělení a distribučních funkcí sazby 1Y CZK IRS na základě modelu BGM pro konce analyzovaných období

Zdroj: Vlastní výpočty

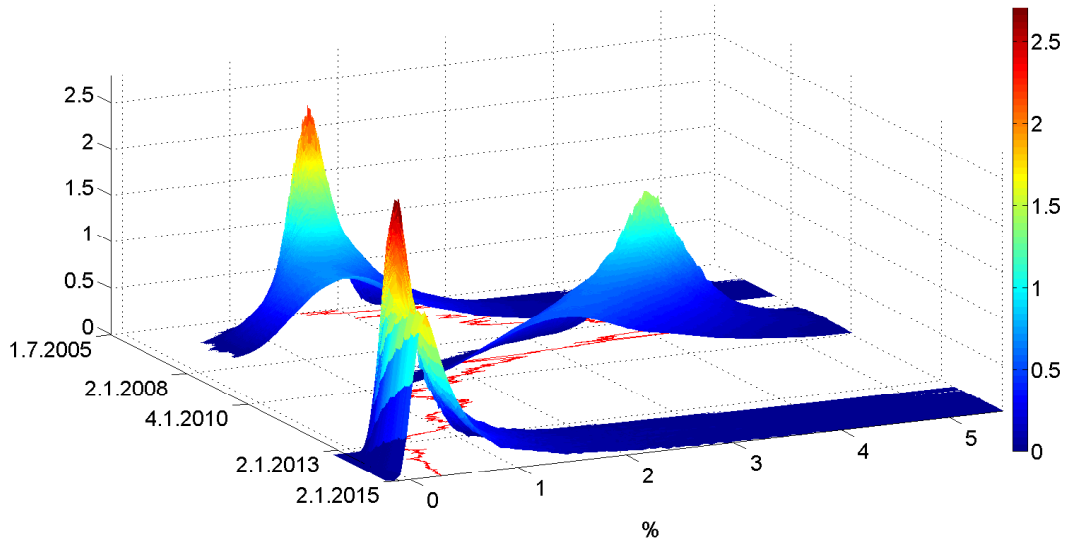


Obrázek 3.37: Predikce hustot pravděpodobnosti a distribučních funkcí sazby 10Y CZK IRS na základě modelů CIR, GP a BGM pro den 2. ledna 2015
Zdroj: Vlastní výpočty

ke konci analyzovaných období z aktuálních dat platných na počátku těchto období. Nejnižší špičatost a nejširší interval signifikantně pravděpodobných výsledků vykazuje predikce pro den 4. ledna 2010, což bylo patrně způsobeno prudkým zvýšením nejistoty na finančních trzích na počátku finanční krize.

Na obrázku 3.37 je pak zobrazeno porovnání predikcí hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce sazby 10Y CZK IRS ke dni 2. ledna 2015 učiněných dne 2. ledna 2013 za využití modelů CIR, GP a BGM. Oproti předchozím obdobím zde největší špičatost vykazuje predikce učiněná na základě modelu BGM. Nejmenší špičatost a zároveň nejširší interval signifikantně pravděpodobných výsledků nyní vykazuje predikce učiněná na základě modelu GP. Je patrné, že poklesu sazeb přiřazovaly predikce učiněné na základě modelu BGM nejvyšší pravděpodobnost ve srovnání s ostatními modely. Toto tvrzení dokládá i fakt, že pravděpodobnost toho, že sazba 10Y CZK IRS nabude dne 2. ledna 2015 menší hodnoty než činí její skutečná hodnota tento den, byla 2. ledna 2013 odhadnuta modelem BGM na úrovni 0,33, modelem CIR na úrovni 0,06 a modelem GP opět na úrovni cca 0,01, což lze pozorovat i na obrázku 3.21, kdy se vývoj skutečné sazby 10Y CZK IRS dostal na samém konci roku 2014 nepatrně pod 1% kvantil.

Na obrázku 3.38 jsou zobrazeny všechny predikce hustot pravděpodobnostních rozdělení sazby 1Y CZK IRS učiněné na základě modelu BGM pro všechny období společně se skutečným vývojem této sazby. Predikce jsou zkonstruovány pro každý den v konkrétním analyzovaném období a jsou učiněny vždy k prvnímu dni tohoto období z aktuálních tržních dat. Z obrázku jsou patrné změny v charakteru výsledného rozdělení během jednotlivých období, když nejplošší předpovědi rozdělení spojené s přiřazením signifikantní pravděpodobnosti možným výsledkům v nejširším intervalu jsou spojeny s obdobím finanční krize, zatímco nejvíce špičatá rozdělení jsou predikována pro období po finanční a dluhové krizi. Z obrázku je taktéž patrné postupné zplošťování rozdělení směrem od okamžiku odhadu parametrů, které bylo již dokumentováno na obrázku 3.32. Z tohoto důvodu nezobrazuje obrázek 3.38 první dva měsíce predikcí pro každé



Obrázek 3.38: Předpovědi hustot pravděpodobnostních rozdělení sazby 1Y CZK IRS na základě modelu BGM pro všechna tři sledovaná období

Zdroj: Vlastní výpočty

období stejně jako v případě obrázku 3.32.

3.7 Predikční schopnost

V této sekci se budu zabývat porovnáním predikční schopnosti modelů CIR, GP a BGM při predikování dynamiky výnosové křivky v rámci jednotlivých období a taktéž při predikci dynamiky kratšího a delšího konce výnosové křivky. Dále v této sekci porovnám, co se týče předpovědní schopnosti, jednotlivé modely mezi sebou navzájem.

O predikční schopnosti jednotlivých modelů již mnohé vypověděly predikce uvedené v předchozích sekcích. V této kapitole jsem již učinila několik závěrů, které v této části potvrdím nebo vyvrátím. Vzhledem k cíli práce v podobě aplikace modelů úrokových měr v českém prostředí použiji při vyhodnocování predikční schopnosti jednotlivých modelů predikce výnosové křivky českého peněžního trhu.

Při analýze predikční schopnosti jednotlivých modelů zkonstruuji predikce pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých úrokových sazeb k přibližně 52 různým dnům v každém analyzovaném období. Predikce pravděpodobnostních rozdělení získám opět ve formě simulací příslušných sazeb, které budou mít opět denní frekvenci, avšak budou predikovány na období jednoho roku. První množina jednoletých simulací v každé analyzovaném období je konstruována ke stejnému dni jako dvouleté simulace, tj. k 1. července 2005, k 2. ledna 2008 a k 2. ledna 2013. Počátek každé následující predikce se vždy posune o jeden týden dopředu oproti předchozí predikci. Toto posunutí provádím po dobu jednoho roku. Poslední množina těchto jednoročních simulací tak v závislosti na

analyzovaném období začíná 3. července 2006, resp. 2. ledna 2009, resp. 2. ledna 2014. Tímto způsobem získám pro každé analyzované období a pro každý z modelů CIR, GP a BGM predikce úrokových sazeb tvořící výnosovou křivku k přibližně 52 různým dnům. Výsledné jednoleté simulace poté porovnám se skutečným vývojem příslušné sazby. U každé predikce příslušné úrokové sazby vždy provedu 5 000 simulací s denní frekvencí u modelů CIR a GP. Vzhledem k velké výpočetní náročnosti při konstrukci simulací na základě modelu BGM provedu pro každou predikci příslušné úrokové sazby 1 000 simulací s denní frekvencí, což je dle mého názoru stále dostatečný počet pro posouzení predikční schopnosti.

Obecně lze říci, že v případě kvalitní předpovědi setrvá ve většině případů skutečný vývoj sazby v prostoru mezi 1% a 99% kvantilem simulací. Taktéž je však důležité, aby simulace nepokrývaly zbytečně velký prostor možných výsledků, tj. pokud se například výsledný 1% a 99% mezikvantilový rozsah simulací konkrétní korunové IRS sazby v následujícím jednom roce nachází v rozmezí od -5 % do 15 %, je vysoce pravděpodobné, že skutečná úroková míra zůstane v tomto prostoru po celý horizont simulací. V takovémto případě by nebylo nutné podstupovat relativně náročnou aplikaci modelů úrokových měr, ale postačovalo by stanovit hodnoty příslušných kvantilů expertním odhadem. Model úrokových měr s dobrou predikční schopností by měl generovat takové simulace, které nejenom pokryjí skutečnost, ale zároveň správně vystihnou volatilitu skutečného vývoje výnosové křivky a nebudou dávat příliš široký předpovědní interval.

Analýza předpovědní schopnosti jednotlivých modelů zahrnuje ucelený systém tří kritérií a dále pak využití statistických testů.

3.7.1 Systém kritérií

V rámci systému kritérií jsem navrhla tři různá kritéria, jejichž cílem je důkladně prozkoumat a ohodnotit predikční schopnosti analyzovaných modelů. Zaměřím se zde mimo jiné na to, jestli skutečný vývoj konkrétní sazby setrval v mezikvantilovém rozpětí daným 1% a 99% kvantilem a případně vyjádřím počet dnů, po které se skutečná sazba nacházela mimo toto rozpětí při rozlišení počtu dnů pod 1% kvantilem a počtu dnů nad 99% kvantilem. Dále se zaměřím na to, jakým způsobem byl skutečnou úrokovou sazbou využit prostor simulací, tj. jak byla vystihnuta volatilita skutečného vývoje příslušné úrokové sazby během simulačního horizontu. Tuto vlastnost budu sledovat pomocí rozdílu mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jichž dosáhla příslušná skutečná úroková sazba. Vzhledem k faktu, že na počátku vycházejí simulace z jediného bodu a v průběhu času se rozšiřují, může i nepatrný pohyb ve vývoji skutečné úrokové míry znamenat významné ovlivnění pozorovaných ukazatelů. Z tohoto důvodu při analýze predikční schopnosti modelů abstrahuji od prvního měsíce simulačního rámce. Pro analýzy tak zbude zbývajících jedenáct kalendářních měsíců, tj. celkem cca 230 denních údajů pro každou analyzovanou úrokovou míru v rámci jedné predikce uskutečněné ke konkrétnímu dni. Dále budu také pozorovat, jakého kvantilu simulací dosáhla příslušná skutečná úroková sazba v poslední den simulací.

Při vynesení konečného závěrů o posuzovaném modelu je třeba uvažovat výsledky všech tří kritérií a ne pouze některých. Neboť každé kritérium sleduje jednu specifickou vlastnost modelu, ale může opomíjet kvalitu jiné důležité vlastnosti, která je kontrolována jiným kritériem. Například pokud by byl model posuzován pouze podle prvního kritéria, které sleduje počet dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo prostor 1% a 99% kvantilu, mohl by být preferován model se zbytečně nadhodnocenou volatilitou. Pokud se ale do hodnocení zapojí i další kritérium, jenž se zaměřuje na správné vystihnutí volatility skutečného vývoje úrokové sazby, je analytik na nevhodnou vlastnost v podobě nadhodnocení volatility upozorněn.

Pro dluhového manažera je stěžení porozumět i chování predikcí úrokových měr při určitých událostech na trhu. Především z tohoto důvodu nelze apriori jednoznačně stanovit vhodné hodnoty kritérií a podle nich následně vybrat nejlepší model. Co je při určité situaci na trhu špatný výsledek znamenající nevhodnost použití modelu, může být při odlišné situaci na trhu skvělý výsledek. Je proto nutné vyhodnocovat výsledné simulace ze všech dostupných hledisek v celkovém kontextu vývoje na finančních trzích. Pouhé omezení se na porovnání výsledků s předem stanovenými vhodnými hodnotami kritérií může vést k nesprávnému pochopení vlastnosti jednotlivých modelů a chybné interpretaci výsledných predikcí.

První kritérium

První kritérium sleduje počet dnů, ve kterých se nacházela příslušná skutečná úroková sazba mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem. V rámci jedné simulace zkonstruované pro konkrétní den a konkrétní úrokovou sazbu je pro každý den simulačního období porovnána skutečná sazba s 1% a 99% kvantilem. Připomínám, že simulace jsou provedeny na období jednoho roku, který obsahuje cca 252 obchodních dní. Pro vyšší vypovídací schopnost této analýzy jsem do pozorování nezahrnula první měsíc simulací, tj. cca 22 obchodních dní, protože simulace se v tomto období nacházejí v poměrně úzkém pásu, poté co na počátku vycházejí z jednoho bodu, a nepatrný pohyb ve vývoji skutečné sazby může znamenat překročení sledovaných kvantilů. Tudíž v rámci jedné simulace vyjde hodnota tohoto kritéria v rozmezí 0 až cca 230 dnů. Přičemž hodnota 0 dnů značí setrvání skutečného vývoje příslušné sazby v pásmu simulací daným 1% a 99% kvantilem po všechny dny sledovaného období. Naopak údaj přibližující se číslu 230, znamená to, že příslušná skutečná sazba setrvala v pásmu simulací daným 1% a 99% kvantilem buď velmi malý počet dnů nebo ani jeden den.

Při řízení úrokového rizika dluhového portfolia je cennou informací stanovení minimálních a maximálních očekávaných výdajů portfolia, které s vysokou pravděpodobností pokryjí skutečné výdaje. Pokud se tyto hodnoty spočítají například podle 1% a 99% kvantilu simulací úrokových sazeb, lze v případě kvalitních predikcí očekávat s 98% pravděpodobností, že tento interval pokryje skutečné výdaje. Do hodnocení predikční schopnosti modelů úrokových měr tudíž zapojuji i toto kritérium. Při dobré predikční schopnosti modelu lze očekávat, že interval daný 1% a 99% kvantilem simulací pokryje

skutečnou sazbu s 98% pravděpodobností. Bude-li tedy průměrná hodnota tohoto kritéria vycházet přibližně v intervalu 0 až 10 dnů (2% z 230 je 4, 6), indikuje to pak kvalitní model. Čím více však průměrná hodnota tohoto kritéria poroste nad horní hranici tohoto intervalu, tím hůře bude model hodnocený, neboť při řízení úrokového rizika není rozhodně vítané, když minimální a maximální očekávané výdaje nepokryjí skutečné výdaje ve výrazně vyšším procentu situací, než je na základě modelu očekáváno. Přičemž je do hodnocení tohoto kritéria vhodné zahrnout i stabilitu modelu v rámci různých splatností úrokové sazby, zohlednění situace na finančních trzích během sledovaného období a jiná další pozorování, která mohou odhalit další vlastnosti modelů a přispět tak k rozhodnutí o kvalitě a vhodnosti modelu.

Tabulky 3.1 až 3.3 zobrazují údaje o průměrném, minimálním a maximálním počtu dnů, ve kterých se nacházela příslušná skutečná úroková sazba mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem, v rámci jednoho modelu, jednoho období a jedné úrokové sazby. Tyto průměry, maxima a minima jsou tedy počítány z přibližně 52 pozorování.

Tabulka 3.1: Průměrný počet dní, kdy byla skutečná sazba mimo oblast danou 1% a 99% kvantilem simulací

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	0,0	5,4	28,6	3,6	57,1	15,1	227,8	0,0	1,4
5Y	6,9	0,2	0,8	105,7	35,9	16,5	163,9	23,7	15,2
10Y	88,2	0,1	0,5	129,9	36,1	21,1	188,5	28,3	16,3
15Y	146,3	0,5	1,4	148,0	42,2	18,1	195,3	24,1	15,2

Zdroj: Vlastní výpočty

Tabulka 3.2: Minimální počet dní, kdy byla skutečná sazba mimo oblast danou 1% a 99% kvantilem simulací

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	0	0	0	0	0	0	214	0	0
5Y	0	0	0	0	0	0	56	0	0
10Y	0	0	0	25	0	0	101	0	0
15Y	28	0	0	52	0	0	121	0	0

Zdroj: Vlastní výpočty

V období před finanční krizí si lze všimnout výrazně horší predikční schopnosti modelu CIR u sazeb s delší splatností, viz 10Y a 15Y CZK IRS v tabulkách 3.1 a 3.3. Dále lze v tomto období pozorovat stabilní predikční schopnost modelů GP a BGM, která je

Tabulka 3.3: Maximální počet dní, kdy byla skutečná sazba mimo oblast danou 1% a 99% kvantilem simulací

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	0	35	94	25	229	70	229	0	28
5Y	48	5	10	226	229	96	229	88	90
10Y	219	5	14	229	229	106	229	115	126
15Y	229	14	28	229	229	82	229	105	132

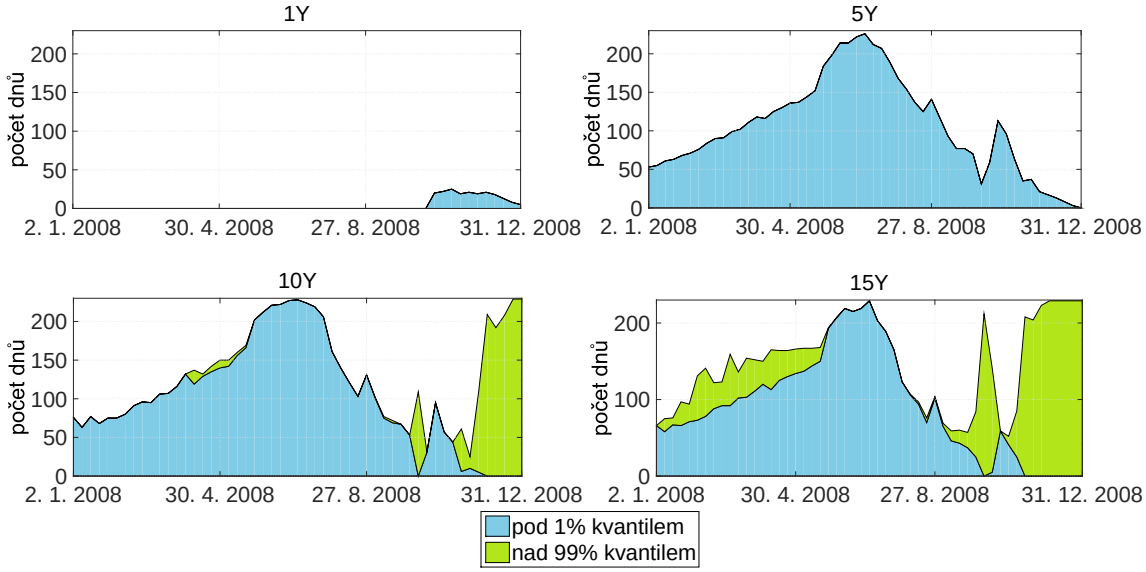
Zdroj: Vlastní výpočty

s výjimkou jednoroční splatnosti u modelů BGM podobná a velmi dobrá. S výjimkou jednoleté splatnosti je u všech ostatních uvažovaných splatností v situaci modelu GP a BGM průměrný i maximální počet dnů, ve kterých se nachází skutečná sazba mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem, v období před finanční krizí poměrně výrazně nižší oproti ostatním obdobím. Toto tvrzení platí také pro model CIR v rámci sazeb se splatností do 5 let. Takovýto výsledek je pravděpodobně zapříčiněn nejenom faktem, že všechny použité modely byly konstruovány za podmínek na finančních trzích platných před finanční krizí, ale též skutečností, že se trhy po začátku finanční krize staly více volatilní než před ní při současném vlivu bezprecedentní monetární politiky centrálních bank na finanční trhy.

Grafy popisující vývoj počtu dnů, ve kterých se skutečná sazba nachází mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem, jsou pro období před krizí obsaženy v příloze, tj. grafy 4.7, 4.8 a 4.9. Tyto grafy nejsou tak zajímavé jako obdobné grafy popisující tuto skutečnost v období finanční krize a po ní, protože vzhledem k silné predikční schopnosti modelů GP a BGM zobrazují pozorovatelný vývoj počtu dnů mimo požadovaný rozsah simulací jen u sazby 1Y CZK IRS. Dále grafy v příloze potvrzují významnou nestabilitu predikcí dynamiky výnosové křivky učiněných za použití modelu CIR, kde především u splatností delších než 5 let dochází k častému překročení 99% kvantilu simulací u většiny provedených predikcí.

Na základě tohoto kritéria se jako nejvhodnější model pro účely predikce dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu v období před finanční krizí jeví model GP, i když i použití modelu BGM přinese velmi dobré výsledky, neboť k výběru modelu GP před modelem BGM vedl pouze menší rozdíl v kvalitě predikce sazby 1Y CZK IRS.

V případě období finanční krize indikují hodnoty v tabulkách 3.1 až 3.3 nejhorší výsledky u modelu CIR. Naopak velmi robustně se jeví predikční schopnost simulací učiněných na základě modelu BGM a částečně i modelu GP, neboť průměrný počet dní skutečné sazby mimo požadovaný interval je u sazeb všech uvažovaných splatností znatelně nižší u modelu BGM. Dále model GP v tomto období vykazuje u každé sledované sazby vždy minimálně jednu predikci, pro kterou platí, že skutečný vývoj příslušné sazby se nachází mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem po celé sledované

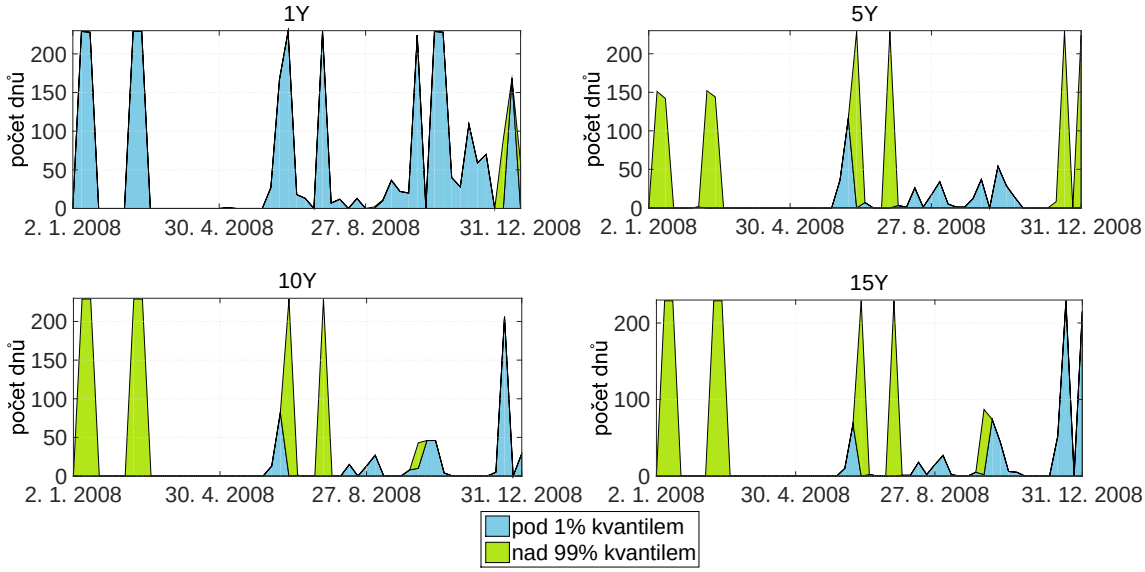


Obrázek 3.39: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model CIR v období finanční krize
Zdroj: Vlastní výpočty

období. Naproti tomu u modelu BGM neexistuje u žádné sledované sazby žádná takováto predikce. Nejdelší období, kdy se u modelu BGM nacházela skutečnost mimo požadovaný interval simulací, je 106 dní u sazby 10Y CZK IRS.

Vývoj počtu dnů skutečné hodnoty mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem v rozdělení na dny nacházející se nad 99% kvantilem a na dny pod 1% kvantilem v období finanční krize zobrazují pro každou analyzovanou sazbu na základě modelů CIR, GP a BGM obrázky 3.39, 3.40 a 3.41. Vodorovná osa znázorňuje den, ke kterému byla jednoletá simulace konstruována, a na svislé ose je zobrazena hodnota kritéria pro tuto jednoletou simulaci. První obrázek 3.39 potvrzuje nevhodnost použití modelu CIR pro účely predikce dynamiky české výnosové křivky, když kromě sazby 1Y CZK IRS došlo k významnému nevysvětlení skutečnosti u všech ostatních uvažovaných splatností, přičemž většina z těchto nevysvětlení se nacházela pod 1% kvantilem simulací.

Zajímavou vlastnost lze pozorovat u predikcí učiněných na základě modelu GP, viz obrázek 3.40. U sazby 1Y CZK IRS dochází u části predikcí k systematickému nadhodnocování odhadu skutečnosti, když převážná většina dnů mimo požadovaný prostor simulací je tvořena dny nacházejícími se pod 1% kvantilem simulací. Z obrázku 3.40 je dále patrné, že pokud se v příslušné predikci dostane skutečná sazba pod 1% kvantil simulací, vydrží pod ním většinou po celé analyzované období, přičemž se pod 1% kvantil dostane poměrně brzy od počátku simulací. Podobné chování vykazují i ostatní sledované splatnosti avšak s tou odlišností, že na rozdíl od 1leté splatnosti dochází u těchto splatností k překročení 99% kvantilu simulací, což ukazuje na odlišný vývoj dynamiky



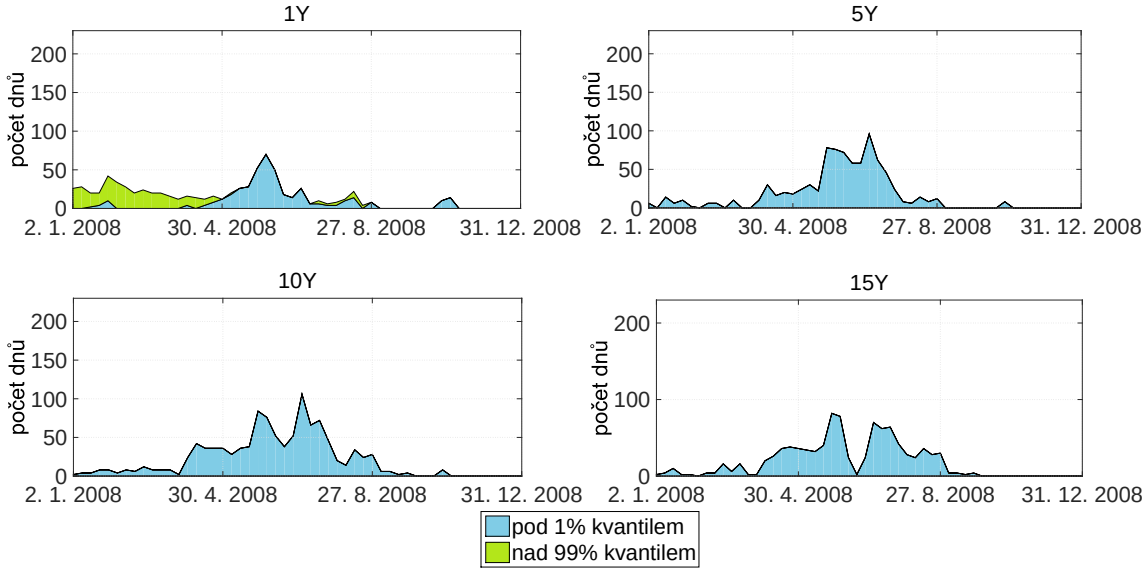
Obrázek 3.40: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model GP v období finanční krize
Zdroj: Vlastní výpočty

sazby 1Y CZK IRS oproti ostatním sledovaným sazbám. Z obrázku 3.40 je dále patrné, že krachem Lehman Brothers v září 2008 došlo ke změně charakteru predikcí uskutečněným modelem GP. U predikcí sazby 1Y CZK IRS se zvýšila četnost predikcí, u nichž dochází k setrvání skutečnosti pod 1% kvantilem. U predikcí sazeb 10Y a 15Y CZK IRS v období do krachu Lehman Brothers platilo, že pokud se u některé predikce dostala skutečná hodnota příslušné sazby mimo požadovaný prostor simulací, pak to bylo většinou nad 99% kvantilem. Po krachu Lehman Brothers naopak u těchto sazeb docházelo většinou k setrvání skutečnosti pod 1% kvantilem simulací.

U predikcí učiněných modelem BGM v období krize je ve srovnání s predikcemi učiněnými na základě modelu GP situace odlišná. U modelu BGM lze pozorovat u predikcí všech analyzovaných sazeb výrazně vyšší stabilitu odhadu, což dokumentuje i obrázek 3.41. U modelu BGM sice dochází častěji k situaci, kdy se skutečný vývoj sazby dostane mimo požadovaný prostor simulací, což je většinou pod 1% kvantil, avšak skutečná sazba setrvá mimo požadovaný prostor podstatně menší počet dní, než tomu bylo u modelu GP.

Vzhledem k výše uvedené skutečnosti lze učinit závěr, že model BGM je nejvhodnější z analyzovaných modelů pro predikci dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu v období finanční krize alespoň vzhledem ke kritériu počtu dnů mimo požadovaný interval.

Tabulky 3.1 až 3.3 dále ukazují, že v období po finanční a dluhové krizi je predikční schopnost modelu CIR velmi špatná. U všech sledovaných sazeb je model CIR výrazně

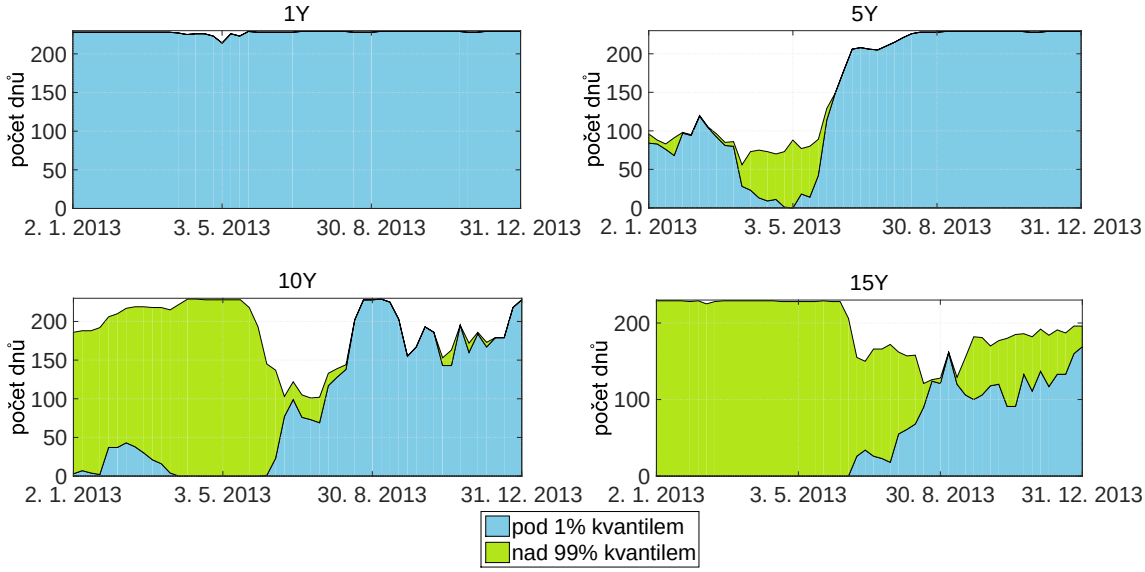


Obrázek 3.41: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model BGM v období finanční krize
Zdroj: Vlastní výpočty

horší než ostatní modely, přičemž vždy minimálně u jedné predikce se nachází skutečná sazba mimo požadovaný prostor simulací po celé sledované období. Naopak modely GP a BGM vykazují zajímavou stabilitu v průměrném počtu dnů skutečné sazby mimo požadovaný prostor simulací, přičemž zároveň u žádné z predikcí nedošlo k tomu, aby setrvala skutečná sazba mimo požadovaný prostor po celé sledované období. Dále lze pozorovat, že model BGM má sice mírně vyšší maximální hodnoty ukazatele oproti modelu GP, ale zas na druhou stranu má model BGM nižší průměrné hodnoty uvažovaného ukazatele se zanedbatelnou výjimkou u sazby 1Y CZK IRS.

V tomto období si lze také všimnout odlišnosti sazby 1Y CZK IRS od ostatních splatností. U modelů GP a BGM dopadá tato sazba ve sledovaném kritériu lépe než u ostatních sazeb, u modelu GP dokonce nedošlo k opuštění požadovaného prostoru simulací v žádném dnu u všech 52 predikcí. U modelu CIR má naopak sazba 1Y CZK IRS horší výsledky než ostatní splatnosti, přičemž minimální počet dní skutečné sazby mimo požadovaný prostor simulací je výrazně nejvyšší v rámci všech uvažovaných období, modelů a splatností, když činí 214 dnů, viz tabulka 3.2.

Na obrázcích 3.42, 3.43 a 3.44 je pro modely CIR, GP a BGM v období po finanční a dluhové krizi u každé analyzované sazby zobrazen vývoj počtu dnů, kdy se skutečná hodnota sazby pohybovala mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem v rozdělení na dny nacházející se nad 99% kvantilem a na dny pod 1% kvantilem. Obrázek 3.42 potvrzuje zřetelnou nevhodnost použití modelu CIR pro predikce dynamiky české výnosové křivky. U naprosté většiny predikcí se skutečná sazba nachází více než polovinu

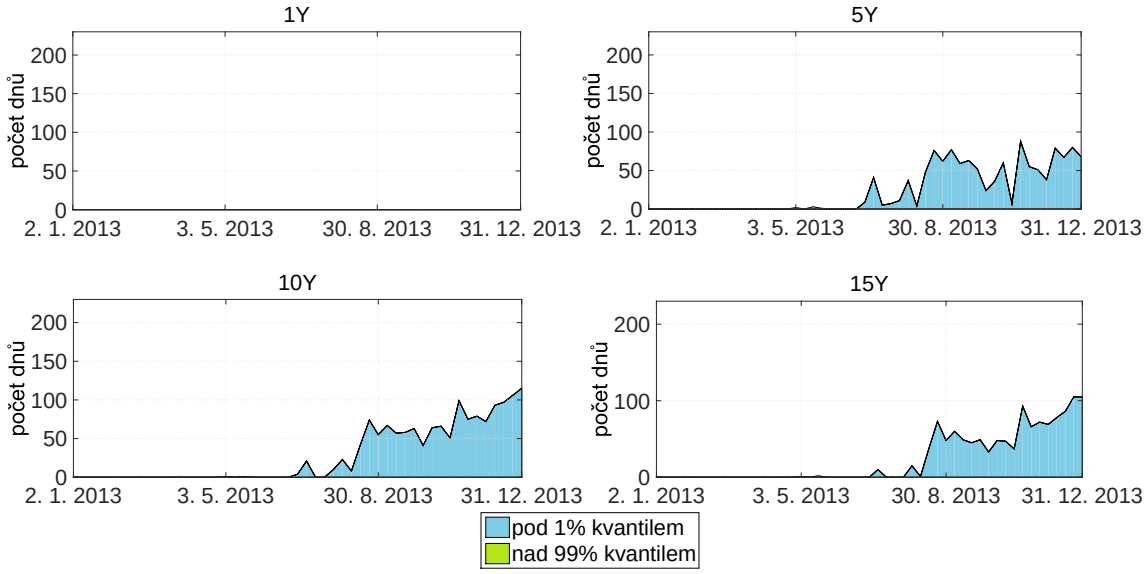


Obrázek 3.42: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model CIR v období po krizi
Zdroj: Vlastní výpočty

sledovaného období mimo požadovaný prostor simulací. Z obrázku 3.42 je dále patrná zřetelná nekonzistentnost predikcí, když u sazby 1Y CZK IRS se nachází skutečnost u všech predikcí uskutečněných v první polovině roku 2013 vždy pod 1% kvantilem, zatímco u sazeb 10Y a 15Y CZK IRS se ve stejné době nachází skutečnost nad 99% kvantilem simulací. Dále lze především u sazby 15Y CZK IRS pozorovat situaci, kdy u predikcí provedených v druhé polovině roku 2013 dochází k tomu, že po určitou část simulovaného období se skutečnost nachází pod 1% kvantilem simulací a v další části simulovaného období se naopak skutečnost nachází nad 99% kvantilem simulací, což je pravděpodobně důsledkem podceňování volatility na delším konci výnosové křivky modelem CIR.

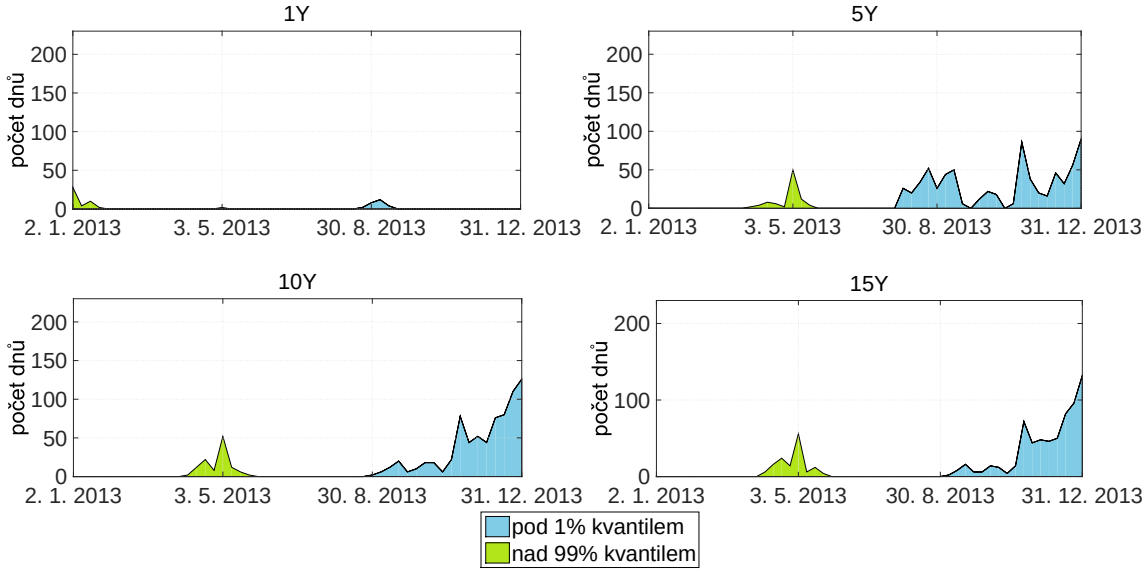
Obrázky 3.43 a 3.44 potvrzují relativní stabilitu predikcí uskutečněných modely GP a BGM. V případě modelu GP došlo k překročení 1% kvantilu simulací skutečností u sazeb se platnostmi delšími než jeden rok převážně u predikcí zkonstruovaných v druhé polovině roku 2013, když předpovědi nedokázaly vystihnout pokles sazeb během roku 2014. U modelu BGM lze taktéž pozorovat, že u predikcí uskutečněných v druhé polovině roku 2013 dochází k nárůstu počtu dnů, ve kterých se skutečnost nachází pod 1% kvantilem simulací. Přesto je takovýchto predikcí ve srovnání s modelem GP méně.

Z výše uvedených důvodů lze konstatovat, že v rámci sledovaného kritéria je v období po finanční a dluhové krizi nejlepší model BGM těsně následovaný modelem GP a naopak model CIR se ukazuje jako zcela nevhodný pro predikce dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu v období po krizi. Je nutné však poznamenat, že mo-



Obrázek 3.43: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model GP v období po krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



Obrázek 3.44: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model BGM v období po krizi

Zdroj: Vlastní výpočty

del BGM je v tomto období nejvhodnější pouze v situaci, kdy ekonomika neumožňuje existenci záporných sazeb, což je v ČR ke konci roku 2015 stále pravdivé tvrzení. Ale vzhledem k situaci v eurozóně a faktu, že se na počátku roku 2016 ČNB zavedením záporných sazeb vážně zabývá, což by se pravděpodobně odrazilo i na sazbách peněžního trhu v ČR, použití modelu BGM pro predikce dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu nedoporučuji. Predikce učiněné na základě modelu GP vykazují taktéž relativně dobrou predikční schopnost a navíc umožňují i existenci záporných sazeb.

U modelu CIR lze ve všech sledovaných obdobích s výjimkou sazby 1Y CZK IRS v období po krizi pozorovat skutečnost, že jeho predikční schopnost zásadně klesá společně s prodlužující se splatností predikované sazby. Tento fakt lze pozorovat v tabulkách 3.1 až 3.3 a na grafech 4.7, 3.39 a 3.42. Toto pozorování se sice u dvouletých simulací v podkapitole 3.4 nepotvrdilo, ale u dvouletých simulací byla pro každé období zkonstruována pouze jedna predikce, kdežto zde máme pro každé období cca 52 predikcí, tudíž výsledky této podkapitoly mají podstatně větší váhu. A dalším potvrzením tohoto pozorování je i konzistentnost se závěry (Králová, 2013).

Model CIR dopadl ve všech sledovaných obdobích výrazně hůře v porovnání s ostatními modely. K závěru o nevhodnosti použití modelu CIR pro predikce dynamiky výnosové křivky ve švýcarském prostředí dospěli i Teichmann a Wüthrich (2016), kteří porovnávali predikce úrokových sazeb učiněné pomocí modelů krátkodobé úrokové míry s predikcemi učiněnými pomocí modelů celé křivky v rámci HJM přístupu. Na základě empirického výzkumu při použití úrokových sazeb na švýcarský frank v období 2001 až 2011 autoři konstatují, že predikce úrokových sazeb učiněné pomocí HJM modelů jsou výrazným způsobem robustnější oproti predikcím učiněným na základě modelů krátkodobé úrokové míry. Modely typu HJM vystihly budoucí vývoj úrokových sazeb ve všech případech na rozdíl od modelů krátkodobé úrokové míry, které budoucí vývoj sazeb pokryly pouze v několika případech.

V rámci všech sledovaných období je také potřeba vyzdvihnout fakt, že u modelů BGM a GP existovala u sazeb všech uvažovaných splatností a ve všech analyzovaných obdobích vždy minimálně jedna predikce, u které se skutečný vývoj příslušné sazby pohyboval stále v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem. Tuto skutečnost dokumentuje tabulka 3.2.

Po zvážení všech faktů ze všech tří analyzovaných období lze učinit závěr, že nejvhodnější model pro predikce dynamiky výnosové křivky peněžního trhu v ČR je model BGM těsně následován modelem GP. Avšak v situaci, kdy ekonomika umožňuje záporné sazby, se stává nejvhodnějším model GP. Pro učinění konečného závěru je nutné ještě ohodnotit ostatní kritéria.

Druhé kritérium

Druhé kritérium sleduje hodnotu kvantilu simulací, kterého nabývá skutečná sazba na konci simulačního období. Toto kritérium se tedy nezajímá o situaci v průběhu simulačního období ale pouze o situaci na konci simulačního období. Kritérium může

nabývat hodnoty 0% až 100% kvantil. Bude-li skutečná sazba na konci simulačního období nad prostorem simulací, hodnota kritéria bude 100% kvantil. A naopak bude-li skutečná sazba na konci simulačního období pod prostorem simulací, hodnota kritéria bude 0% kvantil.

Při řízení úrokového rizika není žádoucí, aby model systematicky nadhodnocoval či podhodnocoval skutečnost. V případě ideálně fungujícího modelu by skutečná sazba neměla na konci simulačního období ve velké většině případů nabývat extrémních hodnot kvantilů simulací (například pouze v rozmezí 0 až 10% nebo naopak 90 až 100% kvantilu simulací). U kvalitního modelu se naopak očekává, že kvantily simulací, kterých skutečná sazba nabývá na konci simulačního období, budou rovnoměrněji rozloženy. Při hodnocení tohoto kritéria budu tedy sledovat, zda výsledné kvantily nevycházejí příliš často blízké jednostranným krajním hodnotám a zda jsou výsledné kvantily alespoň přibližně rovnoměrně rozděleny. Průměrná hodnota výsledných kvantilů by tudíž měla vycházet blízká mediánu. A při posuzování průměrných hodnot tohoto kritéria v daném období a pro daný model je také vhodné, aby tyto průměrné kvantily simulací vykazovaly stabilitu a nebyly příliš odlišné v rámci různých splatností úrokových sazeb. Výraznější odlišnost výsledků u některé splatnosti, jenž se u ostatních modelů nevyskytuje, signalizuje nestabilní a méně důvěryhodné výsledky tohoto modelu.

Tabulky 3.4 až 3.6 zobrazují údaje o průměrném, minimálním a maximálním kvantilu simulací, kterého nabyla skutečná sazba na konci simulačního období, v rámci jednoho modelu, jednoho období a jedné úrokové sazby. Tyto charakteristiky jsou tedy opět počítány z cca 52 pozorování, neboť v rámci jednoho modelu, jednoho období a jedné sazby jsem vždy zkonstruovala přibližně 52 jednoletých simulací k různým dnům ve sledovaném období.

Tabulka 3.4: Průměrná hodnota kvantilu simulací, na jaké skončila skutečná sazba na konci simulačního období

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	47,5	85,5	57,9	6,2	7,3	11,7	0,0	12,2	15,1
5Y	61,0	66,8	62,3	10,9	39,0	25,7	4,8	8,1	26,1
10Y	81,4	41,4	62,1	23,3	37,6	24,4	41,8	13,2	32,2
15Y	93,2	30,8	62,4	35,9	40,5	29,1	46,1	15,6	36,2

Zdroj: Vlastní výpočty

Z tabulky 3.4 je patrné, že pro období před finanční krizí nabývají průměrné hodnoty kvantilů simulací, kterých dosáhla skutečná sazba na konci simulačního období, hodnot, které jsou od extrémů na obou stranách relativně vzdáleny. Tato skutečnost neplatí pouze u sazeb 10Y a 15Y CZK IRS u modelu CIR a u sazby 1Y CZK IRS u modelu GP. Obzvláště u modelu BGM vykazují průměrné hodnoty sledovaných kvantilů velmi stabilní úrovně u všech uvažovaných sazeb, když minimální průměrnou hodnotu ve

Tabulka 3.5: Minimální hodnota kvantilu simulací, na jaké skončila skutečná sazba na konci simulačního období

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	36,5	64,2	26,3	1,6	0,0	0,3	0,0	6,1	2,0
5Y	23,1	44,0	38,0	0,0	4,3	0,6	0,0	0,3	0,5
10Y	27,9	14,8	39,4	0,0	0,0	1,3	0,0	0,0	0,0
15Y	47,5	8,3	33,6	0,0	0,0	1,3	0,0	0,0	0,0

Zdroj: Vlastní výpočty

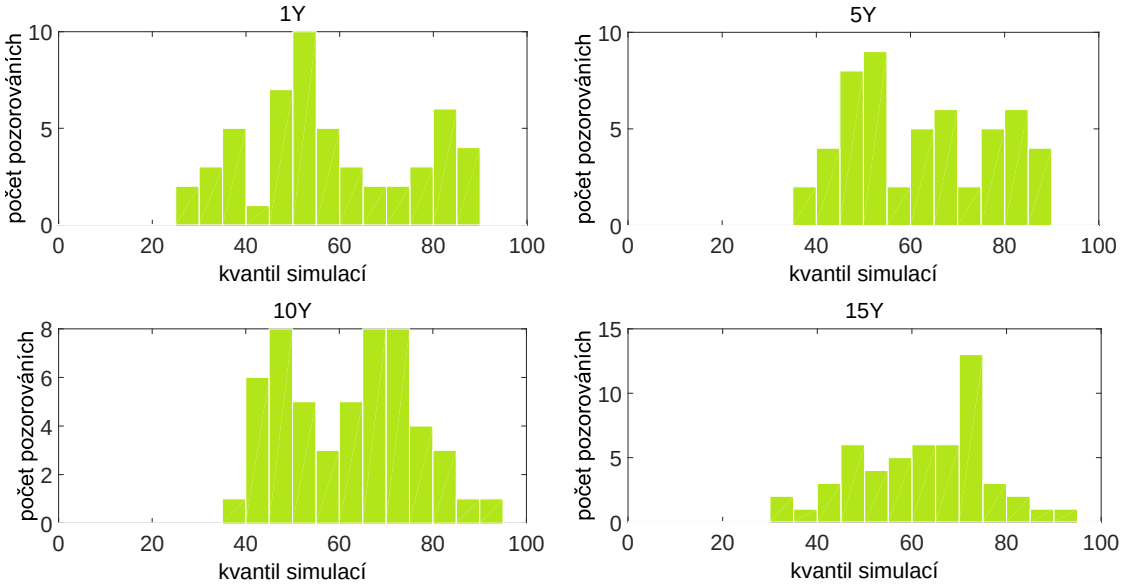
Tabulka 3.6: Maximální hodnota kvantilu simulací, na jaké skončila skutečná sazba na konci simulačního období

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	62,6	98,7	88,6	17,3	45,8	53,7	0,0	22,7	31,5
5Y	98,0	94,5	88,4	58,8	100,0	65,2	61,8	31,8	71,2
10Y	100,0	83,9	92,4	99,6	100,0	61,1	100,0	47,8	78,3
15Y	100,0	77,0	93,7	100,0	100,0	68,2	100,0	55,5	83,7

Zdroj: Vlastní výpočty

výši 57,9 % lze pozorovat u sazby 1Y CZK IRS a maximální průměrná hodnota ve výši 62,4 % se vyskytuje u sazby 15Y CZK IRS. Výsledné průměrné hodnoty kvantilů u modelu GP ve srovnání s modelem BGM nevykazují takovou stabilitu, když se jejich hodnoty pohybují od 30,8 % u splatnosti 15 let do 85,5 % u splatnosti 1 rok. Relativně vysoké průměrné hodnoty výsledného kvantilu u modelu CIR a splatností 10 a 15 let jsou dány častým překročením 100% kvantilu simulací skutečnou hodnotou, tj. tím, že se skutečná hodnota sazeb 10Y a 15Y CZK IRS na konci simulačního období častokrát nacházela nad prostorem simulací, což naznačují výsledky tabulky 3.6 a graf obsažený v příloze 4.10. V případě modelů GP a BGM nedošlo k překročení prostoru simulací skutečnou sazbou na konci sledovaného období, což plyne z tabulek 3.5 a 3.6.

Rozdělení četnosti kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačních období, je pro období před krizí a pro model BGM zobrazeno na obrázku 3.45. Na grafech jsou na vodorovné ose vyneseny intervaly délky 5 % pro sledované kvantily simulací a svislá osa znázorňuje počet pozorování, která spadají do daneho intervalu. Podotýkám, že celkový počet pozorování pro jeden graf, který se týká jednoho konkrétního modelu, období a sazby, je přibližně 52. Na tomto obrázku lze vidět rozdělení četností kvantilů simulací, které se nejvíce blíží rovnoměrnému rozdělení v porovnání s modelem GP a CIR. Obrázky 4.13–4.15 popisující rozdělení četností výsledných kvan-



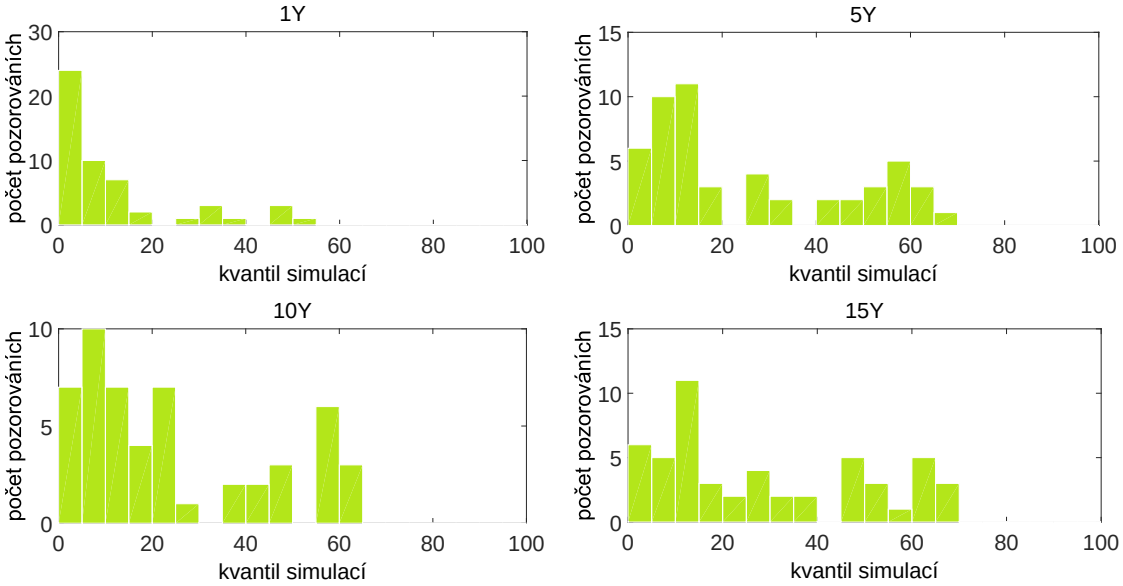
Obrázek 3.45: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model BGM v období před krizi
Zdroj: Vlastní výpočty

tilů u modelu GP ve všech analyzovaných obdobích lze nalézt v příloze, kde jsou taktéž uvedeny analogické obrázky 4.10–4.12 pro model CIR.

V období finanční krize lze u modelu GP a BGM taktéž pozorovat vysokou stabilitu průměrných výsledných kvantilů při zanedbání specifické jednoleté splatnosti. U modelu GP se však průměrné výsledné kvantily nacházejí na vyšších úrovních ve srovnání s modelem BGM, když se průměrné kvantily u modelu BGM pohybují v rozmezí od 24,4 % do 29,1 % a u modelu GP v rozmezí od 37,6 % do 40,5 %. Vyšší úroveň průměrných hodnot výsledných kvantilů u modelu GP je však též způsobená tím, že se skutečné hodnoty sazeb se splatnostmi 5 až 15 let dostaly na konci sledovaného období nad prostor simulací, což potvrzuje nejenom tabulka 3.6 a obrázek 4.14 v příloze, ale též obrázek 3.40 související s prvním kritériem.

U predikcí uskutečněných po začátku finanční krize lze u modelu BGM ale i u modelu GP pozorovat posun skutečné hodnoty příslušných sazeb na konci simulačních období směrem k nižším úrovním kvantilů. Tento fakt lze pozorovat u všech analyzovaných splatností, což u modelu BGM dokládá obrázek 3.46 a u modelu GP obrázek 4.14 v příloze. Tato skutečnost je zapříčiněna poklesem úrokových sazeb v době finanční krizi, který byl větší než průměrný pokles, který predikovaly modely.

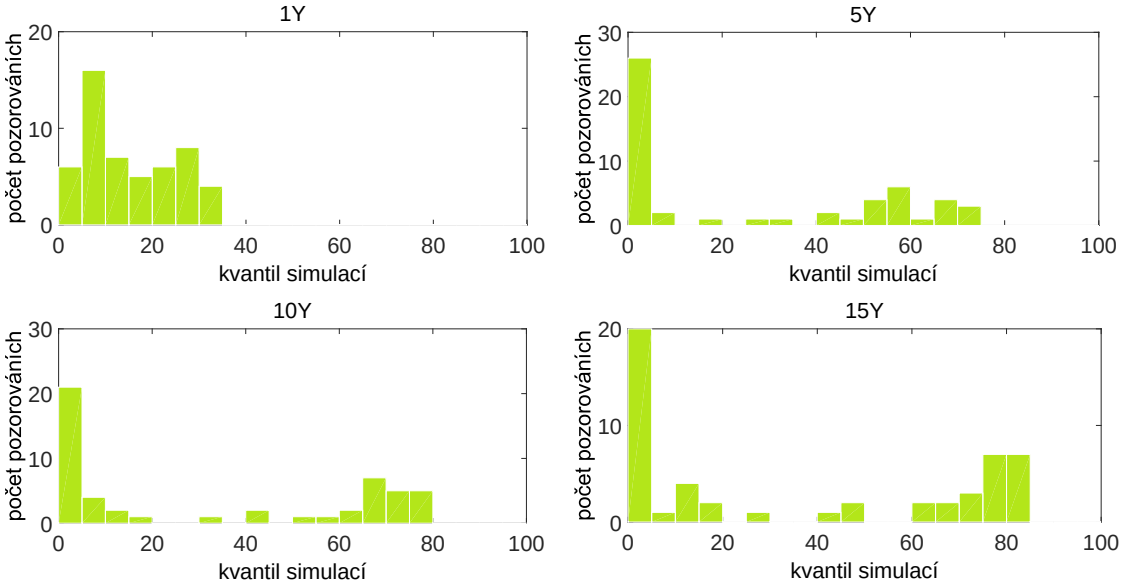
V období po finanční a dluhové krizi lze u modelu BGM opět pozorovat relativně stabilní predikce skutečné hodnoty příslušných sazeb ke konci simulačních období. Průměrné hodnoty výsledných kvantilů se u modelu BGM pohybují blíže mediánu simulací a na vyšších úrovních než jejichž protějšky u modelu GP, což platí u všech



Obrázek 3.46: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model BGM v období finanční krize
Zdroj: Vlastní výpočty

pozorovaných splatností. Průměrná hodnota výsledných kvantilů u splatností 5 až 15 let se pohybuje u modelu BGM od 26,1 % do 36,2 %, zatímco u modelu GP je to od 8,1 % do 15,6 %, což znamená, že predikce učiněné na základě modelu GP i BGM indikovaly v průměru vyšší hodnoty sazeb, než činila jejich skutečnost, avšak u modelu BGM lze pozorovat menší nadhodnocení. Toto tvrzení potvrzují i maximální hodnoty výsledných kvantilů, které u modelu BGM a splatností 5 let a více dosahují úrovně cca 80% při malém rozptylu výsledků, zatímco u modelu GP dosahují maximální hodnoty výsledných kvantilů úrovně od 31,8 % u 5leté splatnosti do 55,5 % u 15leté splatnosti.

V období po krizi lze u rozdělení četností výsledných kvantilů pozorovat výrazné zvýšení četnosti v nejnižším intervalu ve srovnání s předešlými analyzovanými obdobími u modelů BGM i GP, což dokumentuje pro model BGM obrázek 3.47 a pro model GP obrázek 4.15 v příloze. U modelu BGM lze pozorovat výrazné zvýšení četnosti výsledných kvantilů v intervalu 0 % až 5 % u všech splatností s výjimkou jednoleté splatnosti. Takto vysoká četnost výsledných kvantilů v tomto nejnižším intervalu rozdělení četnosti je dána především prudkým propadem úrokových sazeb hlavně v druhé polovině roku 2014 k extrémně nízkým hodnotám a nemožností modelu BGM predikovat záporné hodnoty sazeb. Přesto i přes poměrně vysokou četnost v intervalu výsledných kvantilů 0 % až 5 % došlo k propadu skutečné hodnoty příslušné sazby ke konci simulačního období pod prostor simulací v poměrně málo případech, když například u splatnosti 15 let pouze v 1 případě z 20, které byly indikovány v tomto intervalu, došlo k opuštění simulačního prostoru. I u modelu GP lze pozorovat u všech analyzovaných sazeb vý-



Obrázek 3.47: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model BGM v období po krizi
Zdroj: Vlastní výpočty

znamný počet pozorování, kdy se hodnota skutečné sazby na konci simulačního období propadla pod 5% kvantil simulací. Četnost takovýchto výsledků dosahuje přibližně poloviny všech pozorování u sazeb se splatností 5 až 15 let, což dokládá obrázek v příloze 4.15.

V období finanční krize a v období po finanční krizi se rozdělení četnosti kvantilů simulací u modelu BGM (grafy 3.46 a 3.47) a u modelu GP (grafy 4.14 a 4.15 v příloze) již vzdaluje od ideálního rovnoměrného rozdělení v porovnání s obdobím před krizí. Ale výsledky modelu CIR (grafy 4.11 a 4.12 v příloze) jsou ještě výrazněji horší, když například v období po finanční krizi nemají kvantily v rozmezí 5% až 95% téměř žádné zastoupení.

Z výše uvedených tabulek 3.4 až 3.6 a obrázků 3.45 až 3.47, popisujících hodnoty výsledných kvantilů, kterých dosáhla skutečná sazba na konci simulačního období, je možné si opět všimnout odlišného chování sazby 1Y CZK IRS v porovnání s ostatními splatnostmi, a proto jsem tuto sazbu někdy nezahrnovala do hodnocení výsledků. Příkladem může být situace u modelu BGM v období po finanční a dluhové krizi, kdy maximální hodnota výsledného kvantilu u této sazby činila pouze 31,5 %, tj. méně než polovinu úrovně ostatních splatností.

Výše zmíněné skutečnosti při analýze druhého sledovaného kritéria podporují výběr modelu BGM jako vhodného modelu pro účel předpovědi dynamiky výnosové křivky peněžního trhu v ČR, avšak pouze v případě, že nehrozí zavedení záporných sazeb. Je-li zápornost sazeb možná, je vhodnější zvolit modelu GP, který prokazuje z hlediska

tohoto kritéria také vcelku dobré predikční schopnosti.

Třetí kritérium

U třetího kritéria se sleduje celé jednoroční období predikce kromě prvního měsíce a pro každý den se stanoví kvantil simulací, kterého dosáhla skutečná sazba. Nesleduje se zde tedy pouze kvantil simulací, kterého dosáhla skutečná sazba na konci simulačního období, jak tomu bylo u druhého kritéria. Z těchto cca 230 denních údajů se určí maximální a minimální kvantil simulací, kterého dosáhla úroková sazba. Třetí kritérium pak sleduje právě rozpětí tohoto maximálního a minimálního kvantilu simulací. Cílem následné analýzy je tak popis prostoru simulací, který byl využit skutečností. V analýze se neuvažuje první měsíc simulací, kdy jsou simulace příliš „úzké“ a i malý pohyb ve skutečném vývoji úrokové sazby může vést k dosažení extrémních úrovní kvantilu simulací a znehodnotit tuto analýzu.

Účelem predikce dynamiky jednotlivých úrokových sazeb by neměla být predikce příliš širokého intervalu možných výsledků, který pokryje skutečný vývoj za všech okolností. Pokud by měla predikce možného vývoje některé CZK IRS sazby být od -5 % do 15 % nebyla by takováto predikce příliš užitečná, protože existuje skoro jistota, že skutečná sazba setrvá v tomto intervalu. V případě příliš širokého rozpětí mezi sledovaným 1% a 99% kvantilem simulací, vyjdou při řízení úrokového rizika portfolia maximální očekávané výdaje, které se počítají na základě 99% kvantilu simulací, přehnaně vysoké. Instituce si pak pro případ pokrytí maximálních očekávaných výdajů musí rezervovat zbytečně velký objem prostředků, který ji pak buď bude chybět v jiných oblastech, nebo si pro toto zajištění bude muset vzít půjčku, která přináší další nemalé výdaje. Třetí kritériu se tedy zaměřuje na volatilitu simulací a především kontroluje, zda není zbytečně nadhodnocená. Bude-li průměrná hodnota tohoto kritéria vycházet u některého modelu příliš nízká, nebude model považován z tohoto pohledu za vhodný. Dále stejně jako u předchozích kritérií bude do hodnocení zahrnuta i stabilita modelu v rámci různých splatností úrokových sazeb. Zajímavou informací pro posouzení kvality modelu v rámci tohoto kritéria bude i chování ukazatele při odlišných situacích na finančním trhu.

Tabulky 3.7 až 3.9 zobrazují údaje o průměrné, maximální a minimální hodnotě třetího kritéria v rámci jednoho modelu, jednoho období a jedné úrokové sazby. Charakteristiky v těchto tabulkách jsou tedy i zde vždy počítány z cca 52 pozorování. Z první tabulky 3.7 je patrné, že se průměrné hodnoty sledovaného kritéria nenacházejí na výrazně nízkých hladinách s výjimkou 1leté sazby u modelu CIR v období po finanční krizi.

I v této analýze se projevuje výjimečná stabilita výsledků u modelu BGM, což dokumentuje tabulka 3.7. Při zanedbání odlišně se vyvíjející jednoleté splatnosti, u které však model BGM dává taktéž dobré výsledky, činí průměrné rozpětí maximálního a minimálního kvantilu simulací před krizí od 49,5 p.b. u 5leté splatnosti do 56,4 p.b. u 15leté splatnosti, což představuje rozdíl pouhých necelých 7 p.b. V období po krizi

Tabulka 3.7: Průměrná hodnota rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, kterého dosáhla skutečná sazba

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	42,5	48,5	61,4	50,6	58,7	86,3	1,7	35,3	68,4
5Y	70,9	54,1	49,5	69,9	60,9	66,8	55,6	56,7	48,9
10Y	62,1	58,8	53,1	77,1	54,1	62,7	69,8	56,2	50,9
15Y	46,8	56,1	56,4	75,2	52,4	59,9	54,4	57,3	52,2

Zdroj: Vlastní výpočty

Tabulka 3.8: Minimální hodnota rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, kterého dosáhla skutečná sazba

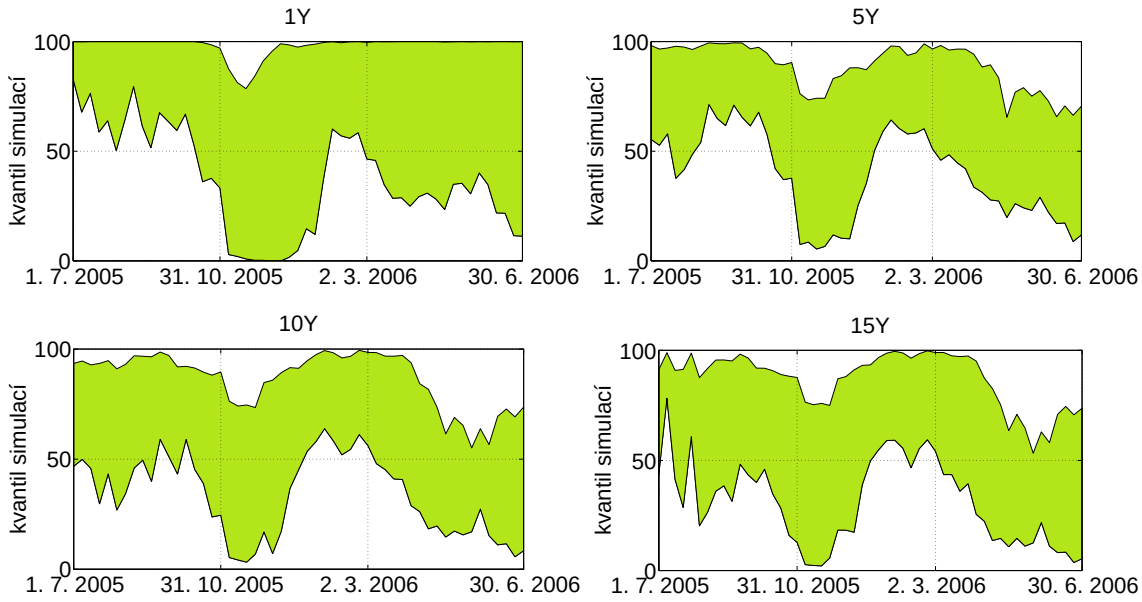
	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	23,6	19,4	17,0	6,8	0,0	42,8	0,0	19,7	26,2
5Y	32,2	33,9	28,1	14,6	0,2	19,8	0,0	14,0	14,3
10Y	3,7	38,4	33,2	0,7	0,0	20,6	0,0	19,7	21,1
15Y	0,0	37,0	20,7	0,0	0,0	16,7	0,0	21,0	16,0

Zdroj: Vlastní výpočty

se úroveň těchto ukazatelů nachází na totožné úrovni jako v období před krizí, přičemž rozdíl mezi maximální hodnotou tohoto ukazatele je ještě menší, když nabývá hodnoty 3,3 p.b. díky hodnotě 48,9 p.b. u 5leté splatnosti a 52,2 u 15leté splatnosti.

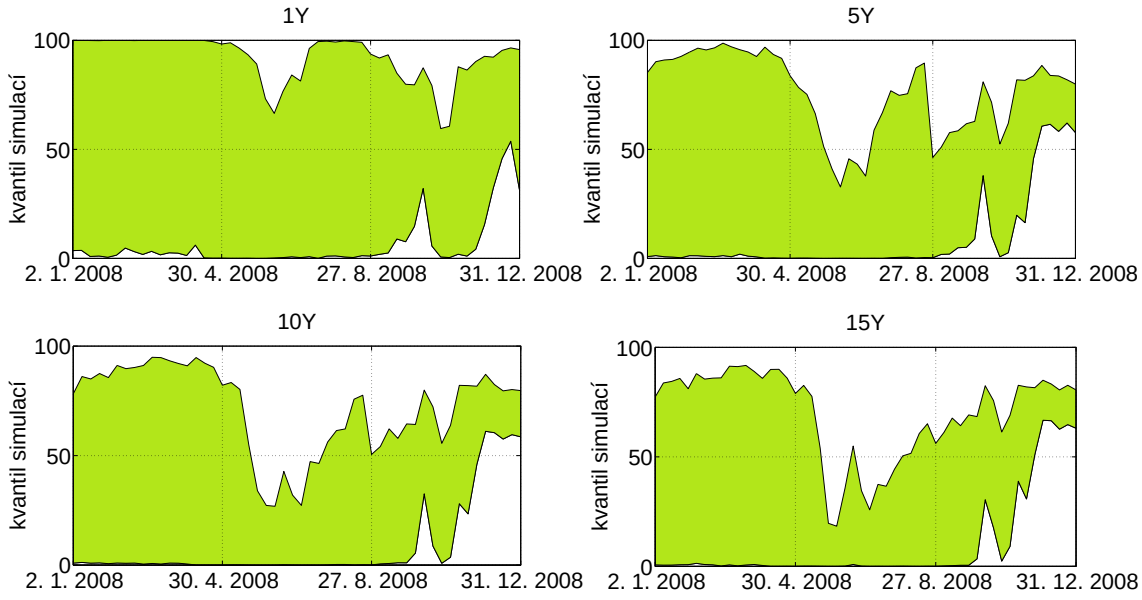
Výjimečnou stabilitu predikcí dynamiky výnosové křivky na základě modelu BGM v obdobích před finanční krizí a v období po finanční krizi dokládá i maximální hodnota rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, kterého v příslušném simulačním období dosáhla skutečná sazba, zobrazená v tabulce 3.9. V období před finanční krizí činila maximální hodnota ukazatele v rozmezí od 74,9 p.b. do 78,7 p.b. zatímco v období po krizi od 83,8 p.b. do 86,6 p.b.

Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, kterého v příslušném simulačním období dosáhla skutečná sazba, společně s vyznačením maximální a minimální hodnoty kvantilu u každé predikce je pro model BGM zobrazen na obrázcích 3.48, 3.49 a 3.50. Na vodorovné ose je vynesen datum, ke kterému byla daná pedikce konstruována. Svislá osa informuje o hodnotě maximálního a minimálního kvantilu simulací, kterého v rámci této predikce dosáhla skutečná sazba. Maximální kvantil simulací je dán horním okrajem zelené plochy v grafu, minimalní kvantil je zas dán dolním okrajem zelené plochy v grafu a zelená plocha v grafu tudíž představuje rozpětí těchto kvantilů simulací. Například na prvním grafu obrázku 3.48 je vidět, že první sle-



Obrázek 3.48: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model BGM v období před krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



Obrázek 3.49: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model BGM v období finanční krize

Zdroj: Vlastní výpočty

Tabulka 3.9: Maximální hodnota rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, kterého dosáhla skutečná sazba

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	60,4	95,6	99,0	80,0	98,9	99,7	7,7	61,4	88,8
5Y	97,0	84,2	77,9	96,6	97,2	97,4	100,0	92,0	83,8
10Y	99,6	82,5	78,7	100,0	100,0	94,7	100,0	89,3	84,0
15Y	100,0	76,1	74,9	100,0	99,9	91,1	100,0	90,9	86,6

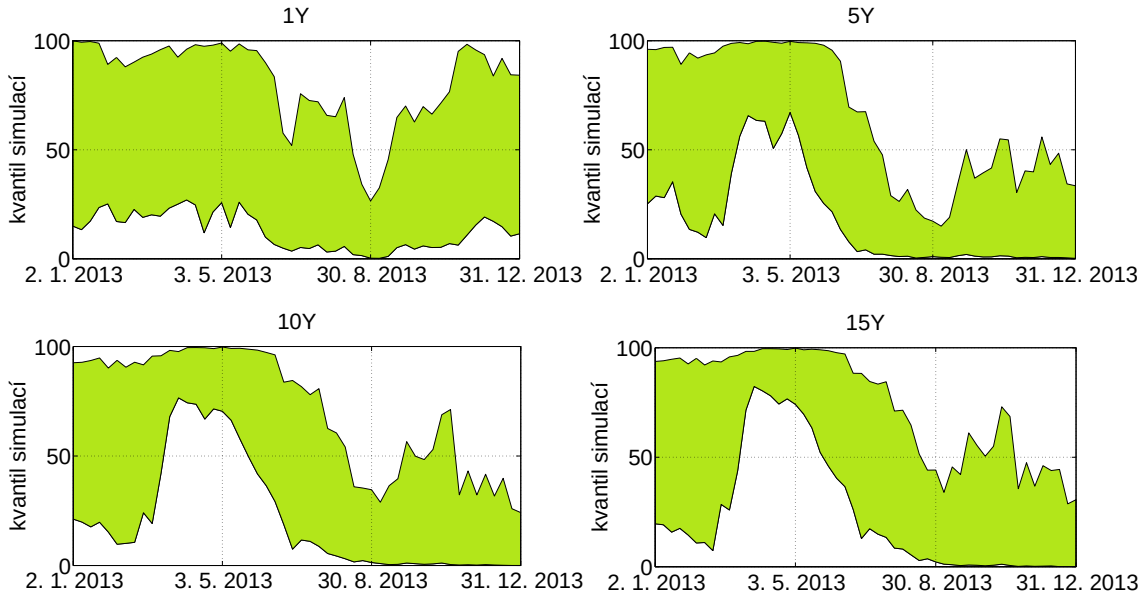
Zdroj: Vlastní výpočty

dovaná predikce konstruovaná ke dni 1. 7. 2005 má maximální kvantil simulací, kterého dosáhla skutečná sazba, 100%, minimální kvantil simulací 83% a hodnota kritéria v podobě rozpětí těchto kvantilů je tedy 17 %. Tyto grafy jsou pro třetí kritérium dle mého názoru vhodnější než histogramy, protože zde není podstatné rozdělení četností sledované vlastnosti, ale naopak zde může být cennou informací vývoj sledované vlastnosti v čase k zhodnocení případné stability či nestability.

Na obrázku 3.49 lze v období krize pozorovat znatelně odlišný vývoj ukazatele oproti ostatním dvěma obdobím. V období finanční krize je patrný turbulentní vývoj úrokových sazeb, když hlavně u predikcí učiněných v první polovině roku 2008 došlo u všech analyzovaných splatností k využití prakticky celého prostoru simulací skutečnou hodnotou příslušné sazby. Z obrázku 3.49 je dále patrné, že u predikcí provedených v závěru roku 2008 dochází u všech splatností ke znatelnému zúžení analyzovaného rozpětí. Důvodem pro tuto situaci je fakt, že po krachu Lehman Brothers začala na trhu panika, která prudce zvýšila kotované volatility swapcí, díky čemuž se výrazně zvýšila volatilita predikcí, čímž se u predikcí jednotlivých sazeb rozšířil prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem. Po masivní záchraně finančních institucí ze strany vlád, se však situace v roce 2009 začala pomalu uklidňovat a volatilita skutečných sazeb klesat, díky čemuž nebyl využit prostor simulací. Takovýto vývoj je však zcela v pořádku, neboť v okamžiku konstrukce predikcí se neočekával zásah vlád a naopak se očekával krach dalších institucí, takže široký interval simulací byl díky nejistotě zcela oprávněn.

V důsledku výše popsaných skutečností nabývá průměrný rozdíl mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, kterého v příslušném simulačním období dosáhla skutečná sazba, v období finanční krize úrovní o cca 15 p.b. vyšší než v ostatních analyzovaných obdobích, když se pohybuje od 59,9 p.b. u 15leté sazby do 66,8 u 5leté sazby, jak dokumentuje tabulka 3.7.

Při zanedbání jednoleté sazby vykazuje velmi stabilní výsledky i model GP a to ve všech analyzovaných obdobích, což je patrné zejména z tabulky 3.7. Oproti modelu BGM však hlavně v období krize, ale částečně i v období po krizi vykazuje model GP v některých málo případech extrémní vývoj simulací. Tato skutečnost je zřejmá zejména



Obrázek 3.50: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model BGM v období po krizi

Zdroj: Vlastní výpočty

z obrázku 4.20 a 4.21 obsažených v příloze a z tabulky 3.8 a 3.9. Například na obrázku 4.20 v příloze lze pozorovat velmi nestabilní vývoj sledovaného kritéria, kdy ze vcelku vysoké hodnoty rozpětí spadne při následné predikci rozpětí na nulu nebo na hodnotu velmi blízkou nule a tato situace se zde opakuje poměrně často, pětkrát až šestkrát u každé sledované sazby.

I tato analýza potvrzuje, že predikční schopnost modelu CIR je výrazně horší než predikční schopnost modelů BGM a GP, což dokládají tabulky 3.7–3.9 stejně jako obrázky 4.16–4.18 v příloze.

Touto analýzou se potvrdil můj názor, že model BGM poskytuje z analyzovaných modelů nejlepší a nejstabilnější predikční schopnost pro predikce dynamiky výnosové křivky peněžního trhu v ČR zejména pro období finanční krize a po něm. Predikční schopnost modelu GP je však vcelku také dobrá a v období před finanční krizí lepší nebo srovnatelná s modelem BGM. Naopak predikční schopnost modelu CIR je ve všech analyzovaných obdobích výrazně horší než modelu BGM a GP a jeho použití pro predikce dynamiky výnosové křivky nejenom v ČR ale i v eurozóně je nevhodná. U modelů GP a BGM jsem učinila přibližně podobné závěry již na základě dvouletých simulací, což jenom potvrzuje robustnost těchto závěrů.

3.7.2 Statistické testy

V této části aplikuji statistický test pro posouzení, zda predikovaná pravděpodobnostní rozdělení správně předpovídají skutečné rozdělení úrokové sazby na konci simulačního období. Tedy stejně jako u druhého kritéria budu sledovat, kde se v rámci predikovaného pravděpodobnostního rozdělení nachází skutečná úroková sazba na konci simulačního období. Zde ale pro zhodnocení použiji statistický test, který současně testuje i nezávislost dat.

Vztah mezi predikovaným pravděpodobnostním rozdělením a skutečnou sazbou na konci simulačního období se vyjádří v podobě hodnoty distribuční funkce predikovaného rozdělení v bodě skutečné úrokové sazby. Označí-li se skutečná hodnota úrokové sazby u t-té predikce x_t a hustota predikovaného pravděpodobnostního rozdělení na konci simulačního období $\widehat{f}_t$, potom se hodnoty distribučních funkcí predikovaného rozdělení v bodě x_t získají ze vztahu

$$y_t = \int_{-\infty}^{x_t} \widehat{f}_t(u)du. \tag{3.11}$$

Podle Rosenblatta (1952) platí, že pokud jsou skutečné hodnoty úrokových sazeb x_t nezávislé a predikované pravděpodobnostní rozdělení odpovídá skutečnému rozdělení, potom jsou hodnoty distribučních funkcí y_t nezávislé a rovnoměrně rozdělené. Je tedy třeba současně otestovat nezávislost náhodných veličin y_t a to, zda mají rovnoměrné rozdělení. Většina testů rozdělení již předpokládá nezávislost dat, a pokud jsou data ve skutečnosti závislá, vedou pak tyto testy k nesprávným závěrům. Dalším problémem většiny testů je, že při menším počtu pozorování nejsou jejich závěry příliš spolehlivé. Berkowitz (2001) navrhl sdruženou hypotézu testující rovnoměrnou distribuci dat a současně jejich nezávislost. Tento testu byl speciálně navržen pro validaci modelů při malých výběrech a ze skupiny testů testujících predikční schopnost modelů využívaných například při analýzách typu Value at Risk požaduje jeden z nejmenších rozsahů pozorování. Sám autor uvádí, že pro dostatečnou sílu testu je zapotřebí minimálně 100 pozorování. Berkowitzův test je v tomto případě tudíž nejvhodnější, neboť testuje navíc i nezávislost dat a současně nevyžaduje velký počet pozorování.

Při aplikaci Berkowitzova testu se nejprve hodnoty distribučních funkcí y_t, které mají při platnosti nulové hypotézy rovnoměrné rozdělení, transformují na hodnoty z_t pocházející při platnosti nulové hypotézy z normovaného normálního rozdělení. Tyto hodnoty z_t se získají ze vztahu

$$z_t = \Phi^{-1}(y_t), \tag{3.12}$$

kde Φ představuje distribuční funkci normovaného normálního rozdělení - $N(0,1)$.

Hypotéza H_0 se stanoví jako

$$H_0 : \widehat{f}_t(\cdot) = f_t(\cdot), \tag{3.13}$$

kde $f_t(\cdot)$ značí skutečnou hustotu úrokové sazby. H_0 se nezamítá, pokud platí, že $z_t \sim N(0,1)$ a současně jsou z_t nezávislé náhodné veličiny. V rámci konstrukce testu zavedl Berkowitz (2001) autoregresní proces prvního řádu

$$z_t - \mu = \rho(z_{t-1} - \mu) + \epsilon_t, \tag{3.14}$$

kde při platnosti H_0 platí, že $\mu = 0$, $\rho = 0$ a $\text{var}(\epsilon_t) = 1$. Neznámé parametry procesu (3.14) jsou μ, σ^2 a ρ, kde σ^2 představuje rozptyl náhodných veličin ϵ_t. Tyto neznámé parametry lze odhadnout metodou maximální věrohodnosti, konkrétně pak maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2, \rho) &= -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{\left(z_1 - \frac{\mu}{1-\rho}\right)^2}{\frac{2\sigma^2}{1-\rho^2}} - \frac{T-1}{2}\ln(2\pi) - \\ &\quad -\frac{T-1}{2}\ln(\sigma^2) - \sum_{t=2}^{T}\frac{(z_t - \mu - \rho z_{t-1})^2}{2\sigma^2}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

kde T značí celkový počet pozorování. Následně se zkonstruují dvě testové statistiky. První testová statistika

$$LR_{ind} = -2\left[L(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2, 0) - L(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2, \widehat{\rho})\right] \tag{3.16}$$

se týká pouze testu nezávislosti pozorování, neboli testuje, zda platí $\rho = 0$. Proměnné $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma}^2$ a $\widehat{\rho}$ představují odhady parametrů. Testová statistika LR_{ind} má při platnosti H_0 rozdělení $\chi^2(1)$, chí-kvadrát rozdělení s jedním stupněm volnosti. V případě podezření na zpožděnou závislost náhodných veličin z_t o více než jedno období je možné použít vyšší řád autoregrese u procesu (3.14), více podrobností viz (Berkowitz, 2001). Druhá testová statistika

$$LR = -2\left[L(0, 1, 0) - L(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2, \widehat{\rho})\right] \tag{3.17}$$

již testuje jak nezávislost dat tak i omezení na parametry normálního rozdělení, tedy testuje již celou hypotézu $H_0 : \widehat{f}_t(\cdot) = f_t(\cdot)$. Testová statistika LR má při platnosti H_0 rozdělení $\chi^2(3)$, chí-kvadrát rozdělení se třemi stupni volnosti.

Při testování mohou nastat následující situace:

- Zamítnutí hypotézy $H_0 : \widehat{f}_t(\cdot) = f_t(\cdot)$ a nezamítnutí hypotézy o nezávislosti. Potom dle výsledku hypotéz hustota $\widehat{f}_t(\cdot)$ nepřesně předpovídá skutečnou hustotu $f_t(\cdot)$.

- Nezamítnutí hypotézy $H_0 : \widehat{f}_t(\cdot) = f_t(\cdot)$ a zamítnutí hypotézy o nezávislosti. V této situaci hustota $\widehat{f}_t(\cdot)$ správně předpovídá skutečnou hustotu $f_t(\cdot)$, ale vzhledem k závislosti v datech je třeba přistupovat k těmto předpovědím s opatrností.

- Zamítnutí obou hypotéz. Pak podle závěrů hypotéz $\widehat{f}_t(\cdot)$ nepřesně předpovídá skutečnou hustotu $f_t(\cdot)$, ale není zřejmé, zda je to z důvodu špatné předpovědní schopnosti nebo z důvodu závislosti dat.
- Nezamítnutí obou hypotéz. V tomto případě hustota $\widehat{f}_t(\cdot)$ správně předpovídá skutečnou hustotu $f_t(\cdot)$.

Jak je již zmíněno výše, vstupními daty budou predikce pravděpodobnostních rozdělení a skutečná hodnota úrokové sazby na konci simulačního období. Berkowitzův test budu nejprve provádět na skupinách predikcí zkonstruovaných jedním modelem, v jednom období a pro jednu úrokovou sazbu. Počet pozorování pro jeden test tudíž bude přibližně 52. Výsledné p-hodnoty testů zobrazují tabulky 3.10 a 3.11. Nejvyšší p-hodnoty, které jsou v tabulkách uvedeny ve tvaru 0,000, jsou řádu 10^{-7}.

Tabulka 3.10: P-hodnoty pro test nezávislosti – odlišení období

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,230	0,000	0,000	0,000	0,000
5Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,702	0,000	0,000	0,000	0,000
10Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,320	0,000	0,000	0,000	0,000
15Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,114	0,000	0,000	0,000	0,000

Zdroj: Vlastní výpočty

Z tabulky 3.10 plyne, že kromě modelu GP v období finanční krize se ve všech ostatních případech zamítá hypotéza o nezávislosti dat pro obvyklé hladiny významnosti (pro 5% i 1%). A podle p-hodnot z tabulky 3.11 je patrné, že se ve všech případech zamítá nulová hypotéza o rovnosti predikované a skutečné hustoty sledované úrokové sazby pro všechny rozumné hladiny významnosti, tj. hladiny významnosti větší než 0,05%.

Při konstrukci testů byl ale počet pozorování pouze 52, což je nízký počet i pro Berkowitzův test, který je vhodný pro výrazně menší počet pozorování než většina ostatních testů. V dalším kroku aplikuji tedy tento test na všechna tři uvažovaná období najednou. V rámci jednoho testu budu uvažovat data pocházející z jednoho modelu, jedné úrokové sazby ale ze všech tří období. Počet pozorování pro jeden test tudíž bude přibližně $3 \cdot 52 = 156$. Při takovémto počtu pozorování je dle Berkowitze síla testu dostatečná. Výsledné p-hodnoty testů zobrazují tabulky 3.12 a 3.13. Nejvyšší p-hodnoty, které jsou v tabulkách uvedeny ve tvaru 0,000, jsou řádu 10^{-6}.

Z tabulek 3.12 a 3.13 lze vidět, že v situaci, kdy jsou pro test uvažována všechna období dohromady, se ve všech případech zamítá nulová hypotéza nezávislosti dat i nulová hypotéza rovnosti predikované a skutečné hustoty pro všechny rozumné hladiny významnosti, tj. hladiny významnosti větší než 0,05%.

Tabulka 3.11: P-hodnoty pro test rovnosti predikované a skutečné hustoty – odlišení období

	období před krizí			období během krize			období po krizi		
	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM	CIR	GP	BGM
1Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Zdroj: Vlastní výpočty

Tabulka 3.12: P-hodnoty pro test nezávislosti – všechna období dohromady

	CIR	GP	BGM
1Y	0,000	0,000	0,000
5Y	0,000	0,000	0,000
10Y	0,000	0,000	0,000
15Y	0,000	0,000	0,000

Zdroj: Vlastní výpočty

Závěry hypotéz však nejsou zcela překvapivé. V literatuře je dostatečně popsaným faktem, že v oblasti modelování úrokových měr statistické testy velmi často zamítají model na reálných datech a to i v případě relativně dobrého modelu. Běžným problémem je nedodržení předpokladů testu týkajících se např. závislosti jednotlivých pozorování. Např. James a Webber (2000) na str. 125 uvádí: „*V praxi je proces generující časové řady úrokových měr neznámý a každý model bude na reálných datech pravděpodobně zamítnut. Cílem je však nalezení takových odhadů parametrů, které podle požadované aplikace modelu zajišťují „nejlepší fit" dat ve smyslu zajištění konzistentních a spolehlivých výsledků a případně též bezarbitrážnosti nehledě na výsledek statistických testů.*" Podobný závěr uvádí Kladívko (2005): „*Stejně jako James a Webber musím zamítnout hypotézu, že rezidua představují realizaci bílého šumu (standardními testy, které nabízí Statgraphics 3.1). Takže CKLS nemůže být považován za proces, který generoval 3M LIBOR v odhadovaném období. S tímto závěrem se bohužel setkáme téměř při každém odhadu jednofaktorového modelu úrokových sazeb z časové řady. To však neznamená, že jednofaktorové modely jsou nepoužitelné. Praxe prokázala, že zjednodušení, ke kterým vedou, jsou v mnoha případech únosná nebo dokonce žádoucí.*"

Hlavním důvodem zamítnutí hypotéz o tom, že příslušný model správně predikuje pravděpodobnostní rozdělení skutečné úrokové sazby na konci simulačního období, je pravděpodobně autokorelace jednotlivých pozorování. Tuto domněnku potvrzuje i zamítnutí hypotézy o nezávislosti u Berkowitzova testu ve všech případech kromě modelu

Tabulka 3.13: P-hodnoty pro test rovnosti predikované a skutečné hustoty – všechna období dohromady

	CIR	GP	BGM
1Y	0,000	0,000	0,000
5Y	0,000	0,000	0,000
10Y	0,000	0,000	0,000
15Y	0,000	0,000	0,000

Zdroj: Vlastní výpočty

GP v období finanční krize. Dále tuto domněnku potvrzují obrázky 4.22–4.25, které jsou umístěny v příloze. Tyto grafy zobrazují časovou řadu kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období. Z grafů je patrné, že minulá realizace do jisté míry determinuje budoucí realizaci. Pouze v případě modelu GP v období finanční krize na obrázku 4.23 lze pozorovat menší vliv minulé realizace na realizace budoucí.

Podmínka nezávislosti jednotlivých pozorování je základním předpokladem statistických testů posuzujících predikční schopnost finančních modelů. Na tuto skutečnost upozorňuje jako první Christoffersen (1998), podle kterého může být testování predikční schopnosti zredukováno na testování dvou vlastností. První z nich je vlastnost nepodmíněného pokrytí, která stanovuje omezení na přípustný počet výsledných realizací, které se mohou nacházet mimo požadovanou oblast. Druhou vlastností je nezávislost. Berkowitz (2001) pak především z důvodu potřeby vysokého počtu pozorování při klasickém intervalovém testování vlastnosti nepodmíněného pokrytí navrhl testovat tuto vlastnost pomocí srovnání teoretického pravděpodobnostního rozdělení získaného modelem a pravděpodobnostního rozdělení výsledných realizací získaného z dat.

Podmínku nezávislosti je však v praxi často těžké dodržet. K tomu, aby Berkowitzův test nezamítl hypotézu o správném modelu, je potřeba, aby jednotlivé kvantily byly na sobě nezávislé a po transformaci jejich rozdělení odpovídalo normovanému normálnímu rozdělení. V mém případě však vlastnost nezávislosti kvantilů není vždy žádoucí. Pokud by například skutečná realizace některý týden odpovídala 10% kvantilu simulací a o týden později bez výrazných událostí na finančních trzích by nabývala 80% kvantilu, nebylo by možné považovat takovýto model za vhodný pro účely řízení úrokového rizika, neboť poskytuje nekonzistentní predikce. Závislost jednotlivých predikcí je tedy v mém případě do určité míry požadovaná vlastnost.

Dalšími populárními testy v oblasti posuzování predikční schopnosti finančních modelů jsou například Kupiecův binomický test (Kupiec, 1995) nebo Christoffersenův test (Christoffersen, 1998), které oba potřebují pro dostatečnou sílu testu minimálně 250 avšak v některých případech i více než 800 pozorování. Výrazně nižší potřebný počet pozorování u Berkowitzova testu je dán tím, že v jeho případě je testována předpověď celého pravděpodobnostního rozdělení a nikoliv pouze intervalová předpověď jako

u Christoffersenova a Kupiecova testu. Rozdíl mezi Christoffersenovým a Kupiecovým testem je ten, že Christoffersenův test testuje navíc i nezávislost pozorování. Interval předpovědi by měl být v případě správného modelu a například 98% intervalu spolehlivosti překročen pouze v 2 % pozorování, což díky nízkému procentu pozorování mimo interval sebou implicitně přináší požadavek na velké rozsahy pozorování. Zajímavé porovnání síly jednotlivých statistických testů v závislosti na rozsahu výběru lze nalézt například v (Roynstrand a kol., 2012). Autoři testují tvrzení Berkowitze (2001) o dostatečné síle testu při minimálně 100 pozorováních a docházejí k závěru, že síla tohoto testu je v některých případech poměrně malá až do rozsahu více než 200 pozorování. Přesto má však Berkowitzův test podle těchto autorů největší sílu z dostupných testů.

Požadavky na rozsah výběru je v praxi někdy obtížné splnit. V případě této práce, kdy je jejím cílem prozkoumat chování jednotlivých modelů během různých situací na finančních trzích, je k dispozici 52 pozorování vzdálených 1 týden. Je samozřejmě možné predikce konstruovat po delší dobu než jeden rok a získat tím více pozorování. Tím však bude narušen záměr práce a tedy i praktická využitelnost jejích výstupů, protože především období finanční krize je časově pevně ohraničeno. Další možností jak zvýšit počet pozorování je zkrátit horizont predikcí. Jednoletý horizont predikcí, který jsem zde zvolila, je ale často vyžadován z důvodu rozpočtového i účetního.

Zvýšení počtu pozorování sice vede k vyšší síle Berkowitzova testu a zvyšuje se tak pravděpodobnost, že chybný model bude testem správně zamítnut, nicméně pouze za podmínky nezávislosti jednotlivých pozorování. V mém případě tedy zvýšení počtu pozorování pravděpodobně nepovede k výrazně odlišnějším výsledkům testu právě z důvodu existence autokorelace jednotlivých předpovědí stejně jako realizovaných hodnot kvantilů. Možný způsob odstranění autokorelace předpovědí by bylo snížení jejich frekvence, tj. predikce by nebyly uskutečňovány s týdenní frekvencí ale například s frekvencí jeden měsíc nebo ještě lépe jeden rok. V takovémto případě se však výrazným způsobem dále sníží počet pozorování, kterých je již nyní nedostatek.

Z výše uvedených důvodů není provádění statistických testů vhodné nejenom pro kritérium posouzení predikční schopnosti na konci simulačního období nýbrž i u ostatních kritérií navržených v této práci. Například v případě prvního kritéria, kde pozoruji počet dní, ve kterých se skutečná realizace sazby nachází mimo interval daný 1% a 99% kvantilem simulací, se nabízí využití Kupiecova binomického testu. Na základě tohoto testu se na 5% hladině významnosti nezamítá nulová hypotéza o správném modelu, pokud se právě 2–9 dnů z celkového počtu 230 dnů nachází mimo tyto kvantily. V případě, že je dnů mimo tyto kvantily více nebo méně, se nulová hypotéza na této hladině významnosti zamítá. Je však patrné, že výsledné realizace jsou poměrně silně autokorelované. Pokud se mimo požadovaný interval dostane skutečná realizace příslušné úrokové sazby některý den, je pravděpodobné že tam setrvá i den následující. Porušení základní podmínky statistických testů posuzujících predikční schopnost je na jednu stranu pochopitelné a žádoucí, na druhou stranu zabraňuje smysluplnému statistickému testování.

Znamenají však výše uvedené závěry, že uvažované modely nelze pro účely řízení

rizik využít? Samozřejmě, že by bylo dobré nalézt takový model, jehož predikční schopnost by byla na reálných datech potvrzena statistickým testem. Takovýto model by jistě dluhový manažer preferoval nad všemi ostatními. V praxi se však takové případy nestávají bohužel často. Přesto je nutné, aby dluhový manažer na tuto situaci zareagoval a nějakým způsobem vhodný model vybral, neboť je dle mého názoru lepší využít predikce získané na základě modelu než expertní odhady. Systém kritérií pro posouzení predikční schopnosti modelů, který je navržen v této práci, tak demonstruje jeden z možných způsobů výběru vhodného modelu úrokových měr, pokud není predikční schopnost některého z modelů potvrzena statistickým testem. Je však plně na úvaze dluhového manažera, kterou cestou se vydá a zda nepreferuje jiné požadavky na výsledné predikce.

Kapitola 4

Kreditní přirážka

V této kapitole navrhnu přístup k získání predikcí dynamiky rizikové přirážky státních dluhopisů pomocí modelu GP. V rámci tohoto cíle zkonstruuji denní časovou řadu výnosových křivek českých státních dluhopisů na základě Svenssonova modelu s využitím exekutivních kotací těchto dluhopisů.

V této práci definuji rizikovou přirážku státních dluhopisů jako rozdíl mezi výnosem státních dluhopisů a fixní sazbou IRS se stejnou splatností. Takto definovaná riziková přirážka umožní popsat míru kreditního rizika státních dluhopisů, tj. závazků státu, ve vztahu k IRS. Kreditní riziko IRS je spojeno s tou částí bankovního sektoru, který kotuje sazbu typu IBOR. Kreditní riziko spojené se sazbou IBOR je závislé na její splatnosti. Čím kratší je období refixace IRS a tedy i nižší splatnost sazby IBOR, tím existuje nižší kreditní riziko. Z tohoto důvodu vykazují OIS díky 1 denní frekvenci refixace nejnižší možné kreditní riziko pozorovatelné na trhu, což jsem již zmínila v předchozí části práce. Stejně jako úrokové sazby tak i riziková přirážka tedy není pro všechny splatnosti konstantní a zpravidla s rostoucím horizontem do splatnosti roste společně s tím, jak roste nejistota ohledně splnění závazků s prodlužujícím se trváním těchto závazků.

Liu, Longstaff a Mandell (2006) ukázali, že ve swapových sazbách není obsažena pouze riziková přirážka spojená s rizikem defaultu ale i přirážka za likviditu a navrhli přístup k popisu dynamiky těchto přirážek. Dospěli k závěru, že přirážka spojená s rizikem defaultu dominuje u USD IRS se splatností do 5 let. Collin-Dufresne a Solnik (2001) se zabývali analýzou a srovnáním rizik spojenými s dluhopisy a IRS a navrhují vlastní model pro modelování rizikové přirážky rizikových dluhopisů. V prostředí českého trhu se modelováním rizikové přirážky zabývají Baran a Witzany (2014), kteří se však věnují rizikové přirážce sazeb peněžního trhu. V této práci pro zjednodušení abstrahuji od existence přirážky za likviditu, která je s vysokou pravděpodobností obsažena nejen v sazbách IRS ale i ve výnosech státních dluhopisů.

Pro to aby bylo možné určit výši rizikové přirážky, je nejprve nutné získat výnosy státních dluhopisů a IRS, které mají stejnou dobu do splatnosti. V případě IRS existují ke každému dni tržní kotace pro většinu celoročních splatností. V případě státních dlu-

hopisů sice taktéž existují ke každému dni tržní kotace, avšak tyto kotace se vztahují k určitému dluhopisu, jehož doba do splatnosti klesá s přibližujícím se dnem maturity. Konkrétní dluhopis má například 10letou splatnost pouze jeden den během své existence. Pro to, aby bylo možné pro každý den získat rozdíl mezi výnosem například 10letých státních dluhopisů a sazbou 10Y IRS, je nejprve nutné, získat denní časovou řadu 10letého státního dluhopisu. Pro získání denních časových řad požadovaných splatností státních dluhopisů, zkonstruuji výnosovou křivku pro každý požadovaný den pomocí Svenssonova modelu z tržních kotací cen státních dluhopisů platných tento den. Z těchto výnosových křivek potom získám požadovanou splatnost státního dluhopisu.

V této kapitole učiním predikce pravděpodobnostních rozdělení rizikových přirážek českých státních dluhopisů v období počínajícím 2. ledna 2013 a končícím 2. ledna 2015, tj. použiji stejné období jako v případě dvouletých simulací výnosových křivek peněžního trhu. Vzhledem k tomu, že rizikové přirážky vykazují spíše vlastnost návratu ke své střední hodnotě než podobnost například s cenami akcií, které mohou výrazně růst, využiji pro popis dynamiky rizikových přirážek stochastický proces určující model GP. Tento proces je vhodný pro popis dynamiky rizikové přirážky i kvůli umožnění existence záporných hodnot rizikových přirážek. Dále je vhodné i to, že model GP neobsahuje restrikci na existence arbitráže, protože uplatnění této restrikce nedává vzhledem k nemožnosti obchodovat rizikové přirážky smysl.

Protože se budu nejprve zabývat popisem modelování výnosové křivky státních dluhopisů, popíši v následující sekci Svenssonův model. Pomocí tohoto modelu zkonstruuji výnosovou křivku českých státních dluhopisů pro každý obchodní den v období od 1. července 2005 do konce roku 2014, díky čemuž získám celkem 2 396 výnosových křivek. Toto období pokrývá všechna období uvažovaná v kapitole 3. Z výsledných výnosových křivek pak získám výnosy českých státních dluhopisů se stejnými splatnostmi, jako mají IRS používané pro predikce výnosových křivek peněžního trhu v kapitole 3. Rozdílem získaných výnosů českých státních dluhopisů a sazeb CZK IRS pak dostanu denní časové řady rizikových přirážek. Predikce dynamiky rizikových přirážek ve formě pravděpodobnostních rozdělení učiním pomocí modelu GP v závěru této kapitoly.

4.1 Modelování výnosové křivky státních dluhopisů

Za výzkumem v oblasti statického modelování výnosové křivky stojí především snaha o získání úrokových měr nebo výnosů dluhopisů těch splatností, pro které neexistují tržní kotace nebo existují pochyby o oprávněnosti takovýchto kotací. Hlavním motivem výzkumu je především nelineární tvar výnosové křivky, protože v případě linearity by pro její získání postačovala znalost dvou relevantních kotací s různou splatností ať již cen dluhopisů nebo sazeb IRS. Při statickém modelování výnosové křivky je při volbě metody vhodné přihlédnout k charakteru trhu, počtu relevantních kotací a jejich splatnostní struktuře. Pokud teoreticky existuje velké množství relevantních kotací např. mezi 5 a 10 lety a pokud je požadováno získání např. 7,5leté sazby, teoreticky by po-

stačovala pro tento úkol lineární interpolace mezi dvěma nejbližšími výnosy získanými z kotací cen dluhopisů případně mezi dvěma nejbližšími kotacemi sazeb peněžního trhu. Finanční trhy však většinou takto hustou síť relevantních kotací neposkytují, a proto je nutné aproximovat tvar výnosové křivky pomocí některé metody pro statické modelování výnosové křivky. V případě stanovení výnosové křivky státních dluhopisů je situace ještě poněkud komplikovanější vzhledem k faktu, že výnosy do splatnosti používané často jako reprezentanti výnosů dluhopisu, nejsou zcela přesným indikátorem vztahu mezi dobou do splatnosti dluhopisu a jeho výnosem. Je to zejména díky tzv. kuponovému efektu, díky čemuž nabývají dva dluhopisy s totožným datem splatnosti a totožnými daty výplaty kuponu rozdílného výnosu do splatnosti, pokud mají rozdílnou kuponovou sazbu. Tento problém je možné odstranit konstrukcí bezkuponové křivky a následným odvozením parové křivky jako například metodou navrženou Nelsonem a Seigelem (1987).

Pokusy o modelování výnosové křivky sahají minimálně do roku 1942, kdy se David Durand pokoušel vytvořit výnosovou křivku zakreslením monotónního krytí pozorovaných bodů způsobem, který mu přišel subjektivněji nejvhodnější. Následovala řada dalších přístupů, které se s postupem času stávaly stále více vědeckými než intuitivními, jako například po částech polynomiální funkce (polynomiální spline), viz např. (Waggoner, 1997) nebo (Fabozzi, 2002), dále exponenciální spliny nebo parametrické modely založené na polynomiální regresy, oba přístupy a některé další jsou k nalezení například v (Bolder a Gusba, 2002). Velmi zajímavá práce zabývající se srovnáním různých přístupů k modelování statické výnosové křivky a poukazující na úskalí jednotlivých metod je (Hagan a West, 2008). Já jsem například v podkapitole 2.3 použila pro získání chybějících splatností nelineární regresi, viz kapitola 2.3 pro podrobnosti.

Statické modelování výnosové křivky není cílem této práce, ale je pouze nástrojem pro získání rizikové přirážky dluhopisů, kterou budu poté modelovat dynamicky. Z tohoto důvodu v následujícím textu popíši pouze základní koncept statického modelování výnosové křivky pomocí Svenssonova modelu, který je dle mého názoru pro statické modelování výnosové křivky nejvhodnější, včetně vyřešení aplikačních problémů potřebných pro tuto práci a na další záležitosti odkáži na příslušnou literaturu.

Pod pojmem výnosová křivka je v této podkapitole vždy míněna výnosová křivka státních dluhopisů, není-li uvedeno jinak.

4.1.1 Svenssonův model

Svensson (1995) rozšířil Nelsonův-Siegelův model o dva parametry a dosáhl tak za určitých podmínek lepších vlastností výsledné křivky. Modelování výnosové křivky pomocí Svenssonova modelu je široce využívané centrálními bankami, dluhovými manažery a dalšími účastníky dluhopisového trhu jako model statické časové struktury úrokových měr, což dokládá například (Wiener a Pompushko, 2006), (BIS, 2005) nebo (Gimeno a Nave, 2009). Aplikací Svenssonova modelu v českém prostředí se zabývá (Kladívko, 2010).

Forwardovou úrokovou míru v čase t pro období (t', T) představuje výraz $F(t, t', T)$, kde platí $t < t' < T$. Okamžitá forwardová úroková míra je forwardová úroková míra na nekonečně krátké období a její definice je

$$f(t, t') = \lim_{T \to t'} F(t, t', T). \tag{4.1}$$

Naopak forwardová úroková míra $F(t, t', T)$ může být vyjádřena jako průměr okamžitých forwardových úrokových měr $f(t, \tau)$ pro $\tau \in (t', T)$:

$$F(t, t', T) = \frac{\int_{t'}^{T} f(t, \tau) d\tau}{T - t'}. \tag{4.2}$$

V situaci Nelsonova-Siegelova modelu je okamžitá forwardová úroková míra popsána funkcí

$$f(t, t + m; b) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right), \tag{4.3}$$

kde $b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$ je vektor parametrů. Omezení na parametry je $\beta_0 > 0$ a $\tau_1 > 0$. Tento model může být odvozený jako aproximativní řešení diferenciální rovnice druhého řádu v případě dvou různých kořenů.

Funkce popisující okamžitou forwardovou míru se skládá ze tří členů. První člen má podobu konstanty β_0, druhý člen $\beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)$ je monotónní exponenciální funkce proměnné m, která při $\beta_1 > 0$ klesá směrem k nule a v opačném případě roste. Poslední třetí člen $\beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)$ vytváří tzv. hrb na výnosové křivce, respektive výnosovou křivku tvaru U, pro $\beta_2 > 0$, respektive pro $\beta_2 < 0$. Dále platí limitní vztahy

$$\lim_{m \to \infty} f(t, t + m; b) = \beta_0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{m \to 0} f(t, t + m; b) = \beta_0 + \beta_1. \tag{4.4}$$

Pro některé situace je Nelsonův-Siegelův model postačující a jeho aplikací je získán kvalitní odhad výnosové křivky, ale ne vždy dává tento model uspokojivé výsledky. Je-li časová struktura úrokových měr více komplexní je vhodnější využít rozšíření modelu, jejž navrhl Svensson (1995):

$$f(t, t + m; b) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right), \tag{4.5}$$

kde se vektor parametrů $b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$ rozrostl o dva nové parametry β_3 a τ_2. A omezení na parametry jsou zde tři: $\beta_0 > 0$, $\tau_1 > 0$ a $\tau_2 > 0$. Rozšířený model (4.5) obsahuje oproti Nelsonovu-Siegelovu modelu navíc čtvrtý člen $\beta_3 \frac{m}{\tau_2} \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)$, který do výnosové křivky přináší další tzv. hrb, respektive zakřivení ve tvaru U, pro $\beta_3 > 0$, respektive pro $\beta_3 < 0$.

Vzhledem k tomu, že Svenssonův model zahrnuje šest parametrů, je smysluplné tento model používat pouze tehdy, je-li k dispozici alespoň šest (spíše ještě více) pozorovaných dluhopisů. V opačném případě je lepší cestou vybrat jiný jednodušší model s méně parametry například již zmíněný Nelsonův-Siegelův model, který obsahuje parametry čtyři. Tato situace však při modelování výnosové křivky státních dluhopisů České republiky v období od 1. července 2005 do 2. ledna 2015 nenastala.

4.1.2 Vztahy mezi forwardovými sazbami a výnosy do splatnosti

Při odvozování bude uvažováno spojité úročení.

Nechť $P(t,T)$ je cena kuponového dluhopisu v čase t, kde T je čas jeho maturity. Kuponová sazba dluhopisu vyjádřená v procentech z nominální částky N je c a časy zbývající do výplaty jednotlivých kuponů se označí $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K$, kde K je počet budoucích kuponů. Výnos do splatnosti $y(t,T)$ kuponového dluhopisu je pak určen vztahem

$$P(t,t+m) = \sum_{k=1}^{K} \frac{c}{100} N \exp\left[-y(t,t+m)\omega_k\right] + N \exp\left[-y(t,t+m)m\right]. \tag{4.6}$$

Cena kuponového dluhopisu lze dále také vyjádřit jako součet diskontovaných budoucích peněžních toků:

$$P(t,t+m) = \sum_{k=1}^{K} \frac{c}{100} NB(t,t+\omega_k) + NB(t,t+m), \tag{4.7}$$

kde $B(t,T)$ zastupuje, stejně jako v předchozím textu, diskontní faktor, jenž lze také popsat jako cenu bezkuponového dluhopisu v čase t, který v čase maturity T vyplácí jednotkový nominál. Dále nechť $R(t,T)$ představuje bezkuponovou sazbu výnosové křivky státních dluhopisů v čase t na období (t,T). Diskontní faktor $B(t,T)$ lze získat z bezkuponové sazby $R(t,T)$ dle vztahu

$$B(t,T) = \exp\left[-R(t,T)(T-t)\right], \tag{4.8}$$

přičemž je uvažováno spojité úročení.

Forwardovou úrokovou míru $F(t,t',T)$ je možné dopočítat z bezkuponové sazby $R(t,T)$ způsobem:

$$F(t,t',T) = \frac{(T-t)R(t,T) - (t'-t)R(t,t')}{T-t'}. \tag{4.9}$$

Ve vzorci byla forwardová úroková míra replikována pomocí prodeje a nákupu bezkuponových dluhopisů, konkrétně se jedná o prodej bezkuponového dluhopisu maturujícího

v čase t' a nákup bezkuponového dluhopisu stejné tržní hodnoty, který maturuje v čase T. Forwardová úroková míra je pak získána jako výnos zkonstruovaného dluhopisového portfolia.

Obdobným způsobem jako je forwardová úroková míra vyjádřena pomocí okamžité forwardové úrokové míry ve vzorci (4.2) lze též vyjádřit bezkuponovou sazbu $R(t,T)$ pomocí okamžité forwardové úrokové míry:

$$R(t,T) \equiv \frac{\int_t^T f(t,\tau)d\tau}{T-t}. \tag{4.10}$$

Naopak je též možné vyjádření okamžité forwardové úrokové míry $f(t,T)$ pomocí bezkuponové sazby $R(t,T)$:

$$f(t,T) \equiv R(t,T) + (T-t)\frac{\partial R(t,T)}{\partial T}. \tag{4.11}$$

4.1.3 Odhad parametrů

Bezkuponovou sazbu $R(t,T)$ lze vyjádřit pomocí parametrů modelu (4.5), odvození probíhá dosazením okamžité forwardové úrokové míry vyjádřené modelem (4.5) do vztahu (4.10). Po úpravách se získá

$$\begin{aligned} R(t,t+m;b) &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1-\exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 \left[\frac{1-\exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)\right] + \\ &+\beta_3 \left[\frac{1-\exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)}{\frac{m}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Diskontní funkce vyjádřená pomocí parametrů Svenssonova modelu je pak tvaru

$$B(t,t+m;b) = \exp\left[-R(t,t+m;b)m\right], \tag{4.13}$$

kde b zastupuje vektor parametrů a m označuje čas do maturity.

Odhad parametrů je možný získat dvěma různými přístupy. První možnost je minimalizovat součet čtverců odchylek pozorovaných cen dluhopisů a cen dluhopisů implikovaných modelem:

$$\hat{b} = \arg\min_b \sum_{j=1}^{J} \left[\hat{P}_j(t,t+m;b) - P_j(t,t+m)\right]^2, \tag{4.14}$$

kde $\hat{b}$ je odhad parametrů, $\hat{P}_j(t,t+m;b)$ je cena dluhopisu implikovaná modelem (4.5), $P_j(t,t+m)$ je pozorovaná cena dluhopisu a J zastupuje počet dluhopisů použitých

k odhadu. Druhým přístupem je minimalizace součtu čtverců odchylek pozorovaných výnosů do splatnosti a výnosů do splatnosti implikovaných modelem:

$$\hat{b} = \arg\min_{b} \sum_{j=1}^{J} \left[\hat{y}_j(t, t+m; b) - y_j(t, t+m)\right]^2, \tag{4.15}$$

kde $\hat{y}_j(t, t+m; b)$ je výnos do splatnosti daný modelem na základě parametrů b a dále $y_j(t, t+m)$ je pozorovaný výnos do splatnosti.

Dle Svenssona (1995) je lepší cestou minimalizace odchylek výnosů (4.15), neboť při minimalizaci odchylek cen (4.14) mohou vyjít vysoké odchylky mezi pozorovanými výnosy a výnosy odhadnutými modelem u dluhopisů s krátkou dobou do maturity, což je zapříčiněno nízkou citlivostí cen na změny ve výnosu u dluhopisů s krátkou dobou do maturity. Naopak při minimalizaci odchylek výnosů se získá podstatně lepší odhad z hlediska výnosů a dojde jen k nepatrnému zhoršení z hlediska cen dluhopisů. Z tohoto důvodu si i já zvolím odhad parametrů na základě minimalizace (4.15).

Detailnější postup při minimalizaci odchylek výnosů je následující. Výnosy implikované modelem $\hat{y}_j(t, t+m; b)$ se získají postupem, kdy jsou nejprve vypočteny diskontní faktory $B(t, t+m; b)$ z rovnice (4.13) využívající rovnici (4.12), jejichž dosazením do rovnice (4.7) se získá cena dluhopisu implikovaná modelem $P(t, t+m; b)$ a s využitím této ceny dluhopisu je poté řešením rovnice (4.6) dopočítán potřebný výnos $\hat{y}_j(t, t+m; b)$. Ačkoliv rovnice (4.6) je při neznámém výnosu do splatnosti nelineární rovnicí vyššího řádu (hodnota řádu je rovna počtu vyplácených kuponů), má tato rovnice pouze jeden reálný kořen a lze řešit numericky například použitím Newton-Raphsonovy metody.

Odhad parametrů při minimalizaci (4.15) jsem provedla s využitím metody nelineárních nejmenších čtverců, jinak je zde také možná aplikace metody maximální věrohodnosti nebo zobecněné momentové metody. Výsledkem minimalizace je odhad parametrů $\hat{b}$. Detailnější analýzu odhadu parametrů Svenssonova modelu nabízí (Gilli a kol., 2010).

Dosadí-li se odhad parametrů $\hat{b}$ do vzorce (4.12), lze vypočítat odhad bezkuponové křivky státních dluhopisů $R(t, \cdot; \hat{b})$. Dále odhad forwardové křivky $F(t, t+m, \cdot; \hat{b})$ je možný postupem, kdy se nejprve ze vzorce (4.5) odvodí okamžitá forwardová úroková míra implikovaná modelem a následně se z ní dopočítá forwardová úroková míra dle vzorce (4.2).

Třetí křivka, kterou lze na základě odhadu Svenssonova modelu určit, je parová křivka státních dluhopisů. Pro jednoznačné určení parové křivky se uvažuje cena dluhopisu jako nominální hodnota zvýšená o alikvotní úrokový výnos[1], takto definovaná cena je také označována jako cena za par. S využitím vzorce (4.7) a dosazením diskontních faktorů $B(t, T)$ dopočítaných z bezkuponové křivky se odvodí hodnota kuponu c. Následně za použití hodnoty kuponu a ceny dluhopisu při řešení rovnice (4.6) je získán výnos do splatnosti $y(t, t+m)$ pro danou dobu do maturity m.

[1] Alikvotní úrokový výnos je vysvětlen v sekci 4.2.3.

4.2 Praktická část

4.2.1 Vstupní data

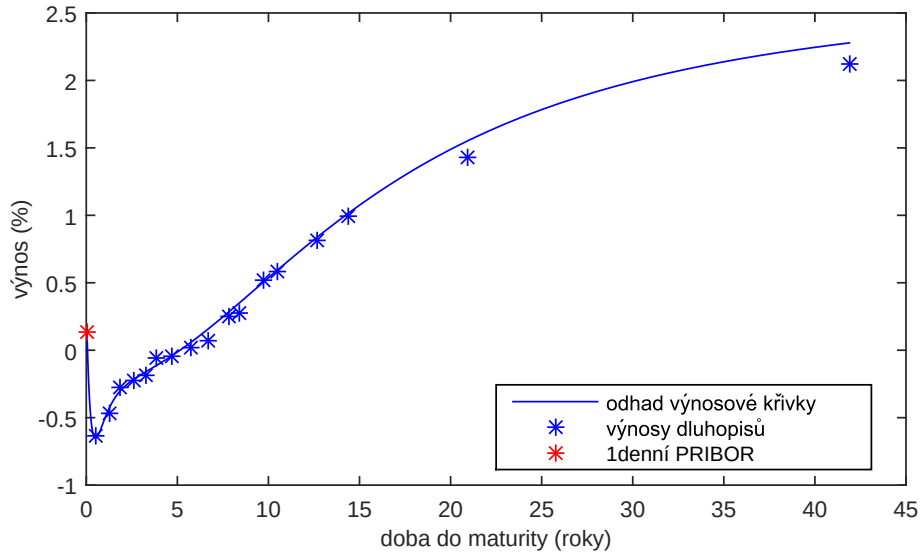
Jak již bylo zmíněno, vstupními daty modelu jsou ceny, respektive z nich odvozené výnosy do splatnosti, státních dluhopisů České republiky. U každého dluhopisu je dále třeba znát informaci o době do maturity, o datech výplaty kuponu a o výši kuponové sazby. V této práci budu používat výnosové křivky státních dluhopisů odvozené pro středové kotace cen, tj. průměr z prodejní (bid) a nákupní (ask) ceny. Zdrojem dat bude pro období od 1. července 2005 do 1. června 2011 terminál Bloomberg a od 1. června 2011 do 2. ledna 2015 pak platforma MTS[2]. Výnosovou křivku budu konstruovat pouze z kotací cen fixně úročených státních dluhopisů.

Oproti minulosti, kdy nejvíce obchodů s dluhopisy probíhalo tzv. přes telefon, probíhá v současnosti většina obchodů přes různé elektronické platformy jako např. Reuters, MTS nebo Bond Trader v rámci platformy Bloomberg. Obchodování na elektronických platformách činí trh více transparentní a jeho další velkou výhodou jsou dostupné časové řady skutečně exekutivních kotací cen dluhopisů. Je potřeba upozornit, že kotované ceny jsou tzv. čisté, zatímco skutečná cena, kterou kupující při koupi dluhopisu platí, je tzv. hrubá cena, jež se získá jakou součet čisté ceny a alikvotního úrokového výnosu. Dále je potřeba upozornit, že výnos do splatnosti je odvozen z hrubé ceny dluhopisu.

Obchodování s českými státními se po zavedení platformy MTS Czech Republic stalo výrazně transparentnější oproti minulosti, díky čemuž jsou kotace získané z tohoto zdroje výrazně kvalitnější než z jiných zdrojů, a proto pro konstrukci výnosových křivek použiji maximální možnou historii kotací s výjimkou prvních třech měsíců pilotního provozu, kterou MTS Czech Republic nabízí. Vzhledem k tomu, že parametry modelu GP odhaduji z historické časové řady rizikových přirážek, pro získání dostatečně dlouhé časové řady využiji dále kotace cen českých státních dluhopisů z terminálu Bloomberg. Tyto kotace sice díky faktu, že platforma Bloomberg není oficiální platformou pro obchodování českých státních dluhopisů, nedosahují takové kvality jako kotace získané z platformy MTS Czech Republic, ale stále jsou nejlepší dostupné.

Při výpočtu výnosu do splatnosti je dále nutné zohlednit i nestandardně dlouhé kuponové období. U státních dluhopisů České republiky mají některé dluhopisy nestandardně dlouhé první kuponové období, které je většinou delší než jeden rok jako například Dluhopis České republiky, 2010–2013, 2,80 %, avšak například u Dluhopisu

[2]MTS (Mercato Telematico Secondario) je elektronická platforma v současnosti sloužící například i pro obchodování státních dluhopisů České republiky. MTS Czech Republic jako elektronická platforma pro obchodování domácích státních dluhopisů České republiky na sekundárním trhu mezi jeho účastníky, které tvoří převážně primární dealeři těchto dluhopisů, byla zavedena Ministerstvem financí v roce 2011. V současnosti lze nalézt na https://www.mtsdata.com/content/data/public/cze/fixing/index.php veřejně dostupné denní časové řady kotací cen, tj. prodejní i nákupní ceny státních dluhopisů České republiky.



Obrázek 4.1: Výnosy do splatnosti státních dluhopisů České republiky a 1denní sazba PRIBOR ke dni 4. 1. 2016 s odhadem výnosové křivky státních dluhopisů dle Svenssonova modelu
Zdroj: MTS Czech Republic, Ministerstvo financí České republiku, Česká národní banka a vlastní výpočty

České republiky, 2010–2021, 3,85 % bylo naopak kratší než 1 rok. Obecně platí, že nestandardně dlouhé kuponové období je většinou první nebo poslední, avšak teoreticky je možné, že nestandardně dlouhá jsou všechna období. Informace o délce kuponových období jednotlivých státních dluhopisů ČR jsem čerpala z emisních podmínek jednotlivých dluhopisů[3].

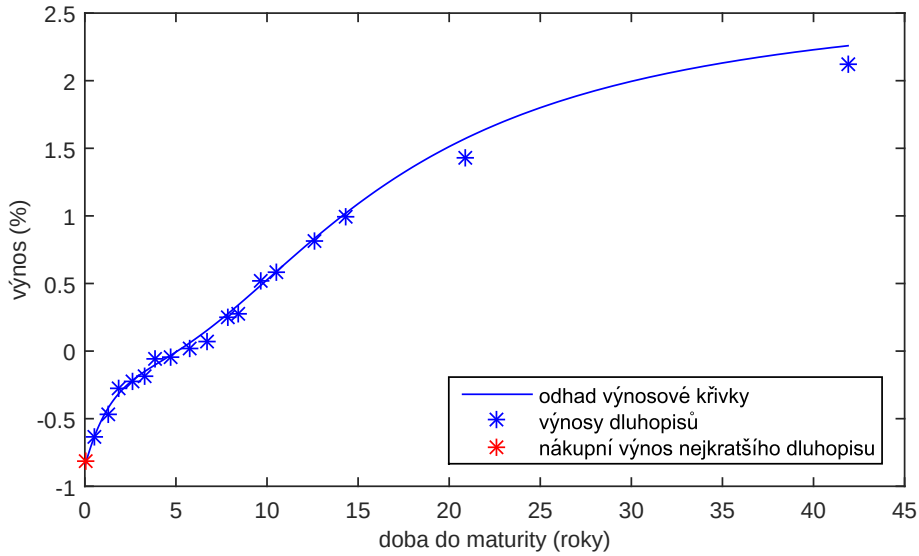
4.2.2 Krátký konec výnosové křivky

Aby nebyla při odhadu výnosové křivky ponechána přílišná volnost krátkému konci křivky, je vhodné vstupní data doplnit fiktivním dluhopisem s dobou do splatnosti 1 den a upevnit tak křivku na krátkém konci. Toto upevnění je velmi důležité pro to, aby výsledná výnosová křivka měla převážně na svém kratším konci požadovaný tvar.

Sazba fiktivního dluhopisu bývá standardně aproximována například 14denní repo sazbou ČNB nebo 1denní sazbou PRIBOR. Například ale v roce 2015 toto ukotvení nefunguje správně, protože se 1denní sazba PRIBOR stejně jako 14denní sazba repo pohybují sice na historických minimech avšak stále kladných hodnotách[4], kdežto státní dluhopisy s dobou do splatnosti v některých obdobích až 6 let nabývají záporných výnosů. Pro představu je uveden graf na obrázku 4.1, jenž zobrazuje středové výnosy do splatnosti (mid yields) státních dluhopisů České republiky a 1denní sazbu PRIBOR ke

[3]V současnosti dostupných na http://www.mfcr.cz/cs/verejny-sektor/rizeni-statniho-dluhu/emise-statnich-dluhopisu/emisni-podminky

[4]Sazba PRIBOR se splatností 1 den se v průběhu roku 2015 pohybovala v intervalu 0, 13–0, 16 % a 14 denní repo sazba ČNB setrvávala po celý rok 2015 na technické nule neboli na hodnotě 0,05 %.



Obrázek 4.2: Výnosy do splatnosti státních dluhopisů České republiky a nákupní výnos nejkratšího dluhopisu ke dni 4. 1. 2016 s odhadem výnosové křivky státních dluhopisů dle Svenssonova modelu
Zdroj: MTS Czech Republic, Ministerstvo financí České republiku a vlastní výpočty

dni 4. ledna 2016. Dále je v grafu zanesen i odhad výnosové křivky státních dluhopisů zkonstruovaný na základě Svenssonova modelu. Z grafu je vidět, že 1denní sazba PRIBOR již není vhodnou aproximací krátkého konce výnosové křivky. Sazba PRIBOR v této situaci zapříčinila, že odhad výnosové křivky na krátkém konci je násilně obrácen zpět směrem do kladných hodnot. Jeden z možných přístupů, jak vhodněji aproximovat fiktivní dluhopis s dobou do splatnosti 1 den v případě pozitivně skloněné výnosové křivky, je dosadit za jeho výnos nákupní výnos (ask yield) nejkratšího existujícího dluhopisu. Odhad výnosové křivky státních dluhopisů konstruovaný opět ke dni 4. ledna 2016 tentokrát však s aproximací fiktivního dluhopisu v podobě nákupního výnosu nejkratšího dluhopisu zobrazuje graf na obrázku 4.2. V porovnání s odhadem výnosové křivky na obrázku 4.1, kde se pro aproximaci fiktivního dluhopisu použila 1denní sazba PRIBOR a odhadnutá křivka vykazovala na krátkém konci neočekávaný zvrat, byl v tomto případě získán podstatně přirozenější tvar výnosové křivky.

Při modelování výnosové křivky používám kotvení na krátkém konci k sazbě 1 denní PRIBOR nebo k 14denní repo sazbě ČNB podle toho, které ukotvení vede k subjektivně lepšímu tvaru výnosové křivky. Pokud však takto ukotvená výnosová křivka vykazuje nepožadovaný tvar, který obsahuje neočekávané hrby jako například obrázek 4.1, používám výše zmíněné ukotvení k nejnižšímu kotovanému výnosu, respektive k výnosu spojeného s nákupní cenou nejkratšího kotovaného dluhopisu.

Obecně lze říci, že pro účely této práce, tj. pro získání rizikové přirážky státních dluhopisů, je nutné získání vhodného tvaru výnosové křivky státních dluhopisů. Přístupů ke kotvení velmi krátkého konce výnosové křivky existuje celá řada, avšak pokud má výsledná výnosová křivka vhodný tvar, u splatností nad jeden rok nemá volba konkrétní metody kotvení již takový dopad.

4.2.3 Alikvotní úrokový výnos a typ úročení

Prodá-li vlastník dluhopis v době mezi výplatou dvou kuponů případně mezi datem emise a výplatou prvního kuponu, vzniká mu nárok na poměrnou část následujícího kuponu, kdy je tato poměrná část určena na základě doby mezi datem výplaty posledního kuponu případně datem emise a dnem prodeje dluhopisu. Takovýto nárok na část budoucího kuponu se nazývá alikvotní úrokový výnos (dále jen AÚV) a vypočítá se dle

$$AUV = \frac{c}{100} N \frac{t_d - t_{c1}}{t_{c2} - t_{c1}}, \tag{4.16}$$

kde c je hodnota kuponu v procentech z nominální částky N, t_d je čas uzavření obchodu, t_{c1} je čas výplaty posledního vyplaceného kuponu případně čas emise a t_{c2} je čas výplaty nejbližšího budoucího kuponu.

U dluhopisů platí, že kupon získá ten vlastník, který dluhopis drží k datu těsně předcházejícímu datu ex-kuponu. V případě státních dluhopisů České republiky je datum ex-kuponu vzdálené od data výplaty kuponu 30 dní, v případě jiných zemí či jiného emitenta však může být tato doba odlišná. Je-li tedy dluhopis prodáván v době mezi datem ex-kuponu a výplatou kuponu stává se AÚV záporné, neboť kupující tento kupon již nedostane a prodávající musí kupujícímu doplatit poměrnou část kuponu. Výpočet AÚV se v této speciální situaci (prodej v době mezi ex-kuponem a výplatou kuponu) mění do podoby

$$AUV = (-1) \frac{c}{100} N \frac{t_{c2} - t_d}{t_{c2} - t_{c1}}. \tag{4.17}$$

Vstupní data v podobě sazeb parové křivky státních dluhopisů mají složené úročení, kdežto Svenssonův model uvažuje úročení spojité, vstupní sazby je tudíž třeba převést na úročení spojité. Označí-li se výnosy se složeným úročením výrazem $y_{sl}(t, t+m)$, lze poté výnosy se spojitým úročením $y_{sp}(t, t+m)$ potřebné do Svenssonova modelu získat ze vztahu

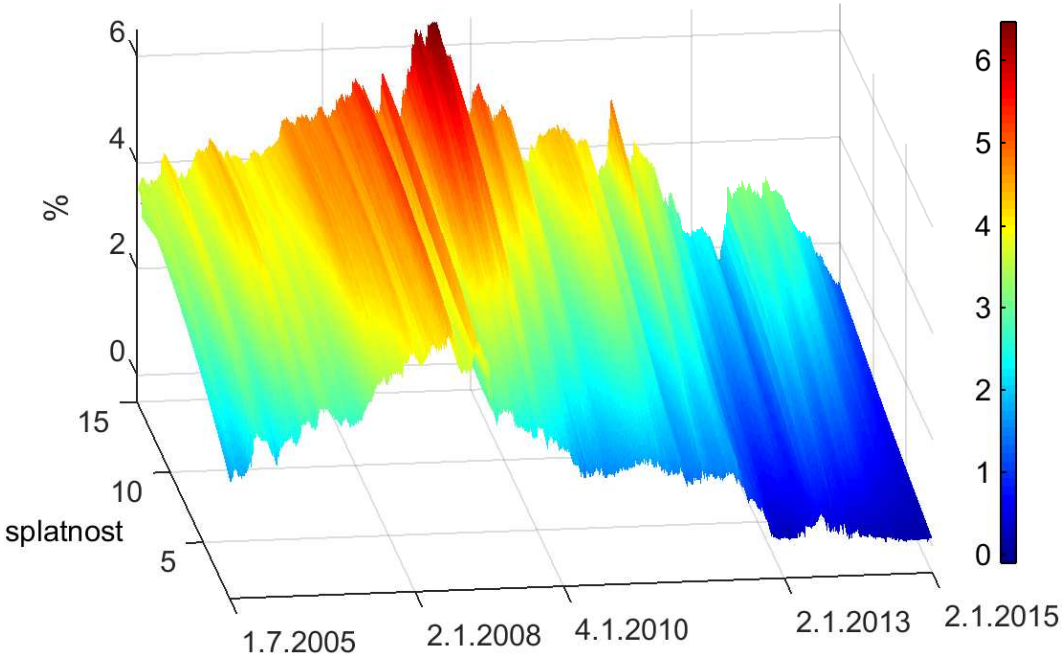
$$y_{sp}(t, t+m) = \ln\left[1 + y_{sl}(t, t+m)\right]. \tag{4.18}$$

Výsledné křivky odvozené ze Svenssonova modelu lze pak opačným postupem převést ze spojitého úročení na složené:

$$y_{sl}(t, t+m) = \exp\left[y_{sp}(t, t+m)\right] - 1. \tag{4.19}$$

4.2.4 Aplikace

Obrázek 4.3 zobrazuje výnosové křivky českých státních dluhopisů v období od 1. července 2005 do 2. ledna 2015 získané na základě Svenssonova modelu. Z obrázku je patrné prudké navýšení strmosti výnosových křivek v roce 2009 a obecně nárůst absolutních úrovní výnosů během finanční krize. Od konce roku 2009 dochází k neustálému



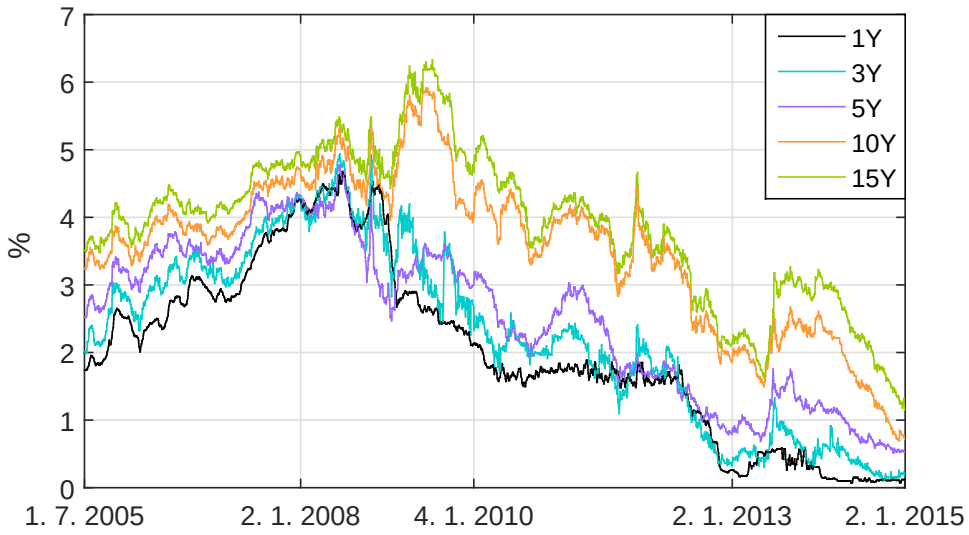
Obrázek 4.3: Výnosové křivky českých státních dluhopisů v období od 1. července 2005 do 2. ledna 2015 získané na základě Svenssonova modelu
Zdroj: Bloomberg, MTS a vlastní výpočty

trendovému poklesu úrovní výnosových křivek s několika krátkodobými a prudkými navýšeními jejich úrovní stejně jako strmosti. Tyto navýšení byly reakcí na dluhové problémy periférie eurozóny v roce 2011 a v roce 2013.

Výše zmíněný vývoj tvaru a úrovně výnosových křivek dokládá obrázek 4.4, na kterém je zobrazen vývoj výnosů do splatnosti českých státních dluhopisů se splatnostmi 1Y, 3Y, 5Y, 10Y a 15Y. Připomínám, že vývoj výnosů těchto splatností je získán z vývoje výnosových křivek, když každá výnosová křivka platná konkrétní den je tvořena výnosy nekonečně mnoha splatností. Z obrázku 4.4 je patrná relativně malá volatilita výnosů českých státních dluhopisů se splatností 1 rok ve srovnání s výnosy ostatních splatností.

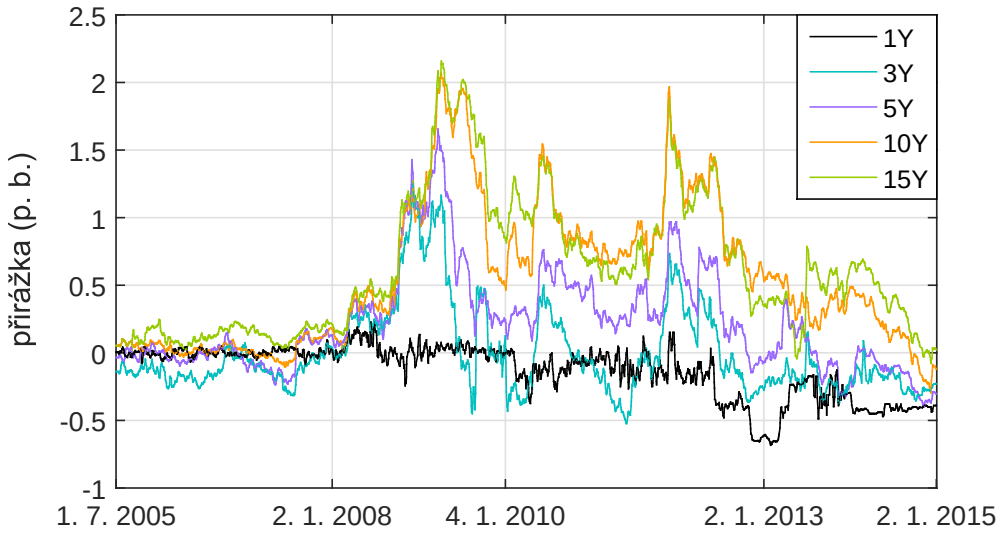
Po získání výnosů českých státních dluhopisů lze získat rizikové přirážky českých státních dluhopisů definované jako rozdíl mezi výnosem dluhopisu a sazbou CZK IRS se stejnou splatností. Na základě vývoje takto definované rizikové přirážky lze posoudit vývoj kreditního rizika spojeného s českými státními dluhopisy. Rizikové přirážky českých státních dluhopisů pro splatnosti 1 rok, 3 roky, 5 let, 10 let a 15 let jsou zobrazeny na obrázku 4.5.

Z obrázku je patrné, že přibližně do konce roku 2007 se rizikové přirážky státních dluhopisů různých splatností nacházely relativně symetricky rozmístěné kolem nulové úrovně za relativně nízké volatility. Riziková přirážka 3letých státních dluhopisů se s výjimkou několika málo dnů držela v negativním teritoriu a nabývala hodnot do mi-



Obrázek 4.4: Vývoj výnosů do splatnosti českých státních dluhopisů se splatnostmi 1Y, 3Y, 5Y, 10Y a 15Y

Zdroj: Bloomberg a MTS



Obrázek 4.5: Vývoj rizikových přirážek českých státních dluhopisů se splatnostmi 1Y, 3Y, 5Y, 10Y a 15Y

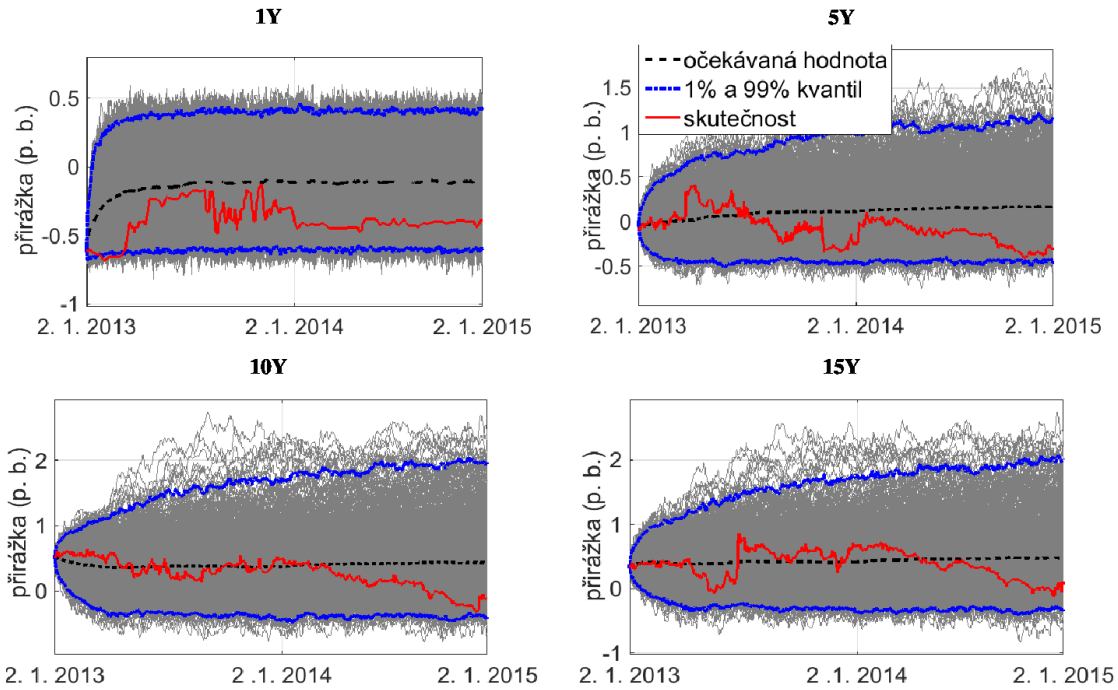
Zdroj: Bloomberg, MTS a vlastní výpočty

nimálně cca −25 b.b. Rizikové přirážky 1letých, 5letých a 10letých státních dluhopisů oscilovaly v tomto období kolem nulové hodnoty a riziková přirážka 15letého dluhopisu se tak v tomto období jako jediná držela neustále v kladném teritoriu, když oscilovala mezi 5 b.b. a 25 b.b. Velmi zajímavý vývoj vykazuje riziková přirážka 3letých státních dluhopisů, která se prakticky po celé období před rokem 2008 drží pod úrovní závazků ČR s 1letou splatností. V období do začátku finanční krize tedy trh ohodnocoval kreditní riziko České republiky ve vztahu k IRS relativně nízko, když rizikověji ohodnocoval pouze závazky se splatností přibližně 15 let a více a naopak u nižších splatností považoval kreditní riziko ČR za nižší než CZK IRS.

Po začátku roku 2008 dochází k prudkému nárůstu rizikové přirážky českých státních dluhopisů všech splatností s výjimkou splatností do 1 roku a někdy i do 3 let. V tomto období turbulencí na finančních trzích si trh patrně začal uvědomovat vyšší míru kreditního rizika spojenou se státními dluhopisy oproti IRS. V případě rizikové přirážky českých státních dluhopisů se splatností nad 10 let došlo po krachu Lehman Brothers k překročení hranice 200 b.b., což dokumentuje vysoký nárůst kreditního rizika střednědobých a dlouhodobých závazků České republiky v tomto období. Naopak kreditní riziko u závazků ČR splatných do 1 roku a někdy i do 3 let bylo v tomto období na úrovni kreditního rizika spojeným s IRS. Tato skutečnost pravděpodobně znamenala to, že si trhy uvědomovaly, že problémy dostát svým závazků nenastanou v případě ČR okamžitě ale spíše v delším horizontu.

Po uklidnění finanční krize se úrovně kreditních přirážek českých státních dluhopisů snížily, avšak vykazují vyšší volatilitu než v období před začátkem finanční krize. V tomto období lze pozorovat krátkodobé prudké nárůsty úrovně rizikových přirážek související pravděpodobně s dluhovou krizí periférie eurozóny. S výjimkou konce roku 2011 nabývaly rizikové přirážky maximálních úrovní menších než 150 b.b. a po roce 2012 menších než 75 b.b. Rizikové přirážky českých státních dluhopisů se splatností do 1 roku se mimo několika málo dnů až týdnů držely po celé období po začátku roku 2010 v negativním teritoriu, když se ke konci roku 2012 propadly až k hranici −70 b.b. Tento prudký propad patrně souvisel s masivní emisní činností ČR v roce 2012 a souvisejícím navýšením hotovostních rezerv státu, díku čemuž se snížila pravděpodobnost nedodržení svých závazků splatných do 1 roku na minimum. Zajímavý vývoj lze opět pozorovat u rizikové přirážky českých státních dluhopisů se splatností 3 roky, která mezi roky 2009 a 2012 několikrát prudce propadla pod úroveň 1leté přirážky, aby těsně poté opět vyskočila vysoko nad ní.

Ke konci roku 2014 se nacházejí rizikové přirážky státních dluhopisů všech splatností do 10 let v negativním teritoriu a u 15leté splatnosti se hodnota rizikové přirážky blíží nule. Tato skutečnost je dle mého názoru patrně způsobena zvýšeným množstvím volné likvidity, přílivem spekulativní likvidity po vyhlášení kurzového závazku ze strany ČNB v listopadu 2013 a dále pak utlumením emisní činnosti ČR v roce 2014. Obrázek 4.5 dokládá, že po listopadu 2013 mají úrovně rizikových přirážek českých státních dluhopisů tendenci nabývat záporných hodnot v případě splatností do 10 let a v případě splatností nad 10 let trendově klesat až do záporného teritoria. Jak jsem již uvedla



Obrázek 4.6: Simulace a skutečná realizace rizikových přirážek českých státních dluhopisů se splatnostmi 1Y, 5Y, 10Y a 15Y

Zdroj: Bloomberg, MTS a vlastní výpočty

v úvodu kapitoly 3, v tomto období za existence bezprecedentní politiky monetární expanze a souvisejícího pokřivení trhu vykazují investoři při honbě za ziskem tendenci se chovat nezodpovědně a nakupovat aktiva se sníženým vnímání kreditního rizika. Až budoucnost přinese odpověď na otázku, zda záporné hodnoty rizikových přirážek českých státních dluhopisů s delšími splatnostmi jsou dlouhodobě udržitelné. U závazků splatných do cca 3 let lze dle mého názoru při určitém zjednodušení akceptovat fakt, že jsou státní dluhopisy méně rizikové než IRS vzhledem k hotovostní rezervě státu a jeho schopnosti nalézt v tomto období dodatečné vlastní prostředky pro pokrytí svých závazků.

Za použití rizikových přirážek českých státních dluhopisů se splatnostmi od 1Y po jednom roce do 10Y a dále pak 15Y v období od 1. července 2005 do 2. ledna 2013 provedu odhad parametrů modelu GP ke dni 2. ledna 2013 způsobem popsaným v sekci 2.2. Dále za použití postupu popsaného teoreticky tamtéž a prakticky pak v sekci 3.5 zkonstruuji denní predikce pravděpodobnostních rozdělení rizikových přirážek českých státních dluhopisů. Tyto predikce budou ve formě simulací v období od 2. ledna 2013 do 2. ledna 2015, tj. ve stejném období po skončení krize jako v případě dvouletých simulací výnosových křivek českého peněžního trhu. Tyto simulace jsou pak pro splatnosti 1Y, 5Y, 10Y a 15Y společně se srovnáním se skutečným vývojem příslušné rizikové přirážky zobrazeny na obrázku 4.6.

Obrázek 4.6 poměrně dobře dokumentuje charakter predikcí ostatních zde nezobrazených splatností. Model GP relativně dobře predikoval dynamiku rizikových přirážek českých státních dluhopisů všech analyzovaných splatností, když se skutečný vývoj

příslušné rizikové přirážky po celou dobu simulačního období držel v prostoru simulací daným 1% a 99% kvantilem. Z obrázku 4.6 je patrné, že s výjimkou 1leté splatnosti nastal v druhé polovině roku 2014 pokles skutečné hodnoty rizikové přirážky u všech splatností k blízkosti úrovně 1% kvantilu simulací, avšak v samém závěru roku 2014 došlo opět ke vzdálení se od této hranice. Přiblížení se skutečnosti k hranici odpovídající 1% kvantilu simulací je patrně odrazem přílišné monetární expanze, zvýšením objemu spekulativních nákupů státních dluhopisů a utlumením emisní činnosti ČR, jak jsem již uvedla výše.

Z obrázku 4.6 je taktéž patrné, že simulace rizikové přirážky jednoletých státních dluhopisů vykazují odlišný charakter oproti ostatním simulacím. Tento fakt je dán výrazně odlišným vývojem skutečné hodnoty této rizikové přirážky, což dokumentuje i obrázek 4.5, na kterém lze pozorovat, že riziková přirážka státních dluhopisů se splatností 1 rok díky minimální pravděpodobnosti nedodržení závazků ČR v rámci jednoho roku příliš nereaguje na rozličné situace na trhu a drží se v blízkosti nulové úrovně či v negativním teritoriu s minimální volatilitou.

Závěr

V této disertační práci jsem představila přístup k modelování úrokových měr a potažmo i úrokového rizika v prostředí českého finančního trhu. Hlavním cílem práce bylo nalezení vhodného modelu úrokových měr pro získání predikcí dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu ve třech zcela odlišných obdobích, která nastala v posledních patnácti letech na finančních trzích. Konkrétně jsem analyzovala období před finanční krizí, období finanční krize a období po odeznění globální finanční krize a po uklidnění následné dluhové krize v eurozóně.

V rámci tohoto cíle jsem navrhla přístup k aplikaci modelu BGM v českém prostředí za využití tržních kotací volatilit EUR swapcí. Model BGM jsem zvolila vzhledem k jeho komplexnosti a předpokládané vysoké predikční schopnosti. Jeho aplikace v českém prostředí je problematická především díky tomu, že na českém finančním trhu díky jeho nerozvinutosti neexistují tržní kotace volatilit swapcí, které v sobě zahrnují aktuální očekávání trhu ohledně jeho budoucího směřování při zahrnutí všech dostupných informacích. Využití tržních kotací volatilit swapcí při aplikaci modelu BGM je dle mého názoru velmi důležité, neboť tímto způsobem se do predikcí pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých úrokových sazeb dostane maximální možná míra aktuálních informací a očekávání, které poskytuje finanční trh. Informace obsažené v těchto kotacích by měly být nejkvalitnější z kotací dostupných na trhu především díky vysoké likviditě trhu swapcí ve srovnání s ostatními deriváty úrokové míry.

Na základě podobného vývoje volatility EUR a CZK úrokových sazeb, což jsem ověřila pomocí modelu GARCH v podkapitole 3.3, jsem navrhla převodový vztah mezi kotovanou volatilitou EUR swapcí a jejím aproximativním protějškem na českém trhu. Při tomto převodu jsem využila podíl průměrné volatility korunových a eurových forwardových sazeb, který indikuje nižší volatilitu úrokových CZK forwardů oproti volatilitě totožných EUR forwardů na kratším konci výnosové křivky, tj. pro dobu expirace swapce a pro délku podkladového IRS do cca 3 až 4 let, zatímco na delším konci výnosové křivky nejsou rozdíly mezi volatilitou CZK a EUR forwardů příliš vysoké. V další části při aplikaci modelu BGM bylo dále nutné vyřešit problém chybějících kotací volatilit swapcí pro některé splatnosti podkladového IRS, tyto chybějící kotace volatilit jsem odhadla pomocí nelineární regrese.

Na základě takto připravených dat jsem v každém analyzovaném období získala za použití modelu BGM predikce dynamiky výnosové křivky peněžního trhu ve formě simulací jednotlivých úrokových sazeb nejprve pro dvouletý horizont v eurozóně i ČR.

Predikce získané na základě modelu BGM vykazují velmi dobrou predikční schopnost nejenom v prostředí eurozóny, ale i v podmínkách českého trhu ve všech analyzovaných obdobích. Přestože mají predikce pravděpodobnostních rozdělení jednotlivých úrokových sazeb peněžního trhu získané na základě modelu BGM velmi dobré vlastnosti a pokryly skutečný vývoj těchto sazeb ve velké většině případů, nedochází zde k nepřiměřenému zploštění výsledných pravděpodobnostních rozdělení a to i v období finanční krize.

Provedla jsem ještě porovnání těchto predikcí s predikcemi získanými modelem CIR a GP jakožto zástupců zcela odlišných typů úrokových modelů. Pokud by některý z těchto modelů vykazoval lepší nebo podobné vlastnosti predikcí, bylo by vhodné využívat tento model díky méně náročné aplikaci. Při porovnání dvouletých predikcí dynamiky české výnosové křivky peněžního trhu lze říci, že predikce učiněné na základě modelu CIR zcela selhaly při popisu skutečnosti v období finanční krize, když skutečný vývoj všech úrokových sazeb po celé délce výnosové křivky setrval mimo prostor simulací po většinu roku 2009. V ostatních analyzovaných obdobích popsaly predikce učiněné na základě modelu CIR skutečnost relativně dobře. Zřetelně se však u většiny simulací projevila nepříjemná vlastnost modelů okamžité úrokové míry, kdy počátek simulací neodpovídá skutečné hodnotě příslušné sazby, což je důsledek faktu, že výnosová křivka není modelována přímo, ale je dána funkcí okamžité úrokové míry a konstantní tržní ceny rizika. Pokud by však predikce učiněné na základě modelu CIR jinak vykazovaly dobré vlastnosti, bylo by možné tento rys zanedbat díky účelu využití modelu pro konstrukci predikcí.

Dvouleté predikce dynamiky české výnosové křivky peněžního trhu získané na základě modelu GP dokázaly správně popsat skutečnost ve všech analyzovaných obdobích, přičemž tyto predikce poněkud překvapivě popsaly skutečnost lépe než predikce dynamiky výnosové křivky peněžního trhu eurozóny. Obzvláště však v období finanční krize je tato skutečnost pravděpodobně způsobena tím, že finanční krize zapříčinila větší turbulence na finančních trzích v eurozóně, zatímco český trh zůstal poněkud stranou. Simulace provedené na základě modelu GP se jeví oproti simulacím provedeným na základě modelu CIR stabilněji, a protože je výnosová křivka modelována přímo, odpovídá počátek simulací skutečné hodnotě příslušné sazby.

Predikce získané k jednomu okamžiku mohou být ovlivněny situací danou v den konstrukce modelu, obzvláště pak závisí-li odhad parametrů pouze na aktuálních údajích jako u modelu BGM. Pro důkladnější analýzu predikční schopnosti analyzovaných modelů jsem zkonstruovala dále pomocí každého z uvažovaných modelů v každém analyzovaném období přibližně 52 predikcí výnosových křivek s 1letým horizontem predikce. Tímto způsobem jsem signifikantně zvýšila počet pozorování, na kterých lze testovat chování jednotlivých modelů v různých situacích na trhu. Vzhledem k cíli práce jsem provedla tuto analýzu pouze v českém prostředí.

Při aplikaci Berkowitzova testu došlo ve všech případech k zamítnutí nulové hypotézy o tom, že výsledné predikce získané příslušným modelem přesně popisují skutečnost. Hlavním důvodem této skutečnosti, je pravděpodobně autokorelace jak jednot-

livých predikcí, tak výsledných realizací. Toto tvrzení potvrzuje i zamítnutí hypotézy o nezávislosti u všech provedených testů s výjimkou situace modelu GP v období finanční krize. Podmínka nezávislosti jednotlivých pozorování je základním předpokladem statistických testů posuzujících predikční schopnost finančních modelů. Vzhledem k cílům této práce jsou testovaná období pevně stanovena, díky čemuž lze pravděpodobně zajistit nezávislost jednotlivých pozorování pouze snížením frekvence uskutečněných predikcí, čímž se však významně sníží počet těchto pozorování. Počet pozorování je však i bez této operace nízký pro zajištění dostatečné síly vhodných statistických testů, takže další snížení počtu pozorování není smysluplné.

V praxi však takováto situace není neobvyklá. Pro případ potřeby učinit rozhodnutí i za situace, kdy oprávněnost použití modelů nelze potvrdit statistickým testem, jsem navrhla pro posouzení predikční schopnosti jednotlivých modelů alternativní systém tří kritérií založený na vyhodnocení porovnání predikcí a skutečnosti.

Na základě prvního kritéria hodnotícího počet dní, které se nacházela skutečná hodnota sazby mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem, lze říci, že v období před finanční krizí se jako nejvhodnější model pro účely predikce dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu jeví model GP, i když i použití modelu BGM přinese taktéž velmi dobré výsledky.

V období finanční krize se v rámci prvního kritéria velmi robustně jeví predikční schopnost simulací učiněných na základě modelu BGM a částečně i modelu GP, neboť průměrný počet dní skutečné sazby mimo požadovaný interval je u sazeb všech uvažovaných splatností znatelně nižší u modelu BGM. Dále model GP v tomto období vykazuje u každé sledované sazby vždy minimálně jednu predikci, pro kterou platí, že skutečný vývoj příslušné sazby se nachází mimo prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem po celé sledované období. Naproti tomu u modelu BGM neexistuje u žádné sledované sazby žádná takováto predikce. U modelu BGM sice dochází častěji k situaci, kdy se skutečný vývoj sazby dostane mimo požadovaný prostor simulací, avšak skutečná sazba setrvá mimo požadovaný prostor simulací podstatně menší počet dní než v případě modelu GP. V období finanční krize jsem tedy zvolila model BGM jako nejvhodnější z analyzovaných modelů pro predikci dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu.

V období po finanční krizi lze u predikcí uskutečněných na základě modelu BGM a GP pozorovat vysokou stabilitu výsledků. V případě modelu GP došlo k překročení 1% kvantilu simulací skutečností u sazeb se platnostmi delšími než jeden rok převážně u predikcí zkonstruovaných v druhé polovině roku 2013, když předpovědi nedokázaly vystihnout pokles sazeb během roku 2014. U modelu BGM lze taktéž pozorovat, že u predikcí uskutečněných v druhé polovině roku 2013 došlo k nárůstu počtu dnů, ve kterých se skutečnost nachází pod 1% kvantilem simulací. Přesto je takovýchto predikcí ve srovnání s modelem GP méně. Model BGM se jeví jako nejvhodnější pro učinění predikcí také v tomto období, nicméně i predikce učiněné modelem GP vykazují velmi dobré vlastnosti.

Všechna analyzovaná období byla charakteristická výrazně horší predikční schop-

ností modelu CIR a to převážně u sazeb se splatností nad 5 let, přičemž se na rozdíl od dvouletých simulací potvrdila vlastnost výrazně klesající kvality predikcí s prodlužující se splatností sazeb z důvodu podceňování volatility delších splatností. Predikce učiněné na základě modelu CIR vykázaly taktéž výraznou nestabilitu v kontrastu s vysoce robustními predikcemi učiněnými na základě modelu BGM a o něco méně stabilními predikcemi učiněnými na základě modelu GP a potvrdily tak domněnku učiněnou na základě dvouletých simulací.

To že výše uvedené závěry jsou poměrně robustní, potvrdila i analýza výsledných simulací na základě dvou zbývajících kritérií, kde jsem učinila podobné závěry o predikční schopnosti analyzovaných modelů jako v případě kritéria prvního. Celkový závěr tedy zní, že na základě modelu BGM lze získat predikce dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu s vysokou predikční schopností a nejlepší kvalitou ve srovnání s ostatními analyzovanými modely, nicméně i model GP poskytuje relativně kvalitní predikce. Naopak predikce učiněné na základě modelu CIR jakožto zástupce modelů okamžité úrokové míry při popsání skutečnosti zcela selhaly. Je však nutné poznamenat, že model BGM lze využít pouze v situaci, kdy ekonomika neumožňuje existenci záporných sazeb, což je v ČR ke konci roku 2015 stále pravdivé tvrzení. Nicméně vzhledem k situaci v eurozóně a faktu, že se na počátku roku 2016 ČNB zavedením záporných sazeb vážně zabývala, což by se pravděpodobně odrazilo i na sazbách peněžního trhu v ČR, doporučuji využít pro účely získání predikcí dynamiky výnosové křivky českého peněžního trhu v tomto období spíše model GP, který záporné úrokové sazby za určitých okolností povoluje, což je patrné například ze simulací jednotlivých sazeb v ČR i eurozóně v období po finanční krizi. Pokud tedy neexistují v ekonomice omezení na existenci záporných sazeb, přičemž existuje signifikantní pravděpodobnost jejich výskytu, doporučuji provést predikce dynamiky výnosových křivek na základě modelu GP nebo nalézt jiný model, který existenci záporných sazeb umožňuje jako například Hullův-Whiteův model.

V kapitole čtvrté jsem navrhla přístup k predikci dynamiky rizikové přirážky českých státních dluhopisů za využití modelu GP. Tuto rizikovou přirážku jsem definovala jako rozdíl mezi výnosem státních dluhopisů a fixní sazbou CZK IRS totožné délky. Pro získání rizikových přirážek jsem nejprve použila Svenssonův model pro modelování výnosové křivky českých státních dluhopisů, díky čemuž jsem obdržela výnosové křivky pro každý obchodní den od 1. července 2005 do konce roku 2014. Od roku 2011 se pak jedná o výnosové křivky českých státních dluhopisů konstruovaných na základě exekutivních kotací, díky čemuž jsou přesným popisem trhu státních dluhopisů. Z výnosových křivek českých státních dluhopisů jsem následně získala časovou řadu jejich rizikových přirážek pro různé splatnosti dluhopisů. Na základě této časové řady jsem pak za pomoci modelu GP odhadla dynamiku rizikových přirážek a získala předpovědi jejich pravděpodobnostních rozdělení pro rok 2013 a 2014 ve formě simulací. Z výsledných simulací je patrné, že model GP relativně dobře predikoval skutečný vývoj rizikových přirážek všech analyzovaných splatností, když skutečný vývoj rizikových přirážek nepřekročil prostor simulací daný 1% a 99% kvantilem. Tímto byl splněn poslední cíl této práce.

Ačkoliv jsem v této práci poměrně důkladně analyzovala možnosti modelování dy-

namiky výnosové křivky českého peněžního trhu pomocí různých typů modelů úrokových měr a navrhla vhodný způsob pro získání predikcí pravděpodobnostních rozdělení úrokových sazeb potřebných pro účely řízení úrokového rizika, zůstává významná část výzkumu v této oblasti otevřená.

Témat na další výzkum v této oblasti je celá řada. Předně mi rozsah práce neumožnil analýzu predikční schopnosti dalších modelů úrokových měr, z nichž některé by jistě mohly býti vhodnou alternativou především k modelu BGM a GP. Dále si myslím, že by bylo zajímavé prozkoumat možnosti modifikace již existujících modelů tak, aby se vylepšila jejich predikční schopnost. Stejně tak je zajímavá problematika modelování v prostředí záporných úrokových sazeb, které se u centrálních bank stávají populární i přes kritické komentáře některých významných analytiků a ekonomů. Jak ukázala i tato práce, prostor pro výzkum vidím taktéž v nalezení možnosti provádění statistických testů predikční schopnosti modelů úrokových měr v praktických situacích, tj. při nízkém počtu pozorování a často při závislosti těchto pozorování. Oblast modelování rizikové přirážky je relativně málo prozkoumána a i zde lze nalézt mnoho prostoru pro další výzkum. Posledním tématem, které bych ráda zmínila v kontextu současného vývoje modelování úrokových měr, je propojení finančního a makroekonomického světa, jehož výzkum nabývá na intenzitě.

Literatura

[1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions.* Dover.

[2] AIT-SAHALIA, Y. (1996). Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate. *Review of Financial Studies*, sv. 9, č. 2. s. 385–426.

[3] ANDĚL, J. (2011). *Základy matematické statistiky.* Praha: MatfyzPress.

[4] ANG, A., PIAZZESI, M. (2003). A No-arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables. *Journal of Monetary Economics*, sv. 50, č. 4, s. 745–787.

[5] ARLT, J. (1999). *Moderní metody modelování ekonomických časových řad.* Grada.

[6] ARLT, J., ARLTOVÁ, M. (2009). *Ekonomické časové řady.* 1. vyd. Praha: Professional Publishing, s. 127–162.

[7] BARAN, J., WITZANY, J. (2014). Konstrukce výnosových křivek v pokrizovém období. *Politická ekonomie*, sv. 62, č. 1, s. 67–99.

[8] BARBER, J. R., COPPER, M. L. (1996). Immunization Using Principal Component Analysis. *Journal of Portfolio Management*, sv. 23, č. 1, s. 99–105.

[9] BAUER, M. D., RUDEBUSCH, G. D. (2015). Monetary Policy Expectations at the Zero Lower Bound. *Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper Serise*, URL: http://www.frbsf.org/economic-research/files/wp2013-18.pdf

[10] BAXTER, M., RENNIE, A. (1999). *Financial Calculus.* Cambridge University Press.

[11] BERKOWITZ, J. (2001). Testing density forecasts with applications to risk management. *Journal of Business and Economic Statistics*, sv. 19, č. 4, s. 465–474.

[12] BERTOCCHI, M., DUPAČOVÁ, J., MORIGGIA, V. (2000). Sensitivity of Bond Portfolio's Behavior with Respect to Random Movements in Yield Curve: A Simulation Study. *Annals of Operation Research 99.* Kluwer Academic Publishers. Manufactured in The Netherlands. s. 267–286.

[13] BIS (2005). Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation. *BIS Papers*, Basel: Bank for International Settlements, č. 25.

[14] BIS (2013). Market Volatility and Foreign Exchange Intervention in EMEs: What Has Changed? *BIS Papers*, Basel: Bank for International Settlements, č. 73.

[15] BOLDER, D. J. (2001): Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation. *Bank of Canada Working Paper*, č. 2001-15.

[16] BOLDER, D. J., GUSBA, S. (2002): Exponentials, Polynomials and Fourier Series: More Yield Curve Modelling at the Bank of Canada. *Bank of Canada Working Paper*, č. 2002-29.

[17] BRACE, A., GATAREK, D., MUSIELA, M. (1997). The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance*, sv. 7, s. 127–156.

[18] BRIGO, D., MERCURIO, F. (2001). *Interest Rate Models: Theory and Practice.* Springer-Verlag.

[19] CAIRNS, A. (2004). *Interest Rate Models: An Introduction.* Princteon University Press.

[20] CÍCHA, M., ZIMMERMANN P. (2006). Nové možnosti využití modelů úrokových měr v podmínkách ČR. In FISCHER, J. (ed.). *Sborník prací účastníků vědeckého semináře doktorského studia FIS VŠE.* Praha: VŠE FIS, s. 150–157.

[21] CÍCHOVÁ KRÁLOVÁ, D. (2015). Využití modelu BGM při řízení úrokového rizika v českém prostředí v období po finanční krizi. *Politická ekonomie*, sv. 63, č. 6, s. 714–740.

[22] CIPRA, T. (2003). *Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví.* Praha: Ekopress.

[23] CIPRA, T. (2005). *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou.* Praha: Ekopress.

[24] CIPRA, T. (2013). *Matematika cenných papírů.* Professional Publishing.

[25] COLLIN-DUFRESNE, P., SOLNIK, B. (2001). On the Term Sructure of Default Premia in the Swap and LIBOR Markets. *Journal of Finance*, sv. 61, č. 3, s. 1095–1115.

[26] COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ROSS, S. A. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, sv. 53, č. 2, s. 385–407.

[27] DANILUK, A., GATAREK, D. (2005). A Fully Lognormal LIBOR Market Model. *Risk*, September, s. 115–118.

[28] DIEBOLD, F. X., LI, C. (2006). Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, sv. 130, č. 2, s. 337–364.

[29] DIEBOLD, F. X., RUDEBUSCH, G. D., ARUOBA, S. B. (2006). The Macroeconomy and the Yield Curve: a Dynamic Latent Factor Approach. *Journal of Econometrics*, sv. 131, s. 309–338.

[30] DOKTOR, P., JOHN, O., KOPÁČEK, J. (1983). *Příklady z matematické analýzy VI, parciální diferenciální rovnice.* Skriptum MFF UK, Praha: SPN.

[31] DUFFY, D. J. (2006). *Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach.* Wiley.

[32] ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with the Estimates of the Variance of United Kingdom Inflations. *Econometrica,* sv. 50, č. 4, s. 987–1007.

[33] EVANS, L. C. (1998). *Partial Differential Equations.* 1. vyd. American Mathematical Society.

[34] EVANS, L. C. (2014). *An Introduction to Stochastic Differential Equations.* American Mathematical Society.

[35] FABOZZI, F. J. (2002). *Interest Rate, Term Structure, and Valuation Modeling.* Wiley.

[36] FERREIRO, A. M., GARCÍA-RODRÍGUEZ, J. A., LÓPEZ-SALAS, J. G., VÁZQUEZ, C. (2014). SABR/LIBOR Market Models: Pricing and Calibration for some Interest Rate Derivatives . *Applied Mathematics and Computation*, sv. 242, s. 65–89.

[37] FRATZSCHER, M., LO DUCA, M., STRAUB, R. (2014). ECB Unconventional Monetary Policy Actions: Market Impact, International Spillovers and Transmission Channels. *Jacques Polak Annual Research Conference*. Washington, DC.

[38] GATAREK, D., BACHERT, P., MAKSYMIUK, R. (2007). *The LIBOR Market Model in Practic*. John Wile & Sons.

[39] GILLI M., GROSSE S., SCHUMANN E. (2010). Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model. *COMISEF Working Paper Series*.

[40] GIMENO R., NAVE J. M. (2009). A Genetic Algorithm Estimation of the Term Structure of Interest Rates. *Computational Statistics & Data Analysis*, sv. 53, č. 6, s. 2236–2250.

[41] HAGAN, P. S. (2011). Volatility Conversion Calculators. New York: *Bloomberg*.

[42] HAGAN, P. S., KUMAR, D., LESNIEWSKI, A., WOODWARD, D. E. (2002). Managing Smile Risk. *Wilmott Magazine*, September, s. 84–108.

[43] HAGAN, P. S., LESNIEWSKI, A. (2008). LIBOR market model with SABR style stochastic volatility. *Working paper*,
URL: http://www.lesniewski.us/papers/working/SABRLMM.pdf

[44] HAGAN, P. S., WEST, G. (2008). Methods for Constructing a Yield Curve. *Wilmott Magazine*, s. 70–81.

[45] HAMILTON, J. D. (1994). *Time Series Analysis.* Princeton University Press.

[46] HEBÁK, P., HUSTOPECKÝ, J., PECÁKOVÁ, I., PRŮŠA, M., ŘEZANKOVÁ, H., SVOBODOVÁ, A., VLACH, P. (2007). *Vícerozměrné statistické metody (3).* 2. vyd., Praha: Informatorium.

[47] HEATH, D., JARROW, R., MORTON, A. (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, sv. 60, č. 1, s. 77–105.

[48] HOLTON, G. A. (2003). *Value at Risk: Theory and Practice.* 1. vyd. Academic Press.

[49] HULL, J. C. (2014). *Options, Futures, and Other Derivatives.* 9. vyd. Prentice Hall.

[50] HULL, J. C., WHITE, A. D. (1993). Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices. *Advances in Futures and Options Research*, č. 6, s. 1–13.

[51] CHAIERLLA, C., KWON, O. (2001). Classes of Interest Rate Models Under the HJM Framework. *Asia-Pacific Financial Markets*, sv. 8, č. 1, s. 1–22.

[52] CHEN, L. (1996). Stochastic Mean and Stochastic Volatility - A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives *Financial Markets, Institutions & Instruments*, sv. 5, č. 1, s. 1–88.

[53] CHRISTOFFERSEN, P. F. (1998). Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, sv. 39, č. 4, s. 841–862.

[54] ISDA Study (2014). Size and Uses of the Non-Cleared Derivatives Market . *International Swaps and Derivatives Association*, April.

[55] JAMSHIDIAN, F. (1997). LIBOR and Swap Market Models and Measures. *Finance and Stochastics*, 1, s. 293–330.

[56] JAMES, J., WEBBER, N. (2000). *Interest Rate Modeling.* New York: John Wiley & Sons, Ltd.

[57] JOSHI, M. S. (2008). *The Concepts and Practice of Mathematical Finance (Mathematics, Finance and Risk).* 2. vyd. Cambridge University Press.

[58] JOSLIN, S., LE, A., SINGLETON, K. J. (2013). Gaussian Macro-Finance Term Structure Models with Lags. *Journal of Financial Econometrics*, sv. 11, č. 4, s. 581–609.

[59] JOSLIN, S., PRIEBSCH, M., SINGLETON, K. J. (2014). Risk Premiums in Dynamic Term Structure Models with Unspanned Macro Risks. *Journal of Finance*, sv. 69, č. 3, s. 1197–1233.

[60] JOSLIN, S., SINGLETON, K. J., ZHU, H. (2011). A New Perspective on Gaussian Dynamic Term Structure Models. *Review of Financial Studies*, sv. 24, č. 3, s. 926–970.

[61] KARLIN, S., TAYLOR, H. M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes.* Academic Press.

[62] KARLIN, S., TAYLOR, H. M. (1981). *A second course in Stochastic Processes.* Academic Press.

[63] KENYON, CH. (2010). Post-Shock Short-Rate Pricing. *Risk Magazine*, sv. 23, č. 11.

[64] KENYON, CH., STAMM, R. (2012). *Discounting, Libor, CVA and Funfing: Interest Rate and Credit Pricing.* London: Palgrave Macmillan.

[65] KLADÍVKO, K. (2005). *Jednofaktorový model úrokových sazeb pro potřeby řízení úrokového rizika.* Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze.

[66] KLADÍVKO, K. (2010). The Czech Treasury Yield Curve from 1999 to the Present. *Finance a úvěr: Czech journal of economics and finance,* sv. 60, č. 4, s. 307–335.

[67] KLADÍVKO, K. (2011). *Interest Rate Modeling.* Disertační práce. Vysoká škola ekonomická v Praze.

[68] KLADÍVKO, K., ZIMMERMANN, P., CÍCHA, M. (2007). Yield Curve Modeling Using Principal Component Analysis and Nonlinear Stochastic Differential Equations. *Mathematical Methods in Economics and Industry.* Herlany.

[69] KRÁLOVÁ, D. (2013). Srovnání modelů úrokových měr. *Vědecká konference doktorského studia FIS 2013,* In DOUCEK, P. (ed.), Praha: Oeconomica, s. 188–198.

[70] KUPIEC, P. H. (1995). Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives*, sv. 3, č. 2, s. 73–84.

[71] LITTERMAN, R. B., SCHEINKMAN, J. (1991). Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income*, sv. 1, č. 1, s. 54–61.

[72] LIU, J., LONGSTAFF, F. A., MANDELL, R. E. (2006). The Market Price of Risk in Interest Rate Swaps: The Roles of Default and Liquidity Risks. *Journal of Business*, sv. 79, č. 5, s. 2337–2359.

[73] LÍZAL, L., SCHWARTZ, J. (2013). Foreign Exchange Interventions as an (Un)conventional Monetary Policy Tool. *BIS Papers*, Basel: Bank for International Settlements, č. 73.

[74] LONGSTAFF, F. A., SCHWARTZ, E. S. (1992). Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. *Journal of Finance*, sv. 47, č. 4, s. 1259-1282.

[75] LUKEŠ, J., MALÝ, J. (2002). *Míra a integrál.* Praha: Karolinum.

[76] MÁLEK, J. (2005). *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty.* Ekopress.

[77] McCLOUD, P. (2013). Collateral Convexity Complexity. *Risk*, sv. 26, č. 5, s. 60–64.

[78] McLACHLAN, G., PEEL, D. (2000). *Finite Mixture Models.* Wiley.

[79] MERCURIO, F. (2010a). A LIBOR Market Model with Stochastic Basis. *Risk Magazine*, December, s. 84–89.

[80] MERCURIO, F. (2010b). Modern LIBOR Market Models: Using Different Curves for Projecting Rates and for Discounting. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, sv. 13, č. 1, s. 113–137.

[81] MERCURIO, F., MORINI, M. (2009). Joining the SABR and Libor Models Together. *Risk*, sv. 22, č. 3, s. 80–85.

[82] MILTERSEN, K., SANDMANN, K., SONDERNMANN, D. (1997). Closed form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-normal Interest Rates. *J. Finance*, 52, s. 409–430.

[83] MORENI, N., PALLAVICINI, A. (2014). Parsimonious HJM Modelling for Multiple Yield Curve Dynamics. *Quantitative Finance*, sv. 14, č. 2, s. 199–210.

[84] MORENI, N., PALLAVICINI, A. (2015). FX Modelling in Collateralized Markets: Foreign Measures, Basis Curves, and Pricing Formulae. (September 14, 2015). Available at SSRN:
http://ssrn.com/abstract=2646516 nebo http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2646516

[85] MORINI, M., BIANCHETTI, M. (2013). *Interest Rate Modelling after the Financial Crisis.* Risk Books.

[86] MUSIELA, M., RUTKOWSKI, M. (1997). Continuous-time Term Structure Models: Forward Measure Approach. *Finance Stoch*, 1(4), s. 261–291.

[87] NELSON, CH. R., SIEGEL, A. F. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, sv. 60, č. 4, s. 473–489.

[88] OKSENDAL, B. (2003). *Stochastic Differential Equations*. 6. vyd. Berlin: Springer-Verlag.

[89] PALLAVICINI, A., BRIGO, D (2013). Interest-Rate Modelling in Collateralized Markets: Multiple Curves, Credit-Liquidity Effects, CCPs. (April 4, 2013), Available at SSRN:
http://ssrn.com/abstract=2244580 nebo http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2244580

[90] PENNACCHI, G. (2008). *Theory of Asset Pricing.* Pearson Education.

[91] PITERBARG, V. V. (2012). Cooking with Collateral. *Risk*, sv. 25, č. 8, s. 58–63.

[92] PRÁŠKOVÁ, Z. (2007). *Základy náhodných procesů II.* Praha: Karolinum.

[93] PRÁŠKOVÁ, Z., LACHOUT, P. (2012). *Základy náhodných procesů I.*. Matfyz-Press.

[94] REBONATO, R. (2002). *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The LIBOR Market Model and Beyond*. Princeton University Press.

[95] RITCHKEN, P., SANAKARASUBRAMANIAN, L. (1995). Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure. *Mathematical Finance*, sv. 5, č. 1, s. 55–72.

[96] ROSENBLATT, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation. *Annals of Mathematical Statistics*, č. 23, s. 470–472.

[97] ROYNSTRAND, T., NORDBO, N. P., STRAT, V. K. (2012). Evaluating power of Value-at-Risk backtests. *Masters Thesis – Norwegian University of Science and Technology.*

[98] RUDEBUSCH, G. D., WU, T. (2008). Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy, and the Economy. *Economic Journal*, sv. 118, č. 530, s. 906–926.

[99] SCOTT, D. W. (1992). *Multivariate Density Estimation: Theory, Practise and Visualization*. New York: John Wiley.

[100] SHREVE, S. E. (2004a). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model.* Springer Finance.

[101] SHREVE, S. E. (2004b). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models.* Springer Science & Business Media.

[102] SILVERMAN B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis.* London: Chapman and Hall.

[103] SMITH, D. J. (2012). Valuing Interest Rate Swaps Using OIS Discounting. Boston University School of Management. Research Paper Series č. 2012–11.

[104] SOTO, G. M. (2004). Using Principal Component Analysis to Explain Term Structure Movements: Performance and Stability. Tavidze, A. (Ed.) *Progress in Economics Research*, sv. 8., Nova Science Publishers, New York.

[105] SVENSSON L. E. O. (1995). Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method. *Penning- & Valutapolitik*, č. 3, s. 13–26.

[106] TEICHMANN, J., WÜTHRICH, M. V. (2016). Consistent Long-Term Yield Curve Prediction. *ASTIN Journal*, v recenzním řízení (předpoklad cca 2016), https://people.math.ethz.ch/ jteichma/index.php.

[107] TSAY, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series.* 3. vyd. Wiley.

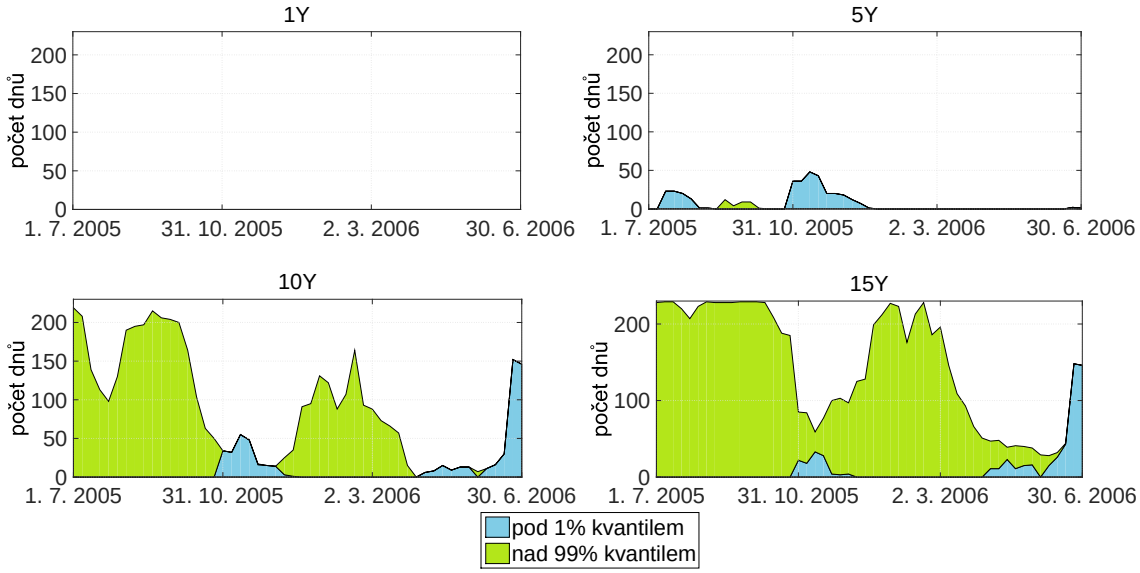
[108] VASICEK, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, sv. 5, č. 2, s. 177–188.

[109] VOJTEK, M. (2004). Calibration of Interest Rate Models - Transition Market Case. *CERGE-EI, Discussion Paper Series*, Discussion Paper č. 2004 - 119.

[110] WAGGONER, D. F. (1997). Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices. *Federal Reserve Bank of Atlanta*, Working Paper No. 97–10.
URL: http://ssrn.com/abstract=86789 nebo http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.86789

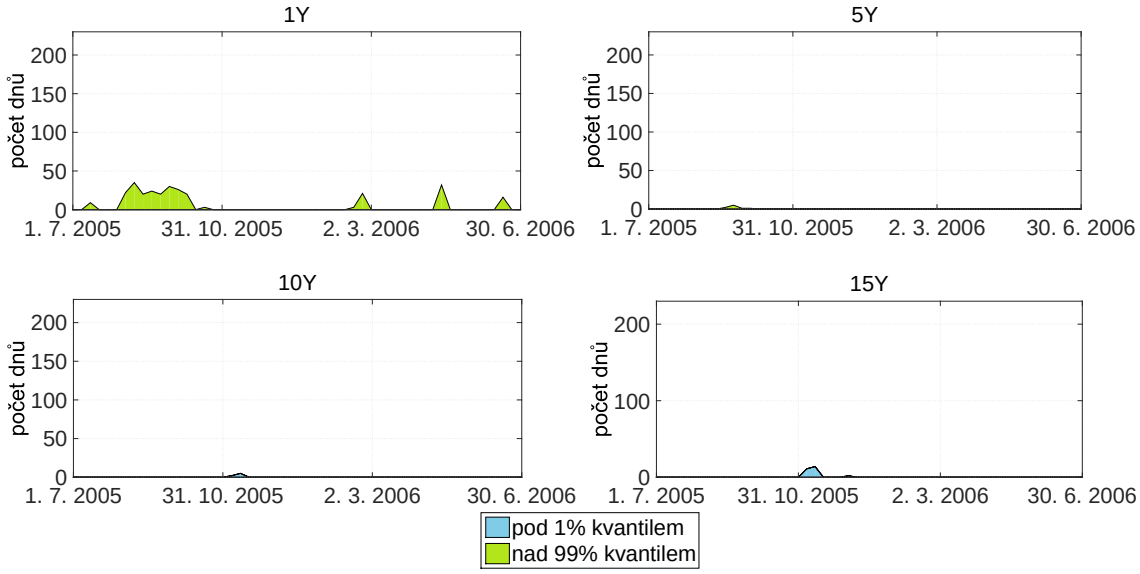
[111] WIENER, Z., POMPUSHKO, H. (2006). The Estimation of Nominal and Real Yield Curves from Government Bonds in Israel. *Monetary Department, Bank of Israel - Discussion Papers,* katalog č. 3111506003/5.

Příloha



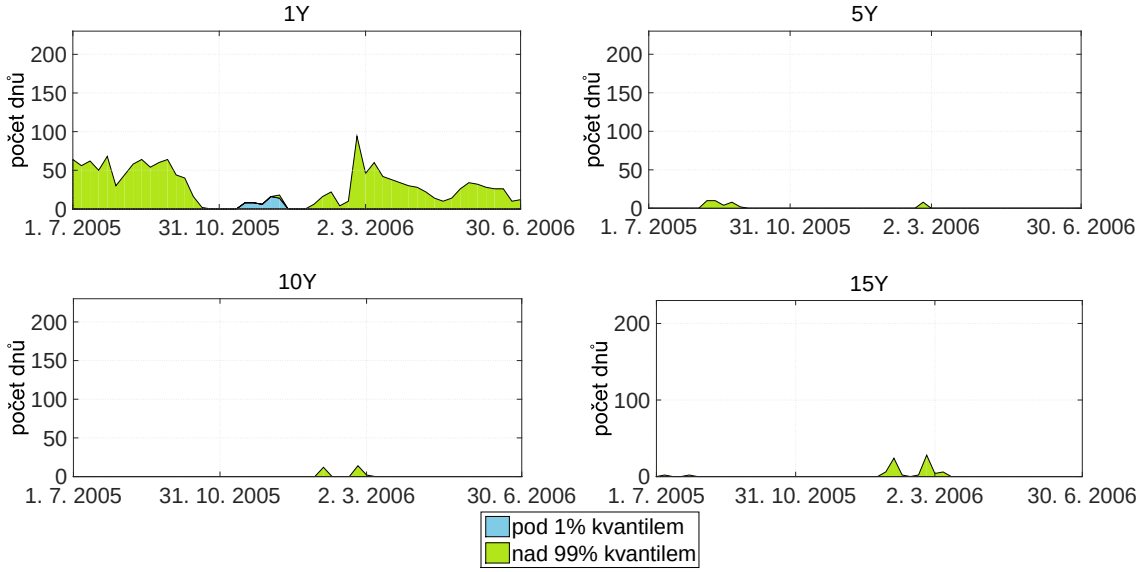
Obrázek 4.7: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model CIR v období před krizí

Zdroj: Vlastní výpočty



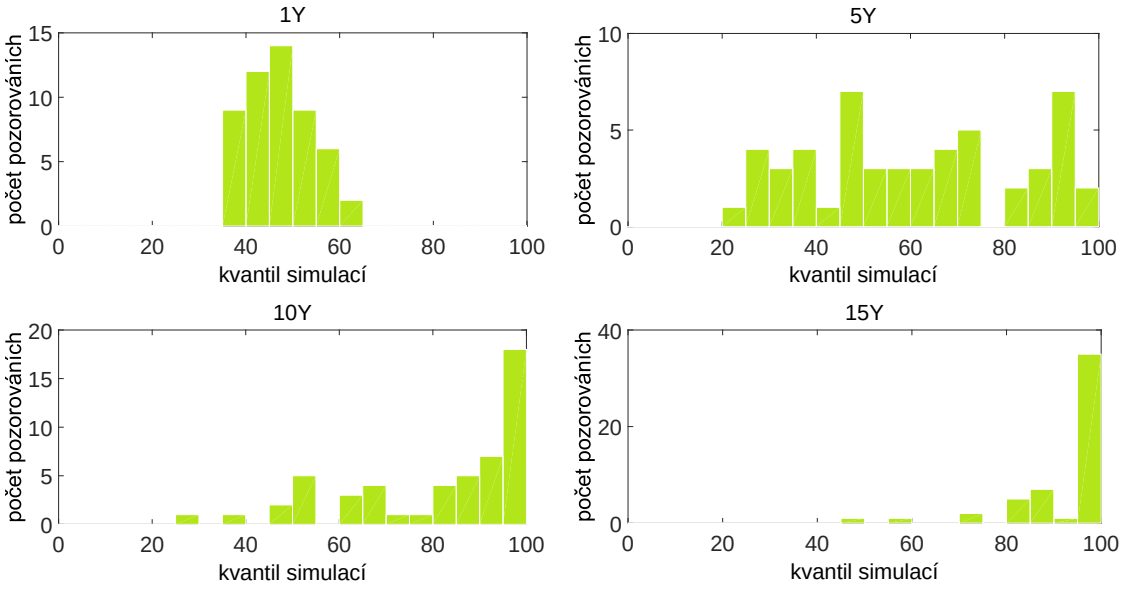
Obrázek 4.8: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model GP v období před krizí

Zdroj: Vlastní výpočty



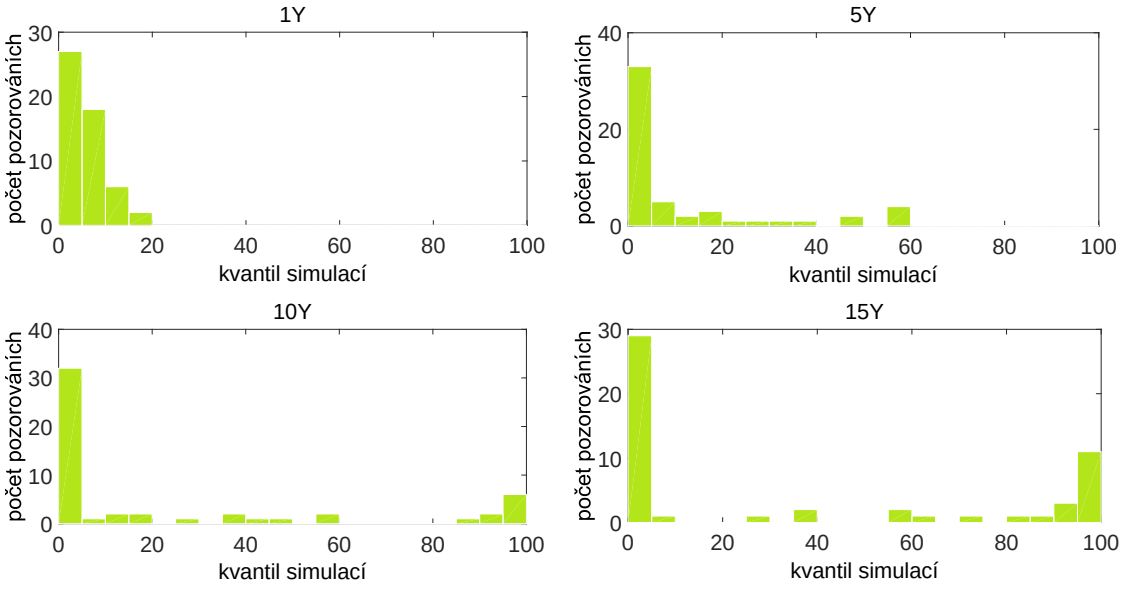
Obrázek 4.9: Vývoj počtu dní, kdy se skutečná sazba nacházela mimo pásmo 1% a 99% kvantilu simulací – model BGM v období před krizí

Zdroj: Vlastní výpočty



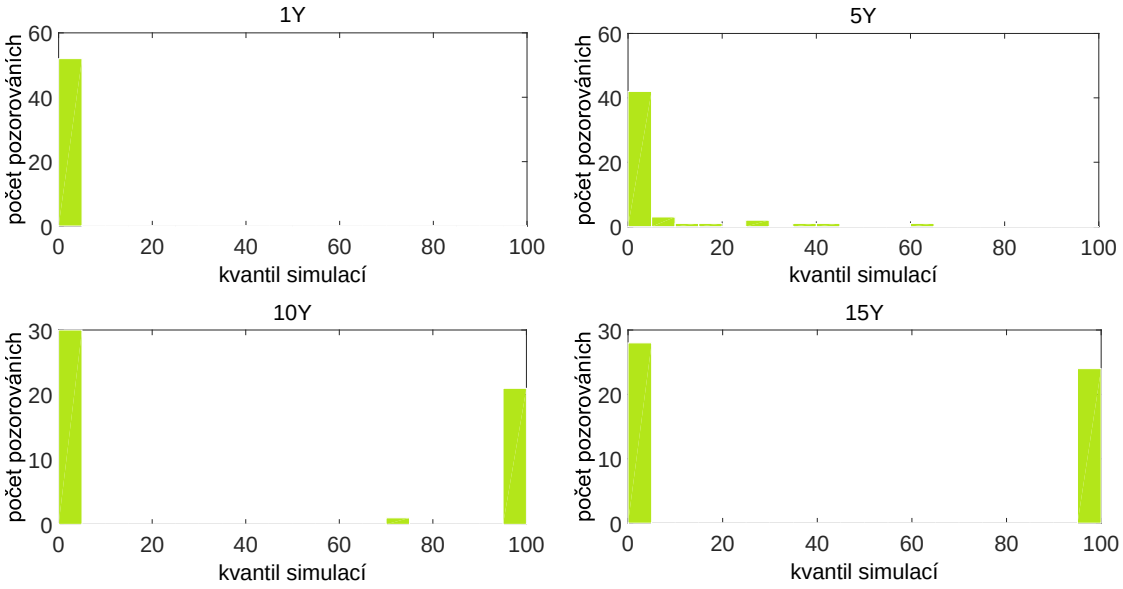
Obrázek 4.10: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model CIR v období před krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



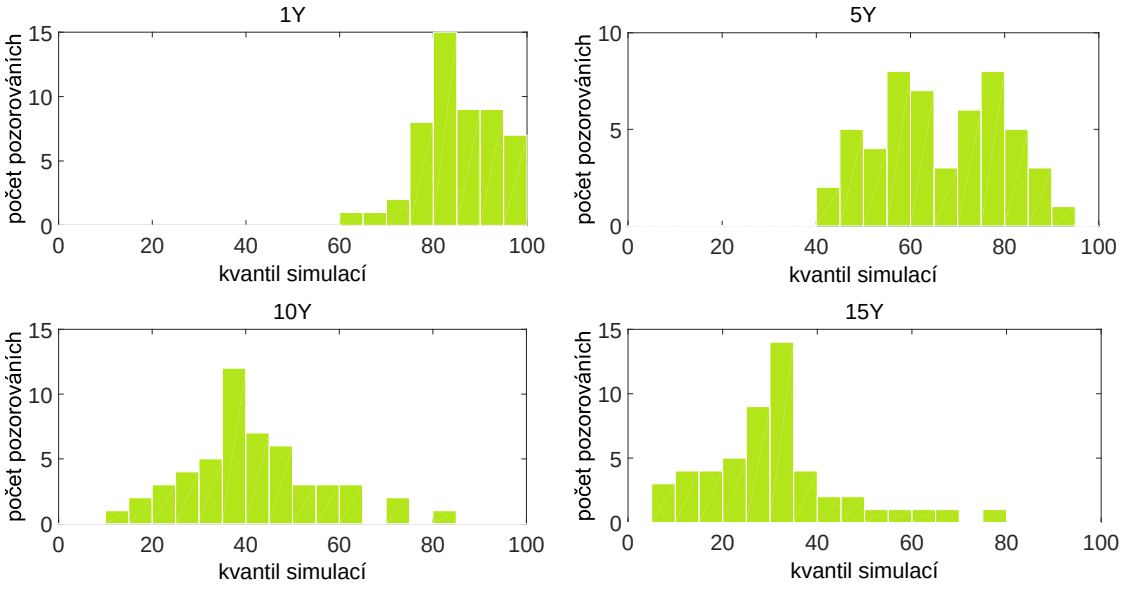
Obrázek 4.11: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model CIR v období finanční krize

Zdroj: Vlastní výpočty



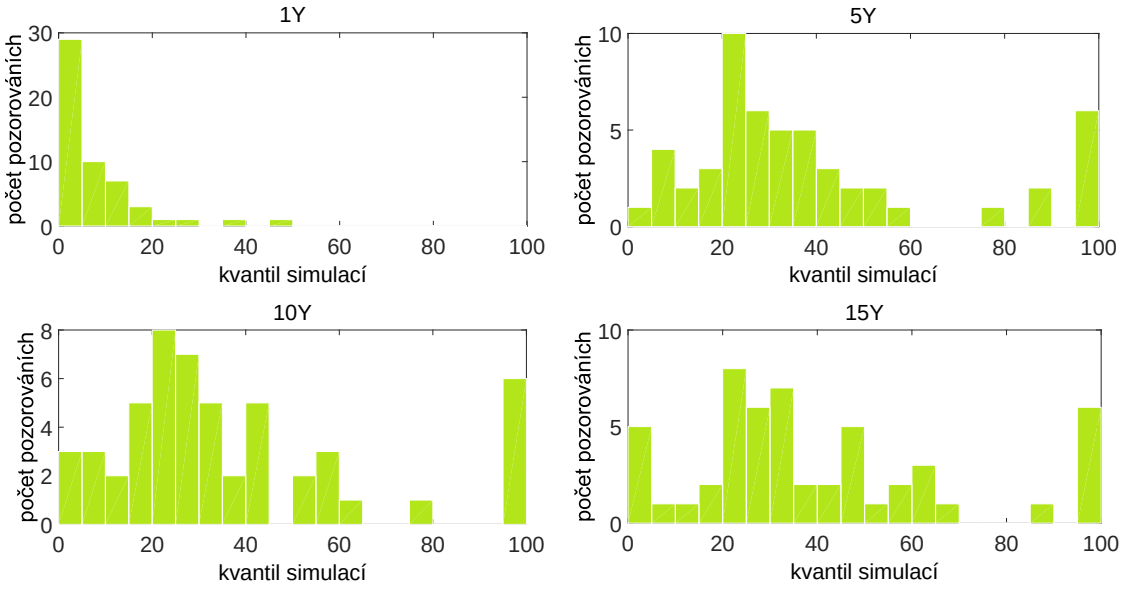
Obrázek 4.12: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model CIR v období po krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



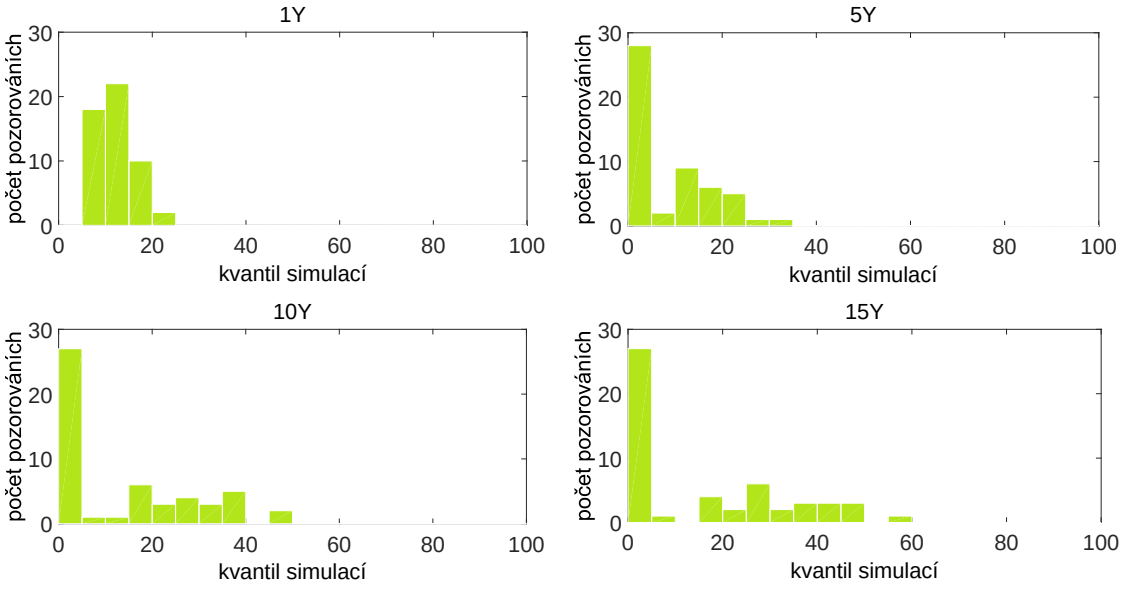
Obrázek 4.13: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model GP v období před krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



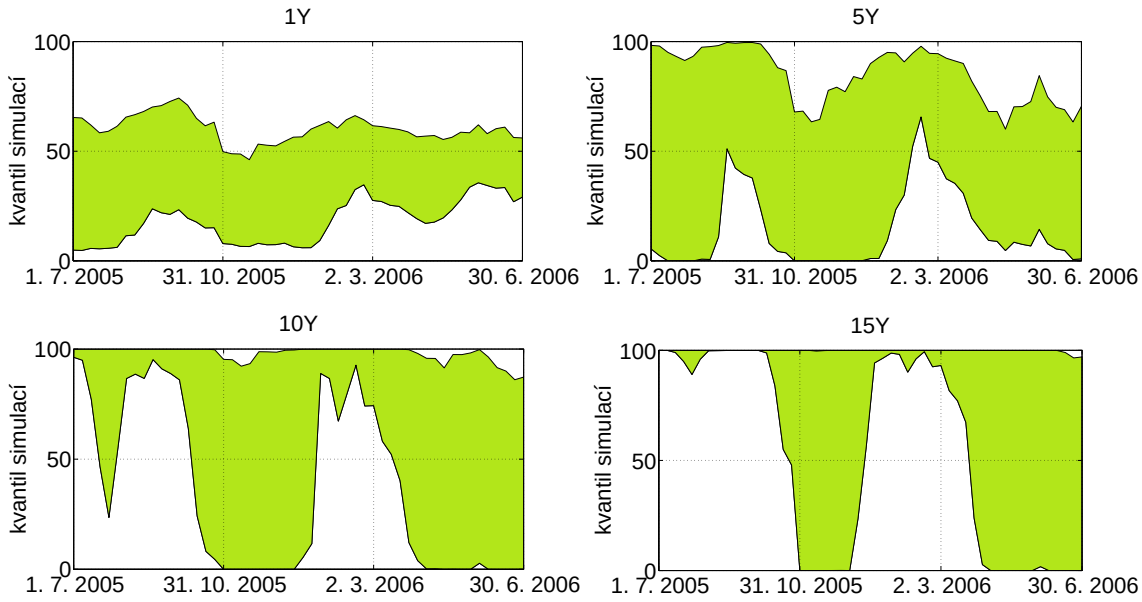
Obrázek 4.14: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model GP v období finanční krize

Zdroj: Vlastní výpočty



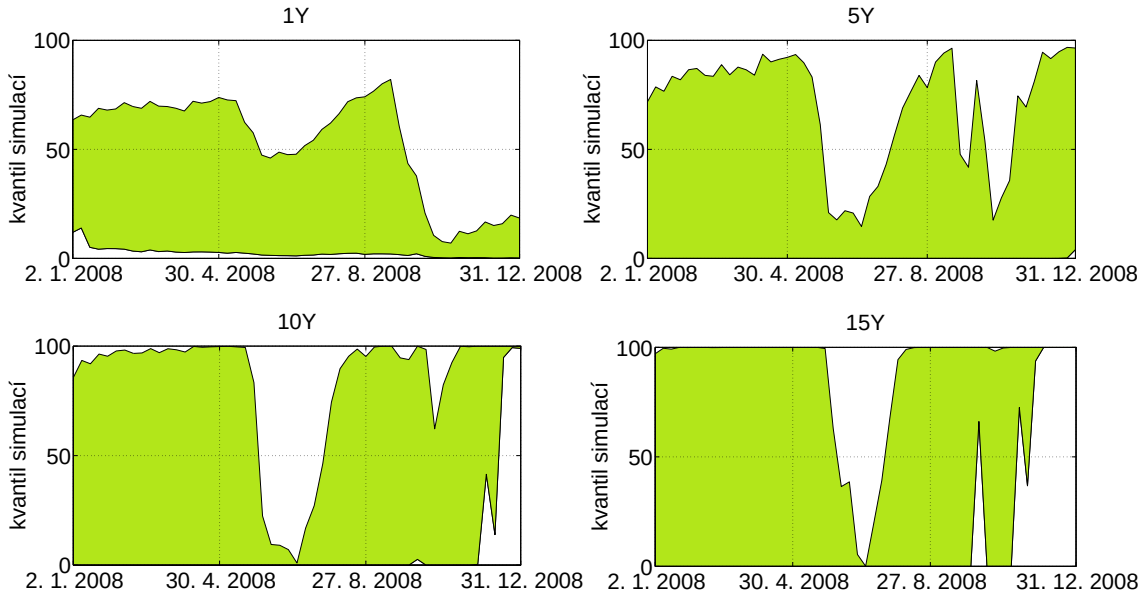
Obrázek 4.15: Četnost kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model GP v období po krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



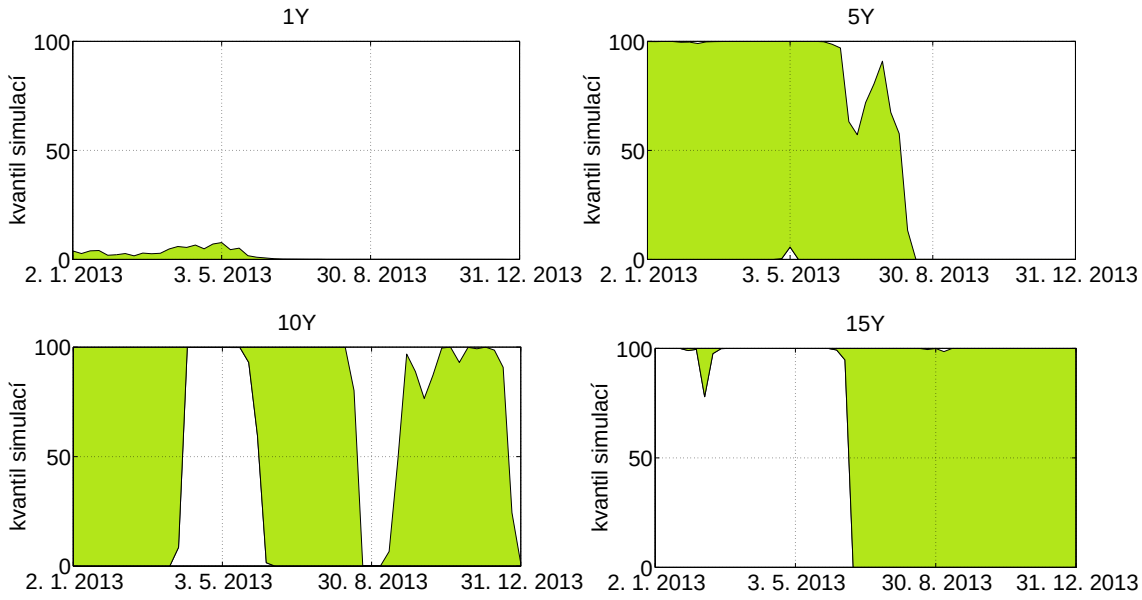
Obrázek 4.16: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model CIR v období před krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



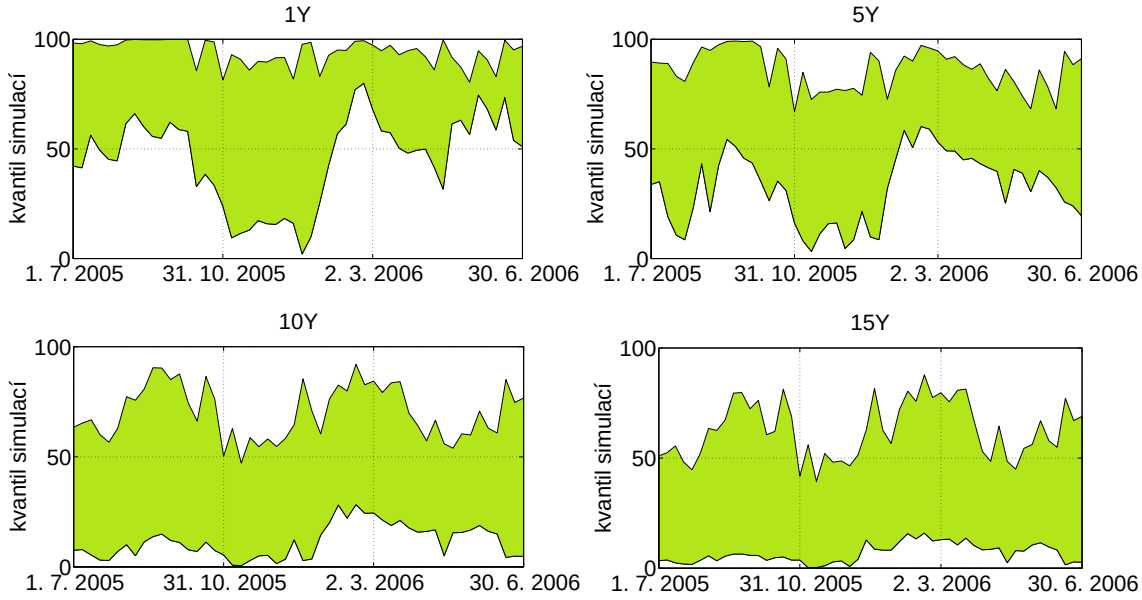
Obrázek 4.17: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model CIR v období finanční krize

Zdroj: Vlastní výpočty



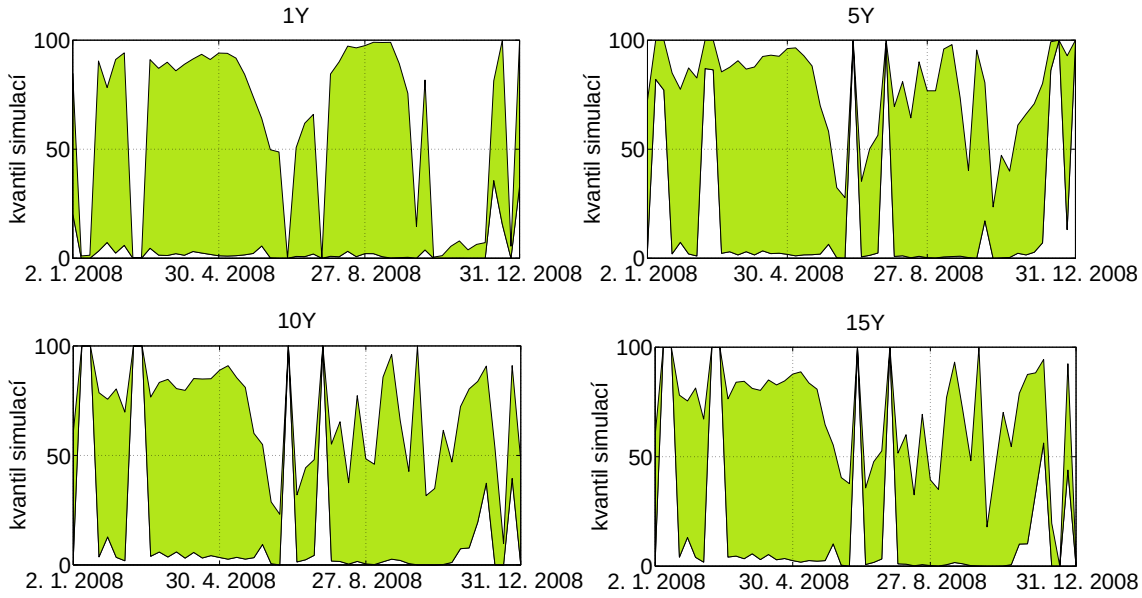
Obrázek 4.18: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model CIR v období po krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



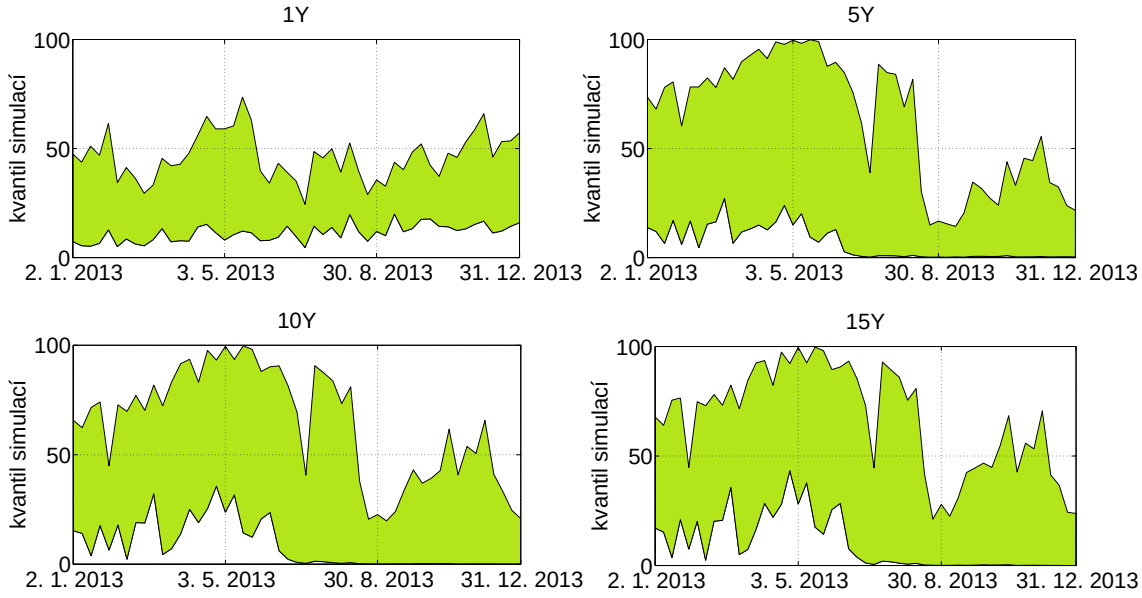
Obrázek 4.19: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model GP v období před krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



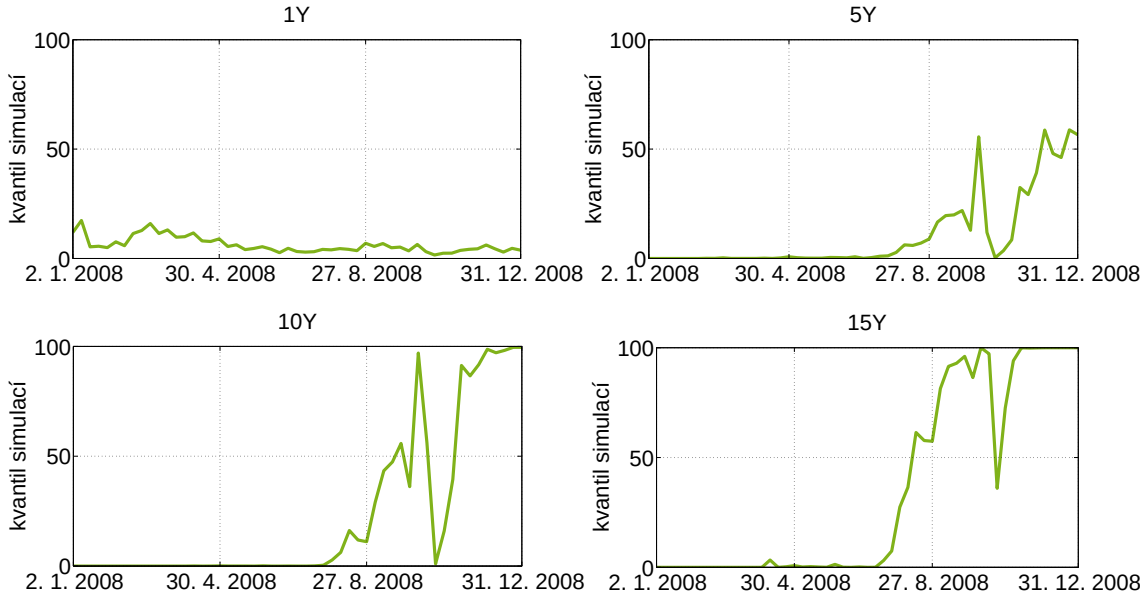
Obrázek 4.20: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model GP v období finanční krize

Zdroj: Vlastní výpočty



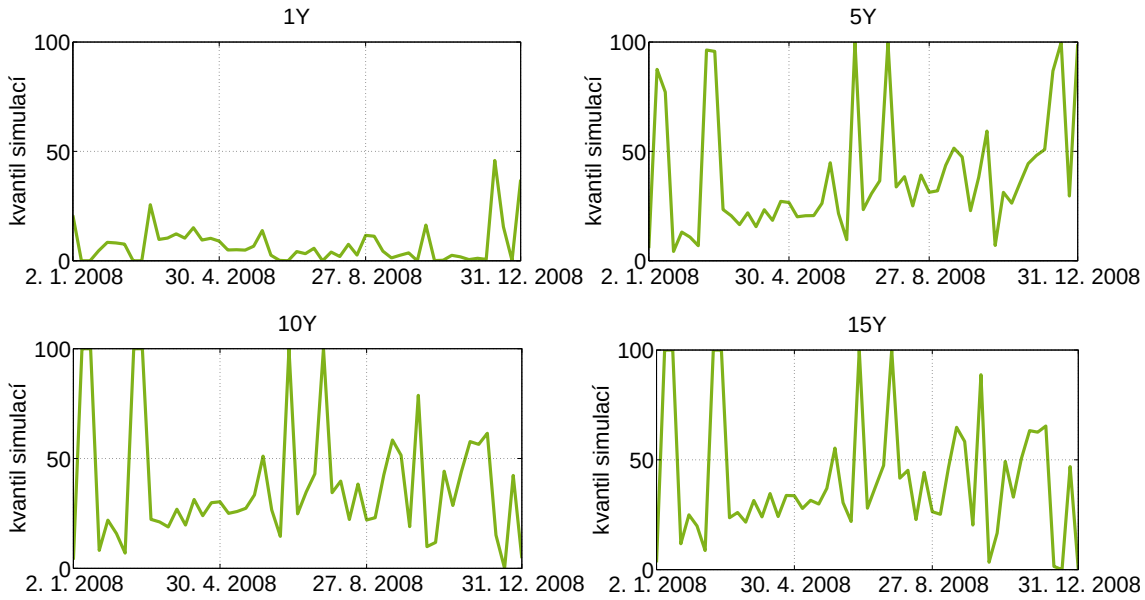
Obrázek 4.21: Vývoj rozpětí mezi maximálním a minimálním kvantilem simulací, jehož dosáhla skutečná sazba – model GP v období po krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



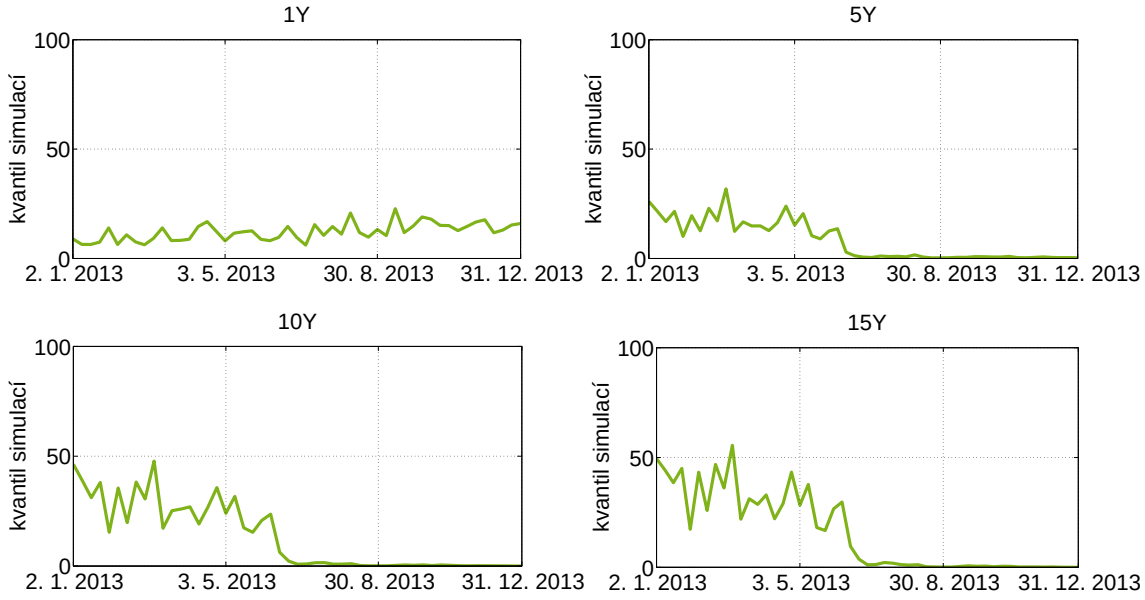
Obrázek 4.22: Časová řada kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model CIR v období finanční krize

Zdroj: Vlastní výpočty



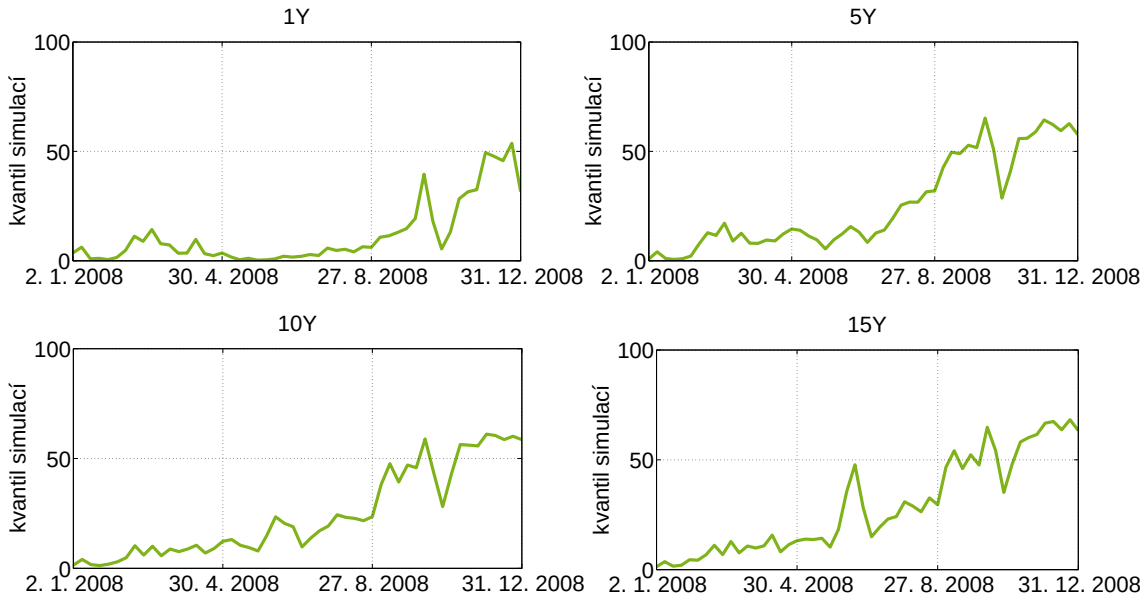
Obrázek 4.23: Časová řada kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model GP v období finanční krize

Zdroj: Vlastní výpočty



Obrázek 4.24: Časová řada kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model GP v období po krizi

Zdroj: Vlastní výpočty



Obrázek 4.25: Časová řada kvantilů simulací, kterých nabyla skutečná sazba na konci simulačního období – model BGM v období finanční krize

Zdroj: Vlastní výpočty