

Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta informatiky a statistiky

Studijní obor: Ekonometrie a operační výzkum



Analýza výkonnosti HZS ČR pomocí DEA modelů

Diplomová práce

Autor:

Karolína Milnerová

Vedoucí práce:

prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.

Praha 2017

Prohlašuji na svou čest, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a s použitím uvedené literatury.

.....

Karolína Milnerová
V Praze, 05. 01. 2017

Ráda bych na tomto místě poděkovala prof. Ing. Josefu Jablonskému, CSc. za vedení mé diplomové práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily. Dále pak Ing. Janu Zouharovi, Ph.D. za poskytnutí šablony pro psaní této diplomové práce a doc. Ing. Janu Fábrymu, Ph.D. za odbornou pomoc při programování modelů v MPL for Windows. Rovněž děkuji své rodině a přátelům, kteří mě celou dobu plně podporovali.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá tzv. DEA modely (Analýza obalu dat), což jsou modely pro měření vzájemné efektivnosti rozhodovacích jednotek (tzv. DMUs). První část se zaměřuje na základní DEA modely (CCR model, BCC model) a je rozšířena o nový CH-CCR model, který uvažuje, že proměnné (vstupy nebo výstupy) jsou často silně korelované. V druhé části je zahrnut popis tzv. síťových modelů, který je následně aplikován na data HZS ČR (Hasičského záchranného sboru České republiky). Pomocí těchto modelů je tedy řešena efektivnost HZS ČR napříč kraji.

Klíčová slova:

Analýza obalu dat, DEA model, Efektivnost, HZS ČR, Síťový model

JEL klasifikace:

B23, C67, H51, H75

Abstract

This thesis deals with DEA models (Data envelopment analysis), which are models for measuring the efficiency of peer decision making units (DMUs). First part focus on basic DEA models (CCR model, BCC model) and this part is extended by new CH-CCR model, which considering that the variables (inputs or outputs) are usually strongly correlated. In second part is included description of network-based models, which are afterwards applicated on data of FRS CR (Fire Rescue Service of the Czech Republic). Using this models is solved efficiency of FRS CR through the regions.

Keywords:

Data enveloped analysis, DEA model, Efficiency, FRS CR, network-based model

JEL classification:

B23, C67, H51, H75

Title translation:

Analysis of Fire Rescue Service of the Czech Republic effectiveness with DEA models

Obsah

Úvod	1
1. Základní pojmy	3
2. DEA modely	7
2.1 CCR model	7
2.2 BCC model	9
2.3 CH-CCR model	10
2.4 Uspořádání efektivních jednotek	13
2.4.1 AP model	14
2.4.2 MAJ model	15
2.4.3 Křížová efektivnost	15
2.5 Porovnání modelů	16
2.6 MPL - modely	20
2.6.1 CCR model	20
2.6.2 BCC model	21
2.6.3 CH-CCR model	22
2.6.4 AP model	23
2.6.5 MAJ model	24
3. Síťové DEA modely	25
3.1 DEA model Omid & Zegordi	27
3.2 DEA model Li & Chen & Liang & Xie	29
3.3 Uspořádání efektivních jednotek	33
4. Praktická část	34
4.1 O HZS ČR	34
4.2 Program MPL	37
4.3 Data	38
4.4 Výpočet	41
4.4.1 CCR model	43
4.4.2 BCC model	44
4.4.3 Omid & Zegordi model	45

4.4.4	Li & Chen & Liang & Xie model	46
4.4.5	Křížová efektivnost	48
4.4.6	Souhrnné výsledky	50
4.5	MPL - modely	51
4.5.1	CCR model	51
4.5.2	BCC model	53
4.5.3	Omid & Zegordi model	55
4.5.4	Li & Chen & Liang & Xie model	56
Závěr		59
Literatura		61

Úvod

Hasičský záchranný sbor České republiky (dále jen HZS ČR) funguje pod tímto názvem od roku 1995. Nicméně počátky hasičského sboru sahají až do dob Rakousko-Uherska, odkud byly převzaty předpisy pro dobrovolné hasičské sbory v období Československé republiky. V dnešní době je platný Zákon o požární ochraně vydaný v roce 1985, který již prošel několika novelizacemi. Tento Zákon mimo jiné také stanovuje povinnosti fyzických osob a firem v oblasti požární ochrany a stanovuje potřebné kompetence pro hasiče v dohlížení nad dodržováním těchto povinností. Nová právní úprava, která je platná od roku 2001, přinesla do světa hasičů nové povinnosti. Hasiči obdrželi novou oblast působení a sice oblast civilní ochrany, kam spadá například hrozba terorismu, průmyslové havárie nebo živelné katastrofy. Jak je vidět, HZS ČR je hlavním koordinátorem a jakousi páteří integrovaného záchranného systému, který v případě krize slučuje všechny záchranné složky¹.

Organizační struktura HZS ČR je tvořena generálním ředitelstvím, které je součástí Ministerstva vnitra. Dále do organizační struktury spadá 14 hasičských záchranných sborů v krajích, Střední odborná škola požární ochrany a Vyšší odborná škola požární ochrany a Záchranný útvar HZS ČR.

Ve spolupráci s HZS ČR u některých zásahů asistují také jednotky sboru dobrovolných hasičů. Sbory dobrovolných hasičů jako takové nemají možnost se zásahů účastnit, jsou tvořeny pouze pro výpomoc obcím na bázi dobrovolnosti a mohou se účastnit hasičských soutěží. Pokud chtějí spolupracovat s HZS ČR, je nutné vytvořit tzv. Jednotky sboru dobrovolných hasičů (dále jen JSDH), jehož členové jsou odborně proškolení a je jejich povinností se výjezdů účastnit. Zajímavostí je, že JSDH nemohou přímo hasit požáry, avšak jejich úkolem je následně například hlídat místo po požáru, aby nedošlo k opětovnému vzplanutí.

Vzhledem k tomu, že HZS ČR je státní organizace, je jeho činnost financována ze státního rozpočtu. Z tohoto důvodu je tato činnost transparentní a informace jsou dostupné na oficiálních stránkách HZS ČR, kde je možné například nahlédnout do každoročních statistických ročenek HZS ČR. Tyto statistické ročenky spolu s informacemi z oficiálních stránek Českého statistického úřadu ČR (dále jen ČSÚ), jsou zdrojem dat pro tuto

¹více viz (*Oficiální stránky Hasičského záchranného sboru České republiky/historie*)

diplomovou práci.

Hlavní myšlenkou této práce je tedy zjištění efektivnosti HZS ČR v jednotlivých krajích a její porovnání. Pro analýzu efektivnosti, např. výroby, marketingové reklamy, bankovních produktů apod., se používají tzv. DEA modely².

V první části diplomové práce jsou vysvětleny základní DEA modely - jejich původ, hlavní myšlenka a matematické modely. DEA modely pracují s tzv. Decision Making Units (jinak také DMUs), kdy hlavním předpokladem je, že takováto DMU na základě svých vstupů (zaměstnanců, financí, času, apod.) produkuje výstupy (produkty, tržby, zákazníci, apod.). Pod pojmem DMU si lze představit například hasičský záchranný sbor a v případě, že je těchto sborů více, například v rámci krajů, je možné pomocí DEA modelů porovnávat jejich efektivnost (ta je přitom chápána jako poměr výstupů a vstupů). Někdy je DMU považována za tzv. black box, protože zde probíhá blíže nespecifikovaný proces.

Dále jsou tyto základní modely obohaceny o nový přístup (Ji et al., 2015), který je založen na předpokladu, že vstupy nebo výstupy jsou většinou ovlivněny velmi silnou kolinearitou. Tudíž vznikl nový model, využívající tzv. Choquetovy integrály, díky nimž je tento negativní jev zahrnut do výpočtů a tím ve své podstatě vyřešen.

Následně jsou v této diplomové práci zahrnuty tzv. síťové DEA modely (resp. "dvoustupňové DEA modely"). Tyto modely jsou používány v situacích, kdy jsou vstupy transformovány na výstupy a některé z těchto výstupů jsou dále použity jako vstupy pro další transformaci³.

Pro výpočty je použit program MPL, který je využíván při výuce oborových předmětů a zároveň je volně dostupný studentům.

²DEA = Data Envelopment Analysis

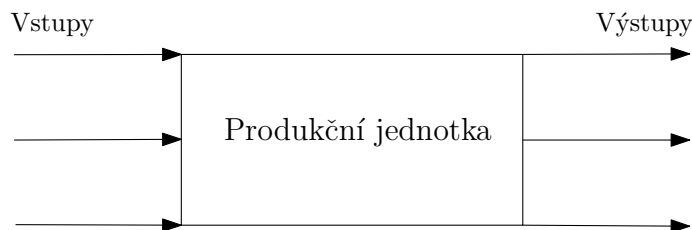
³Více viz kapitola Síťové DEA modely.

1. Základní pojmy

V této kapitole jsou vysvětleny základní pojmy, které se vyskytují v diplomové práci. Jsou seřazeny dle abecedy pro lepší přehlednost.

DEA model: DEA model (jinak také Data Envelopment Analysis nebo Analýza obalu dat) je model, který se používá pro zjištění efektivnosti produkčních jednotek. Jde ve své podstatě o odhad produkční funkce pomocí lineárního programování.

DMU: DMU, jinak také Decision Making Unit nebo produkční jednotka, je taková jednotka, která je homogenní a poskytuje určité výstupy (např. tržby, počet zákazníků, ...) na základě spotřeby daných vstupů (materiál, náklady na reklamu, ...). Zpravidla se jedná o větší počet vstupů i výstupů a z tohoto důvodu by se DEA modely daly zařadit mezi metody vícekritériálního rozhodování, nicméně jsou založeny na odlišném přístupu. Příkladem produkční jednotky může být banka, výrobní linka, apod.. Graficky je produkční jednotka znázorněna na obr. 1.1:

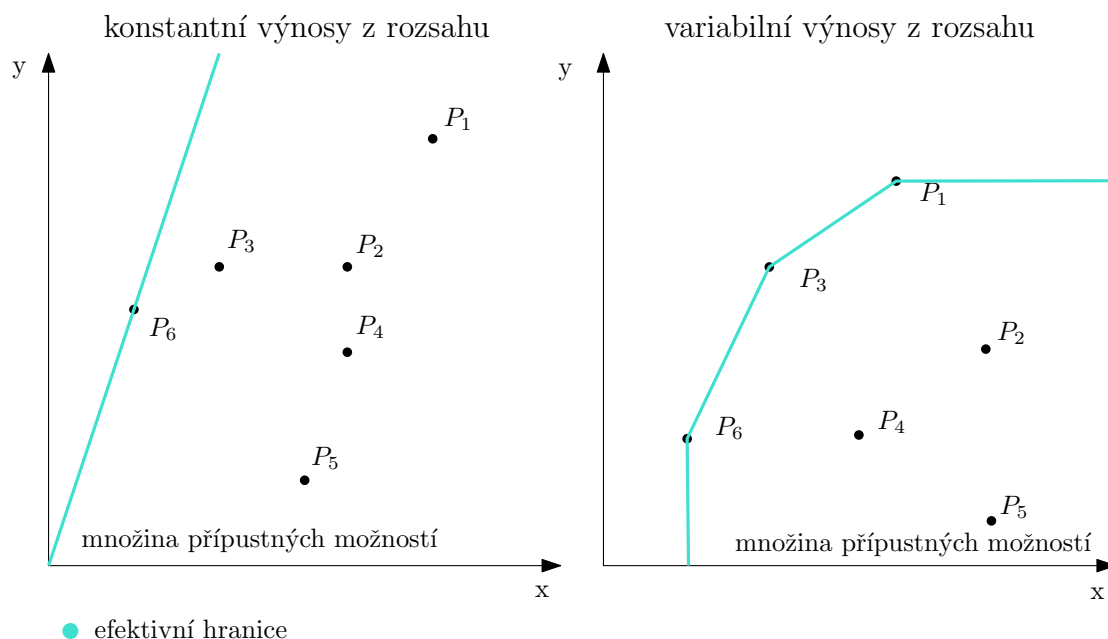


Obr. 1.1: Transformační proces

Efektivnost (Fiala, 2013): Efektivnost je běžně měřená podílem výstupu na vstupu. Je zcela zřejmé, že u vstupů existuje snaha o minimalizaci (za předpokladu zachování stejné úrovně výstupů) a u výstupů je tendence maximalizace (za předpokladu zachování stejné úrovně vstupů):

$$\frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}$$

Jednotky, které dosahují nejvyšších hodnot budou efektivní. Grafickým spojením těchto jednotek vznikne tzv. **efektivní hranice**. Všechny jednotky, ať již ležící na efektivní hranici (pak jsou efektivní) a nebo pod touto hranicí (pak jsou neefektivní), tvoří tzv. **množinu přípustných možností** (viz obr. 1.2):



Obr. 1.2: Množina produkčních možností

Z grafu pro jeden vstup a jeden výstup je tedy možné vyčíst, jakým způsobem je možné neefektivní jednotku proměnit na efektivní. U konstantních výnosů z rozsahu lze z jednotky P_3 udělat efektivní jednotku za předpokladu zvýšení výstupů až na hranici produkčních možností nebo naopak snížení vstupů na tuto hranici, za jinak nezměněných okolností. Stejně se pak postupuje i u variabilních výnosů z rozsahu, rozdíl je pouze ve tvaru hranice produkčních možností.

Kolinearita: Jinak také rovnoběžnost či vektor ležící na totožné přímce. V této diplomové práci je spojena s tzv. Choquetovými integrály, kdy je předpokladem, že by mohla existovat mezi vstupy nebo výstupy. Znamenalo by to tedy, že v případě kooperace či použití vstupů dohromady, dojde k jiné produkci výstupů.

Matematické modelování(Lagová a Jablonský, 2014): Je základní nástroj operačního výzkumu. Aplikace operačního výzkumu prochází několika fázemi:

- Definice problému v reálném systému.
- Formulace ekonomického modelu - ten musí být zjednodušený (reálný systém je příliš složitý) a zároveň musí obsahovat vše podstatné.
- Formulace matematického modelu - tvořen ze slovního ekonomického modelu pomocí: lineární či nelineární funkce n proměnných (cíl analýzy), proměnných (procesy), lineárních či nelineárních rovnic či nerovnic (činitelé) a neřiditelných parametrů (vazby mezi procesy, činiteli a cílem).
- Řešení matematického modelu.

- Interpretace a verifikace výsledků - jeden z nejdůležitějších pilířů, je kladen důraz na to, aby byly výsledky správně interpretovány a zároveň zpětně verifikovány jejich hodnoty.
- Implementace řešení v reálném systému.

Matematické programování(Lagová a Jablonský, 2014): Je odvětví operačního výzkumu. Cílem úlohy matematického programování je nalezení extrému daného kritéria na množině variant, která je definována pomocí soustavy omezujících podmínek ve tvaru lineárních či nelineárních rovnic či nerovnic. V případě, že je kritériální funkce lineární a i všechny omezující podmínky jsou lineární, pak mluvíme o **lineárním programování**, v opačném případě se jedná o **nelineární programování**.

Model orientovaný na vstupy: Model orientovaný na vstupy je takový model, který se snaží minimalizovat vstupy při zachování stejné úrovně výstupů.

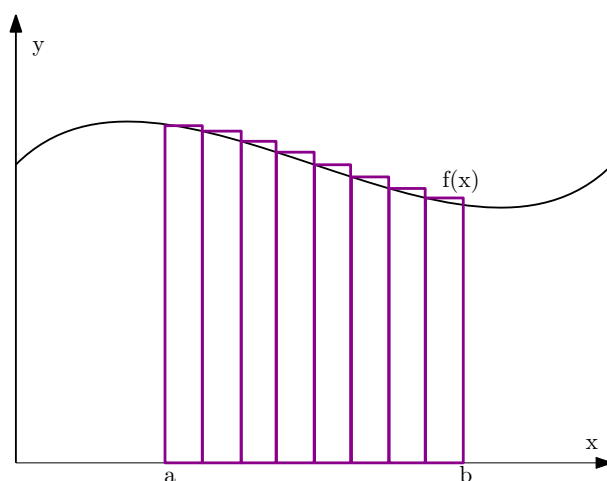
Model orientovaný na výstupy: Model orientovaný na výstupy je takový model, u kterého je snahou maximalizovat výstupy za předpokladu stejné úrovně vstupů.

Monotónní funkce: Monotonie je vlastnost, označující, zda je funkce v bodě či na daném intervalu monotónní, tzn. zda je konstantní, rostoucí, klesající nebo nerostoucí či neklesající.

Produkční funkce: Vyjadřuje vztah mezi množstvím výstupů (výroby) a vstupů (spotřeba na výrobu).

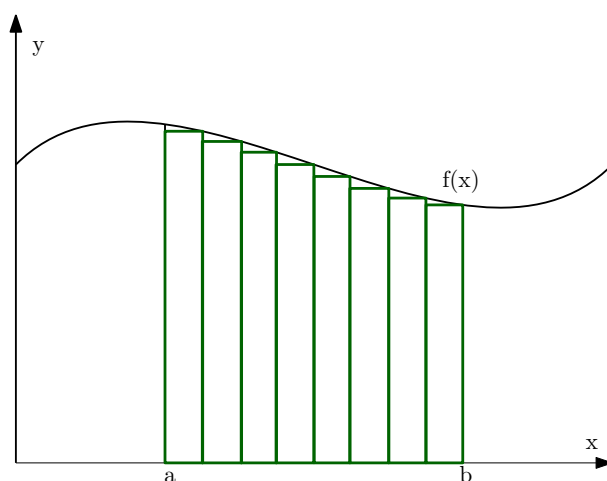
Relativní míra efektivnosti: Míra efektivnosti je v DEA modelech pouze relativní a to z toho důvodu, že její hodnota závisí na všech ostatních jednotkách v množině. Pokud se změní počet jednotek v množině nebo se změní míra jiné jednotky v množině, pak se v důsledku se mohou změnit i míry všech ostatních jednotek v množině.

Riemannův integrál: Riemannův integrál je považován za jeden z nejjednodušších integrálů. Základní myšlenka je založena na výpočtu obsahů obdélníků, kterými lze vyplnit křivku nejen pod osou $f(x)$, ale i nad ní a díky těmto obsahům je možné odhadnout velikost plochy pod křivkou. Samozřejmě, že čím užší se budou používat obdélníky, tím přesnější bude následně odhad velikosti plochy. Metoda je naznačena na obrázcích 1.3 a 1.4:



Obr. 1.3: Riemannův integrál - horní část

Velikost plochy pod křivkou je pak tedy někde mezi obsahem spočteným z obr. 1.3 a obr. 1.4.



Obr. 1.4: Riemannův integrál - dolní část

Výnosy z rozsahu: Vyjadřují proporcionalní (úměrnou) reakci výstupů na zvýšení vstupů. Dělíme je na:

- Konstantní výnosy z rozsahu - stejné navýšení vstupů má za následek stejnou hodnotu navýšení výstupu.
- Klesající výnosy z rozsahu - navýšení vstupů o určitou hodnotu má za následek navýšení výstupů o hodnotu nižší.
- Rostoucí výnosy z rozsahu - navýšení vstupů o určitou hodnotu má za následek navýšení výstupů o hodnotu vyšší.

2. DEA modely

V této kapitole budou uvedeny základní DEA modely, které se používají pro jednostupňové produkce. Kapitola je doplněna o nový přístup (Ji et al., 2015), který byl nedávno publikován a vychází z myšlenky, že vstupy či výstupy mohou být navzájem korelované.

2.1 CCR model

DEA modely se poprvé objevily již v roce 1978, kdy byl publikovaný článek (Charnes et al., 1978). Jejich model pro hodnocení efektivnosti produkčních jednotek se podle autorů označuje často jako CCR model. Vychází ze základní myšlenky výpočtu efektivnosti¹ a předpokladem jsou konstantní výnosy z rozsahu. Vzhledem k tomu, že se používá více vstupů a výstupů, počítá se tzv. relativní efektivní míra:

$$\text{Efektivita} = \frac{\text{vážená suma výstupů}}{\text{vážená suma vstupů}}$$

Matematický model:

Zavedení a vysvětlení proměnných:

DMU_j ... produkční jednotka pro $j = 1, 2, \dots, n$,
 x_{ij} ... vstupy, kde $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$,
 y_{kj} ... výstupy, kde $k = 1, 2, \dots, r$ a $j = 1, 2, \dots, n$,
 v_i ... váhy pro vstupy, kde $i = 1, 2, \dots, m$,
 u_k ... váhy pro výstupy, kde $k = 1, 2, \dots, r$,
 ϵ ... je nekonečně malá konstanta, která zajišťuje, že váhy budou kladné.

Pak model pro efektivnost produkční jednotky lze zapsat jako:

$$\text{MAX} : E(DMU_j) = \frac{\sum_{k=1}^r u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}, \quad (2.1)$$

Za podmíněk:

$$\frac{\sum_{k=1}^r u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

¹viz kapitola 1 Základní pojmy

$$u_k \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r, \quad (2.3)$$

$$v_i \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.4)$$

kde $E(DMU_j)$ je právě hledaná efektivita j -té produkční jednotky. Vzhledem k tomu, že účelová funkce je lomená, nejedná se o lineární programování. Nicméně existuje tzv. Charnes-Cooperova transformace, pomocí níž lze úlohu jednoduše zlinearizovat. Tato transformace má dva přístupy, které lze použít. Pomocí prvního lze dosáhnout modelu orientovaného na vstupy a druhý dospěje k modelu orientovanému na výstupy.

První přístup tedy maximalizuje čitatele účelové funkce (2.1) za podmínky, že jmenovatel je roven 1:

$$\text{MAX} : E(DMU_j) = \sum_{k=1}^r u_k y_{kj}, \quad (2.5)$$

Za podmínek:

$$\sum_{k=1}^r u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1, \quad (2.7)$$

$$u_k \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r, \quad (2.8)$$

$$v_i \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.9)$$

Optimální hodnotou tohoto modelu bude $E^*(DMU_j) \leq 1$, to znamená že jednotky, jejichž hodnota je rovna 1 jsou efektivní a tudíž leží na efektivní hranici a ostatní leží pod touto hranicí.

Druhý přístup naopak minimalizuje jmenovatele účelové funkce (2.1) za podmínky, že čítecitel je roven 1:

$$\text{MIN} : E'(DMU_j) = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}, \quad (2.10)$$

Za podmínek:

$$\sum_{k=1}^r u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=1}^r u_k y_{kj} = 1, \quad (2.12)$$

$$u_k \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r, \quad (2.13)$$

$$v_i \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.14)$$

Optimálním řešením je $E^*(DMU_j) \geq 1$, tudíž jednotky ohodnocené jako 1 jsou efektivní a leží na efektivní hranici a jednotky větší než jedna jsou neefektivní a tudíž leží pod touto hranicí.

2.2 BCC model

V roce 1984 vyšel článek (Banker et al., 1984) s modifikací CCR modelu. Předpoklad konstantních výnosů z rozsahu se mění na předpoklad variabilních výnosů z rozsahu a to jak klesajících, rostoucích, tak i konstantních. Specifikem u tohoto modelu je konvexní obal dat, což vlastně znamená, že mezi efektivní jednotky je zahrnuto mnohem více produkčních jednotek.

Matematický model:

Model orientovaný na vstupy je obohacen o konstantní proměnnou μ (respektive ν), která je přiřazená podmínce konvexnosti z duální úlohy². Ostatní proměnné zůstávají neměnné.

$$\text{MAX} : (DMU_j) = \sum_{k=1}^r u_k y_{kj} + \mu, \quad (2.15)$$

Za podmínek:

$$\sum_{k=1}^r u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \mu \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1, \quad (2.17)$$

$$u_k \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r, \quad (2.18)$$

$$v_i \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.19)$$

$$\mu - \text{libovolné}, \quad (2.20)$$

Optimální hodnota účelové funkce $E^*(DMU_j)$ je rovna jedné pro efektivní jednotky, pro neefektivní je pak menší než jedna. Model orientovaný na výstupy je vytvořen obdobně z CCR modelu.

²Podmínka konvexnosti v duální úloze je vyjádřena jako: $e^T \lambda = 1$. Více viz (Jablonský a Dlouhý, 2015).

$$\text{MIN} : E'(DMU_j) = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \nu, \quad (2.21)$$

Za podmíněk:

$$\sum_{k=1}^r u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \nu \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.22)$$

$$\sum_{k=1}^r u_k y_{kj} = 1, \quad (2.23)$$

$$u_k \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r, \quad (2.24)$$

$$v_i \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.25)$$

$$\nu - \text{libovolné} \quad (2.26)$$

Optimální hodnota účelové funkce $E'(DMU_j)$ je rovna jedné pro efektivní jednotky, pro neefektivní je pak větší než jedna a udává míru navýšení těchto výstupů pro dosažení efektivní hranice.

2.3 CH-CCR model

Tento model byl publikován v článku (Ji et al., 2015). Hlavní myšlenkou je fakt, že proměnné používané v DEA modelech (vstupy i výstupy) mohou být velmi silně korelovány, což ovlivňuje výslednou efektivitu produkčních jednotek. Aby byla korelace brána v úvahu při výpočtu, jsou v modelu používány tzv. Choquetovy integrály. CH-CCR model je modifikací klasického CCR modelu.

Matematický model:

Zavedení a vysvětlení proměnných:

$E(DMU_j)$... efektivita j -té produkční jednotky pro $j = 1, 2, \dots, n$,
 x_{ij} ... i -tý vstup v j -té produkční jednotce, množina vstupů je $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$,
 y_{kj} ... k -tý výstup z j -té produkční jednotky, množina výstupů je $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$,
 $g_j(y_k)$... hodnota, kterou j -tá produkční jednotka získá z výstupu y_k ,
 $f_j(x_i)$... hodnota, kterou j -tá produkční jednotka získá z vstupu x_i ,
 ω ... kladná monotóní funkce, která substituuje $t * v_i$,
 λ ... kladná monotóní funkce, která substituuje $t * u_k$,

$t \dots$ je zlomek, který je použit pro transformaci nelineárního modelu na lineární:

$$\frac{1}{\int f_0 du_k}, \quad (2.27)$$

$v_i \dots$ váha pro vstupy x_i , kde $v_i(A)$ reprezentuje váhu pro $A \subset X$,
 $u_k \dots$ váha pro výstupy y_k , kde $u_k(C)$ reprezentuje váhu pro $C \subset Y$,

CH-CCR matematický model je zobrazen níže:

$$\text{MAX} : E(DMU_j) = \int g_0 d\omega, \quad (2.28)$$

Za podmíněk:

$$\int g_j d\omega - \int f_j d\lambda \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.29)$$

$$\int f_0 d\lambda = 1, \quad (2.30)$$

$$0 \leq \omega(A) \leq \omega(B), \text{ pro } A \subset B, \text{ kde } A, B \in R(Y), \quad (2.31)$$

$$0 \leq \lambda(C) \leq \lambda(D), \text{ pro } C \subset D, \text{ kde } C, D \in R(X), \quad (2.32)$$

Všechny integrály uvedené v tomto modelu jsou speciální tím, že se jedná o Choquetovy integrály, které jsou vysvětleny níže.

Tento model je tedy vhodný pro lineární programování v případě, že se jedná o jednoduchý problém (málo produkčních jednotek, vstupů i výstupů). Pokud by bylo třeba řešit složitější problémy, pak je vhodnější použít rozšířený model, který ovšem není součástí této diplomové práce³.

Choquetův integrál

Autorem tohoto integrálu je významný matematik profesor Gustave Choquet. První myšlenka sahá až do roku 1953. Choquetův integrál lze definovat takto (Ji et al., 2015):

Definice 1: Necht míra efektivnosti μ definovaná na konečné množině $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je množina funkcí $\mu : P(X) \rightarrow [0, +\infty]$ splňující $\mu(\emptyset) = 0$ (kde $P(X)$ označuje mocninu množiny X), μ je nazýváno monotónní míra, pokud platí $\mu(\phi) = 0$ a $\mu(E) \leq \mu(F)$ pro $E \subset F$, kde E, F jsou jakékoliv množiny v $P(X)$.

Definice 2: Míra efektivnosti je regulární, jestliže $\mu(X) = 1$.

Definice 3: Označená míra efektivnosti μ definovaná na množině X je množina funkcí $\mu : P(X) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ uspokojující $\mu(\emptyset) = 0$.

³Více viz (Ji et al., 2015).

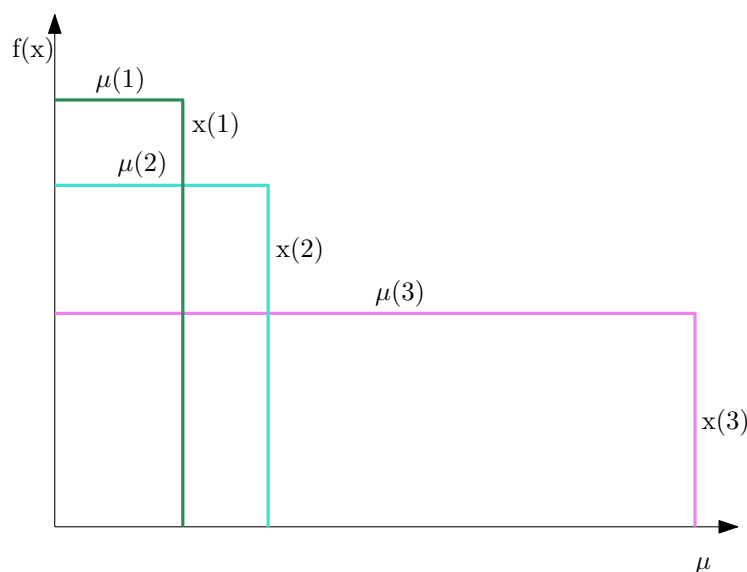
Teoreticky vychází z možnosti, že mezi proměnnými existuje korelace, tzn. že existuje multiplikativní či substituční efekt mezi proměnnými. Tyto efekty lze vyjádřit následovně:

$\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$... multiplikativní efekt.

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$... aditivní efekt.

$\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$... substituční efekt.

Kde μ je efektivita a A, B jsou dané proměnné. Choquetův integrál obecně nepočítá s aditivními vztahy, protože v tom případě mezi proměnnými korelace neexistuje a nemá smysl používat tyto speciální integrály. Integrál lze zobrazit graficky (viz obr. 2.1).



Obr. 2.1: Choquetův integrál

Kde $x(1, 2, 3)$ jsou hodnoty funkce $f(x)$ (např. počet hodin, které mohou pracovníci odpracovat), $\mu(1, 2, 3)$ je efektivita proměnných (např. počet vyrobených produktů).

Definice 4: Necht $(X, P(X), \mu)$ je prostor měr efektivnosti, $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty)$ jsou reálné funkce, pak Choquetův integrál funkce $f(x)$ s ohledem na míry efektivnosti μ je definován takto:

$$(c) \int f d\mu = \int_{-\infty}^0 [\mu(F_\alpha) - \mu(X)] d\alpha + \int_0^\infty \mu(F_\alpha) d\alpha \quad (2.33)$$

kde (c) označuje Choquetův integrál a $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha, x \in X\}$, $\alpha \in (0, \infty)$, $\int_0^\infty \mu(F_\alpha) d\alpha$ jsou Riemannovy integrály. Kde f jsou jiné než negativní funkce, $(c) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu(F_\alpha) d\alpha$.

Nechť $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je konečná množina, hodnoty funkce f , např. $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, mohou být seřazeny vzestupně tak, že $f(x'_1) \leq f(x'_2) \leq \dots \leq f(x'_n)$, kde $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ je určitá obměna $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, pak je Choquetův integrál vypočítán takto:

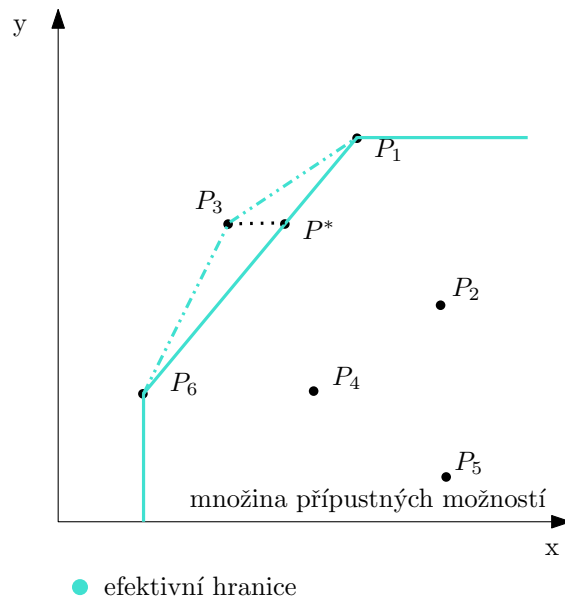
$$(c) \int f d\mu = \sum_{i=1}^n [f(x'_i) - f(x'_{i-1})] \mu(A_i) \quad (2.34)$$

kde $f(x'_0) = 0$ a $A_i = \{x'_1, x'_{i+1}, \dots, x'_n\}$.

2.4 Uspořádání efektivních jednotek

Ačkoliv DEA modely jsou využívány pouze na rozdělení produkčních jednotek na ty efektivní a neefektivní. Problém může nastat ve chvíli, kdy je zadán požadavek na uspořádání produkčních jednotek dle míry efektivnosti. V případě neefektivních jednotek toho lze docílit pouhým sestupným uspořádáním dle měr efektivnosti, naopak u těch efektivních jednotek, jejichž hodnota je vždy rovna 1, toto uspořádání není možné. Pro tyto případy budou uvedeny některé přístupy, které budou mít za cíl jejich uspořádání.

První z modelů pro uspořádání patří mezi modely superefektivnosti (Jablonský a Dlouhý, 2015). Hlavní myšlenkou u těchto modelů je položení váhy původní efektivní jednotky rovnou nule, tudíž dojde k pomyslnému odebrání této jednotky ze souboru. A dále je pak měřena vzdálenost mezi vstupy a výstupy hodnocené jednotky od nové efektivní hranice. Princip superefektivnosti je zobrazen na následujícím obrázku 2.2:



Obr. 2.2: Princip superefektivnosti

Jak je vidět, efektivní jednotka P_3 byla vyňata ze souboru a dále se pak měří vzdálenost od této původní jednotky a jednotky P^* . Takto měřená vzdálenost je jen jednou z možností a modely superefektivnosti se pak liší dle způsobu jejího měření.

2.4.1 AP model

Model Andersona a Petersena byl publikovaný v (Andersen a Petersen, 1993). Je tedy jedním z představitelů modelů superefektivnosti, kdy dochází k položení váhy hodnocené produkční jednotky rovné nule. Míra superefektivnosti následně zobrazuje vzdálenost nové efektivní hranice od té původní. Tato míra vyjadřuje o kolik je možné zhoršit vstupy, respektive výstupy, aby daná jednotka zůstala efektivní jednotkou. Tudíž čím větší bude míra, tím je daná produkční jednotka lepší.

Zavedení a vysvětlení proměnných:

x_{ij} ... vstupy, kde $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$,
 y_{kj} ... výstupy, kde $k = 1, 2, \dots, r$ a $j = 1, 2, \dots, n$,
 λ_j ... váhy pro vstupy a výstupy, kde $j = 1, 2, \dots, n$,
 s_i^- ... přídatná proměnná, kde $i = 1, 2, \dots, m$,
 s_k^+ ... přídatná proměnná, kde $k = 1, 2, \dots, r$,

Matematický model:

$$\text{MIN} : \theta_q, \quad (2.35)$$

Za podmíněk:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = \theta_q x_{iq}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.36)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j + s_k^+ = y_{kq}, k = 1, 2, \dots, r, \quad (2.37)$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, j \neq q, \quad (2.38)$$

$$\lambda_q = 0, \quad (2.39)$$

Pro efektivní jednotky bude $\theta_q > 1$ a naopak pro neefektivní jednotky bude $\theta_q < 1$. Mezi hlavní nedostatky tohoto modelu, které se dle (Ziari a Raissi, 2016), mohou v určitých případech objevit, patří především nepřípustnost a nestabilita pro některé produkční jednotky.

Mezi další modely superefektivnosti se řadí například super SBMT model či model cílového programování - super SBMG model⁴.

⁴Více viz (Jablonský a Dlouhý, 2015).

2.4.2 MAJ model

Tento model byl publikován o 6 let později po AP modelu (Mehrabian et al., 1999) a v některých případech se dokáže vypořádat s nepřípustností u AP modelu (Ziari a Raissi, 2016). A v rámci proměnných je zde zahrnuta navíc nová proměnná w , model je pak sestrojen následovně:

Matematický model:

$$\text{MIN} : 1 + w, \quad (2.40)$$

Za podmínek:

$$\sum_{j=1, j \neq q}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iq} + w, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.41)$$

$$\sum_{j=1, j \neq q}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kq}, k = 1, 2, \dots, r, \quad (2.42)$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, j \neq q, \quad (2.43)$$

Čím vyšší je $1 + w$, tím vyšší je efektivnost dané jednotky, je tedy pak možné produkční jednotky seřadit sestupně od největší efektivnosti až po tu nejmenší.

2.4.3 Křížová efektivnost

První dva modely jsou uvedeny pro ukázkou a budou použity u příkladu na konci této kapitoly, je tedy třeba uvést ještě jeden model, jehož použití bude zobrazeno také v praktické části. Křížová efektivnost je uvedena v (Jablonský a Dlouhý, 2015), tento koncept je založen na myšlence, že každá produkční jednotka je hodnocena na základě optimálních vah získaných na základě vybraného DEA modelu. Tento model je definován následovně:

Zavedení a vysvětlení proměnných:

u_{kj} ... optimální váha pro výstup u vybraného DEA modelu, kde $k = 1, 2, \dots, r$
a $j = 1, 2, \dots, n$,

v_{ij} ... optimální váha pro vstup u vybraného DEA modelu, kde $i = 1, 2, \dots, m$
a $j = 1, 2, \dots, n$

Matematický model:

$$DMU_{qj} : \frac{\sum_{k=1}^r u_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij}}, \text{ pro } q = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.44)$$

kde q je index produkční jednotky, která je hodnocená pomocí optimálních vah produkční jednotky DMU_j . Pro modely orientované na vstupy bude $DMU_{qj}^* \leq 1$. V případě, že je hodnocená efektivnost vybrané produkční jednotky jejími vlastními vahami, musí být efektivnost stejná jako výsledek daného DEA modelu. To bude zobrazeno na diagonále matice $n \times n$, kde n je počet produkčních jednotek DMU_j . Průměrná křížová efektivnost je následně vypočítána jako:

$$\psi_q : \frac{\sum_{j=1}^n DMU_{qj}}{n}, \text{ pro } q = 1, 2, \dots, n. \quad (2.45)$$

Kde ψ_q je v intervalu od $(0, 1)$, přičemž horní hranice nastává zřídka. Následně je tedy možné dle průměrné křížové efektivnosti dané DMUs uspořádat.

2.5 Porovnání modelů

Rozdíl mezi výše uvedenými DEA modely bude ilustrován na malém příkladu. CH-CCR model není použit v praktické části, protože data, která jsou k dispozici pro HZS ČR, nejsou vhodná pro aplikaci tohoto modelu.

Zadání: Ve vesnici je postavena požární stanice. Jedná se o malou vesnici, tudíž počet zaměstnanců není příliš velký, jsou zde zaměstnání pouze 3 požárníci. V tabulce 2.1 je zapsán počet hodin, které každý zaměstnanec musí denně odpracovat. Zároveň je zde uveden jejich plat v tisících Kč. V době jejich nepřítomnosti vyjíždí k místu nehody či požárů HZS z města poblíž. Výstupem je škoda, která je způsobena v rámci jejich směny (uvedena v Kč na jednu hodinu jejich služby). Jaká je efektivnost jednotlivých zaměstnanců?

		Zaměstnanec 1	Zaměstnanec 2	Zaměstnanec 3
Vstupy	počet hodin	12	8	10
	plat	10	12	15
Výstupy	škoda	35	23	15

Tabulka 2.1: Informace o zaměstnancích požární stanice

Druhá tabulka 2.2 obsahuje výstupy v případě, že spolu zaměstnanci navzájem kooperují, jak je vidět, tato kooperace přináší menší škodu, je to způsobeno například tím, že spolu požárníci dříve uhasí požár. CCR model a BCC model s těmito daty nepočítají, protože neuvažují případnou kolinearitu mezi proměnnými. Tyto data jsou tudíž uvedena pouze pro CH-CCR model, který je ve svých výpočtech zahrnuje.

	Z1 & Z2	Z1 & Z3	Z2 & Z3	Z1 & Z2 & Z3
Škoda	50	40	30	65

Tabulka 2.2: Kooperace zaměstnanců požární stanice

Výsledky jsou shrnuty v tabulce 2.3. Matematické modely DEA modelů v softwaru MPL jsou uvedeny na konci kapitoly.

	CCR model	BCC model	CH-CCR model
Zaměstnanec 1			
Optimální hodnota	1	1	1
Váha u_1	0,0286	0,0277	0,0014
Váha v_1	0,0832	0,0832	0,0001
Váha v_2	0,0001	0,0001	0,0999
Zaměstnanec 2			
Optimální hodnota	0,9852	1	1
Váha u_1	0,0428	0,0416	0,0019
Váha v_1	0,1249	0,1249	0,0962
Váha v_2	0,0001	0,0001	0,0192
Zaměstnanec 3			
Optimální hodnota	0,5139	0,7992	0,9231
Váha u_1	0,0343	0,0001	0,0015
Váha v_1	0,0999	0,0999	0,0769
Váha v_2	0,0001	0,0001	0,0154

Tabulka 2.3: Výstup ze softwaru MPL

Shrnutí výsledků:

CCR model: Jak je z tabulky 2.3 vidět, efektivní je pouze zaměstnanec 1, u kterého jsou váhy vstupů $v_1=0,0832$ a $v_2=0,0001$. Co se týče váhy u výstupu, ta je $u_1=0,0286$. Neefektivní se v tomto případě ukázali zaměstnanci 2 a 3, jejichž optimální hodnoty jsou stanoveny na 0,9852 u druhého zaměstnance a 0,5139 u zaměstnance třetího. To pro druhého zaměstnance znamená, že při stejných výstupech by se vstupy měly snížit na 98,52 %, respektive by se počet hodin měl snížit z 8 hodin na 7,8816 hodiny (98,52 % z 8), což by po zaokrouhlení v tomto případě opět vedlo na 8 hodin a jeho plat by se měl snížit na 11,8224 (98,52 % z 12), což po zaokrouhlení je 11,8 tis. Kč. Jak je vidět, neefektivnost druhého zaměstnance není příliš významná. Váhy vstupů pro tohoto zaměstnance jsou $v_1=0,1249$ a $v_2=0,0001$ a váha pro výstup je $u_1=0,0428$. Pro třetího zaměstnance platí, že při stejných výstupech by se vstupy měly snížit na 51,39 %, respektive by se počet

hodin měl snížit z 10 hodin na 5,139 hodiny (51,39 % z 10), což je po zaokrouhlení 6 hodin a jeho plat by se měl snížit na 7,7085 (51,39 % z 15), což po zaokrouhlení je 7,7 tis. Kč. Váhy vstupů pro tohoto zaměstnance jsou $v_1=0,0999$ a $v_2=0,0001$ a váha pro výstup je $u_1=0,0343$.

BCC model: V tabulce 2.3 se dále nacházejí také výsledky BCC modelu. Které jsou lehce odlišné od CCR modelu. Liší se především zaměstnanci 2 a 3 svou účelovou funkcí a dále jsou rozlišné výsledky u vah pro výstupy u jednotlivých zaměstnanců. Jak je vidět, zaměstnanec 1 je nadále efektivní jednotkou, k němu se přidává zaměstnanec 2, který se stává též efektivní. O něco lépe je zde hodnocen zaměstnanec 3, jehož účelová funkce dosahuje hodnoty 0,7992. To znamená, že při stejných výstupech by se vstupy měly snížit na 79,92 %. Pro zaměstnance 3 to tedy bude znamenat trochu lepší situaci, takže počet hodin se sníží pouze na 7,992 hodin (79,92 % z 10), což by po zaokrouhlení znamenalo 8 hodin a pro jeho plat by bylo snížení na 11,988 (79,92 % z 15), což je tedy částka přibližně 12 tis. Kč. Váha pro výstup u prvního zaměstnance je $u_1=0,0277$, pro druhého zaměstnance je $u_1=0,0416$ a pro třetího zaměstnance je to $u_1=0,0001$. Tyto změny jsou způsobeny volbou modelu orientovaného na vstupy. Přičemž váhy pro vstupy zůstávají v tomto případě oproti CCR modelu neměnné.

CH-CCR model: Posledním modelem, který byl aplikován je CH-CCR model. Kooperace se projevuje pouze v rámci výstupu, tudíž byl klasický CH-CCR model upraven o tuto změnu a Choquetovy integrály byly počítány pouze pro tento jediný výstup. Pro prvního zaměstnance dosahuje integrál výše 700 ($8 * 65 + 2 * 40 + 2 * 50$), pro druhého zaměstnance je to pak 520 ($8 * 65$) a pro třetího 600 ($8 * 65 + 2 * 40$). Efektivní jsou tedy zaměstnanci 1 a 2, jejichž váhy pro vstupy jsou $v_1=0,0001$ a $v_2=0,0999$ a pro výstup $u_1=0,0014$ u prvního zaměstnance a $v_1=0,0962$ a $v_2=0,0192$ a pro výstup $u_1=0,0019$ u druhého zaměstnance. Neefektivním zaměstnancem je opět zaměstnanec 3, jehož plat by měl být snížen na hodnotu 13,847 (92,31 % z 15), což je po zaokrouhlení 13,9 tis. Kč. A počet hodin by se měl snížit na 9,231, což by po zaokrouhlení bylo 9,5 hodiny. Váhy pro vstupy u tohoto zaměstnance dosahují hodnot $v_1=0,0769$ a $v_2=0,0154$ a pro výstup $u_1=0,0015$.

Uspořádání jednotek: Dané zaměstnance lze seřadit následovně dle efektivnosti:

Zaměstnanec	AP model	MAJ model	Křížová efektivnost
1	1.	1.	1.
2	2.	2.	2.
3	3.	3	3.

Zaměstnanec	Hodnoty modelů		
1	1	6,9063	0,6579
2	0,9852	5,2927	0,6528
3	0,5139	1,8871	0,5989

Tabulka 2.4: Porovnání modelů superefektivnosti

Vzájemné seřazení zaměstnanců je dáno již z hodnot CCR modelu, pokud by došlo k výpočtům pouze pomocí BCC modelu, pak by byli efektivní dva zaměstnanci a bylo by nutné počítat tyto modely pro uspořádání efektivních jednotek.

Průměrné hodnoty dle křížové efektivnosti vycházejí z následující tabulky:

Zaměstnanec	1	2	3
1	1,0000	0,9708	0,0029
2	0,9555	1,0000	0,0029
3	0,4985	0,4990	0,7992

Tabulka 2.5: Křížová efektivnost

Jak je vidět, křížová efektivnost vychází z optimálních hodnot BCC modelu, což lze vyčíst z diagonály této matice.

2.6 MPL - modely

2.6.1 CCR model

TITLE CCRmodel;

OPTION

excelworkbook="EXAMPLE.xlsx"

INDEX

I:=1..2;

J:=1..3;

K:=1;

DATA

X[I,J]:=EXCELRange("vstupy");

Y[K,J]:=EXCELRange("vystupy");

E:=0.0001;

VARIABLE

U[K];

V[I];

MAX sum(K:U[K]*Y[K,J:=(#)]);

SUBJECT TO

f[J]: sum(K:Y[K,J]*U[K])-sum(I:V[I]*X[I,J])<=0;

s:sum(I:V[I]*X[I,J:=(#)])=1;

t[K]: U[K]>=E;

u[I]: V[I]>=E;

END

kde se za (#) dosazuje vybraná produkční jednotka DMU_j , kde $j = 1, 2, 3$. Matice dat ("vstupy") zachycuje první dva řádky tabulky 2.1, tzn. počet hodin a plat pro jednotlivé zaměstnance a vektor ("vystupy") obsahuje pouze třetí řádek této tabulky, tzn. škodu.

2.6.2 BCC model

TITLE BCCmodel;

OPTION

excelworkbook="EXAMPLE.xlsx"

INDEX

I:=1..2;

J:=1..3;

K:=1;

DATA

X[I,J]:=EXCELRange("vstup");

Y[K,J]:=EXCELRange("vystup");

E:=0.0001;

VARIABLE

U[K];

V[I];

M;

MAX sum(K:U[K]*Y[K,J:=(#)])+M;

SUBJECT TO

f[J]: sum(K:Y[K,J]*U[K])-sum(I:V[I]*X[I,J])+M<=0;

s:sum(I:V[I]*X[I,J:=(#)])=1;

t[K]: U[K]>=E;

u[I]: V[I]>=E;

END

kde se za (#) dosazuje vybraná produkční jednotka DMU_j , kde $j = 1, 2, 3$. Data jsou v tomto případě stejná jako u CCR modelu.

2.6.3 CH-CCR model

TITLE CH-CCRmodel;

OPTION

excelworkbook="EXAMPLE.xlsx"

INDEX

I:=1..2;

J:=1..3;

K:=1;

DATA

X[I,J]:=EXCELRange("vstupy");

Y[K,J]:=EXCELRange("kooperace");

E:=0.0001;

VARIABLE

U[K];

V[I];

MAX sum(K:U[K]*Y[K,J:=(#)]);

SUBJECT TO

f[J]: sum(K:Y[K,J]*U[K])-sum(I:V[I]*X[I,J])<=0;

s:sum(I:V[I]*X[I,J:=(#)])=1;

t[K]: U[K]>=E;

u[I]: V[I]>=E;

END

kde se za (#) dosazuje vybraná produkční jednotka DMU_j , kde $j = 1, 2, 3$. A vektor ("kooperace") obsahuje hodnoty Choquetových integrálů, tzn. (700; 520; 600). Data obdobně jako u předchozích příkladů zahrnují vstupy a výstup daného příkladu.

2.6.4 AP model

TITLE AP model;

OPTION

excelworkbook="EXAMPLE.xlsx"

INDEX

I:=1..2;

J:=1..3;

K:=1;

DATA

X[I,J]:=EXCELRange("vstup");

Y[K,J]:=EXCELRange("vystup");

E:=0.0001;

VARIABLE

L[J];

SM[I];

SP[K];

D[J];

MIN D[J:=(#)];

SUBJECT TO

f[I]: sum(J:X[I,J]*L[J])+SM[I]=D[J:=(#)]*X[I,J:=(#)];

s[K]: sum(J:Y[K,J]*L[J])-SP[K]=Y[K,J:=(#)];

t[J]: L[J<>3]>=0;

u: L[J:=3]=0;

END

kde se za (#) dosazuje vybraná produkční jednotka DMU_j , kde $j = 1, 2, 3$. Datová oblast zůstává neměnná. Zároveň jsou tu proměnné $SM[I]$, což je z matematického modelu přídatná proměnná s_i^- a dále pak také $SP[K]$, která zastupuje přídatnou proměnnou s_k^+ .

2.6.5 MAJ model

TITLE MAJ model;

OPTION

excelworkbook="EXAMPLE.xlsx"

INDEX

I:=1..2;

J:=1..3;

K:=1;

DATA

X[I,J]:=EXCELRange("vstupy");

Y[K,J]:=EXCELRange("vystupy");

E:=0.0001;

VARIABLE

L[J];

w;

MIN 1+w;

SUBJECT TO

f[I]: sum(J<>3: X[I,J]*L[J])=X[I,J:=(#)]+w;

s[K]: sum(J<>3: Y[K,J]*L[J])=Y[K,J:=(#)];

t[J]: L[J<>3]>=0;

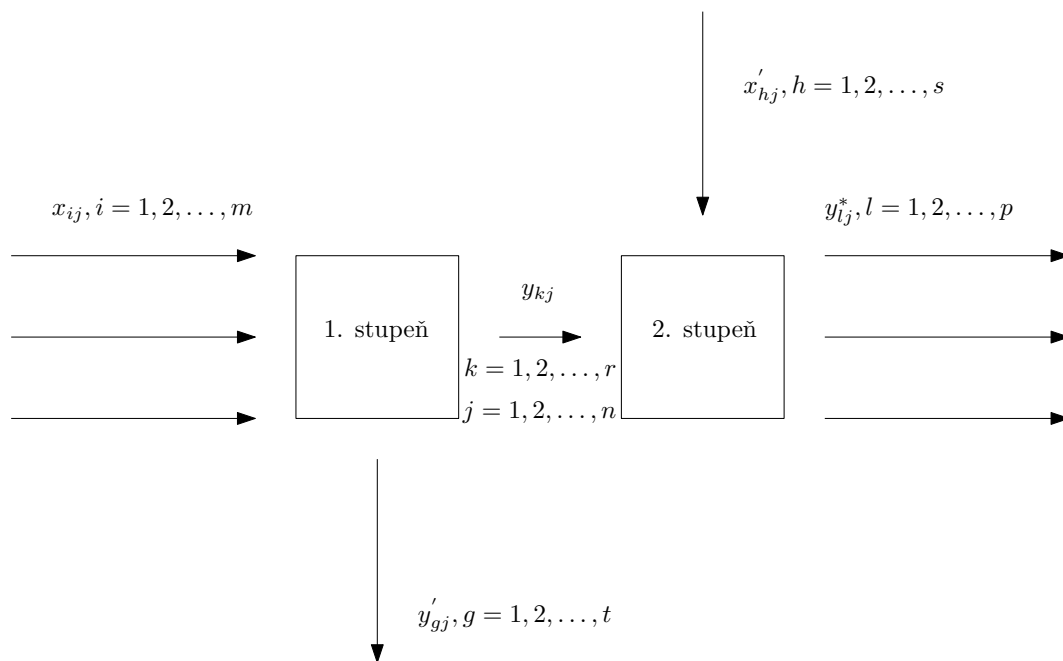
END

kde se za (#) dosazuje vybraná produkční jednotka DMU_j , kde $j = 1, 2, 3$. Matice ("vstupy") a vektor ("vystupy") jsou definovány stejně jako dříve.

3. Síťové DEA modely

Síťové DEA modely jsou používány v situacích, kdy dochází k složitějším procesům, respektive k více jak jednomu stupni produkce. Tyto stupně mohou být sestaveny sériově, paralelně nebo kombinací dvou předchozích typů. V této diplomové práci bude použit DEA model se sériovou strukturou, z tohoto důvodu nebudou paralelní a kombinované modely dále zahrnuty¹.

Jak je vidět, v prvním stupni je spotřebováváno více vstupů a produkováno více výstupů, které ovšem nemusejí být všechny použity pro druhý stupeň produkce a zároveň je možné výstupy z prvního stupně obohatit o další vstupy, které ještě nebyly použity. DEA model se sériovou strukturou je zachycen na obrázku 3.1 (Jablonský a Dlouhý, 2015):



Obr. 3.1: Síťový DEA model

¹Více o těchto modelech viz (Jablonský a Dlouhý, 2015).

V případě, že jsou vstupy prvního stupně produkční jednotky DMU_j označeny jako x_{ij} , kde $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$ a výstupy, které tvoří vstupy druhého stupně, označeny y_{kj} , kde $k = 1, 2, \dots, r$ a $j = 1, 2, \dots, n$. Výstupy prvního stupně, které již dále nejsou součástí procesu, necht' jsou označeny jako y'_{gj} , kde $g = 1, 2, \dots, t$ a $j = 1, 2, \dots, n$ a vstupy, které neprošly prvním stupněm, ale tvoří základ pro druhý stupeň, jsou označeny jako x'_{hj} , kde $h = 1, 2, \dots, s$ a $j = 1, 2, \dots, n$. Pak finální výstupy celého procesu budou označeny jako y^*_{lj} , kde $l = 1, 2, \dots, p$ a $j = 1, 2, \dots, n$.

Tyto modely samozřejmě mohou obsahovat mnoho stupňů produkce, avšak tato práce se zaměřuje pouze na dva stupně, jak je zobrazeno dále. Pro více stupňů jsou modely mnohem složitější.

Problém je skryt přímo v procesu, protože například zvýšení vstupů na začátku procesu může negativně ovlivnit přes výstupy, které pokračují do druhého stupně, finální výstupy celého procesu. Je tedy nanejvýš nutné správně určit ovlivnění jednotlivých vstupů a výstupů tak, aby byl proces co nejefektivnější.

Mezi průkopníky v oboru síťových DEA modelů patří především Ching Kao, který uvedl formulaci dvoustupňového DEA modelu, jehož nelineární model převedl pomocí substituční techniky na model lineární (Kao, 2008).

Dalšími důležitými osobnostmi jsou Yao Chen, Liang Liang a Joe Zhu, které formulovali DEA model s předpokladem konstantních výnosů z rozsahu (Chen et al., 2009).

A v neposlední řadě taktéž Yongjun Li, Yao Chen, Liang Liang a Jianhui Xie, kteří publikovali článek se zaměřením na dvoustupňový DEA model, v tomto článku jsou uvedeny dvoustupňové struktury DEA modelů za předpokladů existence vstupů u druhého stupně obsahujících nejen výstupy z prvního stupně, ale také nové vstupy, které se v prvním stupni nezpracovávaly. Pro tyto dvoustupňové DEA modely uvedly 2 nové modely pro hodnocení efektivnosti (Li et al., 2012).

3.1 DEA model Omid & Zegordi

Model Omid & Zegordi vychází z článku (Omid a Zegordi, 2015), kde autoři čerpali z (Kao, 2008) a (Liang et al., 2008), přičemž vytvořili model vhodný pro síťový DEA model na obrázku 3.1.

Matematický model:

Zavedení a vysvětlení proměnných (proměnné pro vstupy a výstupy viz obr. 3.1):

v_{ij} ... váha pro vstupy x_{ij} do prvního stupně pro $i = 1, 2, \dots, m$,
 w_{kj} ... váha pro výstupy y_{kj} z prvního stupně, které se stávají vstupy do druhého stupně pro $k = 1, 2, \dots, r$,
 e_{gj} ... váha pro výstupy y'_{gj} z prvního stupně, které dále nepokračují pro $g = 1, 2, \dots, t$,
 z_{hj} ... váha pro vstupy x'_{hj} do druhého stupně pro $h = 1, 2, \dots, s$,
 u_{lj} ... váha pro výstupy y^*_{lj} z druhého stupně pro $l = 1, 2, \dots, p$,

Efektivnost celé produkční jednotky se vypočítá jako:

$$\text{MAX} : E(DMU_j) = \frac{\sum_{l=1}^p u_{lj}y^*_{lj} - \sum_{g=1}^t e_{gj}y'_{gj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij}x_{ij} + \sum_{h=1}^s z_{hj}x'_{hj}}, \quad (3.1)$$

Z rovnice (3.1) nelze přímo určit efektivnost jednotlivých stupňů DEA modelu. Efektivnost prvního stupně je možné vypočítat pomocí optimalizační funkce (3.2):

$$\text{MAX} : E(DMU_{js1}) = \frac{\sum_{k=1}^r w_{kj}y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_{gj}y'_{gj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij}x_{ij}}, \quad (3.2)$$

Naopak efektivnost druhého stupně je vypočítána jako:

$$\text{MAX} : E(DMU_{js2}) = \frac{\sum_{l=1}^p u_{lj}y^*_{lj}}{\sum_{k=1}^r w_{kj}y_{kj} + \sum_{h=1}^s z_{hj}x'_{hj}}, \quad (3.3)$$

Za podmínek:

$$\frac{\sum_{l=1}^p u_{lj}y^*_{lj} - \sum_{g=1}^t e_{gj}y'_{gj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij}x_{ij} + \sum_{h=1}^s z_{hj}x'_{hj}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^r w_{kj}y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_{gj}y'_{gj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij}x_{ij}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5)$$

$$\frac{\sum_{l=1}^p u_{lj}y^*_{lj}}{\sum_{k=1}^r w_{kj}y_{kj} + \sum_{h=1}^s z_{hj}x'_{hj}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

$$v_{ij} \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

$$w_{kj} \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r \quad (3.8)$$

$$e_{gj} \geq \epsilon, g = 1, 2, \dots, t \quad (3.9)$$

$$z_{hj} \geq \epsilon, h = 1, 2, \dots, s \quad (3.10)$$

$$u_{lj} \geq \epsilon, l = 1, 2, \dots, p \quad (3.11)$$

V rovnicích (3.4) a (3.5) se nachází záporné znaménko před výstupy z prvního stupně, které nejsou součástí druhého stupně (u_{gj}), toto znaménko signalizuje, že je zde snaha o minimalizování těchto výstupů².

Omezení (3.5) udává, že součet všech výstupů v celém procesu (obou stupních) musí být menší nebo roven součtu vstupů v celém procesu. Následně (3.6) a (3.7) jsou ve své podstatě odvozena od omezení (3.5). Jedná se zde stejně jako u (3.5) o podmínku, kdy součet výstupů z prvního stupně nesmí být vyšší než součet vstupů do tohoto stupně (3.6) a součet výstupů z druhého stupně musí být menší nebo roven součtu vstupů do tohoto stupně (3.7).

Stejně jako u základních DEA modelů je snahou nalézt optimální hodnoty váhových proměnných v_{ij} , w_{kj} , e_{gj} , z_{hj} a u_{lj} pro každou produkční jednotku tak, aby efektivnost celého systému byla maximální.

Jak je vidět z účelové funkce (3.1), opět se nejedná o lineární model, k linearizaci lze použít Charnes-Cooperovu transformaci tak, jako byla použita u základních DEA modelů. Další možností by bylo použít tzv. AHP přístup, ten vychází z myšlenky, že vedení určí váhy pro jednotlivé podprocesy, čímž dochází k linearizaci modelu (Omid a Zegordi, 2015). Vzhledem k tomu, že není možné tento přístup v této diplomové práci použít, nebude dále vysvětlen.

Po Charnes-Cooperově transformaci je model formulován následovně:

$$\text{MAX} : E(DMU_j) = \sum_{l=1}^p u_{lj} y_{lj}^* - \sum_{g=1}^t e_{gj} y'_{gj}, \quad (3.12)$$

Za podmínek:

$$\sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij} + \sum_{h=1}^s z_{hj} x'_{hj} = 1, \quad (3.13)$$

²V rámci praktické části se jedná o přímou škodu v tis. Kč, což je negativní jev, který je nutné minimalizovat.

$$\sum_{l=1}^p u_{lj} y_{lj}^* - \sum_{g=1}^t e_{gj} y'_{gj} - \sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij} - \sum_{h=1}^s z_{hj} x'_{hj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.14)$$

$$\sum_{k=1}^r w_{kj} y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_{gj} y'_{gj} - \sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.15)$$

$$\sum_{l=1}^p u_{lj} y_{lj}^* - \sum_{k=1}^r w_{kj} y_{kj} - \sum_{h=1}^s z_{hj} x'_{hj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.16)$$

$$v_{ij} \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.17)$$

$$w_{kj} \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r \quad (3.18)$$

$$e_{gj} \geq \epsilon, g = 1, 2, \dots, t \quad (3.19)$$

$$z_{hj} \geq \epsilon, h = 1, 2, \dots, s \quad (3.20)$$

$$u_{lj} \geq \epsilon, l = 1, 2, \dots, p \quad (3.21)$$

Tento model byl sestaven za předpokladu konstantních výnosů z rozsahu. Jeho optimální hodnotou je míra efektivnosti dané produkční jednotky DMU_j , která je menší nebo rovna 1 (efektivní produkční jednotky jsou rovny 1). Výstupem tohoto modelu budou také váhy pro použité vstupy a výstupy, které budou určovat optimální váhy pro maximalizaci efektivnosti produkční jednotky.

3.2 DEA model Li & Chen & Liang & Xie

Další model použitý v této práci vychází z článku (Li et al., 2012), kde jsou zveřejněny dva přístupy pro řešení dvoustupňových modelů, první přístup se zabývá nelineárním programováním a řešením úlohy heuristikami, druhý přístup přichází s transformací modelu na lineární programování s pomocí Charnes–Cooperovi transformace. Hlavní myšlenkou druhého přístupu je, že jeden ze stupňů je určen jako hlavní proces a druhý je pouhým jeho následníkem, jedná se tedy o méně důležitý proces.

Vzhledem k tomu, že autoři článku uvažovali pouze vstup do druhého stupně (na obr. 3.1 představující: x'_{hj} , avšak již nepočítají s možností výstupů z prvního stupně, které již nejsou v druhém stupni zahrnuty (tzn. na obr. 3.1 je tento výstup označen: y'_{gj}), bude tento model dále obohacen o tento výstup, aby splňoval předpoklady pro praktickou část této diplomové práce.

Matematický model:

Proměnné jsou definovány stejně jako u DEA modelu dle Omid & Zegordi.

V první řadě je předpokladem, že 1. stupeň je ten hlavní a druhý stupeň je následník prvního stupně. Efektivnost prvního stupně je tedy v tomto případě vypočítána pomocí CCR modelu:

$$\text{MAX} : E(DMU_{js1}) = \sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_g y'_{gj}, \quad (3.22)$$

Za podmínek:

$$\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_g y'_{gj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.23)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1, \quad (3.24)$$

$$w_k \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r, \quad (3.25)$$

$$v_i \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.26)$$

$$z_h \geq \epsilon, h = 1, 2, \dots, s, \quad (3.27)$$

$$u_l \geq \epsilon, l = 1, 2, \dots, p, \quad (3.28)$$

$$e_g \geq \epsilon, g = 1, 2, \dots, t, \quad (3.29)$$

Optimálním řešením této úlohy bude DMU_{js1}^* , která udává efektivnost prvního stupně. Vzhledem k tomu, že první stupeň je definován jako hlavní proces, jsou výsledky z CCR modelu použity u druhého stupně pro výpočet efektivnosti, tudíž budou tedy stanoveny pevně. Druhý stupeň pak lze vypočítat pomocí tohoto modelu:

$$\text{MAX} : E(DMU_{js2}) = \frac{\sum_{l=1}^p u_l y_{lj}^*}{\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} + \sum_{h=1}^s z_h x'_{hj}}, \quad (3.30)$$

Za podmínek:

$$\frac{\sum_{l=1}^p u_l y_{lj}^*}{\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} + \sum_{h=1}^s z_h x'_{hj}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.31)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_g y'_{gj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.32)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_g y'_{gj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} = E(DMU_{js1}^*), \quad (3.33)$$

$$w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, r, \quad (3.34)$$

$$v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.35)$$

$$z_h \geq 0, h = 1, 2, \dots, s, \quad (3.36)$$

$$u_l \geq 0, l = 1, 2, \dots, p, \quad (3.37)$$

$$e_g \geq 0, g = 1, 2, \dots, t, \quad (3.38)$$

Model není lineární, nicméně ho lze opět snadno zlinearizovat, čímž vznikne následující model:

$$\text{MAX} : E(DMU_{js2}) = \sum_{l=1}^p u_l y_{lj}^*, \quad (3.39)$$

Za podmínek:

$$\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} + \sum_{h=1}^s z_h x'_{hj} = 1, \quad (3.40)$$

$$\sum_{l=1}^p u_l y_{lj}^* - \sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{h=1}^s z_h x'_{hj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.41)$$

$$\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_g y'_{gj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.42)$$

$$\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_g y'_{gj} - E(DMU_{js1}^*) * \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 0, \quad (3.43)$$

$$w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, r, \quad (3.44)$$

$$v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.45)$$

$$z_h \geq 0, h = 1, 2, \dots, s, \quad (3.46)$$

$$u_l \geq 0, l = 1, 2, \dots, p, \quad (3.47)$$

$$e_g \geq 0, g = 1, 2, \dots, t, \quad (3.48)$$

Optimální hodnotou tohoto modelu bude $E(DMU_{js2})^*$, která udává efektivnost druhého stupně na základě již doložené efektivnosti prvního stupně. V omezení (3.43) jsou zahrnuty výsledné hodnoty ze CCR modelu a tím je zaručeno, že model označený jako následník s těmito hodnotami počítá a vychází z nich.

Ve chvíli, kdy máme tyto oddělené efektivnosti, je možné vypočítat efektivnost dané produkční jednotky vynásobením optimálních hodnot daných modelů:

$$E(DMU_j^*) = E(DMU_{js1}^*) * E(DMU_{js2}^*), \quad (3.49)$$

Tento model lze ve své podstatě řešit podobným způsobem i v případě, že je za hlavní proces určen stupeň druhý a první stupeň je jeho následník. V tomto případě je pro druhý stupeň vypočítána efektivnost pomocí CCR modelu bez uvažování prvního stupně:

Matematický model:

$$\text{MAX} : E(DMU_{js2}) = \sum_{l=1}^p u_l y_{lj}^*, \quad (3.50)$$

Za podmínek:

$$\sum_{l=1}^p u_l y_{lj}^* - \sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{h=1}^s z_h x'_{hj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.51)$$

$$\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} + \sum_{h=1}^s z_h x'_{hj} = 1, \quad (3.52)$$

$$w_k \geq \epsilon, k = 1, 2, \dots, r, \quad (3.53)$$

$$v_i \geq \epsilon, i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.54)$$

$$z_h \geq \epsilon, h = 1, 2, \dots, s, \quad (3.55)$$

$$u_l \geq \epsilon, l = 1, 2, \dots, p, \quad (3.56)$$

$$e_g \geq \epsilon, g = 1, 2, \dots, t, \quad (3.57)$$

Následně se hodnoty $E(DMU_{js2})^*$ zafixují, aby s nimi bylo možno pracovat u prvního stupně, který se tedy v tomto případě stává následníkem. Tyto hodnoty zajistí, že bude

počítáno s již získanou efektivností druhého stupně. Model pro výpočet efektivnosti prvního stupně vypadá takto:

Matematický model:

$$\text{MAX} : E(DMU_{js1}) = \sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_g y'_{gj}, \quad (3.58)$$

Za podmíněk:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1, \quad (3.59)$$

$$\sum_{l=1}^p u_l y_{lj}^* - \sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{h=1}^s z_h x'_{hj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.60)$$

$$\sum_{k=1}^r w_k y_{kj} - \sum_{g=1}^t e_g y'_{gj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.61)$$

$$\sum_{l=1}^p u_l y_{lj}^* - E(DMU_{js2}^*) \left(\sum_{h=1}^s z_h x'_{hj} + \sum_{k=1}^r w_k y_{kj} \right) = 0, \quad (3.62)$$

$$w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, r, \quad (3.63)$$

$$v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.64)$$

$$z_h \geq 0, h = 1, 2, \dots, s, \quad (3.65)$$

$$u_l \geq 0, l = 1, 2, \dots, p, \quad (3.66)$$

$$e_g \geq 0, g = 1, 2, \dots, t, \quad (3.67)$$

Výstupem tohoto modelu bude $E(DMU_{js1}^*)$ pro každou produkční jednotku. Výsledné efektivnosti celého systému je dosaženo vynásobením jednotlivých efektivností v rámci každého stupně:

$$E(DMU_j^*) = E(DMU_{js1}^*) * E(DMU_{js2}^*), \quad (3.68)$$

3.3 Uspořádání efektivních jednotek

Uspořádání DMUs vychází z konceptu křížové efektivnosti (viz Kapitola 2 - Uspořádání efektivních jednotek).

4. | Praktická část

Data, která byla pro tuto diplomovou práci vybrána, pochází ze stránek Hasičského záchranného sboru České republiky a zároveň ze stránek Českého statistického úřadu a týkají se především právě zmíněného HZS ČR za rok 2015.

4.1 O HZS ČR

Historie (*Oficiální stránky Hasičského záchranného sboru České republiky*) hasičských sborů se pojí již s obdobím Rakousko-Uherska, z této doby jsou totiž převzaty první předpisy pro dobrovolné hasičské sbory v menších městech, ve větších městech za období Československé republiky existovaly požární jednotky. Další vývoj hasičských sborů lze shrnout do pár let, kdy došlo k některým z následujících zlomů v oblasti požární ochrany:

- **1942** - v protektorátu byl tehdy ustanoven tzv. pluk požární policie Čechy-Morava, jehož členy tvořili nejen čeští četníci a příslušníci finanční stráže, avšak také němečtí důstojníci.
- **1953** - vznik Zákona o státním požárním dozoru a požární ochraně, který obsahoval definování odpovědností za požární ochranu pro některé orgány, jako byly národní výbory (avšak dle své příslušnosti), dále také orgány státního požárního dozoru nebo ministr vnitra.
- **1958** - nastává zcela jiný pohled na požární ochranu, dochází totiž k zcela nevhodné změně organizace požární ochrany. Celá řada státních funkcí tehdy přechází na dobrovolnou organizaci Československý svaz požární ochrany.
- **1967** - tento rok má za následek především budoucí odborníky v oboru požární ochrany, protože byla založena Škola požární ochrany ve Frýdku-Místku.
- **1969** - dva roky po založení první školy dochází ke změně oproti roku 1958 a požární ochrana se dostává do rukou národních rad a vzniká tzv. Hlavní správa požární ochrany MV ČSR a MV SSR.
- **1985** - vznik Zákona o požární ochraně, který je i přes několik novelizací v platnosti i nyní. Tento Zákon přinesl povinnosti nejen fyzickým osobám, ale také firmám, v oblasti požární ochrany a zároveň stanovil kompetence hasičům, aby dodržování těchto povinností mohli kontrolovat.
- **1995** - oblast požární ochrany dostává svůj oficiální název Hasičský záchranný sbor České republiky.

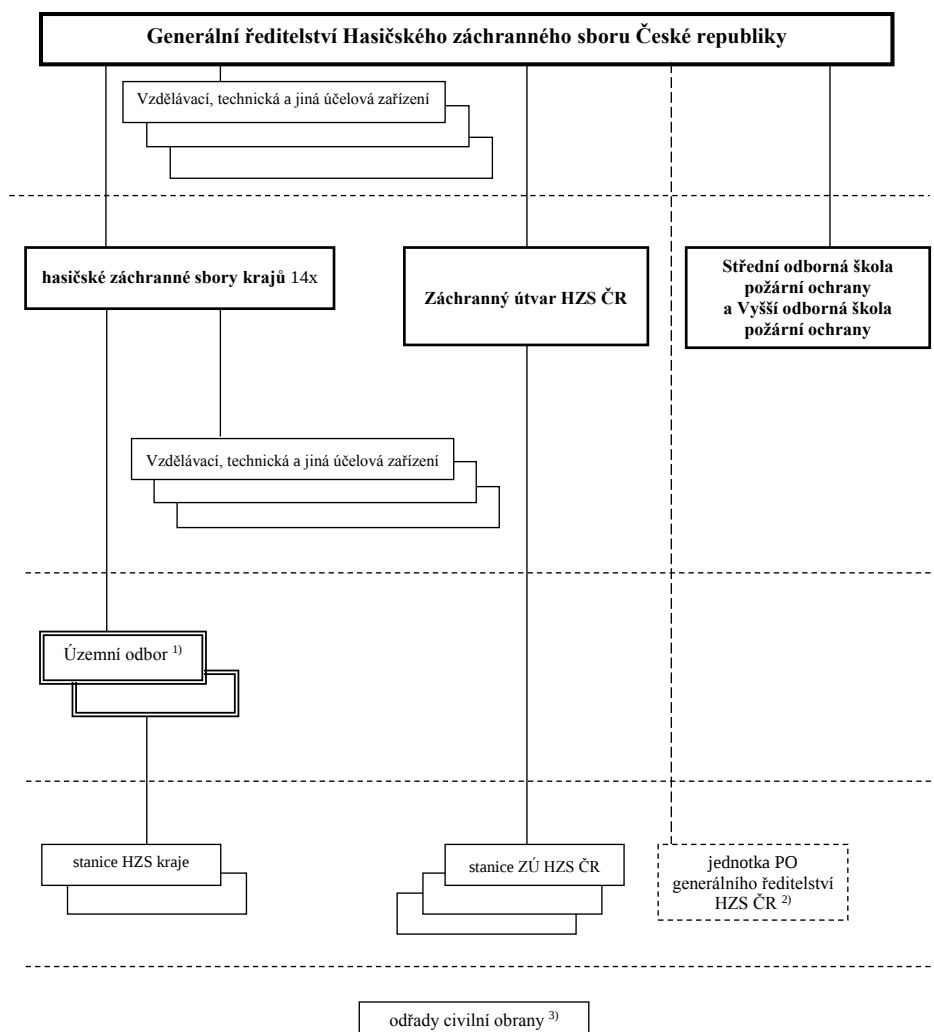
- **2001** - dochází k nové právní úpravě požární ochrany, kdy hasiči dostávají nově na starost také oblast civilní ochrany. Tam spadá například hrozba terorismu, průmyslové havárie nebo živelní katastrofy.

Hasičské sbory samozřejmě nevyjíždějí pouze k požárům, účastní se také zásahů u dopravních nehod, při živelných pohromách, či zásahů pomocného charakteru jako odstraňování nejrůznějších překážek, vyprošťování osob apod. Zajímavostí je, že pokud hasičský sbor dorazí na místo hromadné nehody dříve než lékař, je nutné, aby všechny zraněné barevně odlišil (k tomu slouží barevné visáčky) dle stupně vážnosti jeho zranění, protože následně lékař striktně dodržuje toto barevné označení, tudíž zde hraje důležitou roli především odborné zaškolení hasičů nejen v požární ochraně, ale také v záchranné lidského života.

Sbory dobrovolných hasičů jako takové nemají možnost se zásahů HZS ČR účastnit, jsou tvořeny pouze pro výpomoc obcím na bázi dobrovolnosti (např. čištění komunikací, výpomoc starším osobám s odhrnováním sněhu apod.) a mohou se účastnit hasičských soutěží. Pokud chtějí spolupracovat s HZS ČR, je nutné vytvořit tzv. Jednotky sboru dobrovolných hasičů (dále jen JSDH), jehož členi jsou odborně proškolení a je jejich povinností účastnit se výjezdů. Zajímavostí je, že JSDH nemohou přímo hasit požáry, avšak jejich úkolem je následně například hlídat místo po požáru, aby nedošlo k opětovnému vzplanutí.

Hasičský záchranný sbor ČR tvoří generální ředitelství a zároveň 14 hasičských záchranných sborů v krajích, dále pak školy požární ochrany apod. Tato organizační struktura je zobrazena na obr. 4.1. HZS ČR je hlavním koordinátorem a jakousi páteří integrovaného záchranného systému, který v případě krize slučuje všechny záchranné složky¹.

¹Více o HZS ČR na webových stránkách: www.hzscr.cz

Hasičský záchranný sbor České republiky

¹⁾ HZS hl. m. Prahy se nečlení na územní odbory.

²⁾ Podle § 65 odst. 2 zákona č. 133/1985 Sb., o požární ochraně, ve znění pozdějších předpisů, Ministerstvo vnitra může k plnění mimořádných úkolů na úseku požární ochrany zřídit jednotku generálního ředitelství HZS ČR.

³⁾ Podle § 10 odst. 1 zákona č. 320/2015 Sb., o Hasičském záchranném sboru České republiky a o změně některých zákonů (zákon o hasičském záchranném sboru), generální ředitelství HZS ČR, HZS kraje a ZÚ HZS ČR mohou k plnění úkolů za stavu ohrožení státu a válečného stavu zřizovat a organizačně, materiálně a personálně připravovat odřady civilní obrany z jednotek sborů dobrovolných hasičů obcí nebo jejich částí.

Obr. 4.1: Organizační struktura HZS ČR

4.2 Program MPL

Pro řešení příkladů v této diplomové práci byl využit program MPL for Windows, který je volně dostupný na stránkách společnosti a obsahuje řešitele CPLEX 300 (verze je omezená na 300 proměnných). Praktickou ukázkou použití tohoto programu je tedy možné nalézt na konci kapitol 2 a 4.

Program MPL for Windows (Mathematical Programming Language, dále jen MPL) je jedním z produktů společnosti Maximal Software, Inc. Tato společnost se zabývá optimalizacemi. Byla založena Bjarni Kristjanssonem v roce 1987 a počátky programu MPL sahají do roku 1988 (tedy rok po založení společnosti). Nejnovější verze programu MPL je 5.0.

Program MPL je pokročilý program, který umožňuje výpočet i komplikovaných optimalizačních modelů. K sestavení optimalizačních modelů slouží modelovací jazyk, který je zahrnut v tomto programu, právě díky němu je uživatel schopen zapsat matematický model velice snadně a efektivně.

Výhodou tohoto programu je, že je možné propojit model s datovým souborem, kde má uživatel uložena všechna data, a zároveň výsledek importovat zpět do datového souboru (např. Microsoft Excel). Za další výhodu je možné považovat jeho schopnost pracovat s většinou řešitelů na trhu (např. CPLEX nebo GUROBI).

Problém spočívá v ceně tohoto programu, která není zrovna přívětivá pro běžné uživatele. Nicméně společnost Maximal Software, Inc. má velice dobrou firemní politiku a díky tomu je možné si zažádat o omezenou licenci pro nekomerční účely, přičemž stačí pouze vyplnit formulář přímo na jejich oficiálních stránkách.

Program MPL je case sensitive, což znamená, že důsledně rozlišuje malá a velká písmena v názvech koeficientů a proměnných a je tudíž důležité, aby uživatel na tuto vlastnost nezapomněl.

Základní struktura modelu v programu MPL se dělí ve své podstatě na dvě části, v první části je potřebné definovat všechny proměnné, indexy a data, které budou v modelu využívány a v další části je pak již zapsán matematický model, který automaticky čerpá data z první části. Takový zápis vypadá následovně:

TITLE

Název či označení modelu.

INDEX

Slouží pro identifikaci indexů a dimenze daného modelu.

DATA

V této sekci jsou specifikovaná vstupní data (skaláry, vektory, matice, datové soubory).

(DECISION) VARIABLES (INTEGER, BINARY, FREE)

Identifikace proměnných a jejich vlastností... Ve chvíli, kdy jsou používány celočíselné, binární proměnné nebo proměnné bez podmínek, označí se sekce jako INTEGER VARIABLE, BINARY VARIABLE či FREE VARIABLE.

MODEL

Počátek modelu.

MAX nebo MIN

Zápis optimalizační funkce.

SUBJECT TO

Popis omezujících podmínek modelu.

BOUNDS

Popis případných horních či dolních mezí (pokud jsou v modelu zahrnuty).

END

4.3 Data

V tabulce 4.1 jsou uvedena data, která budou v této diplomové práci použita (data jsou zaokrouhlena na celá čísla pro lepší přehlednost):

Kraj	Počet obyvatel	Rozloha v km^2	Rozloha lesů v km^2	Počet zásahů	Přímá škoda v tis. Kč	Počet zaměstnanců	Počet požárů	Počet dopravních nehod	Ostatní výjezdy	Plané poplachy
HL. město Praha	1 259 079	473	52	11 848	179 153	929	2 349	984	5 140	1 196
Středočeský	1 315 299	11 042	3 064	21 981	279 865	1 161	2 961	3 500	6 757	774
Jihočeský	637 300	10 095	3 786	10 437	120 072	723	1 304	1 384	5 153	498
Plzeňský	575 123	7 571	3 004	10 272	106 803	668	1 204	1 521	4 257	460
Karlovarský	299 293	3 313	1 442	6 056	63 309	342	746	653	2 630	266
Ústecký	823 972	5 363	1 624	11 362	761 650	793	2 051	1 304	4 839	762
Liberecký	438 851	3 155	1 409	7 777	109 628	402	984	1 234	2 367	318
Královéhradecký	551 590	4 732	1 480	9 567	105 029	539	989	1 697	3 251	398
Pardubický	516 372	4 496	1 343	8 189	124 152	495	780	1 482	3 068	336
Vysočina	509 895	6 783	2 072	11 581	98 972	626	885	1 363	6 132	1 016
Jihomoravský	1 172 853	7 177	2 020	15 657	215 230	941	1 715	1 937	5 493	534
Olomoucký	635 711	5 284	1 852	8 313	95 410	575	890	1 277	3 262	318
Zlínský	585 261	3 943	1 577	6 611	96 308	479	695	869	2 555	363
Moravskoslezský	1 217 676	5 442	1 939	18 738	140 322	992	2 132	2 121	7 796	1 034
Celkem	10 538 275	78 868	26 664	158 389	2 495 903	9 665	19 685	21 326	62 700	8 273

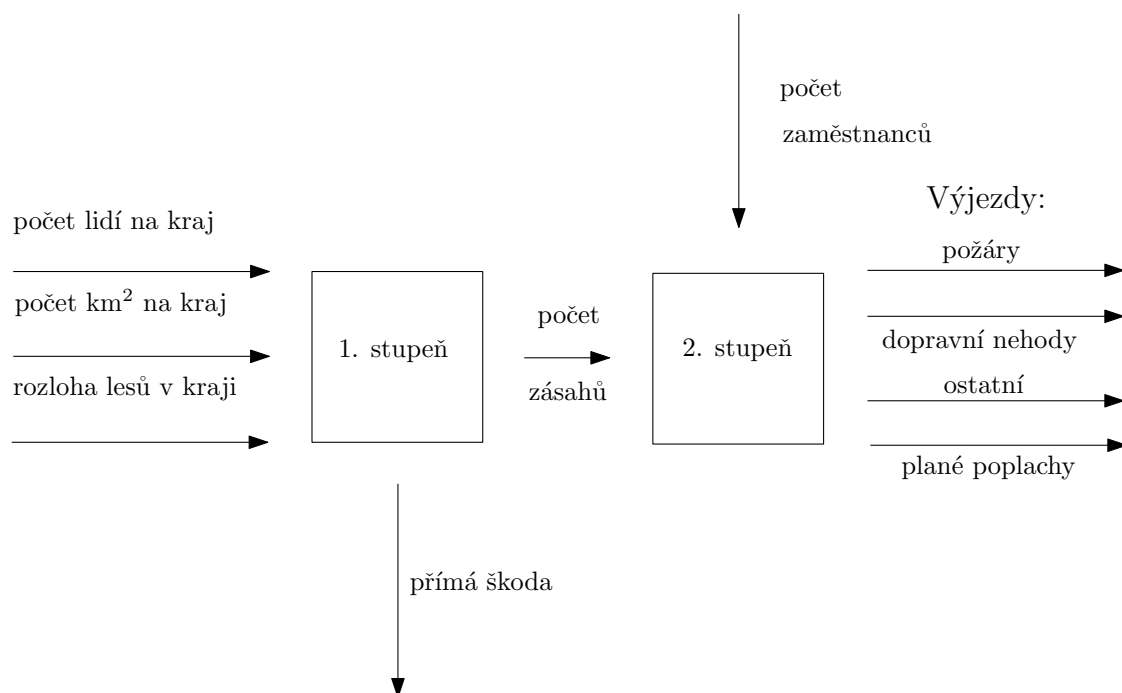
Tabulka 4.1: Data potřebná pro praktickou část

Z těchto dat je vytvořen síťový DEA model, jeho konečná struktura je zobrazena na obr. 4.2. Počet obyvatel, rozloha kraje v km^2 a rozloha lesů v kraji v km^2 byla získána z webových stránek Českého statistického úřadu. Dále pak celkový počet zásahů v jednotlivých krajích, přímá škoda v tis. Kč, počet požárů, dopravních nehod, ostatních výjezdů a planých poplachů byl získán z ročenky HZS ČR. Počet zaměstnanců v krajích byl vyžádán u Ministerstva Vnitra, které má HZS ČR na starosti.

Na základě oficiální žádosti byly zaslány údaje o plánovaných počtech zaměstnanců HZS ČR na rok 2015, v rámci těchto dat byly poskytnuty také počty zaměstnanců pro generální ředitelství HZS ČR a SOŠ PO a VOŠ PO ve Frýdku–Místku, tyto útvary ovšem nejsou součástí této diplomové práce. Zároveň počty zaměstnanců Záchraného útvaru HZS ČR zde nejsou uvedeny, protože to jsou údaje celorepublikové a nelze je dále upravit pro jednotlivé kraje. Počty zaměstnanců jsou souhrnné, tzn. že se jedná o součet příslušníků HZS ČR a zároveň občanských zaměstnanců viz tabulka 4.2:

Organizační složka HZS ČR	Příslušníci	Občanští zaměstnanci	Celkem
GŘ HZS ČR	243	364	607
HZS hl. město Praha	868	61	929
HZS Středočeského kraje	1080	81	1 161
HZS Jihočeského kraje	685	38	723
HZS Plzeňského kraje	627	41	668
HZS Karlovarského kraje	314	28	342
HZS Ústeckého kraje	750	43	793
HZS Libereckého kraje	380	22	402
HZS Královéhradeckého kraje	500	39	539
HZS Pardubického kraje	470	25	495
HZS Kraje Vysočina	593	33	626
HZS Jihomoravského kraje	886	44	941
HZS Olomouckého kraje	541	34	575
HZS Zlínského kraje	452	27	479
HZS Moravskoslezského kraje	943	49	992
Záchranný útvar HZS ČR	210	49	249
SOŠ PO a VOŠ PO ve Frýdku–Místku	19	19	38
Celkem HZS ČR	9 561	1 008	10 569

Tabulka 4.2: Plánované početní stavy pro rok 2015



Obr. 4.2: Síťový DEA model pro HZS ČR

4.4 Výpočet

Vzhledem k tomu, že data, která jsou uvedena v tabulce 4.1, jsou řádově velice odlišná, budou upravena. Je to z důvodu, že software počítá s čísly jako takovými a v tom případě by pak například rozdíl mezi počtem obyvatel a rozlohou lesů v km^2 u hl. města Prahy mohl ovlivnit výsledky. Proto byla použita transformace uvedených dat dle vztahu (Fiala, 2013):

$$u_{ij} = \frac{y_{ij} - D_j}{H_j - D_j}, \quad (4.1)$$

kde u_{ij} představuje jakousi normalizovanou hodnotu v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Přičemž D_j je minimální hodnota v rámci produkční jednotky a H_j je naopak maximální hodnota v rámci dané produkční jednotky. y_{ij} je v tomto případě vybraná hodnota z tabulky 4.1. Přehled takto upravených dat je zobrazen v tabulce 4.3:

Kraj	Počet obyvatel	Rozloha v km^2	Rozloha lesů v km^2	Počet zásahů	Přímá škoda v tis. Kč	Počet zaměstnanců	Počet požárů	Počet dopravních nehod	Ostatní výjezdy	Plané poplavy
Hl. město Praha	0,9446657	0	0	0,3637049	0,1658846	0,7167277	0,7299206	0,1162627	0,5107755	1
Středočeský	1	1	0,8066417	1	0,3101007	1	1	1	0,8086204	0,5462366
Jihočeský	0,3326821	0,9103983	1	0,2751020	0,0812826	0,4652015	0,2687555	0,2567615	0,5131700	0,2494624
Plzeňský	0,2714846	0,6715867	0,7905731	0,2647410	0,0622819	0,3980464	0,2246249	0,3048823	0,3481304	0,2086022
Karlovarský	0	0,2686158	0,3722550	0	0	0	0,0225066	0	0,0484435	0
Ústecký	0,5164133	0,4626739	0,4209963	0,3331868	1	0,5506716	0,5984113	0,2286618	0,4553325	0,5333333
Liberecký	0,1373594	0,2537610	0,3634173	0,1080691	0,0663272	0,0732601	0,1275375	0,2040745	0	0,0559140
Královéhradecký	0,2483224	0,4029710	0,3824317	0,2204710	0,0597416	0,2405372	0,1297440	0,3667018	0,1628293	0,1419355
Pardubický	0,2136592	0,3805469	0,3457418	0,1339404	0,0871251	0,1868132	0,0375110	0,2911837	0,1291214	0,0752688
Vysočina	0,2072842	0,5970291	0,5409748	0,3469388	0,0510682	0,3467644	0,0838482	0,2493853	0,6934979	0,8064516
Jihomoravský	0,8597981	0,6343079	0,5270487	0,6028885	0,2175456	0,7313797	0,4501324	0,4510011	0,5757967	0,2881720
Olomoucký	0,3311181	0,4551992	0,4820568	0,1417268	0,0459675	0,2844933	0,0860547	0,2191781	0,1648554	0,0559140
Zlínský	0,2814629	0,3283187	0,4084092	0,0348509	0,0472534	0,1672772	0	0,0758693	0,0346289	0,1043011
Moravskoslezský	0,9039149	0,4701486	0,5053562	0,7963579	0,1102799	0,7936508	0,6341571	0,5156305	1	0,8258065

Tabulka 4.3: Data převedená na normalizované hodnoty

4.4.1 CCR model

Jako první je pro výpočet efektivnosti HZS ČR využit CCR model. Vzhledem k tomu, že tento model je primárně určen pro základní modely s jedním stupněm produkce, je možné nejdříve vypočítat efektivnost prvního stupně a poté druhého zcela zvlášť. Následně je vypočítán průměr efektivnosti těchto stupňů a seřazení od nejefektivnějších jednotek po ty nejméně efektivní (viz tabulka 4.4):

Kraj	1.stupeň	2.stupeň	Průměr	Pořadí
Hl. město Praha	1	1	1	1.-2.
Středočeský	1	0,6464	0,8232	4.
Jihočeský	0,5087	0,6587	0,5837	11.
Plzeňský	0,6344	0,7003	0,6674	9.
Karlovarský	0	1	0,5	14.
Ústecký	0,6518	0,8773	0,7646	7.
Liberecký	0,5930	1	0,7965	5.
Královéhradecký	0,7095	0,8771	0,7933	6.
Pardubický	0,4839	1	0,7420	8.
Vysočina	1	1	1	1.-2.
Jihomoravský	0,7731	0,4871	0,6301	10.
Olomoucký	0,3664	0,7998	0,5831	12.
Zlínský	0,1128	1	0,5564	13.
Moravskoslezský	1	0,6574	0,8287	3.

Tabulka 4.4: Výsledky - CCR model

Z tabulky 4.4 je vidět, že nejefektivnější je HZS v hlavním městě a také na Vysočině.

Nejméně efektivní se v tomto případě jeví Karlovarský kraj, je to způsobeno především hodnotou pro první stupeň, která je rovna 0. Jak je vidět z tabulky 4.3, hodnoty v řádku u Karlovarského kraje jsou z větší části nulové, což znamená, že tento kraj má nejmenší vstupy i výstupy vůči ostatním krajům a právě díky tomuto je zde nyní nulová hodnota. Model totiž uvažuje, že na základě výstupů ostatních jednotek, má Karlovarský kraj nejmenší výstupy. Zároveň je možné si povšimnout, že model vůbec neuvažuje efektivnost druhého stupně, tudíž celková efektivnost Karlovarského kraje je 0,5.

4.4.2 BCC model

Dalším využitím modelem je BCC model, jehož výstupy jsou uvedeny v následující tabulce 4.5. BCC model je opět počítán nejdříve pro první stupeň a následně pro druhý stupeň zvlášť, ve čtvrtém sloupci je pak uveden průměr těchto dvou výstupů. A jednotlivé kraje jsou seřazeny dle hodnot efektivnosti sestupně od nejvyšší po tu nejnižší.

Kraj	1.stupeň	2.stupeň	Průměr	Pořadí
Hl. město Praha	1	1	1	1.-4.
Středočeský	1	0,6464	0,8232	10.
Jihočeský	0,5489	0,6587	0,6038	14.
Plzeňský	0,6995	0,7003	0,6999	12.
Karlovarský	1	1	1	1.-4.
Ústecký	0,8425	0,8773	0,8599	7.
Liberecký	1	1	1	1.-4.
Královéhradecký	1	0,8771	0,9386	6.
Pardubický	0,9698	1	0,9849	5.
Vysočina	1	1	1	1.-4.
Jihomoravský	0,8301	0,4871	0,6586	13.
Olomoucký	0,6859	0,7998	0,7429	11.
Zlínský	0,7168	1	0,8584	8.
Moravskoslezský	1	0,6574	0,8287	9.

Tabulka 4.5: Výsledky - BCC model

Z tabulky 4.5 lze vyčíst, že mezi efektivní jednotky se zařadil navíc oproti výsledkům za použití CCR modelu také Karlovarský kraj a Liberecký kraj, kdy Karlovarský kraj za použití modelu CCR dopadl nejhůře. To je způsobeno tím, že došlo k přidání podmínky konvexnosti a nyní je možné, aby více jednotek bylo efektivních.

Jak je vidět, tak například HZS ve Středočeském kraji si oproti předešlému modelu pohoršil v pořadí, ačkoliv jeho efektivnost zůstala neměnná. Nejhůře dopadl HZS v Jihočeském kraji, který se umístil na posledním místě.

4.4.3 Omid & Zegordi model

Další model, který byl použit pro výpočet efektivnosti HZS ČR v rámci jednotlivých krajů je model Omid & Zegordi, který již bere v úvahu oba stupně produkce. Výsledky tohoto modelu jsou uvedeny v tabulce 4.6:

Kraj	Efektivnost	Pořadí
Hl. město Praha	1	1.-2.
Středočeský	0,6464	8.
Jihočeský	0,4001	11.
Plzeňský	0,4899	10.
Karlovarský	0,9999	3.-4.
Ústecký	0,6952	5.
Liberecký	0,9999	3.-4.
Královéhradecký	0,6773	6.
Pardubický	0,6417	9.
Vysočina	1	1.-2.
Jihomoravský	0,3946	12.
Olomoucký	0,3490	13.
Zlínský	0,3368	14.
Moravskoslezský	0,6574	7.

Tabulka 4.6: Výsledky - model Omid & Zegordi

Nejefektivnější zůstávají HZS v Hl. městě Praha a zároveň také na Vysočině. V těsném závěsu jsou hasičské sbory v Karlovarském a Libereckém kraji. Svou pozici oproti CCR modelu si udržel Jihočeský kraj a také Královéhradecký kraj.

Velké skoky v pořadí je možné zaznamenat u Středočeského, Karlovarského a Moravskoslezského kraje. Vzhledem k tomu, že tento model již počítá s oběma stupni zároveň, jsou tyto změny v pořadí zcela samozřejmé.

Nejhůře hodnoceným krajem je v tomto případě tedy Zlínský kraj, což bude zřejmě způsobeno jeho nízkými hodnotami u počtu zásahů a poměrně nízkými hodnotami u konečných výstupů.

4.4.4 Li & Chen & Liang & Xie model

Poslední model, který je využit k výpočtu efektivnosti HZS ČR je model Li & Chen & Liang & Xie. Nejdříve je brán první stupeň jako ten hlavní, od kterého se odvíjí stupeň druhý. Pro porovnání je zde vypočítán také druhý přístup k tomuto problému a sice, že druhý stupeň je brán jako ten hlavní a první stupeň je jen jeho následníkem. Výsledky prvního přístupu jsou zobrazeny v tabulce 4.7:

Kraj	1.stupeň	2.stupeň	Efektivnost	Pořadí
Hl. město Praha	1	1	1	1.-2.
Středočeský	1	0,6465	0,6465	4.
Jihočeský	0,5087	0,6587	0,3351	10.
Plzeňský	0,6344	0,4359	0,2765	12.
Karlovarský	0	1	0	14.
Ústecký	0,6518	0,8774	0,5719	6.
Liberecký	0,5930	1	0,5930	5.
Královéhradecký	0,7095	0,6490	0,4605	8.
Pardubický	0,4839	1	0,4839	7.
Vysočina	1	1	1	1.-2.
Jihomoravský	0,7731	0,4871	0,3766	9.
Olomoucký	0,3664	0,7998	0,2930	11.
Zlínský	0,1128	0,3368	0,0380	13.
Moravskoslezský	1	0,6575	0,6575	3.

Tabulka 4.7: Výsledky - Li & Chen & Liang & Xie model

Výsledky prvního stupně jsou tedy zcela stejné jako výsledky u prvního stupně počítačného pomocí CCR modelu. Druhý stupeň je pak vypočítán pomocí zafixovaných hodnot ze CCR modelu. Ve čtvrtém sloupci se nachází celková efektivnost, která je spočtena vynásobením druhého a třetího sloupce mezi sebou.

Hlavní město Praha a Vysočina jsou opět nejefektivnější hasičské záchranné sbory. V těsném závěsu za nimi je Moravskoslezský kraj, který je hodnocený hůře v případě BCC modelu a modelu Omid & Zegordi.

Nejhůře je hodnocený opět Karlovarský kraj, což je způsobeno nulovou hodnotou u CCR modelu. Takže ačkoliv je tento kraj efektivní i přes nulovou hodnotu u prvního stupně, která je uvažována, nezbyvá mu nic jiného, než se spokojit s posledním místem v tabulce. Druhý nejhůře hodnocený je Zlínský kraj.

Pro porovnání je vypočítána efektivnost HZS ČR také dle druhého přístupu tohoto modelu, tzn. že druhý stupeň procesu je zvolen jako hlavní a první stupeň je následníkem. Hodnoty jsou zobrazeny v tabulce 4.8:

Kraj	2.stupeň	1.stupeň	Efektivnost	Pořadí
Hl. město Praha	1	1	1	1.-2.
Středočeský	0,6464	1	0,6464	4.
Jihočeský	0,6587	0	0	12.-14.
Plzeňský	0,7003	0,6344	0,4443	9.
Karlovarský	1	0,5975	0,5975	5.
Ústecký	0,8773	0,6519	0,5719	7.
Liberecký	1	0,5930	0,5930	6.
Královéhradecký	0,8771	0	0	12.-14.
Pardubický	1	0,4839	0,4839	8.
Vysočina	1	1	1	1.-2.
Jihomoravský	0,4871	0	0	12.-14.
Olomoucký	0,7998	0,3664	0,2930	10.
Zlínský	1	0,1128	0,1128	11.
Moravskoslezský	0,6574	1	0,6574	3.

Tabulka 4.8: Výsledky - Li & Chen & Liang & Xie model

Nejlépe je opět hodnoceno Hl. město Praha spolu s Vysočinou.

Avšak nastává zde zajímavá situace, kdy jsou Jihočeský, Královéhradecký a Jihomoravský kraj, i přes slušnou efektivnost druhého stupně, hodnoceny jako zcela neefektivní v rámci stupně prvního, tzn. že jejich celková efektivnost je poté nulová a obsadí poslední příčky tabulky. Nicméně tyto kraje ani v ostatních modelech nevévodí tabulkám, ale jsou umístěny spíše na horších pozicích.

4.4.5 Křížová efektivnost

Nakonec je třeba vypočítat přesné pořadí krajů. K tomuto kroku jsou využity výsledky z Omid & Zegordi modelu. V tabulce 4.9 je možné vidět výsledná pořadí daných krajů. Průměrné hodnoty jsou počítány z tabulky 4.10 níže.

Kraj	Průměr	Pořadí
Hl. město Praha	0,6148	5.
Středočeský	0,6123	6.
Jihočeský	0,4319	12.
Plzeňský	0,4727	10.
Karlovarský	0,5514	9.
Ústecký	0,5662	8.
Liberecký	0,8202	2.
Královéhradecký	0,6537	3.
Pardubický	0,5739	7.
Vysočina	0,8941	1.
Jihomoravský	0,4487	11.
Olomoucký	0,3549	13.
Zlínský	0,2600	14.
Moravskoslezský	0,6445	4.

Tabulka 4.9: Křížová efektivnost - celkové pořadí

V tomto případě je zajímavé, že kraj hl. město Praha se umístil až na pátém místě, což je u tohoto kraje velice neobvyklé, vzhledem k obsazování prvních příček v hodnocení u všech použitých modelů. To je způsobeno především tím, že křížová efektivnost je založena na zcela odlišném konceptu než ostatní modely. Tudíž se výsledky mohou odlišovat.

V tabulce 4.10 jsou vypočítány křížové efektivnosti pro dané kraje. Tabulka má rozměry 14 x 14, to je z toho důvodu, že se hodnotí efektivnost krajů mezi sebou za pomoci fixních vstupů a výstupů a optimálních vah získaných pomocí vybraného DEA modelu. Ve sloupcích tedy čísla reprezentují jednotlivé kraje ve stejném pořadí, jako jsou v řádcích. Na diagonále je možné nalézt výsledné hodnoty z Omid & Zegordi modelu.

Kraj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Hl. město Praha	1,0000	0,7874	0,4781	0,6741	0,4780	0,8822	0,7688	0,6235	0,1525	0,4781	0,8012	0,1526	0,5290	0,8010
Středočeský	0,7764	0,6464	0,5018	0,7775	0,5017	0,6164	0,5457	0,7578	0,4606	0,5018	0,8009	0,4607	0,4539	0,7710
Jihočeský	0,3640	0,4827	0,4001	0,5707	0,4001	0,4431	0,3941	0,5604	0,3420	0,4002	0,4931	0,3421	0,3323	0,5222
Plzeňský	0,4267	0,5558	0,4360	0,4899	0,4359	0,4587	0,4111	0,6524	0,3869	0,4360	0,5659	0,3870	0,3845	0,5906
Karlovarský	0,0614	0,1081	0,9971	0,2033	0,9999	0,2441	0,9995	0,2131	0,9988	0,9979	0,1126	0,9983	0,6115	0,1744
Ústecký	0,7016	0,7427	0,4488	0,6882	0,4486	0,6952	0,6552	0,6472	0,2570	0,4488	0,7356	0,2571	0,4470	0,7543
Liberecký	0,4570	0,5989	0,9996	0,7583	1,0000	0,5892	0,9999	0,7659	0,9999	0,9998	0,6065	0,9999	0,9999	0,7084
Královéhradecký	0,6103	0,7137	0,6491	0,7882	0,6490	0,4904	0,5167	0,6773	0,6278	0,7360	0,7360	0,6279	0,6074	0,7214
Pardubický	0,4886	0,5879	0,6111	0,6819	0,6111	0,3267	0,3738	0,6987	0,6417	0,6111	0,6196	0,6418	0,5511	0,5890
Vysočina	0,6858	0,8390	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,5209	1,0000	0,9507	0,5210	1,0000	1,0000
Jihomoravský	0,6307	0,6388	0,3516	0,6129	0,3515	0,4609	0,3574	0,5970	0,3226	0,3516	0,3946	0,3227	0,2998	0,5892
Olomoucký	0,3482	0,4172	0,3238	0,4746	0,3237	0,2520	0,2303	0,4747	0,3490	0,3238	0,4237	0,3490	0,2715	0,4069
Zlínský	0,1708	0,2120	0,3108	0,2821	0,3109	0,2401	0,2968	0,2850	0,1875	0,3108	0,2418	0,1876	0,3368	0,2664
Moravskoslezský	0,7865	0,7865	0,5746	0,7929	0,5745	0,7245	0,6429	0,7740	0,3975	0,5746	0,8056	0,3976	0,5339	0,6574

Tabulka 4.10: Křížová efektivnost

4.4.6 Souhrnné výsledky

Výsledky všech modelů jsou shrnuty v následující tabulce:

Kraj	CCR model	BCC model	O & Z model	L & Ch & L & X model 1	L & Ch & L & X model 2	Pořadí
Hl. město Praha	1	1	1	1	1	5.
Středočeský	0,8232	0,8232	0,6464	0,6465	0,6464	6.
Jihočeský	0,5837	0,6038	0,4001	0,3351	0	12.
Plzeňský	0,6674	0,6999	0,4899	0,2765	0,4443	10.
Karlovarský	0,5	1	0,9999	0	0,5975	9.
Ústecký	0,7646	0,8599	0,6952	0,5719	0,5719	8.
Liberecký	0,7965	1	0,9999	0,5930	0,5930	2.
Královéhradecký	0,7933	0,9386	0,6773	0,4605	0	3.
Pardubický	0,7420	0,9849	0,6417	0,4839	0,4839	7.
Vysočina	1	1	1	1	1	1.
Jihomoravský	0,6301	0,6586	0,3946	0,3766	0	11.
Olomoucký	0,5831	0,7429	0,3490	0,2930	0,2930	13.
Zlínský	0,5564	0,8584	0,3368	0,0380	0,1128	14.
Moravskoslezský	0,8287	0,8287	0,6574	0,6575	0,6574	4.

Tabulka 4.11: Souhrnné výsledky

V druhém sloupci jsou shrnuty průměrné efektivnosti z CCR modelu, dále pak z BCC modelu. Ve čtvrtém sloupci jsou uvedeny výsledné hodnoty pro model Omid & Zegordi a následně se v pátém a šestém sloupci nacházejí hodnoty vycházející z modelu Li & Chen & Liang & Xie. Tyto hodnoty se liší dle volby hlavního procesu a jeho následníka.

Jak je vidět, u modelu Li & Chen & Liang & Xie velice záleží na volbě hlavního procesu, podle toho jsou následně ovlivněny celkové výsledky. I přes to jsou zde kraje, které tato volba příliš neovlivní, jedná se o Hl. město Praha a Vysočinu, které jsou efektivní dle každého modelu a dále pak Středočeský, Ústecký, Liberecký, Pardubický, Olomoucký a Moravskoslezský kraj u kterých jsou efektivnosti v porovnání tohoto modelu stejné, nebo odlišné o tisícinu.

Pořadí krajů vychází z křížové efektivnosti. Jak již bylo zmíněno, nejzajímavějším údajem je v tomto případě kraj Hl. město Praha, který obsadil až páté místo.

4.5 MPL - modely

4.5.1 CCR model

TITLE CCRmodel;

OPTION

excelworkbook="dataCCR1.xlsx"

INDEX

I:=1..3;

J:=1..14;

K:=1;

G:=1;

DATA

X[I,J]:=EXCELRange("vstupvaha");

Y[K,J]:=EXCELRange("vystupvaha1");

R[G,J]:=EXCELRange("vystupvaha2");

S:=0.0001;

VARIABLE

W[K];

V[I];

E[G];

MAX (sum(K:W[K]*Y[K,J:=(#)])-sum(G:E[G]*R[G,J:=(#)]));

SUBJECT TO

f[J]: sum(K:W[K]*Y[K,J])-sum(G:E[G]*R[G,J])-sum(I:V[I]*X[I,J])<=0;

s:sum(I:V[I]*X[I,J:=(#)])=1;

t[K]: W[K]>=S;

u[I]: V[I]>=S;

m[G]: E[G]>=S;

END

kde za (#) se dosazuje daný kraj. Tento model je pro výpočet efektivnosti prvního stupně.

TITLE CCRmodel;

OPTION

excelworkbook="dataCCR1.xlsx"

INDEX

H:=1;

J:=1..14;

K:=1;

L:=1..4;

DATA

X[H,J]:=EXCELRange("vstup222");

Y[L,J]:=EXCELRange("vystupvaha12");

Z[K,J]:=EXCELRange("vstup111");

S:=0.0001;

VARIABLE

W[K];

V[H];

U[L];

MAX (sum(L:U[L]*Y[L,J:=(#)]));

SUBJECT TO

f[J]: sum(L:U[L]*Y[L,J])-sum(K:W[K]*Z[K,J])-sum(H:V[H]*X[H,J])<=0;

s:sum(K:W[K]*Z[K,J:=(#)])+sum(H:V[H]*X[H,J:=(#)])=1;

t[K]: W[K]>=S;

u[H]: V[H]>=S;

r[L]: U[L]>=S;

END

kde za (#) je dosazována daná produkční jednotka. Tento model slouží pro výpočet efektivnosti druhého stupně.

4.5.2 BCC model

```
TITLE BCCmodel;
OPTION
excelworkbook="dataCCR1.xlsx"
```

```
INDEX
```

```
I:=1..3;
J:=1..14;
K:=1;
G:=1;
```

```
DATA
```

```
X[I,J]:=EXCELRange("vstupvaha");
Y[K,J]:=EXCELRange("vystupvaha1");
R[G,J]:=EXCELRange("vystupvaha2");
S:=0.0001;
```

```
VARIABLE
```

```
W[K];
V[I];
E[G];
M;
```

```
MAX (sum(K:W[K]*Y[K,J:=(#)])-sum(G:E[G]*R[G,J:=(#)]))+M;
```

```
SUBJECT TO
```

```
f[J]: sum(K:W[K]*Y[K,J])-sum(G:E[G]*R[G,J])-sum(I:V[I]*X[I,J])+M<=0;
s:sum(I:V[I]*X[I,J:=(#)])=1;
t[K]: W[K]>=S;
u[I]: V[I]>=S;
m[G]: E[G]>=S;
```

```
END
```

kde se za (#) dosazují hodnocené produkční jednotky. Tento model je použitý pro první stupeň.

TITLE BCCmodel;

OPTION

excelworkbook="dataCCR1.xlsx"

INDEX

H:=1;

J:=1..14;

K:=1;

L:=1..4;

DATA

X[H,J]:=EXCELRange("vstup222");

Y[L,J]:=EXCELRange("vystupvaha12");

Z[K,J]:=EXCELRange("vstup111");

S:=0.0001;

VARIABLE

W[K];

V[H];

U[L];

MAX (sum(L:U[L]*Y[L,J:=(#)]))+M;

SUBJECT TO

f[J]: sum(L:U[L]*Y[L,J])-sum(K:W[K]*Z[K,J])-sum(H:V[H]*X[H,J])+M<=0;

s:sum(K:W[K]*Z[K,J:=(#)]+sum(H:V[H]*X[H,J:=(#)])=1;

t[K]: W[K]>=S;

u[H]: V[H]>=S;

r[L]: U[L]>=S;

END

kde se za (#) dosazuje daná produkční jednotka. Tento model je využitý pro druhý stupeň.

4.5.3 Omid & Zegordi model

```

TITLE modelOZ;
OPTION
excelworkbook="ModelOZ.xlsx"

INDEX
I:=1..3;
J:=1..14;
K:=1;
G:=1;
H:=1;
L:=1..4;

DATA
X[I,J]:=EXCELRange("vstup1");
Y[K,J]:=EXCELRange("vystup12");
R[G,J]:=EXCELRange("vystup1");
Q[H,J]:=EXCELRange("vstup2");
T[L,J]:=EXCELRange("vystup2");
S:=0.0001;

VARIABLE
W[K];
V[I];
E[G];
Z[H];
U[L];

MAX (sum(L:U[L]*T[L,J:=(#)])-sum(G:E[G]*R[G,J:=(#)]));

SUBJECT TO
f[J]: sum(L:U[L]*T[L,J])-sum(G:E[G]*R[G,J])-sum(I:V[I]*X[I,J])-sum(H:Z[H]*Q[H,J])<=0;
s:sum(I:V[I]*X[I,J:=(#)])+sum(H:Z[H]*Q[H,J:=(#)])=1;
n[J]:sum(K:W[K]*Y[K,J])-sum(G:E[G]*R[G,J])-sum(I:V[I]*X[I,J])<=0;
o[J]:sum(L:U[L]*T[L,J])-sum(K:W[K]*Y[K,J])-sum(H:Z[H]*Q[H,J])<=0;
t[K]: W[K]>=S;
u[I]: V[I]>=S;
m[G]: E[G]>=S;
p[H]: Z[H]>=S;
q[L]: U[L]>=S;
END

```

kde za (#) se dosadí produkční jednotka, jejíž efektivnost je počítána.

4.5.4 Li & Chen & Liang & Xie model

TITLE modelLCHLX;

OPTION

excelworkbook="ModelLCHLX.xlsx"

INDEX

I:=1..3;

J:=1..14;

K:=1;

G:=1;

H:=1;

L:=1..4;

DATA

X[I,J]:=EXCELRange("vstup1");

Y[K,J]:=EXCELRange("vystup12");

R[G,J]:=EXCELRange("vystup1");

Q[H,J]:=EXCELRange("vstup2");

T[L,J]:=EXCELRange("vystup2");

VARIABLE

Z[H];

U[L];

V[I];

W[K];

E[G];

MAX (sum(L:U[L]*T[L,J:=(#)]));

SUBJECT TO

s:sum(K:W[K]*Y[K,J:=(#)]) + sum(H:Z[H]*Q[H,J:=(#)]) = 1;

o:sum(K:W[K]*Y[K,J:=(#)]) - sum(G:E[G]*R[G,J:=(#)]) - ((OPT) * sum(I:V[I]*X[I,J:=(#)])) = 0;

f[J]: sum(L:U[L]*T[L,J]) - sum(K:W[K]*Y[K,J]) - sum(H:Z[H]*Q[H,J]) ≤ 0;

n[J]: sum(K:W[K]*Y[K,J]) - sum(G:E[G]*R[G,J]) - sum(I:V[I]*X[I,J]) ≤ 0;

p[H]: Z[H] ≥ 0;

q[L]: U[L] ≥ 0;

r[I]: V[I] ≥ 0;

sl[K]: W[K] ≥ 0;

t[G]: E[G] ≥ 0;

END

kde za (#) se dosazuje daná produkční jednotka. A (OPT) představuje optimální hodnoty z CCR modelu, který byl vypočítán pro první stupeň. CCR model je zcela stejný jako CCR model výše pro první model.

Druhý model má v softwaru MPL tuto podobu:

```
TITLE modelLCHLX;
```

```
OPTION
```

```
excelworkbook="ModelLCHLX.xlsx"
```

```
INDEX
```

```
I:=1..3;
```

```
J:=1..14;
```

```
K:=1;
```

```
G:=1;
```

```
H:=1;
```

```
L:=1..4;
```

```
DATA
```

```
X[I,J]:=EXCELRange("vstup1");
```

```
Y[K,J]:=EXCELRange("vystup12");
```

```
R[G,J]:=EXCELRange("vystup1");
```

```
Q[H,J]:=EXCELRange("vstup2");
```

```
T[L,J]:=EXCELRange("vystup2");
```

```
VARIABLE
```

```
Z[H];
```

```
U[L];
```

```
V[I];
```

```
W[K];
```

```
E[G];
```

```
MAX (sum(K:W[K]*Y[K,J:=(#)])-sum(G:E[G]*R[G,J:=(#)]));
```

SUBJECT TO

$s: \sum(I:V[I]*X[I,J:=\#])=1;$
 $o: \sum(L:U[L]*T[L,J:=\#]) - ((OPT) * (\sum(H:Z[H]*Q[H,J:=\#]) + \sum(K:W[K]*Y[K,J:=\#]))) = 0;$
 $f[J]: \sum(L:U[L]*T[L,J]) - \sum(K:W[K]*Y[K,J]) - \sum(H:Z[H]*Q[H,J]) \leq 0;$
 $n[J]: \sum(K:W[K]*Y[K,J]) - \sum(G:E[G]*R[G,J]) - \sum(I:V[I]*X[I,J]) \leq 0;$
 $p[H]: Z[H] \geq 0;$
 $q[L]: U[L] \geq 0;$
 $r[I]: V[I] \geq 0;$
 $sl[K]: W[K] \geq 0;$
 $t[G]: E[G] \geq 0;$
 END

kde za (#) se dosazuje daná produkční jednotka. A (OPT) představuje optimální hodnoty z CCR modelu, který byl vypočítán pro druhý stupeň. CCR model je zcela stejný jako CCR model výše pro druhý model.

Závěr

Téma této diplomové práce jsem si vybrala, protože DEA modely se během studia probírají pouze povrchně, tudíž je pro nás studenty velice těžké je pochopit. Byla to pro mne tedy výzva, kterou jsem s chutí řešila.

Samozřejmě se objevily problémy, se kterými bylo nutné se nějakým způsobem vypořádat. Vzhledem k tomu, že jsem se rozhodla použít pro psaní této diplomové práce textový editor Latex, místo běžněji používaného Microsoft Word, setkala jsem se mnohdy s nutností obrátit se na internetové manuály či odborníky, abych zjistila například jak otočit tabulku o 90° nebo jak spustit citace. Nakonec jsem se ale dokázala se vším dříve či později vypořádat.

Další překážkou bylo čtení všech odborných článků v angličtině, občas je obtížné porozumět textu, když některé odborné termíny nemají ani překlad do českého jazyka, zároveň je velice často používáno jiné označení pro proměnné, což ztěžuje orientaci v daném problému. Probrala jsem se velkým počtem článků, z nichž nakonec vznikly dva použitelné modely pro tuto práci.

Vzhledem k nepříliš častému zahrnování vstupů, které nejsou součástí prvního stupně, a výstupů, které nejsou součástí druhého stupně, bylo nutné některé modely upravit tak, aby je bylo možné v této práci využít.

Mezi další překážku lze zařadit také software MPL, který mi ne vždy usnadňoval práci, strávila jsem hodně času správným zápisem modelu do programu MPL tak, aby byly výpočty správné. To se mnohdy podařilo až po několika hodinách.

Mezi základní modely byl zahrnut nový model CH-CCR, tento model není využitý v praktické části. Je to způsobeno tím, že pro tento model nejsou dostupná potřebná data, například o kooperaci mezi hasičskými záchrannými sbory. Proto je již na konci kapitoly uveden malý příklad, který zobrazuje, jak daný model funguje. Vzhledem k tomu, že tento model není použit v žádné české literatuře, je tato diplomová práce jeho premiérou.

Dále jsou využity pouze dva základní modely CCR a BCC. Ty ovšem nejsou pro síťové DEA modely vhodné. Byly tedy uvedeny další dva modely, které již jsou přímo dělané pro složitější dvoustupňové DEA modely. Osobně bych pro výpočet efektivnosti volila Omid & Zegordi model, který je svým způsobem jednodušší (nemusí se počítat dva separátní modely) a jsem přesvědčená, že dává důvěryhodnější výsledky, což je způsobeno tím, že ani jeden kraj nevyšel absolutně neefektivní.

Nakonec jsou uvedeny modely pro uspořádání efektivních jednotek. Vzhledem ke složitosti výpočtů je u reálného příkladu využit pouze koncept křížové efektivnosti. Výsledky tohoto uspořádání jsou nicméně celkem překvapivé. Hl. město Praha se poprvé ukazuje na jiné příčce než je první, respektive druhá. To může být způsobeno volbou výchozího modelu, nicméně ostatní modely nepovažuji za zcela vhodné pro tuto aplikaci, protože váhy jsou u základních modelů odlišné v rámci stupňů a model Li & Chen & Liang & Xie je značně ovlivněný výběrem hlavního a vedlejšího stupně.

Lze tedy říci, že nejefektivnější je kraj Vysočina a hl. město Praha i přes to, že dle konceptu křížové efektivnosti se umístil na pátém místě. Nejhorší hodnocen je pak kraj Olomoucký a Zlínský. Nicméně data, ze kterých je čerpáno lze jen velice těžko změnit. Logicky lze hýbat pouze s jednou proměnnou a to je počet zaměstnanců v krajích. Ostatní proměnné lze jen těžko nějakým způsobem ovlivnit, což vyplývá z jejich povahy (např. rozloha kraje či počet obyvatel v kraji). Dalším možným zásahem do efektivnosti krajů by mohlo být zvýšení prevence, například v rámci přednášek na školách apod.

Literatura

- Charnes A., Cooper W. W., and Rhodes E. L. 1976. "Measuring the efficiency of decision making units". *European Journal of Operational Research* 2 (6): 429–444.
- Chen Y., Liang L., and Zhu J. 2009. "Equivalence in two-stage DEA approaches". *European Journal of Operational Research* 193 (2): 600–604.
- Andersen P., Petersen N. Ch. 1993. "A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis". *Management Science* 39 (10): 1261–1264.
- Banker R. D., Charnes A., and Cooper W. W. 1984. "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis". *Management Science* 30 (9): 1078–1092.
- Fiala, P. 2013. *Modely a metody rozhodování*. 49, 175–215. Vysoká škola ekonomická v Praze, Nakladatelství Oeconomica.
- Jablonský J., Dlouhý M. 2015. *Modely hodnocení efektivnosti a alokace zdrojů*. Kamil Mařík - PROFESSIONAL PUBLISHING.
- Ji A., Qiu H., Lin H., and Liu H. 2015. "Data envelopment analysis with interactive variables". *Management Decision* 53 (10): 2390–2406.
- Kao, Ch. 2008. "A linear formulation of the two-level DEA model". *Omega* 36 (6): 958–962.
- Lagová M., Jablonský J. 2014. *Lineární modely*. Vysoká škola ekonomická v Praze, Nakladatelství Oeconomica.
- Li Y., Liang L., Chen Y., and Xie J. 2012. "DEA models for extended two-stage network structures". *Omega* 40 (5): 611–618.
- Liang L., Cook W., and Zhu J. 2008. "DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition". *Naval Research Logistics (NRL)* 55 (7): 643–653.
- Mehrabian S., Alirezaee M. R., and Jahanshahloo G. R. 1999. "A Complete Efficiency Ranking of Decision Making Units in Data Envelopment Analysis". *Computational Optimization and Applications* 14 (2): 261–266.
- Oficiální stránky Českého statistického úřadu. <https://www.czso.cz/>.
- Oficiální stránky Hasičského záchranného sboru České republiky. <http://www.hzscr.cz/>.
- Oficiální stránky společnosti Maximal Software. <http://www.maximalsoftware.com/>.
- Omid A., Zegordi S. H. 2015. "Integrated AHP and network DEA for assessing the efficiency of Iranian handmade carpet industry". *Growing Science Ltd.* 53 (4): 477–486.
- Ziari S., Raissi S. 2016. "Ranking efficient DMUs using minimizing distance in DEA". *Journal of Industrial Engineering International* 12 (2): 237242.