

Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta informatiky a statistiky

Studijní program: Kvantitativní metody v ekonomice

Studijní obor: Statistika



RIZIKOVÉ MODELY ANUITNÍCH ŠKOD Z NEŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ

Diplomová práce

Autor diplomové práce: Bc. Tomáš Šmarda

Vedoucí diplomové práce: Ing. Pavel Zimmermann, Ph.D.

Akademický rok 2017/2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Praze dne 8. 1. 2018

.....
podpis

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu diplomové práce Ing. Pavlu Zimmermannovi, Ph.D. za pomoc při výběru zajímavého tématu práce a za rady a připomínky, které mi pomohly k jejímu dokončení. Chtěl bych poděkovat také svým rodičům, kteří mi umožnili studovat a za podporu, které se mi od nich dostávalo.

Název diplomové práce: Rizikové modely anuitních škod z neživotního pojištění

Abstrakt

Cílem této práce je popsat, vysvětlit a porovnat výpočet solventnostního kapitálového požadavku pomocí aplikace metod Nested Monte Carlo a Least squares Monte Carlo na příkladu anuit v neživotním pojištění. V teoretické části jsou obě metody popsány a je vysvětlen rozdíl mezi nimi. Na modelovém příkladu anuitních škod je simulováno rozdělení nejlepšího odhadu za jeden rok oběma metodami a je spočten 99.5% kvantil rozdělení nejlepšího odhadu za jeden rok. Obě metody jsou si v odhadech podobné a dají se využít k výpočtu kapitálového požadavku. Velkou výhodou metody Least squares Monte Carlo je nižší náročnost na výpočetní čas, při zachování přesnosti simulace rozdělení nejlepšího odhadu za jeden rok.

Klíčová slova: Nested Monte Carlo, Least squares Monte Carlo, proxy modely, annuity, nejlepší odhad

Title of the Master's Thesis: Risk models of annuity damages in non-life insurance

Abstract

Main goal of this thesis is to describe, explain and compare calculation of solvency capital requirement with use of Nested Monte Carlo and Least squares Monte Carlo methods on example from non-life insurance area. In the theoretical part, both methods were described and the difference between them was explained. On the model example of annuity damage, the distribution of best estimate in one year was simulated and 99.5% quantile of this distribution was calculated. Both methods are similar in its estimates and provide us resembling results which could be used for solvency capital requirement. The great advantage of the Least squares Monte Carlo method is the lower computational time, while preserving the accuracy of distribution of best estimate in one year.

Key words: Nested Monte Carlo, Least squares Monte Carlo, proxy models, annuity, best estimate

Obsah

1.	Úvod	3
2.	Solvency II.....	5
2.1	Oceňování položek rozvahy.....	6
2.2	Nejlepší odhad	7
2.3	Pilíř I	7
2.4	Pilíř II.....	10
2.5	Pilíř III.....	11
2.6	Kritika	11
3.	Pojištění vztahující se k anuitám	12
3.1	Povinné ručení	12
3.2	Variabilní anuity	13
4.	Modely úrokových sazeb.....	15
4.1	Návrat k průměru (mean-reversion).....	16
4.2	Vašíčkův model	17
4.3	CIR model.....	18
5.	Proxy modely.....	19
5.1	Nested Monte Carlo	20
5.2	Least squares Monte Carlo.....	22
5.3	Curve fitting.....	27
5.4	Replicating portfolios.....	29
6.	Příklad využití LSMC na opcích	30
6.1	Dělení opcí a základní vlastnosti	31
6.1	Oceňování evropských opcí.....	33
6.2	Oceňování amerických opcí.....	34
6.2.1	Příklad ocenění americké put opce.....	35
7.	Aplikace LSMC na anuity	41
7.1	Proměnné vstupující do modelu.....	41

7.1.1	Náhodné proměnné	41
7.1.2	Generační úmrtnostní tabulky	42
7.1.3	Nenáhodné proměnné.....	42
7.2	Model annuity	43
7.3	Nested Monte Carlo	44
7.4	Metoda AV (Antithetic Variates) pro snížení rozptylu v simulacích MC ..	49
7.5	Vektorizace	51
7.6	Least squares Monte Carlo.....	53
7.6.1	Kalibrační část.....	53
7.6.2	Simulace BE_1	59
7.7	Porovnání Least squares Monte Carlo a Nested Monte Carlo	61
8.	Závěr	63
9.	Zdroje.....	65
9.1	Použité knihovny v R.....	69
10.	Seznam obrázků.....	70
11.	Seznam Tabulek	71
12.	Přílohy	72

1. Úvod

Jednou z kategorií neživotního pojištění je pojištění odpovědnosti z provozu motorových vozidel, které kryje škody způsobené na majetku nebo zdraví třetích osob. Tato práce se soustředí na škody na zdraví způsobené poškozeným osobám. Charakter plnění takovýchto škod může mít různou formu a může být poskytováno z různého titulu. Odškodnění může být jednorázové nebo může být vypláceno v pravidelných platbách, v konstantních nebo variabilních částkách. Právě anuitním výplatám se tato práce věnuje.

Typickým příkladem, kdy může dojít k nároku na plnění prostřednictvím anuit, je ztráta na výděлку nebo náklady na trvalou péči o poškozeného. Dalším případem mohou být v případě úmrtí poškozeného výplaty rent jako sirotčí nebo vdovské důchody. V případě vzniku škodní události tak pojišťovna musí vyčlenit prostředky pro pokrytí budoucích nákladů spojených s těmito platbami. Na výši prostředků takto vyhrazených má vliv mnoho rizikových faktorů, které mají stochastický charakter a ve většině případů se tak nelze obejít bez simulací. Nová směrnice Evropského parlamentu Solventnost II vyžaduje, aby pojišťovny držely dostatečné množství kapitálu (solventnostní kapitálový požadavek) z důvodu zachování solvence na jednoletém horizontu s určitou pravděpodobností. Jak bude ukázáno v praktické části, odhad množství požadovaného kapitálu může být výpočetně náročný.

Hlavním cílem této práce je popsat a porovnat dvě metody pro odhad solventnostního kapitálového požadavku. První metodou je Nested Monte Carlo, která je výpočetně velice náročná a její použití právě z tohoto důvodu není praktické. Druhou metodou je Least squares Monte Carlo, která má za cíl zjednodušit simulace spojené s odhadem solventnostního kapitálového požadavku a zrychlit tak čas jeho výpočtu. Obě metody budou porovnány na modelovém příkladu anuity z neživotního pojištění s vyplácenou variabilní částkou. Většina výpočtů bude provedena v programu R s využitím vlastních kódů.

V prvních částech této práce bude uveden rámec Solvency II a definována úloha odhadu solventnostního kapitálového požadavku. V dalších kapitolách teoretické části budou popsány modely rizikových faktorů vstupujících do simulací a dvě porovnávané metody odhadu kapitálového požadavku Nested Monte Carlo a Least squares Monte Carlo.

Pro úplnost budou popsány i některé další používané metody, které ale nebudou aplikovány v praktické části.

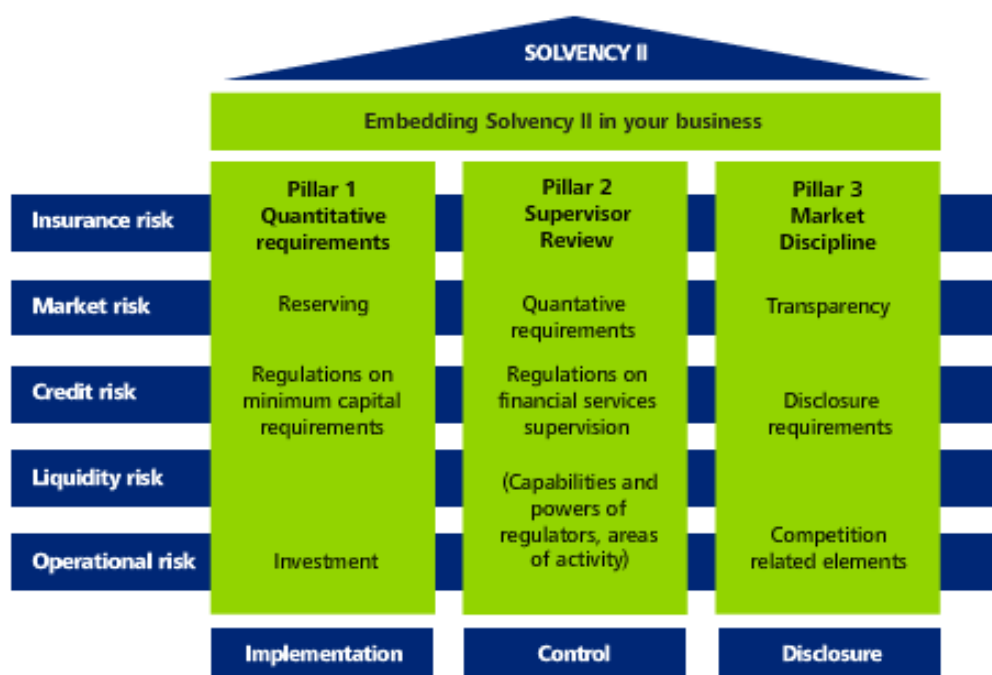
V praktické části budou prozkoumány výsledky jednotlivých metod a jejich porovnání. Dále budou na příkladech ukázány dvě techniky pro zrychlení simulací. První z těchto metod je vektorizace kódu, která může v některých případech redukovat výpočetní čas. Pro zrychlení konvergence simulací metodou Monte Carlo se dají použít techniky pro snížení rozptylu. Jednou těchto metod je Antithetic variables, kterou v praktické části použijeme a jejíž aplikace urychlí simulace.

Přínosem této práce je popsání a porovnání klasické simulace Nested Monte Carlo s novou moderní metodou Least squares Monte Carlo. Z analýzy dostupných zdrojů vyplynulo, že v ČR zřejmě neexistuje řešený případ aplikace Least squares Monte Carlo na anuity v neživotním pojištění. Celkové dostupné množství literatury ohledně aplikace Least squares Monte Carlo v pojišťovnictví je velmi malé. Většina materiálů, ze kterých bylo čerpáno, pochází ze studií různých konzultačních společností, které působí v oblasti pojišťovnictví. Vědeckých článků na toto téma je naprosté minimum.

Původní metoda Least squares Monte Carlo vznikla kvůli snazšímu oceňování amerických opcí. V této práci bude ukázán příklad ocenění americké opce. Uvést metodu Least squares Monte Carlo také na případu opcí je vhodné, protože literatura na toto téma je více rozpracovaná a mnoho problémů, které jsou řešeny při aplikaci v pojišťovnictví, již bylo řešeno v rámci oceňování opcí.

2. Solvency II

Na úplném začátku této práce by bylo dobré zmínit základní kontext, ve kterém se budeme pohybovat. Podnikání pojišťoven je v Evropské unii upraveno Směrnicí Evropského parlamentu a rady 2009/138, zkráceně Solventnost II. Této směrnici předcházela první směrnice Rady 73/239/EEC Evropských společenství z roku 1973, ke které se postupem času přidávalo mnoho dalších směrnic (souhrnně Solventnost I). V Solventnosti II je část směrnic týkajících se působení pojišťoven a zajišťoven platných v EU přepracována a sjednocena do jednoho dokumentu. Skládá se ze třech částí neboli pilířů, jak je možno vidět na obrázku 2.1. Problematika týkající se jednotlivých pilířů bude popsána v dalších kapitolách.



Obrázek 2.1: Tři pilíře Solvency II

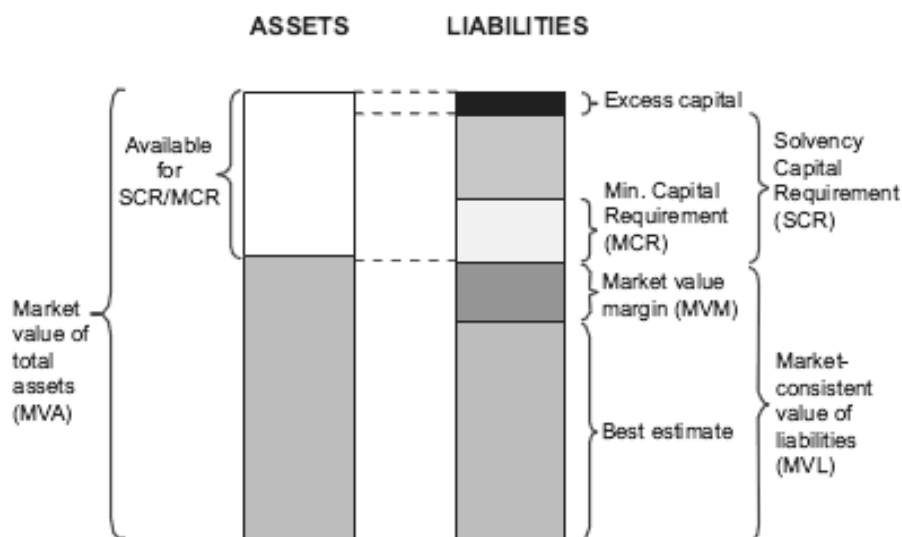
Zdroj: <http://www.asymptotix.eu/content/solvency-ii>

Jedním z předmětů zájmu této regulace je stanovení kapitálového požadavku, který musí instituce držet proti nepředvídaným událostem, jako jsou krize, přírodní pohromy, atd. Velikost tohoto kapitálového požadavku by měla odrážet množství použitelného kapitálu pojišťoven a zajišťoven, které umožní absorbovat vzniklé ztráty na horizontu jednoho roku a dodržet tak závazky vůči pojistníkům a obmyšleným osobám s vysokou

mírou pravděpodobnosti na horizontu jednoho roku, typicky s 99,5% pravděpodobností. Určitý požadavek nakapitál obsahovala už Solventnost I, ale v souvislosti s rozvojem trhu, kdy se instituce začaly stávat nadnárodní a investovat do různých aktiv na mnoha trzích, přistoupil Evropský parlament k revizi a zpřísnění požadavků kladených na instituce. Směrnice vstoupila v platnost po několika odkladech na začátku roku 2016. Solventnost II je do jisté míry podobná konceptu Basel III, který je souborem opatření regulující působení bank.

2.1 Oceňování položek rozvahy

Solventnost II klade velký důraz na správné ocenění jednotlivých položek rozvahy a ocenění obou položek rozvahy by mělo odpovídat reálné hodnotě. Na straně aktiv se položky oceňují pomocí tržní hodnoty. Vzhledem k tomu, že pojišťovny většinou investují do veřejně obchodovatelných cenných papírů, například státních dluhopisů, je cena známá. Pokud se v aktivech nachází majetek, který se nedá tržně ocenit, stanoví se jeho cena na základě modelu. Zjednodušená rozvaha pojišťovny je znázorněna na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Rozvaha pojišťovny

Zdroj: <https://publications.parliament.uk/pa/ld200708/ldselect/ldcom/42/7112002.htm>

Ocenění pasivní strany rozvahy pojišťovny je složitější než v případě aktiv. Pasivní strana rozvahy obsahuje položky jako technické rezervy, které většinou není možné tržně ocenit, protože se s nimi běžně neobchoduje. Je tedy třeba stanovit jejich reálnou hodnotu, jiným způsobem (na obrázku 2.2, MVL). Riziková marže se přičítá k nejlepšimu odhadu

(definován v následující kapitole) a je součástí technických rezerv. Protože k vypořádání může dojít v budoucnu, kdy neznáme přesný termín ani výši plnění, je třeba z tohoto důvodu zahrnout rizikovou marži k nejlepšímu odhadu. Technické rezervy, tedy závazky pojišťovny z budoucích plnění, se skládají z nejlepšího odhadu a rizikové marže.

2.2 Nejlepší odhad

Nejproblematictější je reálné ocenění nejlepšího odhadu. Nejlepší odhad (Best estimate - BE_0) v čase $t = 0$, tedy dnes, je v Solventnosti II definován jako pravděpodobnostně vážený průměr budoucích finančních toků při zohlednění hodnoty peněz za použití příslušné bezrizikové výnosové křivky. Tento odhad je prováděn bez započtení jakýchkoliv zajištění a přenosu rizik na třetí strany. Dále by měl nejlepší odhad zohledňovat veškeré přírůstky a úbytky peněžních prostředků nezbytných k vyrovnání závazků, a to po celou dobu jejich trvání. Pro samotný výpočet nejlepšího odhadu se používají analytické přístupy nebo se nejlepší odhad simuluje pomocí metod popsanych v dalších kapitolách.

V další kapitole se práce věnuje způsobu stanovení výše kapitálového požadavku, ale pro jeho stanovení je nejdříve třeba definovat nejlepší odhad v čase $t = 1$ (BE_1), kde 1 typicky značí jednoletý horizont. Nejlepší odhad se v průběhu roku vlivem změny ekonomických (úroková míra, míra inflace) a jiných podmínek (úmrtnost, stornovost, atd.) také mění. BE_1 je tedy nejlepší odhad odhadnutý v závislosti na změnách podmínek během jednoho roku, které mají na nejlepší odhad vliv. Protože nevíme, jestli v průběhu roku nastanou nějaké změny, a pokud ano v jaké výši, je BE_1 náhodnou veličinou. V kapitole 5 budou představeny modely pro aproximaci BE_1 .

2.3 Pilíř I

První pilíř regulace Solventnost II se mimo jiné týká kvantitativních požadavků kladených na pojišťovny. Rozlišují se dva druhy kapitálového požadavku SCR (Solvency Capital Requirement) a MCR (Minimum Capital Requirement), kdy nesplnění těchto požadavků vede k různým akcím ze strany regulátora.

Uvažujme pojišťovnu s použitelným kapitálem V_0 , kde použitelný kapitál spočteme jako aktiva, od kterých odečteme pasiva, kterým je pojišťovna vystavena¹. Abychom

¹ Těmito pasivy máme na mysli nejlepší odhad a rizikovou marži (MVL z obrázku 2.2)

zajistili, že společnost zůstane solventní během jednoho roku s předem danou pravděpodobností α , musí společnost držet kapitálový požadavek SCR alespoň ve výši $V_0 + x_0$. SCR pak můžeme definovat pomocí rovnice:

$$V_0 + x_0 = q_\alpha(V_0 - V_1 DF), \quad (2.1)$$

kde DF je diskontní faktor bezrizikové úrokové míry, kterým zohledníme časovou hodnotu V_1 . Jelikož veličina V_1 podléhá náhodným vlivům, také veličina $(V_0 - V_1 DF)$ je náhodného charakteru. Při odhadu SCR se vychází z rozdělení $(V_0 - V_1 DF)$, jak definuje Směrnice 2009/138 v článku 122, odstavci 2, kdy se za pomoci statistiky VaR (Value at Risk) spočte horní 99,5% kvantil rozdělení. VaR je v podstatě statistický odhad, který říká, jaká může být maximální ztráta za dané období, jestliže vyloučíme ztráty, které nastanou s pravděpodobností menší než $(1 - \alpha)$. V rovnici (2.1) bychom její levou část popsali jako současný solventnostní kapitálový požadavek, což je SCR v čase 0. V pravé části rovnice (2.1) je pak daný kvantil rozdělení rozdílu hodnoty V_0 a diskontovaného V_1 , tzn. ztráta, kterou utrpíme s danou pravděpodobností za jeden rok. Člen x_0 má důležitou vypovídací hodnotu. Pokud je člen x_0 záporný, značí to, že daná společnost je dobře kapitalizovaná a je tak možné volné prostředky „vybrat“ nebo společnost může rozšířit svou bilanci o další závazky bez požadavku na dodatečný kapitál. Kladný člen x_0 naopak značí potřebu doplnění kapitálu alespoň ve výši x_0 .

Pro praktickou část této práce budeme předpokládat, že strana aktiv se během roku nemůže změnit, a na straně pasiv se může měnit pouze nejlepší odhad. Takovéto zjednodušení pak vede k zavedení úlohy odhadu SCR pouze jako diskontovaného horního kvantilu BE_1 s pravděpodobností α :

$$SCR_0 = \frac{q_\alpha(BE_1)}{DF} \quad (2.2)$$

Dalším požadavkem Solventnosti II je MCR, který by měl odrážet minimální množství použitelného kapitálu. Jak vyplývá z výše uvedeného, MCR je složkou SCR. Platí tedy, že:

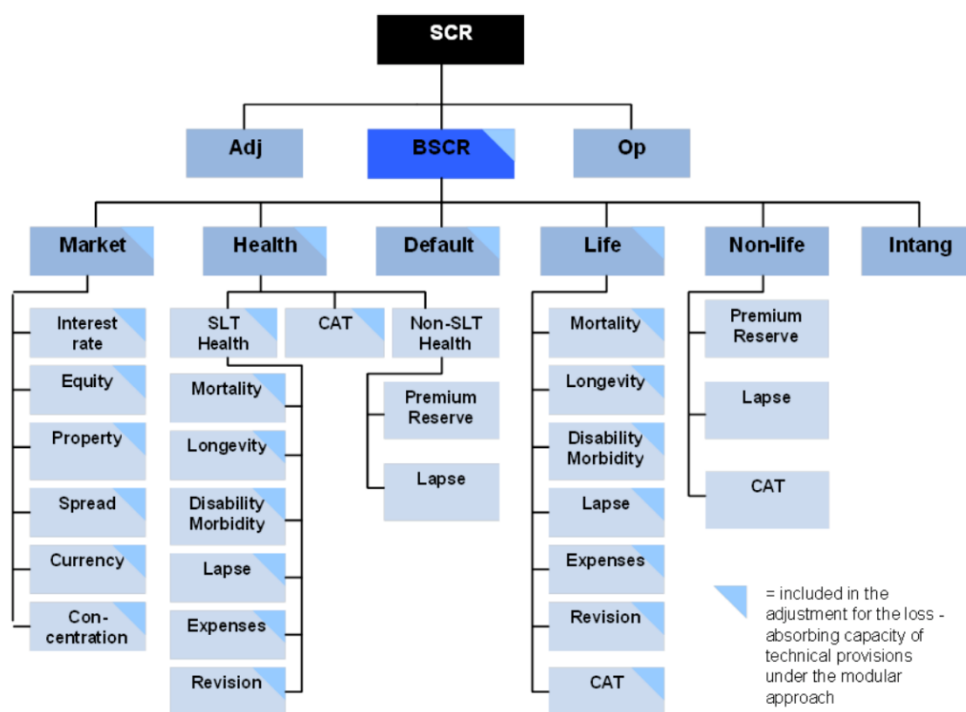
$$V_0 + x_0 \geq SCR_0 > MCR_0. \quad (2.3)$$

Pojišťovny a zajišťovny jsou povinny držet použitelný kapitál alespoň ve výši SCR, a pokud použitelný kapitál dané pojišťovny nebo zajišťovny klesne pod hranici SCR,

regulátor přistupuje k různým opatřením se vzrůstající intenzitou, jak se velikost použitelného kapitálu snižuje více a více k MCR. Pokud použitelný kapitál společnosti nestačí ani na pokrytí MCR, regulátor přistupuje ke drastičtějším opatřením, které může vyústit až v odebrání licence a převzetí správy nad danou společností regulátorem.

Solventnost II umožňuje dva až tři způsoby výpočtu SCR:

- používání předepsaných modelů a vzorců, které obsahuje regulace
- možnost aplikace interních modelů, které zohledňují riziko, které daná společnost podstupuje
- třetí možností je kombinace dvou předchozích, kdy pojišťovna či zajišťovna využije pro některá rizika standardních modelů a pro některá rizika interních modelů.



Obrázek 2.3: Hierarchická struktura rizik v Solvency II v rámci standardního přístupu

Zdroj: <https://uglyduckling.nl/blog/solvency/standard-formula-and-solvency-capital-requirements/>

Na obrázku 2.3 můžeme vidět hierarchickou strukturu rizik, kterými se zabývá standardní formule pro výpočet SCR. Můžeme tak vidět jednotlivé složky základního kapitálového požadavku (BSCR) a rizika, kterých se týká. Kapitálový požadavek je

počítaný zvlášť za každý modul. Všechny kapitálové požadavky jsou pak agregovány za pomoci korelačních matic. Tyto korelační matice jsou zvoleny tak, aby výsledný SCR co nejlépe approximoval 99.5%VaR na jednoletém horizontu.

Využití interních modelů by mělo lépe vystihovat rizika spojená s činností dané společnosti a často tak vede k menšímu požadavku na SCR v porovnání se standardním výpočtem. Standardní přístup pro výpočet SCR se spíše hodí pro menší společnosti, pro které by bylo zavedení interních modelů náročné. Využití interních modelů pro výpočet SCR nachází uplatnění spíše ve velkých společnostech, které mají kapacity na jejich zavedení. Pokud daná společnost chce využívat interních modelů pro vyčíslení SCR, musí získat povolení od regulátora (v ČR je to Česká národní banka). Navíc je použití interních modelů zatíženo vysokými nároky na administrativu a procesy. Většinou je však hodnota SCR spočtena pomocí interních modelů nižší než hodnota spočtená pomocí standardního vzorce, proto se k němu pojišťovny uchylují.

2.4 Pilíř II

Druhý pilíř Solvency II může být rozdělen na dvě části. První část je zaměřena na instituce samotné, od nichž se očekává, že vytvoří spolehlivé, účinné a komplexní strategie a postupy pro průběžné hodnocení a udržování použitelného kapitálu. Regulace se věnuje i činnosti interního auditu a systému vnitřních kontrol. Druhá část Pilíře II se věnuje hlavně regulatorním orgánům a specifikuje, co je jejich cílem. Hlavním cílem regulatorních orgánů je zajistit, aby společnosti podléhající regulaci, měly správně nastavené procesy řízení rizik, jeho kontroly, a aby se dostatečně věnovaly řádnému pokrytí všech rizik, kterým je společnost vystavena nebo kterým by mohla být čelit v budoucnu. Daná pojišťovna či zajišťovna by měla pokrývat i rizika plynoucí ze stresového testování, kterému se Pilíř II také věnuje. Regulatorní orgán může požadovat dokumenty a podklady, na základě kterých pojišťovna či zajišťovna řídí svá rizika a vykonávat „onsite“ dohlídku. Dále umožňuje Pilíř II dohledovému orgánu, aby stanovil dodatečnou marži k SCR, pokud bude mít pochybnosti o nastavených procesech řízení rizik či výpočtech provedených danou společností.

Jedním z výstupů z Pilíře II je tzn. ORSA (Own Risk Solvency Assessment), což je dokument, který by měl hodnotit podstupovaná rizika, velikost použitelného kapitálu v porovnání se SCR a prospektivní pohled na budoucí požadavky na velikost použitelného kapitálu.

2.5 Pilíř III

Třetí Pilíř regulace Solvency II se týká vykazování a jisté harmonizace v reportingu pro lepší porovnatelnost v odvětví. Používají se jednotné reportingové šablony (Quantitative Reporting Templates) pro detailní informování regulátora o současném vývoji finanční situace a stavu solventnosti dané společnosti na kvartální a roční bázi. Kvůli jednotnému vykazování mohou být výsledky porovnány i mezi jednotlivými státy a regulátor tak včas může zareagovat na daná rizika.

Dále musí pojišťovna či zajišťovna vypracovávat další pravidelné zprávy o stavu na trhu, o situaci pojistitele a jeho vnitřních záležitostech jako je například výměna CRO (Chief Risk Officer). Jednou z důležitých zpráv je i Zpráva o solventnosti a finanční situaci, (Solvency and Financial Condition Report - SFCR), která musí být předložena pokaždé po skončení finančního roku. Je to relevantní dokument pro zákazníky, investory i veřejnost a obsahuje informace o důležitých hospodářských výsledcích, důležitých událostech předchozího roku a aktuální míře solventnosti dané pojišťovny či zajišťovny.

Dalším dokumentem je Pravidelná zpráva orgánu dohledu (Regular Supervisory Report - RSR), což je dokument určený pro regulátora. Jestliže SFCR má předem definovanou strukturu a měla by obsahovat popis vývoje podnikání, rizikový profil dané společnosti, ocenění aktiv a pasiv, jak bylo řečeno výše, tak RSR je jejím podrobnějším doplněním a měla by obsahovat informace například o budoucím vývoji podnikání dané pojišťovny či zajišťovny.

2.6 Kritika

Regulace Solvency II je také terčem kritiky ať už jednotlivců nebo institucí (Andrew Turnbull², Bank of England, Ministerstvo financí Velké Británie a Severního Irsku³). Například Kamran Foroughi z konzultační společnosti WillisTowersWatson⁴ uvádí několik oblastí, kde vidí nedostatky v regulaci Solvency II. Jsou jimi:

² Dostupné z <http://www.telegraph.co.uk/business/2016/06/28/brexit-will-allow-insurers-to-escape-absolutely-dreadful-eu-regu/> , [cit. 4. 1. 2018]

³ Dostupné z <https://www.out-law.com/en/articles/2016/february/uk-calls-for-review-of-solvency-ii-over-competition-concerns-in-insurance-industry/> , [cit. 4. 1. 2018]

⁴ Dostupné z <https://www.willistowerswatson.com/en/press/2017/03/Flawed-Solvency-II-risk-margin-is-hurting-consumers> , [cit. 4. 1. 2018]

- Přenos rizika, zajištění – Společnost si může sjednat zajištění způsobených ztrát u zajišťovny i mimo Evropskou Unii, kde neplatí regulace Solvency II.
- Dlouhodobé zajištění – Došlo k nárůstu objemů na trhu se zajištěním dlouhodobých produktů z toho důvodu, že riziková marže je příliš vysoká pro výplatu okamžitých anuity (typicky doživotní renta, kdy se poplatek platí jednorázově a k vyplácení dochází prakticky ihned).
- Pro-cykličnost – Pokles v ceně aktiv v období krizí vede k vyšší volatilitě, což implikuje nárůst kapitálového požadavku a k růstu použitelného kapitálu.
- Obecně vyšší náklady na správu a kapitál, které se promítnou do cen pojistného pro konečné spotřebitele. Složitost regulace také snižuje konkurenceschopnost evropského pojistného odvětví a přináší nové bariéry vstupu do odvětví, na což ve výsledku opět doplatí spotřebitel.

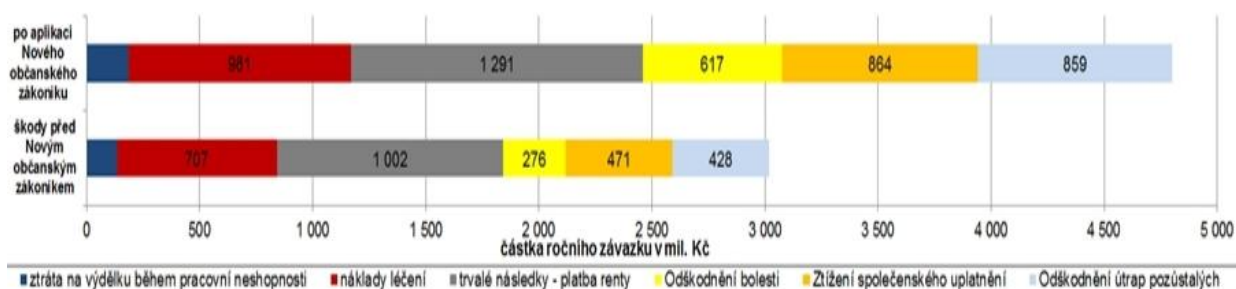
3. Pojištění vztahující se k anuitám

Anuita v pojištění je obecně platba poskytovaná pojišťovnami na měsíční, čtvrtletní, půlroční nebo roční bázi za život osoby (annuitant). Zatímco v životním pojištění pojišťovna vyplácí náhradu v případě smrti pojištěného, anuita má za cíl poskytovat náhradu ještě za života annuitanta.

3.1 Povinné ručení

S anuitami se často můžeme setkat u pojištění odpovědnosti za škodu. Typickým příkladem budiž pojištění odpovědnosti z provozu motorového vozidla, tzv. povinné ručení. Toto samotné pojištění se řadí do kategorie neživotních pojištění (rizikových). U životních pojištění (rezervotvorných) vytváříme rezervu na událost, jež zpravidla nastane se 100% jistotou, typicky se jedná o výplatu částky při dožití se určitého věku nebo smluvené částky v případě smrti pojištěného. V neživotních pojištěních není jisté, jestli k pojistné události dojde. Součástí povinného ručení je i pojištění z odpovědnosti za škody na zdraví, které tvoří jeho důležitou část. Podle Jedličky (2017) tvořil v roce 2016 počet škod se zdravotními nároky asi 4% z celkového počtu oznámených škod (přibližně 264 000 škod bylo ohlášeno v roce 2016). Na celkovém objemu vyplacených škod se ale

újma na zdraví podílí vysokou měrou, podle výroční zprávy České asociace pojišťoven 2016 (2017) to bylo přibližně 34% na celkovém vyplaceném objemu prostředků v rámci povinného ručení. Objem prostředků vyplacených na újmy na zdraví se dále zvyšuje, na což má vliv například nový občanský zákoník nebo pokyn Nejvyššího soudu⁵, který výši odškodnění váže na vývoj nominální průměrné mzdy v ČR. Vliv nového občanského zákoníku můžeme vidět na obrázku 3.1. Po zavedení nového občanského zákoníku částky poskytnuté na pokrytí škod na zdraví vzrostly z přibližně 3 miliard na 4,8 miliardy Kč.



Obrázek 3.1: Škody na zdraví vyplácené na povinném ručení

Zdroj: <http://www.opojisteni.cz/tema/petr-jedlicka-vyse-skody-na-zdravi-v-pov-stale-roste/>,

Dalším důvodem může být zvyšující se pasivní bezpečnost aut, kdy více nehod končí zraněním namísto smrti. V případě nehody s újmou na zdraví tak může dojít k výplatě odškodnění jednorázově nebo formou důchodu (měsíčně) či anuit (ročně). Důležitým úkolem pojišťovny je tak rychle a správně ohodnotit svůj závazek, aby mohla vytvořit dostatečné rezervy pro pokrytí budoucích výdajů spojených s výplatou důchodu či anuit.

3.2 Variabilní anuity

Variabilní anuita je produkt, který se stal velmi oblíbeným v USA a v Japonsku asi tak před 15-20 lety (Cathcart, 2012). Je to produkt, ve kterém jsou prostředky určené pro výplatu anuit spravovány fondem nebo mají charakter unit-linked prostředku, kde tržní riziko nese pojistník, a nabízí volitelné záruky jako benefit pro vlastníka. V praxi toto pojištění funguje tak, že je rozděleno na dvě části: na dobu spoření a na dobu výplaty

⁵ Metodika k odškodňování nemajetkových újem. Dostupné z: http://www.nsoud.cz/JudikaturaNS_new/ns_web.nsf/Metodika

anuity, kdy po naspoření dané částky nebo dosažení daného věku dojde buďto k výplatě naspořených prostředků nebo se z naspořené částky začne vyplácet anuita.

Rozdíl mezi tradiční anuitou a variabilní anuitou je, že v tradiční anuitě jsou nevyplacené prostředky úročeny nějakou pevnou sazbou sjednanou ve smlouvě nebo sazbou, kterou upravuje pojistitel. Ve variabilní anuitě jsou nevyplacené prostředky investovány na finančním trhu podle výběru. Výnos z investovaných prostředků se může velmi lišit, podle toho do jakých aktiv bylo investováno. Zároveň však nabízí garantované platby. Variabilní anuita tak má charakter unit-linked produktu, s jistými zárukami. Tyto poskytované záruky v rámci variabilních anuit lze rozdělit přibližně do 4 kategorií⁶ (Cathcart, 2012):

- **Guaranteed Minimum Death Benefits (GMDBs)** – Pokud pojistník zemře během spořicí fáze, garantuje tento typ záruky vyplacení maxima ze dvou částek obmyšlené osobě. Vyplácí se buďto suma vkladů pojistníka nebo aktuální hodnota účtu, podle toho, která hodnota je větší.
- **Guaranteed Minimum Accumulation Benefits (GMAB)** – V tomto typu anuit se používá dodatek, který garantuje pojistníkovi minimální hodnotu anuity na konci spořicí fáze. Ve smlouvě může být určeno i více dat, ke kterým se hodnota účtu ve spořicí fázi uzamkne a jako nová hodnota účtu se použije buďto suma investovaných prostředků nebo aktuální hodnota účtu. Tento typ garance tak chrání pojistníka před náhodnými výkyvy trhu.
- **Guaranteed Minimum Income Benefits (GMIB)** – V tomto případě je stanovena buďto při podpisu smlouvy nebo při anuitizaci (překlopení hodnoty účtu na konci spořicí fáze do výplatní fáze) minimální částka, kterou se pojišťovna zavazuje vyplácet po určitou dobu. Výběrem této možnosti zákazník ztrácí přístup k hodnotě účtu. Naopak získává jistý příjem, i když hodnota účtu klesá vlivem tržních podmínek.
- **Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits (GMWB)** – Tento typ garance zajišťuje možnost výběru předem dané částky/podílu na počátečním stavu účtu po takovou dobu, dokud nebude vyčerpána částka, která byla vložena

⁶ Názvy jednotlivých kategorií ponechám v angličtině, protože jsem pro ně nenašel vhodný český překlad.

na účet na počátku. Chrání tak zákazníka před poklesem trhu a zároveň mu umožňuje profitovat z růstu trhu. Předpokládejme počáteční hodnotu účtu ve výši 1 000 000Kč, kterou vložíme na účet pojišťovny ve věku 55 let. Dále předpokládejme míru výběru 10% z počátečního stavu (každý rok bychom měli obdržet 10% z počáteční hodnoty účtu, tedy 100 000Kč). V 65 letech chceme začít čerpat anuitu, ale vlivem tržních podmínek se hodnota účtu snížila na 850 000Kč. Měli bychom tak nárok vybrat pouze na 85 000Kč, ale díky GMWB můžeme čerpat právě těch garantovaných 100 000Kč. Naopak, pokud by hodnota účtu vzrostla na například 1 125 000Kč, tak bychom měli nárok na výběr 112 500Kč. Reálná hodnota účtu se každý rok s výplatou snižuje, a pokud klient zemře v průběhu vyplácení, tak oproti GMIB náleží tato částka pozůstalým. Výpočet každoroční anuity probíhá z pomyslného vývoje účtu, jako by z něj nebylo čerpáno. Tento postup umožňuje stanovit každoročně výši GMWB anuity.

Variabilní anuity jsou populární zejména v kapitálově vyspělých zemích (Cathart, 2012). V ČR jsem nenarazil na podobný produkt nabízený tuzemskou pojišťovnou.

4. Modely úrokových sazeb

V této kapitole budou popsány některé základní modely úrokových měr, které se v praxi používají. Pohyb úrokových měr hraje důležitou roli v rozhodování v risk managementu na finančních trzích. Výše a vývoj úrokové míry také ovlivňuje rezervy pojišťovny, což jsou prostředky určené k budoucím výplatám ze smluvních nároků. Pomocí modelů lze popsat chování sazeb a případně simulovat jejich budoucí vývoj a následně tento vývoj sazeb zohlednit ve výpočtu budoucího závazku.

Pro tyto potřeby jsou často používány jednofaktorové modely, které vycházejí z následující stochastické diferenciální rovnice (SDE):

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW_t \quad (4.1)$$

Jednofaktorové proto, že jediným zdrojem nejistoty je člen W_t , který značí Wienerův proces (jinak též Brownův pohyb). Parametr μ značí drift a σ udává rozptyl.

Wienerův proces je jedním z nejdůležitějších procesů v oblasti financí a lze jej definovat následujícími vlastnostmi:

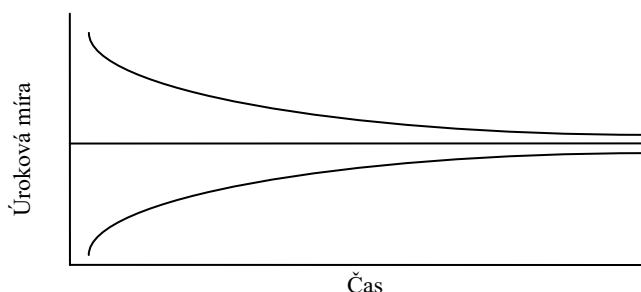
1. $W_0 = 0$ s. j.,
2. Nezávislé přírůstky pro každé $t > 0$, budoucí přírůstky $W_{t+u} - W_t, u \geq 0$, jsou nezávislé na minulých hodnotách $W_s, s \leq t$,
3. Přírůstky $W_{t+u} - W_t$ jsou normálně rozdělené se střední hodnotou 0 a konstantním rozptylem,
4. Proces W_t je spojitý v t .

Vašíčkův model a CIR (Cox-Ingersoll-Ross) model jsou důležité modely ve třídě jednofaktorových modelů a budou popsány v dalších kapitolách.

4.1 Návrat k průměru (mean-reversion)

Na rozdíl od ceny akcií má úroková míra tendenci vracet se zpět ke svému dlouhodobému průměru. Třída modelů, které tuto vlastnost popisují, se nazývá *mean-reversion*.

Pokud je úroková míra vysoká, deterministická složka mean-reversion modelu nutí úrokovou míru k poklesu a přiblížení k dlouhodobému průměru a naopak, pokud je úroková míra na nízkých hodnotách, má tendenci růst a přibližovat se tak ke svému dlouhodobému průměru, jak je vidět na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1 Vlastnost mean-reversion

Mean-reversion modely mají ekonomické opodstatnění. Pokud je úroková míra příliš vysoká, ekonomika má tendenci zpomalovat. To způsobí pokles poptávky po finančních prostředcích. Výsledkem je, že úroková míra klesá. Naopak, pokud je úroková míra nízká, vzroste poptávka po finančních prostředcích, což působí na růst úrokové míry.

Úroková míra tak konverguje ke svému dlouhodobému průměru nebo dlouhodobému rovnovážnému stavu.

4.2 Vašíčkův model

Velmi známý Vašíčkův model, pojmenovaný po svém autorovi a publikovaný v roce 1977 (Vašíček, 1977), tvoří základ jednofaktorových modelů. Byl vůbec prvním modelem ve financích, který zachytil vlastnost mean-reversion. Vašíčkův model definuje okamžitou úrokovou míru jako Ornstein-Uhlenbeckův proces s konstantními parametry takto:

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad r(0) = r_0. \quad (4.2)$$

Stochastickou diferenciální rovnici diskretizujeme a dostaneme výraz:

$$r_t = r_{t-1} + \alpha(\theta - r_t)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\varepsilon_t, \quad (4.3)$$

kde α prezentuje rychlost návratu k dlouhodobému průměru θ , a σ značí rozptyl modelu. ε_t jsou IID⁷⁷ veličiny normovaného normálního rozdělení. Hodnota r_t má normální rozdělení s podmíněnou střední hodnotou:

$$\theta + (r_0 - \theta)e^{-\alpha t}. \quad (4.4)$$

Při známé hodnotě r_0 se vzrůstajícím t se hodnota exponentu zmenšuje, až zůstane zanedbatelná a významným tak zůstává parametr θ . Zároveň, pokud je $r_0 = \theta$, očekávaná střední hodnota je rovna svému dlouhodobému průměru pro každé t . Rozptyl je roven:

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}). \quad (4.5)$$

Opět je vidět, že s rostoucím t klesá význam členu v závorce a rozptyl je tak přímo úměrný parametru σ , který přímo ovlivňuje míru nejistoty vstupující do modelu. Naopak, rozptyl modelu je nepřímě úměrný parametru α , který značí „koridor“, rychlost nebo intenzitu návratu k dlouhodobému průměru θ , ve kterém se úroková míra pohybuje. Za hlavní výhodu Vašíčkova modelu je považována jeho jednoduchost. Jako jeho hlavní

⁷⁷Identically Independently Distributed – stejně rozdělené náhodné veličiny

nevýhoda se jeví možnost záporných hodnot modelu, kterou se snaží řešit CIR model popsáný v další kapitole.

Další informace o těchto modelech a jejich vlastnostech, odvození nebo diskretizaci, lze nalézt ve Vašíčkově původním článku (1977) nebo v článku Schurmana (2009).

4.3 CIR model

Jak bylo řečeno v kapitole 4.2, hlavní nevýhodou Vašíčkova modelu je možnost záporných úrokových sazeb. Tento problém se snaží řešit model CIR, pojmenovaný po svých autorech Cox, Ingersoll, Ross (1985). Jedná se o rozšíření Vašíčkova modelu, kde náhodná složka nezávisí pouze na rozptylu, ale i na své minulé hodnotě úrokové míry. CIR model je tak popsán takto:

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad r(0) = r_0. \quad (4.6)$$

Model CIR zajišťuje nezáporné hodnoty, pokud je splněna podmínka:

$$2\alpha\theta > \sigma^2. \quad (4.7)$$

Pokud se r_t blíží k nule, náhodná složka se taktéž stává zanedbatelnou a převládí vliv prvního členu z rovnice (4.6), tj. návrat k dlouhodobému průměru θ . Stejně tak, pokud r_t dosáhne nuly, další hodnota úrokové míry je nutně pozitivní. CIR model je také populární pro svou podmíněnou heteroskedasticitu, kdy rozptyl není konstantní v čase. Po diskretizaci CIR modelu dostáváme rovnici ve tvaru:

$$r_t = r_{t-1} + \alpha(\theta - r_{t-1})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta r_{t-1}}\varepsilon_t. \quad (4.8)$$

Rozptyl modelu:

$$r_0 \frac{\sigma^2}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) + \theta \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})^2. \quad (4.9)$$

Vzorec pro střední hodnotu CIR modelu zde není uváděn, protože je stejný jako ve Vašíčkově modelu (4.4). Rozdělení není normální, jako u Vašíčka, právě kvůli nezápornosti hodnot. Pro simulování hodnot z CIR procesu se používá diskretizace, kdy spojitý CIR proces zjednodušíme a simulujeme hodnoty pouze pro diskrétní časové okamžiky Δ . Díky diskretizaci CIR procesu můžeme simulovat jeho hodnoty, ale zároveň

diskretizace přináší možnost, že CIR proces nabude záporných hodnot. Této vlastnosti se lze vyvarovat zvolením dostatečně malého parametru Δ . Více informací ohledně diskretizace modelu a jeho vlastností a využití je k nalezení v původním článku Cox, Ingersoll, Ross(1985). Existuje mnoho dalších modelů úrokových sazeb, ale v další práci se omezím pouze na model CIR. Popis dalších modelů i vícefaktorových lze najít například v Brigo, Mercurio(2006).

5. Proxy modely

Pojišťovny i zajišťovny čelí stále většímu tlaku ze strany regulátora, v menší míře i ze strany akcionářů, aby co nejvíce rozuměly rizikovému profilu svého portfolia. Inovace spojené s větší poptávkou zákazníků jsou jedním ze zdrojů stále větší složitosti produktů, která vede ke stále složitějším modelům, jak odhadovat riziko s těmito produkty spojené. Modely používané pro sestavení rozvahy pojišťovny jsou tvořeny funkcemi mnoha vstupů, z nichž velká část má stochastický charakter. Navíc nová regulace požaduje výpočet kapitálového požadavku SCR (Solvency Capital Requirement), k jehož stanovení potřebujeme mimo jiné získat BE_0 i BE_1 , což znamená spouštět mnohokrát tyto modely pod různými scénáři vývoje pro získání nejlepšího odhadu za různých, většinou zhoršených, podmínek na jednoletém horizontu. V kapitole 2.3 jsme rovnicí (2.2) nadefinovali zjednodušenou úlohu odhadu SCR, pro kterou budeme potřebovat pouze BE_1 .

Původně byly vzorce pro výpočet nejlepšího odhadu používány deterministické funkce využívající komutačních čísel. Výsledné peněžní toky pak byly jednoduše diskontovány k aktuálnímu datu. Díky dostupnosti výpočetní techniky a flexibilitě produktů došlo k rozvoji simulačních technik. Jak tvrdí (Hursey et al., 2014), obecně je výhodnější provést tisíce simulací, než se snažit analyticky popsat chování nějakého složitěho cash flow modelu. Pro komplexnější produkty je složité až nemožné spočítat BE_0 analyticky, natož pak určit BE_1 a získat jeho distribuci pro určení horního 99,5% kvantilu. Naopak, pomocí simulací můžeme zahrnout do modelu další detaily a vazby mezi jednotlivými proměnnými. Z výše uvedených důvodů tak nad analytickým přístupem získalo na vrch stochastické modelování.

V následujících kapitolách budou představeny některé v současnosti používané simulační techniky pro odhad BE_1 .

Hlavním cílem této práce je aplikovat metody Nested Monte Carlo a Least squares Monte Carlo na model annuity v rámci neživotního pojištění a vzájemné porovnání obou metod v praktické části, proto bude kladen důraz právě na vysvětlení těchto dvou metod.

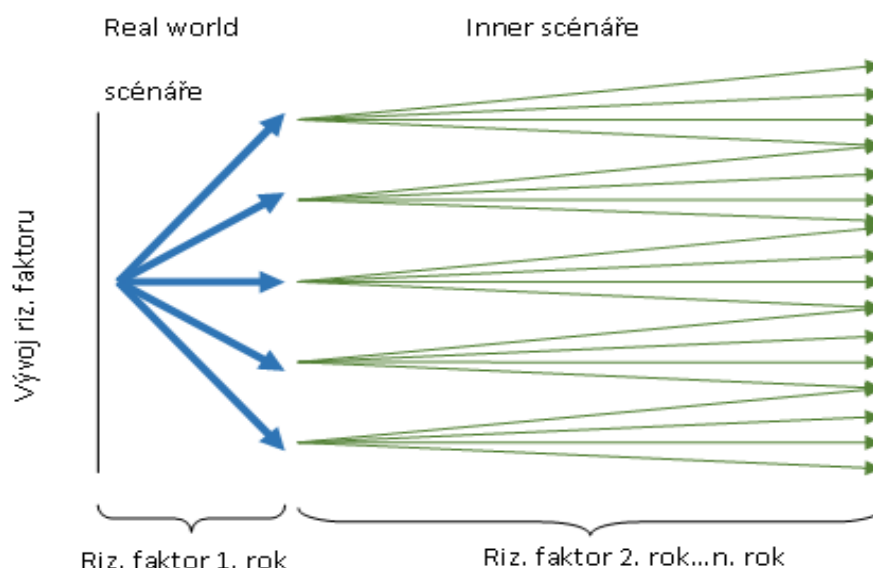
5.1 Nested Monte Carlo

Vzhledem k tomu, že u složitějších produktů nejsme schopni určit distribuci BE_1 analyticky, používají se v praxi velmi často Nested Monte Carlo simulace. Toto platí zvláště v případě garantovaných plateb, jako jsou annuity. Nested Monte Carlo simulace nejsou potřeba v rámci standardního přístupu Solvency II. Využití naopak nacházejí v interních modelech. Mohou být také užitečné v rámci ORSA, při projekci budoucích kapitálových požadavků. Takovýto postup vyžaduje simulaci Nested Monte Carlo. Také v rámci ORSA je potřeba projektovat budoucí závazky s ohledem na různé scénáře vývoje, což opět vede na metodu Nested Monte Carlo.

V simulacích BE_1 tedy předpokládáme změnu rizikových faktorů (úmrtnost, míra inflace, zdravotní stav pacienta, atd.) na jednoletém horizontu, kde tuto změnu v rizikových faktorech simulujeme. Následně simulujeme rizikové faktory v závislosti na jejich změnách, které se udály během prvního roku.

Prakticky bude potřeba simulovat dvě stochastické části pro odhad BE_1 , které vidíme na obrázku 5.1. Jsou to takzvané real world⁸ scénáře pro zachycení vývoje rizikových faktorů v rámci jednoho roku. A druhou složku, takzvané inner scénáře, pro výpočet BE_1 v rámci jednotlivých real world scénářů až do ukončení smlouvy. Vlastnosti těchto scénářů budou popsány dále.

⁸ V práci budou používány originální, nepřeložené názvy pro inner, outer a real-world scénáře, protože doposud neexistuje jejich dostatečně výstižný překlad.



Obrázek 5.1 Ilustrace Nested Monte Carlo simulace

Postup aproximace BE_1 by se dal popsat v následujícím algoritmem:

1. Simulací real world scénářů zachytíme změnu rizikových faktorů a generováním dostatečného množství scénářů si připravíme počáteční hodnoty pro další krok. Tato distribuce real world scénářů by měla odpovídat budoucímu pravděpodobnostnímu vývoji rizikových faktorů. Do rizikových faktorů zahrnujeme veškeré proměnné, které vstupují do modelu nejlepšího odhadu a mají tak na jeho odhad vliv. Změnu rizikových faktorů obvykle simulujeme na jednoletém horizontu tak, jak vyžaduje Solvency II.
2. Následně simulujeme inner scénáře rizikových faktorů v závislosti na simulovaných real world scénářích. Real world scénáře tak jsou vstupní hodnotou pro inner scénáře. Simulaci inner scénářů provedeme až do konce simulovaného období (např. konec smlouvy, maximální věk dožití). Pro každý real world scénář musíme použít dostatečné množství inner scénářů abychom získali co nejpřesnější výsledek pro každý počáteční real world scénář.
3. Nakonec odhadneme střední hodnotu cash flow pro každý real world scénář zvlášť v závislosti na realizaci inner scénářů. Protože BE_1 je náhodná veličina, získáme její rozdělení v závislosti na změně rizikových faktorů na

jednoletém horizontu. Jinými slovy, odhadneme nejlepší odhad v čase $t = 1$ pro jednotlivé simulace real world scénářů.

Jak vyplývá z algoritmu výše, Nested Monte Carlo je „simulace v simulaci“. V praxi tak volíme mezi požadovanou přesností a dobou výpočtu. Typicky v případě anuit, kde je potřeba simulovat až do ukončení smlouvy, třeba až po 30 letech, jsou Nested Monte Carlo simulace velmi časově náročné. Pojišťovny často volí 1 000 až 10 000 real world scénářů a několik stovek až desítky tisíc inner scénářů (Cathcart and Morrison, 2014). Celkem se tak lze dostat na miliony simulací v kroku 2, což ho činí na celém algoritmu nejnáročnějším.

Otázkou zůstává, jak nasimulovat BE_1 co nejrychleji. Výpočet nejlepšího odhadu je sám o sobě náročný a výpočetní kapacita není nekonečná. Je zapotřebí výpočty zjednodušit, ale zároveň zachovat jejich přesnost. Z toho důvodu byla uzpůsobena metoda Least squares Monte Carlo a několik dalších metod pro aproximaci BE_1 . Uváděné metody mohou být použity zvlášť nebo jako jejich kombinace pro dosažení požadovaného výstupu.

5.2 Least squares Monte Carlo

Metoda Least squares Monte Carlo (LSMC) je velmi oblíbená a používá se napříč různými odvětvími na celou řadu problémů. Využití nachází například v bankovníctví, pojišťovnictví nebo energetice. S využitím LSMC můžeme oceňovat položky v rozvaze pojišťovny, v bankovníctví finanční deriváty a v energetickém sektoru je zajímavá aplikace na deriváty s elektřinou jako podkladovým aktivem, například swing opce. V plynárenském odvětví lze LSMC použít pro ocenění opcí na skladování plynu (Boogert and De Jong, 2008).

Jako jedni z prvních popsali metodu LSMC Longstaff a Schwartz ve svém článku (2001). Zabývali se v něm aproximací odhadu ceny amerických opcí. Je to metoda, která zjednodušuje Nested Monte Carlo simulace. Toto zjednodušení spočívá v úpravě kroku 2 v algoritmu pro Nested Monte Carlo, kdy stále simulujeme inner scénáře, ovšem jejich počet výrazně omezíme. Následně použijeme jednoduchou regresní funkci pro odhad závislosti mezi jednotlivými nepřesnými odhady BE_1 a vývoji rizikových faktorů během jednoho roku. Celý algoritmus implementace LSMC lze rozdělit na dvě dílčí úlohy a to na kalibrační úlohu a úlohu samotného odhadu BE_1 .

Kalibrační úloha

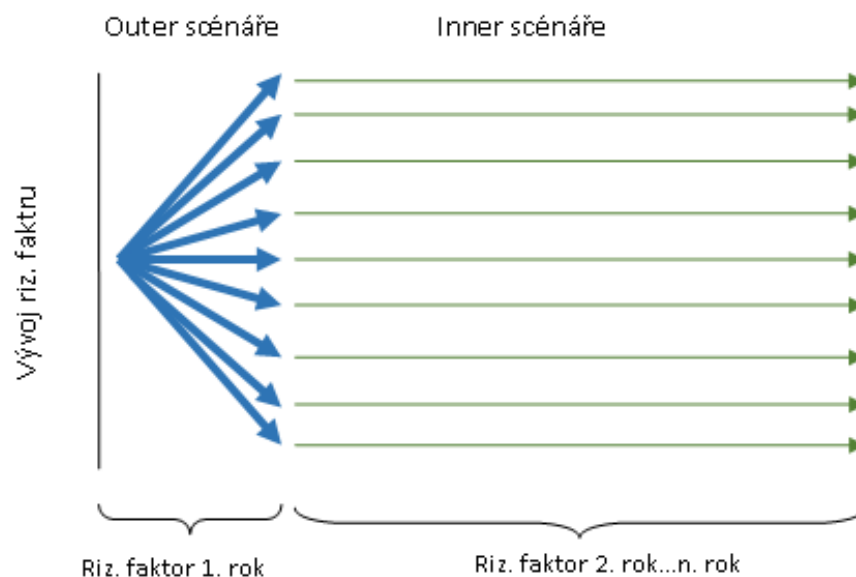
Algoritmus pro aplikaci LSMC je zdánlivě podobný jako v případě Nested Monte Carlo, ale liší se již v prvním kroku, kdy je potřeba místo real world scénářů pro první rok vytvořit kalibrační množinu pro regresní funkci. Takzvané outer scénáře se od real world scénářů používaných v Nested Monte Carlo liší v tom, že by měly pokrývat nejen očekávaný vývoj, ale i extrémnější hodnoty možného vývoje rizikových faktorů během jednoho roku. V této fázi neodhadujeme BE_1 , ale snažíme se získat data pro kalibraci regresní funkce, pomocí které následně odhadneme BE_1 . Zdůrazněme, že nás zajímají mimo jiné právě extrémní hodnoty rozdělení BE_1 (99,5% kvantil). Těchto outer scénářů generujeme více než real world scénářů v Nested Monte Carlo. Generování outer scénářů v čase $t = 1$ provedeme ve dvou krocích:

- A. Pro každý rizikový faktor X_i identifikujeme intervaly hodnot $[a_i, b_i]$, $i = 1 \dots m$ uvažovaných rizikových faktorů. Musíme zajistit, aby každý z těchto intervalů byl dostatečně široký a zahrnoval i málo pravděpodobné případy, které mohou nastat. Zároveň tyto intervaly nesmí být moc široké, požadujeme pouze relevantní scénáře vývoje rizikových faktorů. Získáme tak vícerozměrný interval hodnot $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$.
- B. Poté vytvoříme outer scénáře tak, aby byly rovnoměrně zastoupeny na daných intervalech $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$. Tyto scénáře nejsou stejné jako real world scénáře v Nested Monte Carlo a jsou použity pouze pro kalibraci regresní funkce. Tyto outer scénáře můžeme vytvořit pomocí náhodného výběru z rovnoměrného rozdělení s danými intervaly nebo můžeme použít některý z dalších způsobů, jak uvádí Cathcart (2012).

Po definici outer scénářů, můžeme popsat algoritmus kalibrační úlohy takto:

1. Generováním outer scénářů vytvoříme data pro následující kroky. Tyto outer scénáře by měly pokrývat interval hodnot rizikových faktorů v čase $t = 1$, jak bylo zmíněno v bodu A a B výše. Jejich počet by měl být výrazně vyšší než real-world scénářů v Nested Monte Carlo, jak je ilustrováno na obrázku 5.2.
2. Následně simulujeme inner scénáře rizikových faktorů v závislosti na outer scénářích vytvořených v předchozím kroku. Simulaci inner scénářů opět

provedeme až do konce simulovaného období. Tento krok se liší od kroku 2 v metodě Nested Monte Carlo tím, že inner scénářů simulujeme pouze malé množství, typicky jeden až dva jak můžeme vidět na obrázku 5.2.



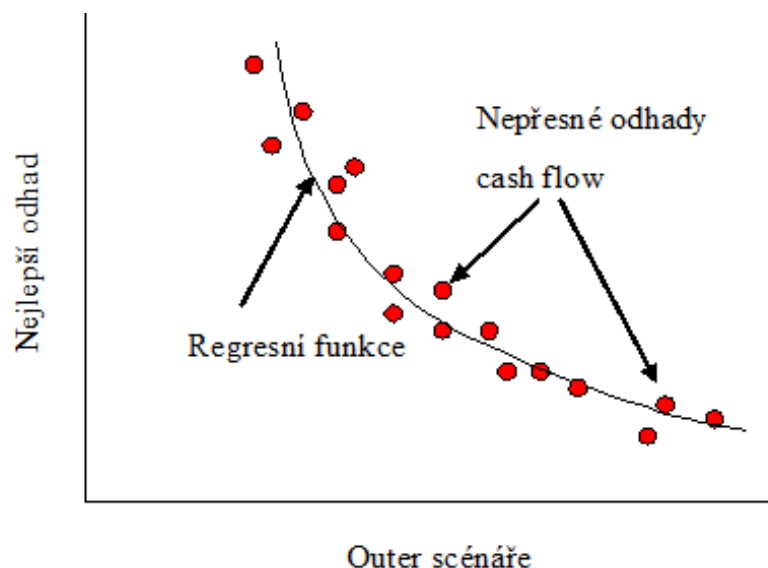
Obrázek 5.2 Ilustrace Least squares Monte Carlo

3. Odhadneme střední hodnotu cash flow pro každý outer scénář v závislosti na realizaci outer a inner scénářů. Tento krok je opět podobný kroku 3 z Nested Monte Carlo metody, ale výsledkem jsou jednotlivé velmi nepřesné jednotlivé odhady cash flow v $t = 1$ zvláště pro každý outer scénář. Nepřesné proto, že inner scénářů používáme pouze malé množství pro každý outer scénář. Tyto nepřesné realizace cash flow můžeme vidět na obrázku 5.3. Na tyto nepřesné hodnoty cash flow bychom také mohli nahlížet jako na jednotlivé nepřesné realizace BE_1 v závislosti na outer scénářích.
4. V tomto kroku použijeme regresní funkci pro kvantifikování vztahu mezi outer scénáři z kroku 1 a nepřesnými realizacemi cash flow z kroku 3. Pomocí regresní funkce se tak snažíme „opravit“ nepřesné jednotlivé odhady z kroku 3 a nalézt funkční vztah mezi těmito nepřesnými odhady a rizikovými faktory. Jinými slovy, v kroku 2 si můžeme dovolit simulovat malý počet inner scénářů, protože se náhodné chyby, vzniklé malým počtem pozorování pro daný outer scénář, kompenzují mezi jednotlivými outer scénáři (obrázek 5.3). V rámci tohoto kroku také ověříme významnost

jednotlivých rizikových faktorů v regresní funkci a vybereme funkci, která nejlépe aproximuje BE_1 . Výsledná funkce by mohla vypadat takto:

$$BE_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon. \quad (5.1)$$

Dosazováním za X_i bychom dostali odhad podmíněné střední hodnoty BE_1 .



Obrázek 5.3 Regrese v LSMC

5. Výslednou funkci z předchozího kroku musíme validovat, zda opravdu poskytuje správnou aproximaci nejlepšího odhadu. Validaci bychom provedli nasimulováním nebo zvolením jedné hodnoty (validačního scénáře) pro každý rizikový faktor. Následně bychom tyto zvolené hodnoty rizikových faktorů použili jako vstupní hodnoty pro simulaci mnoha inner scénářů. Nakonec bychom spočetli výsledek validačního scénáře a porovnali s výsledkem z rovnice (5.1), do které dosadíme zvolené hodnoty rizikových faktorů. Do jisté míry se tak validace podobá Nested Monte Carlo s tím rozdílem, že používáme pouze jeden jednoletý (outer/real world) validační scénář. Nedostaneme nikdy naprosto shodný výsledek, proto sami musíme posoudit, jestli zda lze regresní funkci použít pro aproximaci rozdělení BE_1 . Tento postup obvykle použijeme několikrát pro validování jedné funkce, vždy s různými hodnotami validačních scénářů. Pokud

validace prokáže špatnou specifikaci regresní funkce, vrátíme se podle potřeby k některému z předchozích kroků a postup opakujeme.

Odhad BE_1

Ve druhé části algoritmu LSMC simulujeme rozdělení samotného BE_1 následovně:

1. Nasimulujeme vývoj real world scénářů úplně stejně jako v kroku 1 metody Nested Monte Carlo s tím rozdílem, že si můžeme dovolit použít větší množství scénářů, protože jsme zredukovali simulaci mnoha inner scénářů na použití regresní funkce.
2. Výsledná funkce po validaci z kroku 4 kalibrační úlohy je použita pro aproximaci nejlepšího odhadu za pomoci dostatečného počtu real world scénářů rizikových faktorů, které slouží jako vstup do odhadnuté funkce. Výstupem pro další výpočty je odhad distribuce BE_1 v závislosti na simulovaném vývoji během 1 roku vyjádřeného pomocí real world scénářů.

Hlavními výhodami metody LSMC jsou:

- Možnost použít celkově menší počet simulovaných scénářů oproti Nested Monte Carlo (několik desítek až stovek tisíc, oproti milionům scénářů v Nested Monte Carlo). Tato vlastnost vede ke snížení časové náročnosti.
- Výběr outer scénářů je prováděn metodicky na širokém intervalu možných hodnot, což snižuje pravděpodobnost opomenutí odlehlých pozorování jako v případě použití real world scénářů v metodě Nested Monte Carlo.
- Vytvoření regresní funkce lze kompletně automatizovat, například na základě informačních kritérií (Akaikeho informační kritérium, Bayesovské informační kritérium, atd.).
- Použití odhadnuté regresní funkce k aproximaci nejlepšího odhadu za pomoci real world scénářů je jednoduché a velmi rychlé.
- LSMC umožňuje použití velkého počtu real world scénářů v odhadnuté regresní funkci. To je výhodné pro snížení výběrové chyby zejména na chvostech rozdělení real world scénářů.

5.3 Curve fitting

Další z metod využívaných při aproximaci BE_1 je metoda curve fitting. V LSMC přístupu uvažujeme mnoho nepřesných scénářů vývoje nejlepšího odhadu a pomocí regrese se tak snažíme snížit výběrovou chybu. Oproti tomu, v metodě Curve fitting generujeme několik málo outer scénářů, ale mnoho inner scénářů, od kterých požadujeme co největší přesnost. Jak tvrdí (Horig, Murray, Phelan, Lietschkis, 2013), tato metoda stojí na pomezí Nested Monte Carlo a LSMC. Metoda Curve fitting a její implementace má stejně jako LSMC také dvě části.

Kalibrační úloha

1. Vytvoření možných outer scénářů vývoje rizikových faktorů na daném časovém horizontu. Scénáře volíme buďto expertně nebo stejně jako v LSMC, pouze s mnohem menším počtem těchto scénářů.
2. Simulujeme inner scénáře rizikových faktorů v závislosti na outer scénářích z kroku 1. Simulaci inner scénářů provedeme až do konce simulovaného období. Pro každý outer scénář musíme použít dostatečné množství inner scénářů abychom získali co nejpresnější výsledek pro každý outer scénář.
3. Odhadneme střední hodnotu cash flow pro každý outer scénář v závislosti na realizaci outer a inner scénářů.
4. Použijeme regresní funkci (typicky polynomy) pro nejlepší odhad. Odhad funkce samotné vyžaduje znalost struktury daného polynomu a nejlepšího odhadu.
5. Validaci odhadnuté regresní funkce bychom provedli simulací velkého počtu inner scénářů pro nějaký out-of-sample outer scénář a porovnáním výsledku s odhadem pocházejícím z regresní funkce z předešlého bodu.

Odhad BE_1

Druhá část implementace je stejná jako v případě LSMC, proto zde není uvedena.

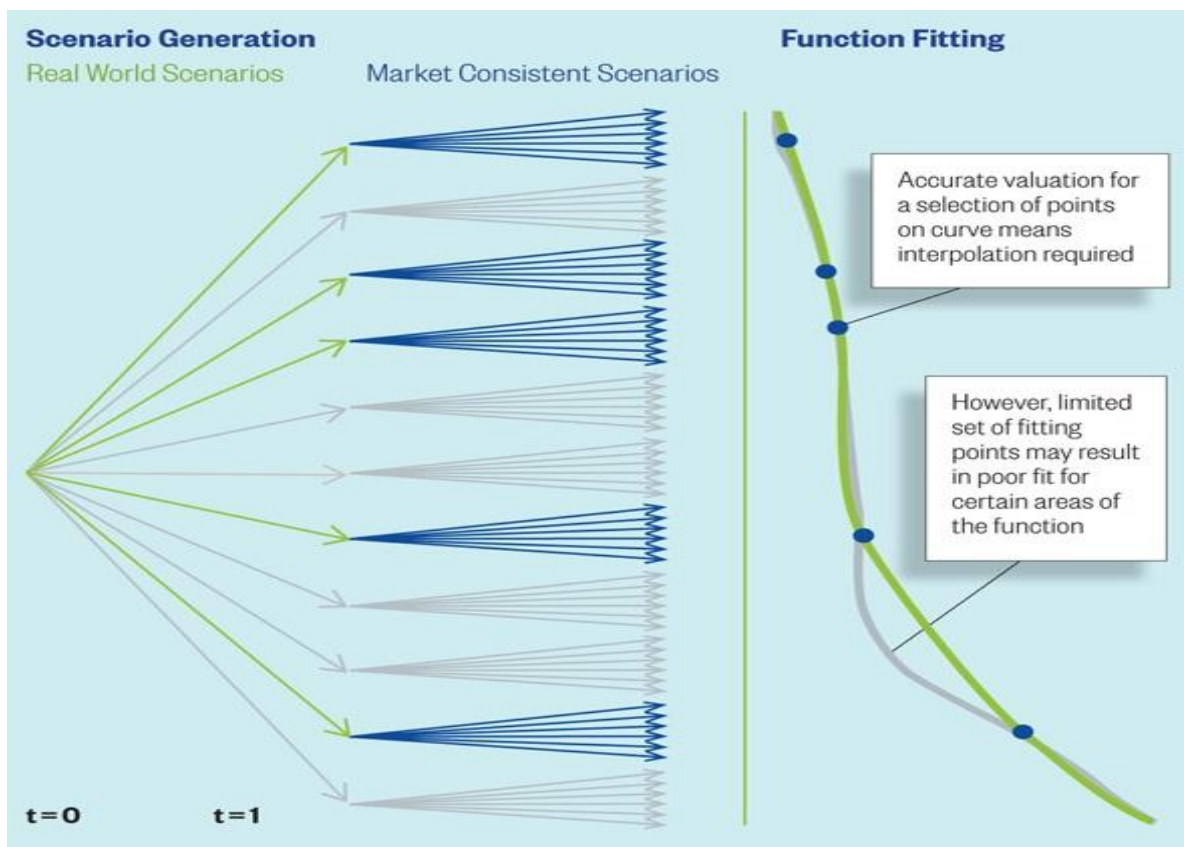
Hlavní rozdíly oproti LSMC jsou:

- Kalkulace nejlepšího odhadu při aplikování metody Curve fitting se může ztížit kvůli tomu, že potřebujeme odhadnout složitou regresní funkci s mnoha interakcemi mezi rizikovými faktory vstupujícími do modelu. Čím

více máme rizikových faktorů, tím více validačních scénářů musíme nasimulovat, abychom ověřili správnost regresní funkce.

- Použití Curve fitting vyžaduje hlubokou znalost efektů, které jednotlivé rizikové faktory způsobují. Zahrnout také musíme jednotlivé interakce mezi rizikovými faktory. Použití nesprávné funkce totiž může vést k chybám v určitých částech regresní funkce, kdy nebude dostatečně dobře vystihovat nejlepší odhad.
- Protože v Curve fitting vybíráme pouze několik outer scénářů a naopak se snažíme co nejpřesněji modelovat inner scénáře, kvalita výsledné funkce je velmi závislá na zvolených outer scénářích. Protože používáme velký počet inner scénářů, počet outer scénářů je limitovaný z důvodu zachování přijatelné výpočetní náročnosti.
- Validace výsledné funkce je náročná a vyžaduje velký počet validačních scénářů pro ověření správnosti regresního modelu.

Na obrázku 5.4 můžeme vidět ilustraci metody Curve fitting. Je zřetelné, že ve spodní části odhadnutá funkce dobře nevystihuje nejlepší odhad, právě kvůli špatně zvoleným outer scénářům. Právě tato neschopnost metody Curve fitting zachytit možné, na první pohled skryté vlastnosti funkce je její hlavní nevýhodou. Další možnou nevýhodou je nutnost vysoké odbornosti experta a jeho znalost daného portfolia pro správný odhad funkce nejlepšího odhadu.



Obrázek 5.4 Ilustrace metody Curve fitting

Zdroj: <http://www.theactuary.com/features/2014/04/erm-proxy-models/>

Jak tvrdí (Horig, Murray, Phelan, Lietschkis, 2013) v praktickém použití se dá ukázat, že LSMC a Curve fitting metody mohou za jistých podmínek poskytovat velmi podobné výsledky. Navíc v praxi můžeme používat kombinaci těchto dvou metod: pro jednu množinu rizikových faktorů použít LSMC, pro jinou množinu Curve fitting a výsledky zkombinovat dohromady. Tento postup má však své limity, například pokud existují interakce mezi zmíněnými dvěma skupinami rizikových faktorů, tento postup selže, protože je není schopen zachytit.

5.4 Replicating portfolios

Poslední z metod používaných pro aproximaci nejlepšího odhadu, která bude představena, je Replicating portfolios. Tato metoda byla jedna z prvních, kterou pojišťovny začaly využívat pro oceňování svých závazků. Jak se pojistné produkty stávaly složitějšími, postupně se přešlo k metodám popsáným v předešlých kapitolách.

Základní myšlenkou této metody je nahrazení složitého výpočtu závazku pomocí náhradního portfolia složeného z tržních instrumentů, jejichž tržní hodnota dobře replikuje/kopíruje změny v hodnotě závazků pojišťovny (Horig, Murray, Phelan, Lietschkis, 2013). Oceňování tržních instrumentů může být v některých případech jednodušší, než vyhodnocovat složitou funkci závazku pomocí Nested simulací.

Obecný postup aplikace Replicating portfolios by se dal shrnout takto:

1. Vybrat vhodná tržní aktiva pro aproximaci nejlepšího odhadu.
2. Simulování různých scénářů vývoje nejlepšího odhadu v cash flow modelu.
3. Přiřazení váhy jednotlivým aktivům, které replikují cash flow modelu v předešlém kroku, tzn. složení takového portfolia z tržních aktiv, které odpovídá chování cash flow modelu.
4. Dále postupujeme v závislosti na tom, jakou techniku aproximace nejlepšího odhadu zvolíme. Můžeme použít některou z technik uvedených v předešlých kapitolách.

Replicating portfolio může být velmi užitečná technika pro oblast zkoumání tržních rizik, proto nalézá uplatnění například v ALM (Asset and Liability Management). Naopak obtížně použitelná je tato metoda v případě aplikace na netržní rizika. Tržní instrument nemusí být na daná rizika dostatečně citlivý. Sestavit dobrý model metodou Replicating portfolio může být velmi náročné, což závisí na složitosti funkce závazků, dostupnosti vhodných tržních instrumentů, jejich likviditě a transparentnosti v jejich oceňování.

Tato metoda se dle mého názoru nedá použít k simulaci BE_1 v rámci anuit z neživotního pojištění z důvodu neexistence tržních instrumentů pro sestavení vhodného portfolia, ale pro kompletnost je zde uvedena.

6. Příklad využití LSMC na opcích

Pro lepší pochopení aplikace LSMC na anuitách je v této části přiblížen koncept LSMC na amerických opcích. Navíc literatura týkající se oceňování opcí touto metodou je více rozpracovaná a může tak nabídnout některá řešení využitelná při simulaci BE_1 . V prvních částech bude popsána nezbytná teorie týkající se opcí a následně v příkladu bude oceněna cena americké put opce.

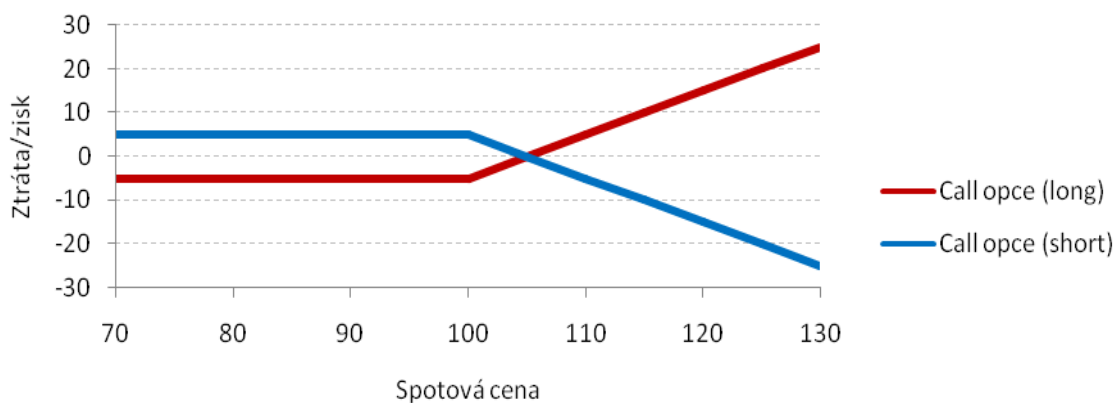
V původním článku (Longstaff, Schwartz, 2001) navrhli autoři nový způsob aproximace ceny amerických opcí za pomoci simulací. Tento přístup se hodí na problémy spojené s oceňováním opcí, kvůli path-dependent vlastnosti kontraktů. V path-dependent kontraktech cena závisí na celé historii vývoje podkladového aktiva (například asijská opce, kde cena této opce je určena průměrnou cenou podkladového aktiva za určité časové období před datem splatnosti opce). Existuje několik metod, jak aproximovat cenupath-dependent kontraktů. V této kapitole bude pro ocenění amerických opcí aplikována metoda Least squares Monte Carlo (LSMC), která se stala velmi používanou a dočkala se aplikací na různé druhy problémů (Gamba, 2013) nebo (Cathcart, 2012).

6.1 Dělení opcí a základní vlastnosti

Opce jsou druhem finančních derivátů, který dává majiteli právo (ne povinnost) koupit nebo prodat příslušné podkladové aktivum za předem dohodnutou cenu (realizační cena) v předem stanovený čas (kdykoliv nebo v době expirace).

Opce se dají rozdělit podle několika kritérií. Existují opce kupní (call) a prodejní (put). Důležité dělení je dle způsobu uplatnění, kdy americkou opci můžeme realizovat kdykoliv, oproti evropské opci, kterou můžeme realizovat jen v předem daný okamžik. Existují také zvláštní typy opcí, které se vztahují k nestandardním podkladovým aktivům, která jsou tvořena z více podkladových aktiv (například duhové opce), lišící se způsobem výpočtu spotové ceny (asijské opce) atd. Obecně jsou zvláštní opce deriváty se složitější strukturou a plněním a zpravidla jsou odvozené od některých standardních opcí.

Uvažujme jednoduchý příklad call opce s realizační cenou 100 a opční prémie 5. Výplatní funkce kupujícího (long) a prodávajícího (short) call opci je zobrazena na Obrázek 6.1. Zisk prodávajícího call opci plyne z opční prémie, kdežto zisk kupujícího call opci plyne z rozdílu mezi spotovou a realizační cenou po odečtení opční prémie, kterou platí prodávajícímu.



Obrázek 6.1 Výplatní funkce call opce

Podobný graf ziskové funkce bychom dostali pro put opci, pokud bychom jej převrátili okolo osy, kterou tvoří realizační cena. Vlastností opcí je, že se jedná o kontrakt, kde zisk jednoho subjektu je zároveň ztrátou subjektu druhého, což lze také odvodit z obrázku 6.1.

Ziskovou funkci h pro call a put opci době realizace lze zapsat takto:

$$h_{call}(S) = \max(S - K, 0) \quad (6.1)$$

$$h_{put}(S) = \max(K - S, 0), \quad (6.2)$$

kde S značí spotovou cenu podkladového aktiva, K značí realizační cenu stanovenou v kontraktu. Důležitým předpokladem pro oceňování opcí je, že podkladové aktivum nevyplácí dividendu. V dalších částech proto budeme uvažovat pouze opce na akcie, které dividendu nevyplácejí.

V praxi se velmi často objevuje výraz, že daná opce je takzvaně „v penězích“ „na penězích“ nebo „mimo peníze“⁹. Pokud je zisková funkce kladná, říkáme, že je daná opce v penězích. Pokud $S = K$, říkáme, že daná opce je na penězích. Ve stavu mimo peníze se nacházejí ty opce, které se nevyplatí realizovat, protože uplatněním takové opce bychom utrpěli ztrátu. V praxi tak můžeme vlastnit call opci, kde spotová cena podkladového aktiva je hluboko pod realizační cenou, taková opce je mimo peníze.

⁹ Z anglických výrazů „in-the-money“, „at-the-money“ a „out-of-money“

6.1 Oceňování evropských opcí

Jak bylo řečeno v úvodu kapitoly 6, evropské opce mají pevný termín realizace. Díky této vlastnosti bylo možné odvodit jejich teoretickou cenu analyticky. Black-Scholesův vzorec, pojmenovaný po svých autorech (Hull, 2012) se začal používat jako jeden z prvních modelů. Základem je předpoklad, že cenu podkladového aktiva S_t lze simulovat pomocí geometrického Brownova pohybu, který se řídí následující stochastickou diferenciální rovnicí:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (6.3)$$

kde W_t značí Wienerův proces popsáný v kapitole 4. σ označuje volatilitu a μ značí drift, kdy oba parametry jsou konstanty. Řešením rovnice (12) je:

$$S_t = S_0 e^{\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z_t\right)}, \quad (6.4)$$

kde Z_t je náhodná veličina normovaného normálního rozdělení, a t značí velikost kroku.

Pro evropskou call opci má Black-scholesův vzorec tvar:

$$C = S_0 \phi(d_1) - K e^{-rT} \phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}), \quad (6.5)$$

kde ϕ je distribuční funkce normálního rozdělení a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (6.6)$$

Pro put opci má Black-Scholesův vzorec tvar:

$$P = K e^{-rT} \phi(-d_1 + \sigma\sqrt{T}) - S_0 \phi(-d_1). \quad (6.7)$$

Jak je vidět z rovnic (6.5) a (6.6), Black-Scholesův vzorec má celkem pět proměnných, které určují cenu opce. Jsou to:

- K – realizační cena
- S_0 – spotová cena v čase $t = 0$
- σ – volatilita, směrodatná odchylka výnosů podkladového aktiva
- T – čas

- r – bezriziková úroková míra

Cena evropské call a put opce musí být zájemně v rovnováze, jinak by bylo velmi snadné provádět arbitráž. Tato vlastnost se nazývá put-call parita a její odvození je velmi snadné. Uvažujme portfolio složené z call opce značené jako C a put opce značené jako P se stejnými parametry, kterými jsou doba do expirace, podkladové aktivum a realizační cena:

$$C - P = \max(S - K, 0) - \max(K - S, 0) = S - K$$

$$C + K = P + S$$

V čase $t = 0$ za předpokladu neexistence arbitráže a při zohlednění časové hodnoty peněz dostáváme z výše uvedené rovnice:

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0. \quad (6.8)$$

At' cena podkladového aktiva S_t roste nebo klesá, obě strany rovnice (6.8) se navzájem vyvažují. Na každou stranu rovnice (6.8) lze pohlížet jako na dvě různá portfolia. Levou stranu bychom mohli vyjádřit jako dluhopis s cenou K a call opcí. Na pravé straně máme akcii a prémii za put opci. Při vzniku nerovnováhy mezi stranami rovnice (6.8) bychom uplatnili arbitráž a nakupovali levnější portfolio a prodávali dražší.

6.2 Oceňování amerických opcí

Díky pevně stanovenému termínu realizace v případě evropské opce je její ocenění snazší, než v případě opce americké. Pokud držíme americkou opci, můžeme ji uplatnit okamžitě a nečekat do její maturity. Pro maximalizaci zisku tak v každém okamžiku držení opce porovnáváme aktuální výplatní funkci s budoucí hodnotou opce, pokud bychom ji ihned nerealizovali. Hlavním úkolem při oceňování amerických opcí je odhadnout budoucí hodnotu z jejich držení. Vzhledem k tomu, že nelze simulovat cenu podkladového aktiva ve spojitém čase, nahlíží se na americké opce jako na bermudské opce. Bermudské opce stojí na pomezí mezi evropskými a americkými opcemi v tom smyslu, že je můžeme uplatnit pouze v předem daných časových okamžicích. Pokud americkou opci můžeme uplatnit kdykoliv v čase t v období $0 \leq t \leq T$, tak bermuda opci můžeme uplatnit pouze v jednotlivých časových okamžicích $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_d$, kde d je počet časových

okamžiků, ve kterých můžeme bermudskou opci uplatnit. Americkému typu opcí se můžeme přiblížit tím, že zvolíme dostatečně velké d . Lze ukázat, že americká call opce je ekvivalentní evropské call opci, například Hull (2012), a nemá smysl ji realizovat před expirací. V další kapitole ukážeme na příkladu ocenění americké (bermudské) put opce.

6.2.1 Příklad ocenění americké put opce

Jak popisují (Longstaff and Schwartz, 2001), nejlepší je LSMC popsat na jednoduchém numerickém příkladu. Uvažujme americkou put opci na akcii, které nevypláčí dividendu. Put opce má realizační cenu $K = 1.1$ a můžeme ji realizovat v časech 1,2,3, kde 3 je datum expirace dané opce. Bezriziková úroková míra r je 6%. Pro jednoduchost uvažujme pouze 8 možných scénářů vývoje spotové ceny podkladové akcie simulované pomocí geometrického Brownova pohybu.

Tabulka 1: Vývoj ceny podkladové akcie

Scénář	t=0	t=1	t=2	t=3
1	1,0	1,09	1,08	1,34
2	1,0	1,16	1,26	1,54
3	1,0	1,22	1,07	1,03
4	1,0	0,93	0,97	0,92
5	1,0	1,11	1,56	1,52
6	1,0	0,76	0,77	0,90
7	1,0	0,92	0,84	1,01
8	1,0	0,88	1,22	1,34

Cílem této úlohy je nalézt vhodný okamžik pro uplatnění opce tak, abychom realizovali maximální zisk a to pro každý scénář. Vzhledem k tomu, že algoritmus výpočtu postupuje rekurzivně, bude potřeba několik mezikroků. Pokud bychom opci nerealizovali před její expirací v čase $t = 3$ a drželi ji až do konce životnosti, cash flow plynoucí z optimální realizace opce (realizovali bychom pouze ty opce, které jsou v penězích) v čase $t = 3$ by přineslo zisk, který můžeme vidět v tabulce 2. Úplně stejné cash flow bychom získali, pokud bychom drželi evropskou put opci do její splatnosti.

Tabulka 2: Cash flow v čase $t = 3$

Scénář	t=1	t=2	t=3
1	--	--	0
2	--	--	0
3	--	--	0,07
4	--	--	0,18
5	--	--	0
6	--	--	0,20
7	--	--	0,09
8	--	--	0

Dalším krokem je rozhodnutí o realizaci opce v čase $t = 2$ pokud je zrovna opce v penězích. Držitel opce se tak musí rozhodnout, zda opci realizuje nebo jestli se vyplatí opci držet dále až do času $t = 3$, kdy opce expiruje. Pokud v penězích není, opci držíme dále, protože tím nic neztratíme. Z tabulky 1 je patrné, že pouze pět scénářů je v čase $t = 2$ v penězích. Cenu akcie v čase $t = 2$ označíme jako X a diskontované cash flow v čase $t = 3$, za podmínky, že opce nebyla realizována v čase $t = 2$ označme jako Y . Používáme pouze scénáře, kde opce v čase $t = 2$ je v penězích. Jak tvrdí (Longstaff and Schwartz, 2001), tento způsob lépe zachytí odhad podmíněné střední hodnoty v regresní funkci, protože odhad provádíme pouze tam, kde je relevantní. Vektory Y a X jsou zobrazeny v tabulce 3. Pro diskontování používáme spojitě úročení.

Tabulka 3: Regrese v čase $t = 2$

Scénář	Y	X
1	$0 \times 0,94176$	1,08
2	--	--
3	$0,07 \times 0,94176$	1,07
4	$0,18 \times 0,94176$	0,97
5	--	--
6	$0,2 \times 0,94176$	0,77
7	$0,09 \times 0,94176$	0,84
8	--	--

Následně odhadneme regresní funkci, kdy výstupem je očekávané cashflow z dalšího držení opce v závislosti na ceně podkladové akcie v čase $t = 2$. Odhadneme jednoduchou regresní funkci ve tvaru $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$. Tato jednoduchá regresní

funkce bude pro názornost stačit, další typy regresních funkcí popisují Longstaff a Schwartz ve svém původním článku (Longstaff and Schwartz, 2001). Výsledná regresní funkce bude vypadat takto: $E[Y|X] = -1,0699 + 2,9834X - 1,8136X^2$. Nyní porovnáme hodnotu cashflow v čase $t = 2$ při okamžité realizaci opce s očekávanou hodnotou opce v čase $t = 3$, získanou pomocí regresní funkce. Porovnání můžeme vidět v tabulce 4, kde vlevo máme cash flow z uplatnění opce v čase $t = 2$ a vpravo vidíme očekávané cash flow z dalšího držení opce.

Tabulka 4: Optimální rozhodnutí v čase $t = 2$

Scénář	Uplatnění opce v $t = 2$	Cash flow opce z $t = 3$
1	0,02	0,0369
2	--	--
3	0,03	0,0461
4	0,13	0,1176
5	--	--
6	0,33	0,1520
7	0,26	0,1565
8	--	--

Hodnota cash flow v čase $t = 2$ je odvozena z výplatní funkce put opce v dlouhé pozici a to jako $1,1$ (realizační cena) $- X$ (spotová cena) pro ty scénáře, kde je opce v penězích. Tuto hodnotu porovnáujeme s očekávanou hodnotou plynoucí z dalšího držení opce do $t = 3$. Toto porovnání ukazuje, že je výhodné realizovat opci v čase $t = 2$ pro scénáře 4, 6 a 7. Naopak pro scénáře 1 a 3 se jeví jako výhodnější počkat s realizací opce do času $t = 3$ kvůli vyššímu očekávanému cash flow, než bychom získali z uplatnění opce v $t = 2$. V tabulce 5 vidíme cash flow z opce za podmínky, že ji neuplatníme před $t = 2$.

Tabulka 5: Cash-flow v čase $t = 2$

Scénář	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	--	0	0
2	--	0	0
3	--	0	0,07
4	--	0,13	0
5	--	0	0
6	--	0,33	0
7	--	0,26	0
8	--	0	0

Je zřejmé, že pokud opci uplatníme v čase $t = 2$, tak v čase $t = 3$ bude cash flow nulové, protože opci již nedržíme.

Dalším krokem je rozhodnutí, jestli opci realizovat ještě dříve a to v čase $t = 1$. V Tabulce 1 s vývojem ceny podkladové akcie vidíme, že je zde opět několik scénářů, kdy je opce v čase $t = 1$ v penězích, jsou to scénáře 1, 4, 6, 7, a 8. Pro tyto scénáře opět nadefinujeme Y jako diskontované cash flow v čase $t = 2$ za podmínky, že opce nebyla realizovaná v čase $t = 1$. Zdůrazněme, že pro definování Y používáme reálné cash flow plynoucí z realizace opce v čase $t = 2$ a ne odhad podmíněné střední hodnoty získané z regrese v předchozím kroku. Jak tvrdí (Longstaff and Schwartz, 2001), použitím diskontovaného odhadu podmíněné střední hodnoty cash flow může odhad ceny opce nadhodnotit.

Protože opci můžeme realizovat pouze jednou, budoucí cash flow lze získat z pouze z $t = 1$ nebo $t = 2$, ale nikdy ne z obou zároveň, proto pro scénář 1 je v tabulce 6 nulové cash flow. Opci jsme se totiž v $t = 2$ rozhodli dále držet, protože očekávané cash flow v $t = 3$ bylo vyšší než reálné cash flow v $t = 2$. Cash flow získané v čase $t = 2$ je diskontováno pouze o jedno období, kdežto cash flow získané v čase $t = 3$ je diskontováno o dvě období. Podobně jako o krok dříve, X prezentuje cenu podkladové akcie v čase $t = 1$. Vstupní vektory pro odhad regrese vidíme v tabulce 6.

Tabulka 6: Regrese v čase $t = 1$

Scénář	Y	X
1	$0 \times 0,94176$	1,09
2	--	--
3	--	--
4	$0,13 \times 0,94176$	0,93
5	--	--
6	$0,33 \times 0,94176$	0,76
7	$0,26 \times 0,94176$	0,92
8	$0 \times 0,94176$	0,88

Očekávaná hodnota cash flow v čase $t = 2$ za podmínky, že opci se rozhodneme nerealizovat v čase $t = 1$ je opět odhadnuta regresní funkcí ve stejném tvaru jako v předchozím kroku. Výsledná regresní funkce má tvar $E[Y|X] = 2,0375 - 3,3354X + 1,356X^2$. Dosazením X do regresní funkce získáme budoucí očekávanou hodnotu cash flow z držení opce. V tabulce 7 vidíme porovnání budoucí podmíněné hodnoty cash flow s cash flow, které bychom získali z uplatnění opce v čase $t = 1$.

Tabulka 7: Optimální rozhodnutí v čase $t = 1$

Scénář	Uplatnění opce v $t = 1$	Cash flow opce z $t = 2$
1	0,01	0,0139
2	--	--
3	--	--
4	0,17	0,1092
5	--	--
6	0,34	0,2866
7	0,18	0,1175
8	0,22	0,1533

Porovnáním hodnot v tabulce 7 dojdeme k závěru, že je výhodné realizovat opci v čase $t = 1$ pro scénáře 4, 6, 7 a 8. Pouze pro scénář 1 je očekávaná budoucí hodnota cash flow větší než cash flow z okamžité realizace v čase $t = 1$.

Identifikovali jsme optimální strategii realizace opce v časech $t = 1, 2, 3$ pro každý scénář. Tuto strategii můžeme vyjádřit následující tabulkou 8:

Tabulka 8: Optimální strategie při realizaci opce

Scénář	t=1	t=2	t=3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

S pomocí tabulky 8 nyní můžeme určit cash flow plynoucí z každého scénáře. Cash flow určíme jednoduše tak, že opci realizuje v čase, ve kterém je v tabulce výše jednička, čímž dostáváme cash flow realizované v rámci jednotlivých scénářů, jak můžeme vidět v tabulce 9:

Tabulka 9: Cash flow při realizaci optimální strategie

Scénář	t=1	t=2	t=3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0,07
4	0,17	0	0
5	0	0	0
6	0,34	0	0
7	0,18	0	0
8	0,22	0	0

Nyní, když známe cash flow plynoucí z realizace optimální stragie pro každý scénář a pro každý čas t , můžeme nyní americkou put opci ocenit. Ocenění opce bychom provedli tak, že každé cash flow pro každý scénář diskontujeme vzhledem k jeho časové vzdálenosti od počátečního bodu $t = 0$. Získáme tak vektor hodnot diskontovaných cash flow $v = (0; 0; 0,585; 0,1601; 0; 0,3202; 0,1695; 0,2072)$, kde průměr z těchto hodnot můžeme považovat za odhad ceny americké put opce. Výsledná cena opce je tedy 0,1144,

což je přibližně dvakrát více, než ocenění evropské opce se stejnými parametry, kterou bychom ocenili na 0,0564. Cenu evropské opce bychom získali snadno, jako průměrné diskontované cash flow v čase $t = 3$ z tabulky 2.

Na tomto jednoduchém příkladu bylo ukázáno, jak funguje oceňování opcí pomocí Least squares Monte Carlo. Metodu nejmenších čtverců můžeme použít pro regresní funkci, která nám pomůže identifikovat ideální strategii, která maximalizuje hodnotu opce v každém časovém okamžiku pro každý scénář. Jak je patrné z příkladu výše, implementace algoritmu není náročná, protože využíváme pouze regresní funkci. Jak popisují (Longstaff and Schwartz, 2001), pro regresní funkci lze použít i různé typy polynomů.

7. Aplikace LSMC na anuity

V předchozí části práce byla představena teorie modelů a postupů, které budeme dále využívat. V praktické části bude sestaven za daných předpokladů model pro anuitu a simulován BE_1 pomocí metody Nested Monte Carlo a Least squares Monte Carlo. Důraz bude kladen na různá nastavení parametrů vstupujících do modelů, které vedou ke konzistentním výsledkům. Důležitou částí této kapitoly bude také porovnání výpočetní náročnosti jednotlivých metod pro anuity a porovnání 99,5% kvantilu rozdělení odhadu BE_1 . Pro vlastní simulace je použit freeware program R a RStudio. Využíván bude z velké části vlastní kód a některé knihovny s požadovanými funkcemi. Kde to bude vhodné, bude použit příklad nebo část kódu pro ilustraci. Kompletní kód je k nalezení v příloze.

7.1 Proměnné vstupující do modelu

V této kapitole budou přiblíženy vstupní proměnné, které ovlivňují výši BE_1 . V první řadě je třeba definovat rizikové faktory a poté nalézt jejich vhodné vyjádření.

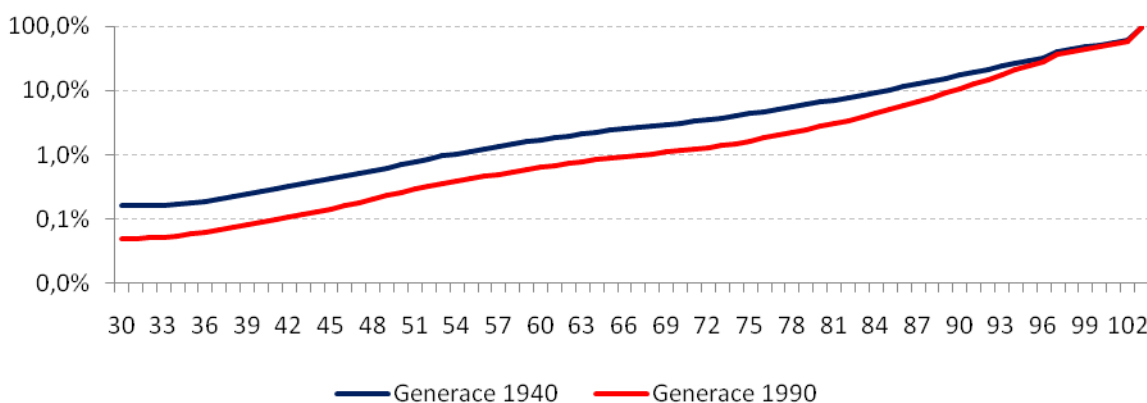
7.1.1 Náhodné proměnné

V našem zjednodušeném případě anuity budeme uvažovat dva rizikové faktory: inflaci a zhodnocení simulované pomocí korelovaných CIR procesů. Dále do modelu vstupuje revize zdravotního stavu pacienta, kde doba do nastání revize je modelována exponenciálním rozdělením a výše revize je modelována log-normálním rozdělením.

Pacientovi tak bude v závislosti na těchto dvou IID veličinách vyplácena poměrná část smluvené částky.

7.1.2 Generační úmrtnostní tabulky

Jako nenáhodné proměnné dále do modelu vstupují generační úmrtnostní tabulky. V kombinaci se simulací zhoršování zdravotního stavu zohledňují dostatečně riziko pacientova úmrtí. Generační úmrtnostní tabulka je charakterizována tím, že sleduje pravděpodobnosti úmrtí přes věk po jednotlivých kohortách (generacích). Většinou si vystačíme s obyčejnými okamžikovými úmrtnostními tabulkami, ale pro ocenění složitějších produktů jako jsou důchod a renty přicházejí ke slovu právě generační úmrtnostní tabulky. Konstrukce generačních úmrtnostních tabulek je náročnější, protože v sobě zahrnuje riziko změny v průměrné délce života v čase. V případě rent a důchodů je z tohoto důvodu potřeba plánovat desítky let dopředu a nepodcenit pokles úmrtnosti a prodlužování věku dožití. Na obrázku 7.1 vidíme ilustrativní porovnání míry úmrtnosti pro dvě generace mužů narozených v roce 1940 a v roce 1990. V každém věku je míra úmrtnosti vyšší pro starší generaci než pro mladší generaci



Obrázek 7.1 Porovnání míry úmrtnosti pro dvě generace, muži

Zdroj: vlastní zpracování, hodnoty z Výpočetní pomůcky na rezervování rent od České kanceláře pojistitelů

7.1.3 Nenáhodné proměnné

Dále budeme předpokládat fixní parametry modelů CIR a parametru lambda definujícího intenzitu revizí. Dále uvažujeme fixní parametry log-normálního rozdělení

vstupujícího do modelu, které určuje relativní výši původní částky K_0 . Zafixování všech parametrů nemusí dostatečně odpovídat realitě. Například v krizových časech můžeme sledovat vyšší nejistotu na trzích a tím pádem i vyšší rozptyl nebo rychlost konvergence k dlouhodobému stavu. Taktéž dlouhodobá úroveň inflace nebo výnosu se může v čase měnit, například v souvislosti se změnou politiky centrální banky. Zavedením více náhodných proměnných v modelu bychom mohli získat realističtější obraz skutečnosti, ovšem na úkor výpočetní náročnosti takového modelu.

7.2 Model annuity

Pro praktickou část budeme předpokládat annuitu pro krytí výdajů na trvalou péči o poškozeného. Pro výpočet současné hodnoty výplaty pro úhradu zdravotní péče budeme úročit vyplácenou částku K v jednotlivých letech o inflaci i_t . Zároveň se prostředky vyhrazené na závazek budou diskontovat o úrok r_t . Předpokládáme, že výplata částky na péči bude probíhat s pravděpodobností $(1 - q_t)$, až do ukončení smlouvy. Upravíme tedy výši závazku o úmrtnost q_t . Zároveň je každý rok prováděna revize zdravotního stavu poškozeného I_t . Vše výše uvedené lze přepsat jako:

$$R = \sum_{t=1}^{\omega-n} K I_t (1 - q_t) \left(\frac{(1 + i_t)^t}{(1 + r_t)^t} \right) \quad (7.1)$$

Kde:

- R je celková diskontovaná výše závazku, suma současné hodnoty výplat od věku n do konce platnosti smlouvy ω
- K je výše platby na úhradu zdravotní péče poškozenému
- I_t značí revizi zdravotního stavu v čase t . Nabývá hodnot mezi $(0, +\infty)$. Jedná se o složený proces, kdy doba do nastání změny zdravotního stavu je generována exponenciálním rozdělením s parametrem λ . Pokud se zdravotní stav poškozeného změní, je generována relativní výše platby pomocí log-normálního rozdělení s parametry $\sigma_{\text{výše revize}}$ a $\mu_{\text{výše revize}}$ k zajištění kladných hodnot výplaty. To znamená, že doba do revize jsou IID veličiny, stejně tak relativní výše platby jsou IID veličiny
- $(1 - q_t)$ je člen zohledňující úmrtnost

- $(1 + i_t)^t$ představuje index vývoje inflace, platby v budoucnu navyšujeme o inflaci
- $(1 + r_t)^t$ tento člen diskontuje výši budoucích plateb o úrokovou míru

V modelu pracujeme s úrokem a inflací, abychom zachovali reálnou hodnotu výplaty v čase. Hodnota K je tak „valorizována“ o inflaci. Více k zohlednění inflace v rámci anuit u neživotního pojištění k nalezení v publikaci Zimmermanna (2012). Zároveň vyhrazené prostředky na výplatu anuity jsou investovány do dluhopisů s výnosem r_t , proto budoucí platby diskontujeme.

7.3 Nested Monte Carlo

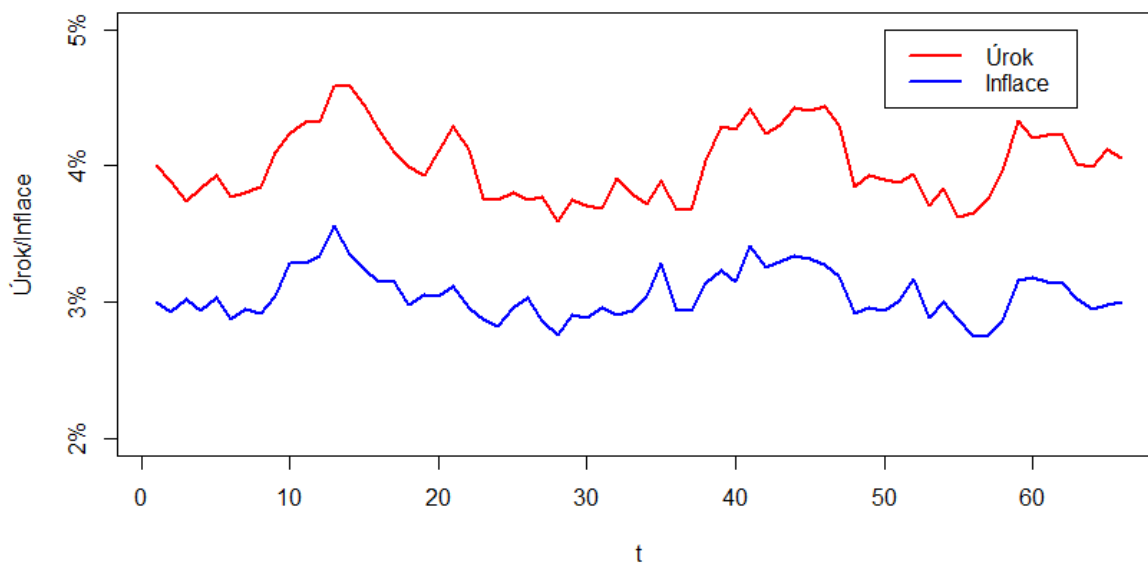
Předpokládáme anuitu pro 40letého muže, kde na konci každého roku proběhne výplata částky, až do konce platnosti smlouvy. Další vstupní proměnné jsou uvedeny v tabulce 10.

Tabulka 10 Parametry modelu

θ_{inlace}	3%
$\theta_{\text{úrok}}$	4%
$\sigma_{\text{úrok a inflace}}$	0.008
α	0.2
ρ	80%
λ	25
$\mu_{\text{výše revize}}$	0
$\sigma_{\text{výše revize}}$	0.3
K_t	100 000Kč
Věk	40let
ω	106 let

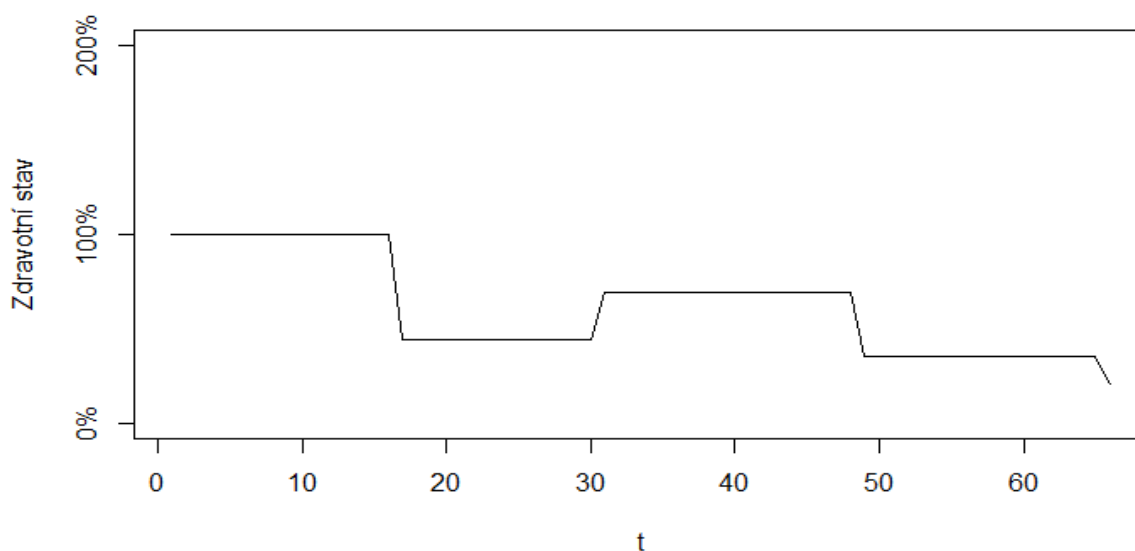
Parametry modelů CIR (α a σ) pro úrokovou míru a inflaci jsou stejné, pouze jejich dlouhodobé průměry (θ) se liší. Předpokládáme, že úroková míra je mírně vyšší než inflace. Zároveň, že tyto dvě veličiny jsou v čase korelovány z 80% (Jonsson and Reslow, 2015).

Korelaci úrokové míry a míry inflace zajistíme v modelu CIR (4.8) tak, že generujeme korelované náhodné veličiny ε_t . Korelaci náhodných veličin ε_t zajistíme nejjednodušeji pomocí Cholského dekompozice (Anděl, 2005).



Obrázek 7.2 Příklad realizace korelovaného CIR modelu pro úrok a inflaci

Na obrázku 7.2 výše vidíme korelované hodnoty míry inflace a úroku generovaných pomocí CIR modelu s parametry z tabulky 10, kde počáteční body míry inflace a úroku se rovnají jejich dlouhodobým hodnotám θ .



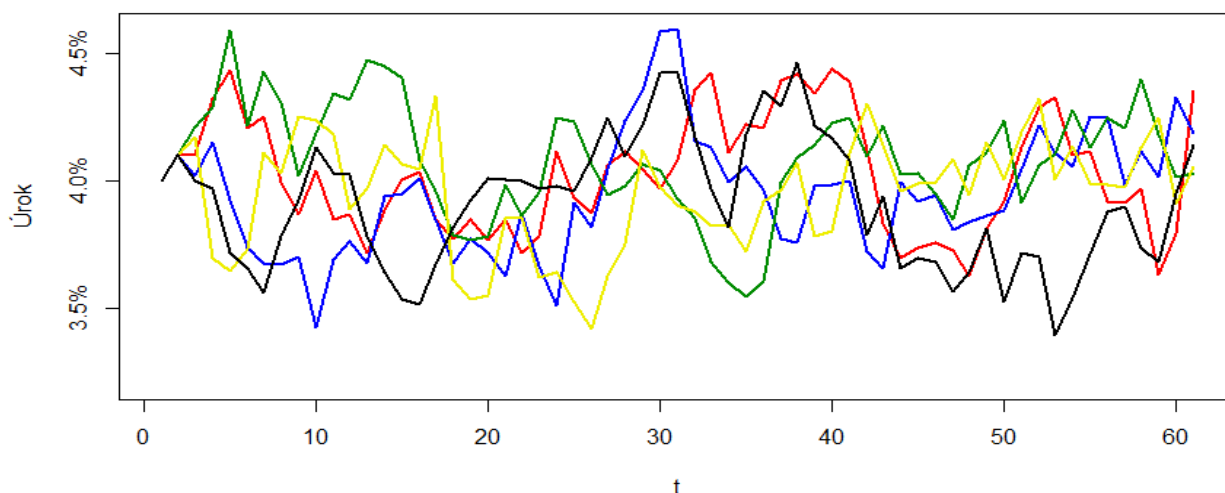
Obrázek 7.3 Příklad realizace změny zdravotního stavu

Na obrázku 7.3 vidíme příklad realizace složeného procesu, kterým je simulován zdravotní stav pacienta. Z příkladu je patrné, že přibližně v 17. roce trvání smlouvy dojde

po revizi ke zlepšení zdravotního stavu a dojde ke snížení vyplácené částky v daném roce na přibližně 50%. Ve 30. roce dojde opět k revizi zdravotního stavu a poškozenému se začíná vyplácet přibližně 80% částky v daném roce. Po 47. roce se zdravotní stav opět zlepší a po 60. roce trvání smlouvy ještě jednou.

Dále se budeme řídit postupem popsáním v teoretické části v kapitole 5.1. K tomu, abychom získali rozdělení odhadu BE_1 , potřebujeme v případě Nested Monte Carlo simulovat stovky až tisíce jednoletých real-world scénářů a z každého jednoho real-world scénáře simulovat další stovky až tisíce inner scénářů. Celkový počet scénářů pro simulaci tak čítá stovky tisíc až miliony simulací. To by nebyl problém, kdyby ocenění bylo potřeba jednou za čas, ale pokud se má model spouštět častěji, začíná být výpočetní čas limitující s jakýmkoliv hardwarem.

Pro příklad uvažujme 2 000 real-world scénářů a 5 000 inner scénářů, čímž dostáváme 10 milionů simulací nutných k provedení. Pokud nám jedna simulace zabere 0.004 vteřiny, tak výsledek dostaneme přibližně až za 12 hodin, což je nepraktické, pokud přičteme čas na další nutné operace v kódu. V našem modelovém příkladu anuity uvažujeme čtyři zdroje nejistoty, inflaci, úrokovou míru, dobu do nastání změny zdravotního stavu a výši revize zdravotního stavu. Z toho dva rizikové faktory, inflaci a úrokovou míru, můžeme ovlivňovat pomocí vstupních hodnot $r(0)$. Například v modelech životního pojištění bychom mohli uvažovat více rizikových faktorů, jako storna smluv, náhodnou míru úmrtnosti, výnos aktiv a další. Navíc bychom mohli uvažovat náhodné parametry jednotlivých modelů, kterými aproximujeme skutečnost. Například bychom mohli parametr θ v CIR modelu považovat za náhodný a vybírat ho z nějakého předem daného rozdělení.



Obrázek 7.4 Příklad real-world a inner scénářů pro simulaci úroku.

Ilustraci konkrétní realizace real-world a inner scénářů pro úrokovou míru vidíme na obrázku 7.4. Z jednoho real-world scénáře v $t = 1$ vychází 5 inner scénářů, které simulujeme až do $\omega - V\check{e}k$. Úroková míra pro všech pět realizací osciluje okolo svého dlouhodobého průměru, a i když se na čas odchýlí, zase se po několika krocích vrací nazpět.

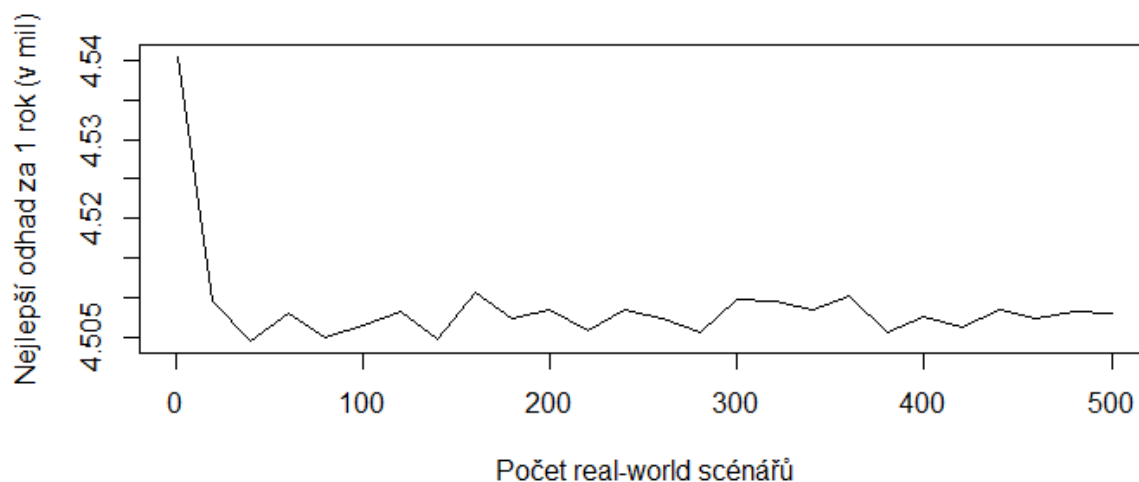
Nyní přistoupíme k samotným simulacím podle metody Nested Monte Carlo. Vstupní proměnné jsou uvedeny v tabulce 10. Výsledky simulací BE_1 jsou uvedeny v následující tabulce 11.

Tabulka 11 Výsledky simulací -Nested Monte Carlo

	Simulace 1	Simulace 2	Simulace 3	Simulace 4
Počet real-world scénářů	50	1000	500	500
Počet inner scénářů	50	500	2000	5000
Počet simulací	2 500	500 000	1 000 000	2 500 000
Čas výpočtu	6,7 sek	33,5 min	1,08 hod	2,93 hod
Průměr odhadu BE_1	4 512 244	4 507 992	4 508 248	4 507 857
σ	26 166,05	7 813,313	4 402,389	3 094,324
Špičatost	-0,3952406	0,1483837	0,08299094	-0,1409998
Šikmost	0,01220922	0,1533156	0,01238126	0,007761253
99.5% kvantil	4 569 176	4 526 621	4 518 480	4 513 670

Real world scénáře inflace a úrokové míry byly simulovány pomocí CIR modelů, kde jejich počáteční hodnoty byly stejné jako parametr θ pro každý model. Začínali jsme s malým počtem simulací a postupně navyšovali a kombinovali počet real-world scénářů a inner scénářů. Z výsledků simulace 1, 2 a 3 je vidět, že se zvyšujícím se počtem real-world scénářů dostáváme stále přesnější výsledky. Toto je patrné hlavně na snižování 99.5% kvantilu rozdělení odhadu BE_1 . Výsledky průměru odhadu BE_1 jsou podobné pro všechny simulace s výjimkou simulace 1. Byla vyzkoušena různá nastavení modelu a přibližně od celkového počtu 200 000 scénářů se průměr odhadu BE_1 pohybuje okolo hodnoty 4 508 000. Nejlepší výsledek dostáváme pro simulaci 4, kdy průměr odhadu BE_1 je podobný jako u simulací 2 a 3, ale rozptyl a 99.5% kvantil je ještě nižší než u simulace 3. Stojí za povšimnutí, že simulace 4, u které dostáváme z ukázaných simulací nejpřesnější výsledky, trvala téměř 3 hodiny.

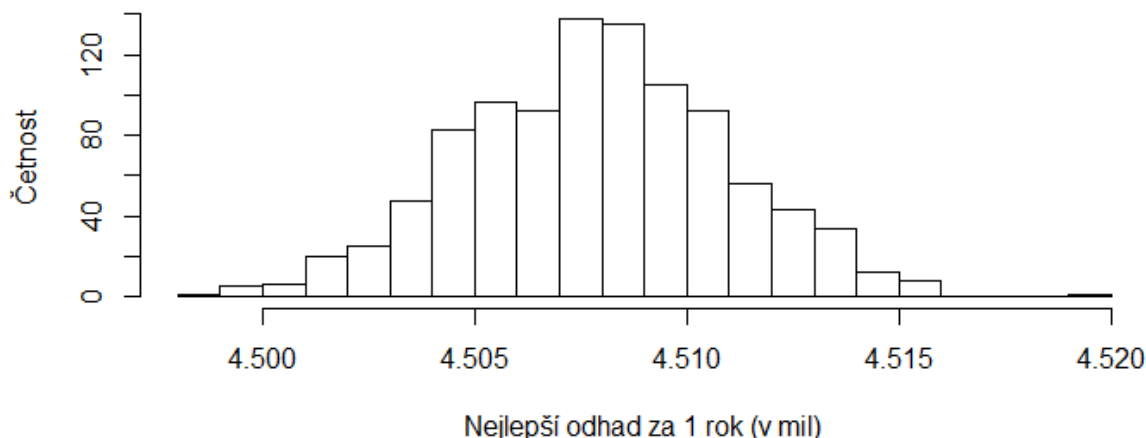
Co se týče konvergence, většina autorů se shoduje (Cathcart and Morrison, 2014) nebo (Horig; Murray, Phelan; Lietschkis, 2013), že čím více scénářů simulujeme, tím přesnější výsledek bychom měli získat. Pro ověření tohoto předpokladu jsem zaznamenával hodnotu nejlepšího odhadu pro různé počty real world scénářů při zafixovaném počtu inner scénářů na hodnotě 500. Výsledek je možné vidět na obrázku 7.5.



Obrázek 7.5 Závislost nejlepšího odhadu na počtu real world scénářů

S rostoucím počtem real world scénářů opravdu průměr odhadu BE_1 konverguje a okolo počtu 400 scénářů se ustaluje okolo hodnoty $\approx 4\,508\,000$. Tedy výběr 500 real world scénářů pro Nested Monte Carlo může být považován za dostatečný.

Na druhou stranu, jak vidíme z výsledků simulací v tabulce 11., optimální počet inner scénářů se nepodařilo určit, protože pro každou simulaci s rostoucím počtem inner scénářů klesá výběrový σ i 99,5% kvantil rozdělení odhadu BE_1 . Můžeme simulovat ještě více inner scénářů s celkovým lepším výsledkem, ovšem na úkor časové náročnosti.



Obrázek 7.6 Rozdělení výsledku Simulace 4.

Na obrázku 7.6 vidíme histogram odhadu BE_1 ze simulace 4. Jak vyplývá z tabulky 11. a z obrázku 7.6, rozdělení je mírně pozitivně zešikmené. Většina hodnot je soustředěna okolo průměru odhadu BE_1 a rozptyl je nejmenší ze všech simulací z tabulky 11. Tuto simulaci 4 tak dále využijeme pro porovnání s metodou Least squares Monte Carlo v kapitole 7.7.

7.4 Metoda AV (Antithetic Variates) pro snížení rozptylu v simulacích MC

Pro samotné simulace v kapitole 7.3 jsem se rozhodl použít AV (Antithetic Variates) metodu pro snížení rozptylu. Tato metoda je velmi jednoduchá a zároveň efektivně snižuje rozptyl u simulací typu Monte Carlo, což nám z části umožňuje snížit počet nutných simulací nebo počet simulací naopak zvýšit a dosáhnout tak lepších výsledků při stejné výpočetní náročnosti. V základu jde o to, že k jednomu simulovanému scénáři metodou Monte Carlo vytvoříme její přesný protiklad. Ve výsledku tak celkem snadno dostaneme dvojnásobný počet simulací a navíc, výsledné rozdělení nejlepšího odhadu má menší rozptyl.

Předpokládejme, že máme veličinu Y_1 a k ní vytvoříme protikladnou stejně rozdělenou veličinu $(-Y_1)$, tyto dvě veličiny tedy budou normálně rozdělené IID hodnoty a chceme odhadnout rozptyl jejich společné očekávané střední hodnoty:

$$\hat{\theta} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}, \quad (7.2)$$

Kde rozptyl očekávané střední hodnoty je:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{Y_1 + (-Y_1)}{2}\right) &= \frac{1}{4}(\text{Var}(Y_1) + \text{Var}(-Y_1) + 2\text{Cov}(Y_1, (-Y_1))) \\ &= \frac{1}{4}(2\text{Var}(Y_1) + 2\text{Cov}(Y_1, (-Y_1))) \\ &= \frac{1}{2}\text{Var}(Y_1) + \frac{1}{2}\text{Cov}(Y_1, (-Y_1)). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Jelikož je veličina $(-Y_1)$ protikladná k veličině Y_1 , jejich kovariance bude záporná a tudíž docílíme snížení výsledného rozptylu odhadu střední hodnoty $\hat{\theta}$. Pokud rozšíříme definici tak, že proměnná Y bude vektor a i jeho prvky, tak dostaneme:

$$\frac{1}{2}\text{Var}(Y_i) + \frac{1}{2}\text{Cov}(Y_i, (-Y_i)) < \frac{1}{2}\text{Var}(Y_i), \quad (7.4)$$

Pomocí této metody tak během jednoho generování hodnot můžeme jednoduše vytvořit další tak, že nenavýšíme čas výpočtu a zároveň docílíme snížení rozptylu. Více k této metodě o snižování rozptylu a dalších je k nalezení například v (Haugh, 2004).

Pro ilustraci zde uvedu dvě simulace podle metody Nested Monte Carlo jednou bez použití AV a jednou s použitím metody AV. Obě simulace mají stejné výchozí podmínky, jako simulace prováděné v kapitole 7.3. Počet real world a inner scénářů zvolme stejný jako v simulaci 4a to: 500 real world scénářů a 5000 inner scénářů.

Tabulka 12 Porovnání simulací s a bez AV metody

	Simulace bez AV	Simulace s AV
Kvantil 99.5%	4 526 071	4 513 670
Směrodatná odchylka	8023,319	3 094,324

V tabulce 12 vidíme, že použití AV metody skutečně vede ke konzistentnějším výsledkům. V samotné simulaci vytvoříme AV proměnnou například v CIR (4.8) modelu tak, že k vektoru náhodných proměnných ε_t^1 vytvoříme druhý protikladný vektor $\varepsilon_t^2 =$

$\varepsilon_t^1(-1)$ a vytvoříme simulaci úroku nebo inflace protilehlou k původní. Tuto úpravu použijeme všude, kde dochází ke generování náhodných proměnných. Jedinou výjimku tvoří náhodná proměnná doby do nastání změny zdravotního stavu (revize). Ta byla ponechána stejně.

7.5 Vektorizace

Vektorizace kódu je velmi užitečná vlastnost, která může často pomoci snížit výpočetní čas provádění operace v R. Žádná mně známá knihovna v R neobsahuje funkce pro simulaci úroku a inflace v požadovaném tvaru, které lze použít pro náš příklad, takže téměř celý kód byl napsán svépomocí. Funkce v knihovnách jsou pro zrychlení výpočtů optimalizované a často se odkazují na kód zkompileovaný v jazyce C, C++ nebo FORTRAN. Pro běžného uživatele jsou tyto části kódu skryty. Ve funkcích jednotlivých knihoven na ně můžeme najít odkazy jako např.: *.Call*.

```
> rchisq
function (n, df, ncp = 0)
{
  if (missing(ncp))
    .Call(C_rchisq, n, df)
  else .Call(C_rnchisq, n, df, ncp)
}
<bytecode: 0x000000000447cd28>
<environment: namespace:stats>
```

Dnes je nabídka knihoven pro simulaci CIR modelu celkem široká, například SDE, Sim.DiffProc, ESGToolkit, YUIMA, SMFI5 a další. Bohužel žádný nenabízí vícerozměrný CIR model s korelovanou náhodnou složkou, který budeme používat v modelu anuity. Tyto balíčky zahrnují pouze takzvané jump-diffusion procesy ve tvaru:

$$dX_t^y = \alpha(\theta - X_t^y)dt + \sigma\sqrt{X_t^y} dW_t^y + dJ_t^y, \quad (7.5)$$

kde korelovaná náhodná složka je pouze v části dJ_t^y . Pro anuitu budeme chtít použít model úrokové míry a inflace, kde bude korelována náhodná složka dW_t^y

$$dX_t^y = \alpha(\theta - X_t^y)dt + \sigma\sqrt{X_t^y} dW_t^y. \quad (7.6)$$

Při simulaci úroku a inflace jsem se nemohl vyhnout for cyklům, které kód zpomalují a jsou náročnější na výpočetní čas. R totiž v každém jednom cyklu počítá zvlášť pouze s jednou hodnotou, místo aby počítal s celým vektorem najednou. Více k vektorizaci například v (Iacus, 2008).

Ovšem vektorizovat kód se také nemusí vyplatit. Může se stát, že se úsilí vynaložené na optimalizaci kódu nevrátí nazpět a vektorizace může dokonce výpočetní čas prodloužit. Na příkladu bych toto rád ukázal.

Uvažujme model Ornstein-Uhlenbeck (dále OU model), který se velmi podobá našemu CIR modelu. Je také mean-reverting, ale o trochu jednodušší. Jednorozměrný diskretizovaný OU model můžeme zapsat takto:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma d\epsilon_t. \quad (7.7)$$

Vidíme, že modelu chybí člen $\sqrt{X_t}$, který je obsažen v modelu CIR. OU model tak může nabývat záporných hodnot, na rozdíl od modelu CIR. OU model budeme v programu R simulovat pomocí for cyklu a následně tento kód přepíšeme tak, abychom se vyhnuli cyklům a program pracoval pouze s vektory. V tabulce 13 vidíme výstup z R pro porovnání kódu s for cyklem a vektorizovaným zápisem. Ve sloupci Uživatel je výpočetní čas CPU věnovaný provedení uživatelských instrukcí. Ve sloupci Systém je uvedený čas CPU nutný k samotnému výpočtu. Jak je vidět z tabulky 13, vektorizace kódu celý výpočet zpomalila několikanásobně.

Tabulka 13 Časová náročnost simulace OU modelu

	Uživatel	Systém	Celkem
OU.for	0.04	0.00	0.05
OU.vec	1.88	0.00	1.90

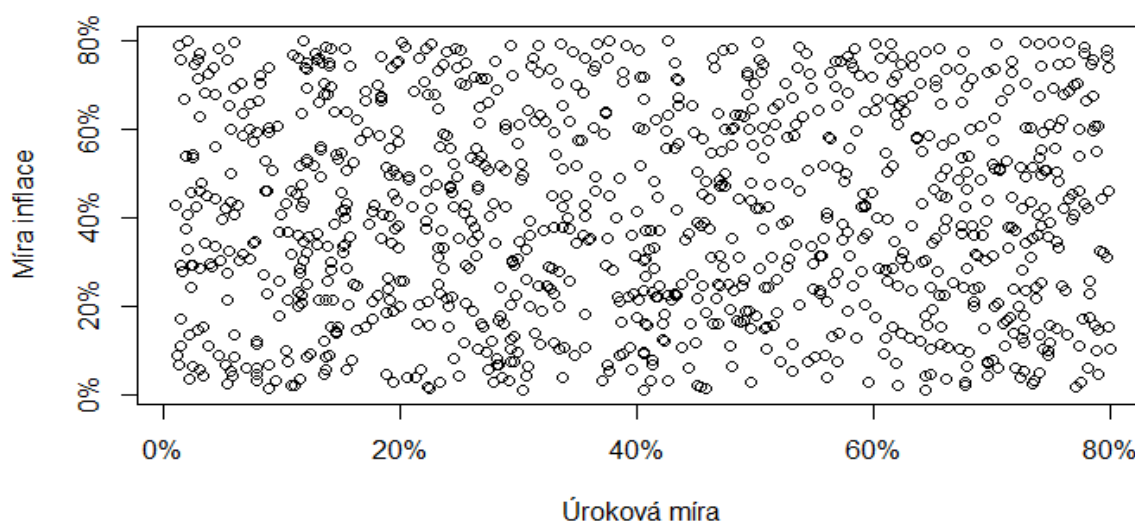
Bohužel se mi nepodařilo přepsat samotný model CIR do vektorizované podoby. Jelikož je CIR model složitější o člen $\sqrt{X_t}$, můžeme soudit, že by vektorizace stejně nepřinesla žádné zrychlení samotné simulace, spíše naopak (Iacus, 2008).

7.6 Least squares Monte Carlo

V této kapitole bude simulováno rozdělení odhadu BE_1 pomocí metody Least squares Monte Carlo a porovnáme ho s rozdělením odhadu BE_1 z metody Nested Monte Carlo. Základní koncept byl popsán v teoretické části 5.2. Vstupní parametry zůstávají stejné jako u Nested Monte Carlo metody.

7.6.1 Kalibrační část

Jak bylo popsáno v teoretické části, jako počáteční hodnoty inner scénářů slouží takzvané outer scénáře. Tyto scénáře nejsou generovány modelem, ale snažíme se je schválně rozprostřít na co největším intervalu tak, aby pokrývaly i extrémní případy, které mohou nastat. Připravujeme si tak data pro odhad regresní funkce v další části. Znamená to, že v našem modelovém příkladu budeme generovat outer scénáře pro inflaci pomocí rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle 1\%, 80\% \rangle$.

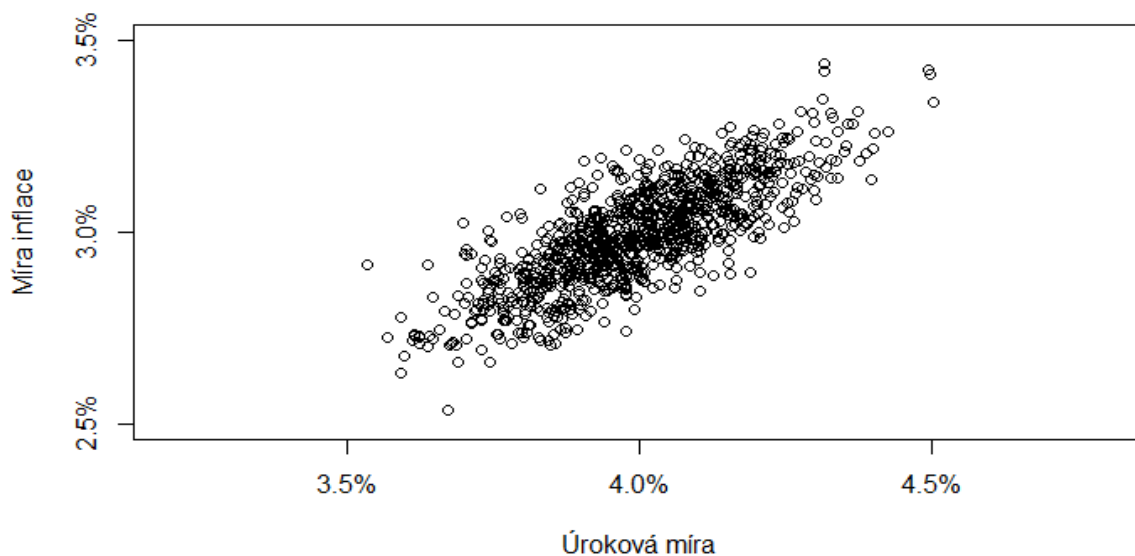


Obrázek 7.7 Outer scénáře Least squares Monte Carlo

Výše na obrázku 7.7 pro ukázkou vidíme případ z generování outer scénářů. Generovali jsme 1000 počátečních hodnot pro míru inflace a úroku, které slouží jako výchozí hodnoty pro inner scénáře. Hodnoty rizikových faktorů pokrývají i extrémní hodnoty. S vysokou pravděpodobností nenastanou, ale naším cílem je, mimo jiné, právě prozkoumat dopad těchto extrémů na výši horního 99,5% kvantilu rozdělení odhadu BE_1 .

Oproti Least squares Monte Carlo, v Nested Monte Carlo jsou zpočátku generovány real-world scénáře, které slouží, jako počáteční hodnoty pro inner scénáře, pomocí modelu. Ty tak pokrývají mnohem menší interval hodnot. Na obrázku 7.8 si také můžeme všimnout

pozitivní korelace mezi mírou inflace a úroku real world scénářů, která odpovídá parametru $\rho = 0,8$.



Obrázek 7.8 Real world scénáře Nested Monte Carlo

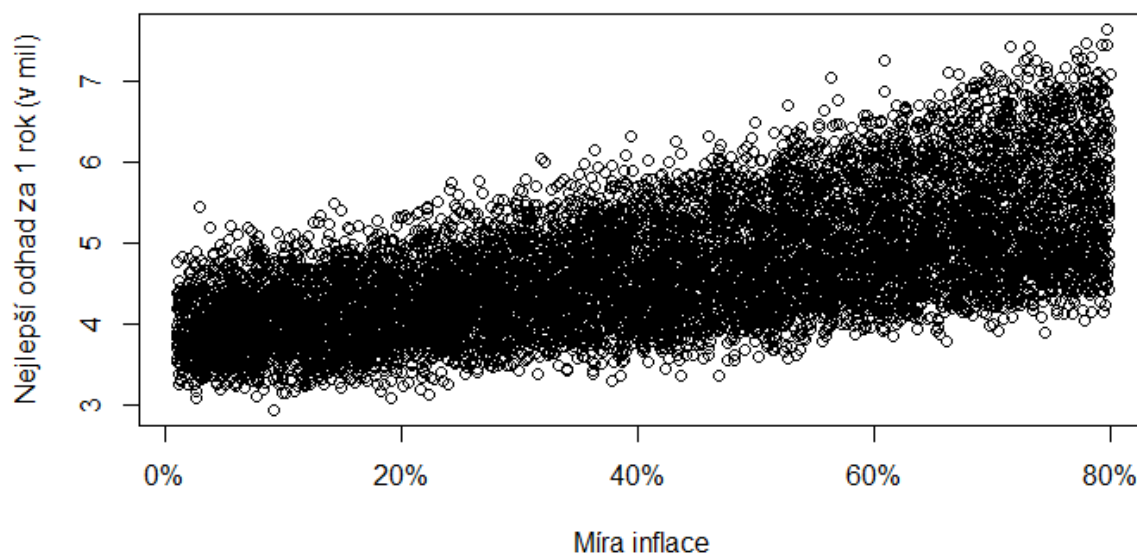
Metoda Nested Monte Carlo je pomalejší v konvergenci, kvůli málo pozorování na chvostech rozdělení odhadu BE_1 . Chvosty rozdělení a dostatek pozorování v těchto částech jsou důležité pro správné stanovení 99,5% kvantilu. Metoda Nested Monte Carlo tak ani nemůže poskytovat informaci o chování závazků v oblastech nepokrytých real-world scénáři.

V modelovém případě budeme uvažovat 10 000 outer scénářů a 5 inner scénářů. Celkem tedy 50 000 scénářů. Simulace zabere pouze 1.8 minuty.



Obrázek 7.9 Závislost úroku a nejlepšího odhadu za 1 rok

Podle očekávání je mezi nejlepším odhadem za 1 rok pro každý scénář úrokové míry a úrokovou mírou v outer scénáři nepřímá úměrnost. Čím vyšší úročení našich uložených prostředků, tím nižší částku můžeme uložit pro budoucí výplaty, což můžeme vidět na obrázku 7.9. To samé pouze naopak platí u míry inflace na obrázku 7.10.



Obrázek 7.10 Závislost míry inflace a odhadu závazku za 1 rok

Z předešlého tak můžeme dopředu usuzovat, jaká znaménka budou mít koeficienty regrese. Pro úrokovou míru by odhad parametru β_{int} měl být záporný a naopak pro míru inflace β_{inf} by měl být kladný.

Odhad regresní funkce

Pro odhad funkce, jenž bude dobře aproximovat jednotlivé nepřesné inner scénáře, doporučují (Longstaff and Schwartz, 2001) použít ortogonální, například Legendreovy, polynomy. Dodávají také, že funkce se dá dostatečně dobře aproximovat prostými mocninami proměnných. Při použití obyčejných mocnin však může docházet ke korelaci ve vysvětlujících proměnných, takže výsledky mohou být ovlivněny multikolinearitou v datové matici vysvětlujících proměnných.

Jako výhodnější se jeví transformace proměnných a použití ortogonálních polynomů, jak navrhuji (Longstaff and Schwartz, 2001). Dále by bylo možné použít například různé funkce, jako regresní spliny atd. V této práci se omezím pouze na obyčejné a ortogonální polynomy.

V předchozí části této kapitoly jsme jako výsledky simulace dostali vektor s jednotlivými nepřesnými odhady závazku pro různé kombinace vstupních outer scénářů. Tyto vstupní outer scénáře následně použijeme jako vysvětlující proměnné pro regresi. Jako první budeme aproximovat funkci odhadu BE_1 obyčejnými polynomy, tj. jednoduchými mocninami outer scénářů.

Tabulka 14: Odhad parametrů funkce odhadu BE_1 obyčejnými polynomy

Proměnná	Bodový odhad	Směr. Odchylka	t	p-hodnota
Konstanta_lsmc	4 504 280	19 874	226.638	2.00E-16
int.rate.1Y_lsmc	-1 896 699	94 610	-20.048	2.00E-16
inf.rate.1Y_lsmc	2 211 413	94 697	23.353	2.00E-16
$I(\text{inf.rate.1Y_lsmc} * \text{int.rate.1Y_lsmc})$	-3 371 506	274 984	-12.261	2.00E-16
$I(\text{inf.rate.1Y_lsmc}^2 * \text{int.rate.1Y_lsmc})$	-1 286 242	235 641	-5.458	4.82E-08
$I(\text{inf.rate.1Y_lsmc} * \text{int.rate.1Y_lsmc}^2)$	2 098 954	236 881	8.861	2.00E-16
$I(\text{inf.rate.1Y_lsmc}^2)$	1 614 717	109 622	14.730	2.00E-16
$I(\text{int.rate.1Y_lsmc}^2)$	803 700	108 559	7.403	1.35E-13

Bylo vyzkoušeno mnoho kombinací mocnin outer scénářů a jejich interakcí mezi sebou. Nakonec jsem zvolil funkci ve tvaru, ve kterém ji vidíme v tabulce 14. s výsledným upraveným $R^2 = 0.6251$ a $AIC = 2\,652\,679$. Znaménko a hodnota konstanty v modelu nejsou v rozporu s intuicí, není záporná a v modelu je významná. Také další dva odhady parametrů jsou v souladu s očekáváním, kdy při růstu úrokové míry bude klesat množství prostředků, které v budoucnu pojišťovna vyplatí. Naopak s rostoucí mírou inflace bude množství vyplacených prostředků v budoucnu růst, protože o inflaci valorizujeme výši výplaty. Parametry u interakcí a mocnin už se těžko interpretují, ale vidíme, že v modelu mají své místo a jsou statisticky významné. Dále si můžeme všimnout vyšší hodnoty upraveného koeficientu R^2 .

Jako druhá metoda byla zvolena funkce odhadu BE_1 pomocí ortogonálních polynomů, které jsou popsány například v (Motl a Zahradník, 2002) Jejich výhodou je, že separují vliv jednotlivých mocnin, tak že datovou matici transformují na ortogonální bázi. Jednotlivé vektory datové matice jsou tak na sebe kolmé. Opět bylo vyzkoušeno mnoho kombinací a výsledek je uveden v tabulce 15. Všechny parametry jsou opět významné a model má i podobnou strukturu, ale koeficienty jsou v porovnání s obyčejnými polynomy

jiné a nedají se rozumně interpretovat. Upravené $R^2 = 0.6251$ a hodnota Akaikeho informačního kritéria vyšla 2 652 681.

Tabulka 15: Odhad parametrů funkce odhadu BE_1 pomocí ortogonálních polynomů

Proměnná	Bodový odhad	Směr. Odchylka	t	p-hodnota
(Intercept)	5 130 707	8 727	587.90	2.00E-16
$l(\text{int.rate.1Y_lsmc} * \text{inf.rate.1Y_lsmc})$	-3 116 172	138 227	-22.54	2.00E-16
$l(\text{int.rate.1Y_lsmc} * \text{inf.rate.1Y_lsmc}^2)$	-1 472 874	118 521	-12.43	2.00E-16
$l(\text{int.rate.1Y_lsmc}^2 * \text{inf.rate.1Y_lsmc})$	2 085 955	118 352	17.62	2.00E-16
$\text{poly}(\text{int.rate.1Y_lsmc}, 2)_1$	-132 009 076	1 781 227	-74.11	2.00E-16
$\text{poly}(\text{int.rate.1Y_lsmc}, 2)_2$	15 743 236	1 147 782	13.72	2.00E-16
$\text{poly}(\text{inf.rate.1Y_lsmc}, 2)_1$	355 294 402	1 779 533	199.66	2.00E-16
$\text{poly}(\text{inf.rate.1Y_lsmc}, 2)_2$	35 035 686	1 147 672	30.53	2.00E-16

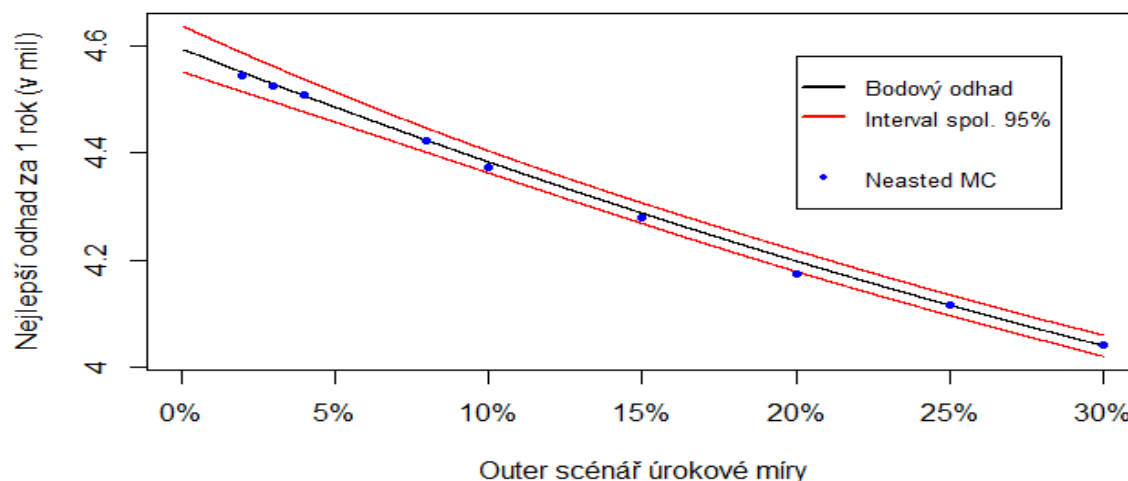
Obě dvě regresní funkce odhadnuté pomocí obyčejných polynomů a ortogonálních polynomů tak lze využít dále pro validace výsledků.

Validace výsledků

V této části budou porovnány výsledky z funkcí z předešlé části s výsledky z Nested Monte Carlo simulací. Validace bude spočívat v porovnání bodového odhadu funkce a hodnoty odhadu získaného upravenou metodou Nested Monte Carlo s odpovídajícími proměnnými. Vždy budeme měnit pouze jeden rizikový faktor, ostatní necháme fixní. Například budeme validovat schopnost regresní funkce zachytit vztah úrokové míry a průměr odhadu BE_1 . Dosadíme do regresní funkce hodnotu $r_1 = 20\%$ a porovnáme s výsledkem z upravené Nested Monte Carlo simulace, kam jsme tuto hodnotu dosadili jako jeden real-world scénář. Ostatní parametry jsou drženy zafixované, jako v původní simulaci popsané v kapitole 7.3 **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů..**

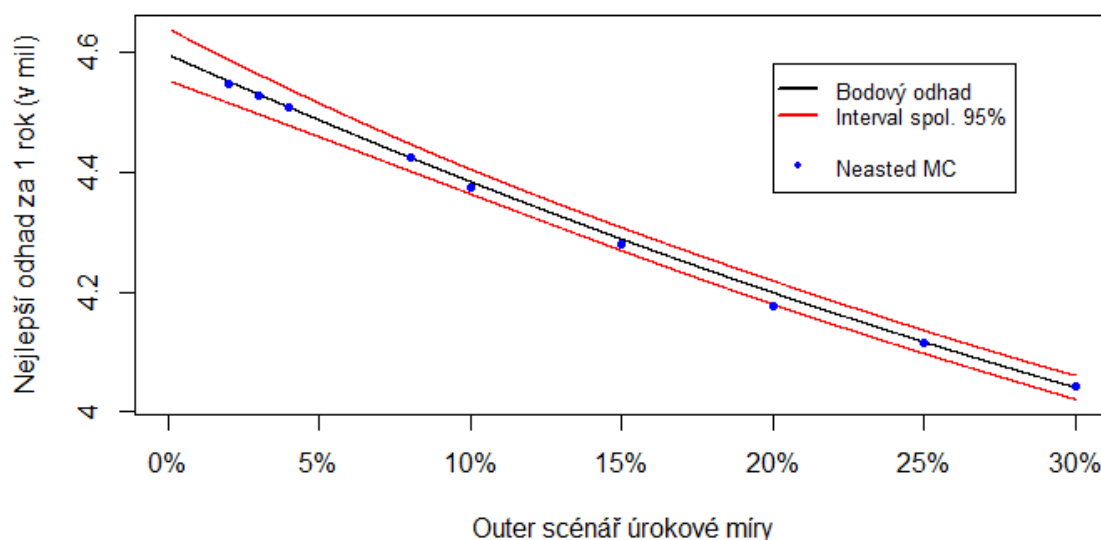
Jako první si vykreslíme závislost bodového odhadu z funkce s obyčejnými polynomy a úrokové míry v obrázku 7.11. Jak už bylo řečeno několikrát, při rostoucí úrokové míře, klesá i současná hodnota prostředků vyplacených v budoucnu, kvůli vyššímu zúročení. Dalším krokem je vykreslení intervalu spolehlivosti regresní funkce, v tomto případě 95% kvantil. Šířka pásu okolo bodového odhadu regresní funkce je smysluplně úzká a vypovídá tak o dostatečné kvalitě regresní funkce. Posledním krokem je

porovnání výsledků z Nested Monte Carlo simulací s bodovým odhadem regresní funkce. Na obrázku 7.11 vidíme výsledky většiny simulací Nested Monte Carlo uvnitř intervalu spolehlivosti regresní funkce, což svědčí o správnosti dosavadního postupu v metodě Least squares Monte Carlo. Odhadnutou regresní funkci bychom mohli použít dále pro simulaci rozdělení odhadu BE_1 .



Obrázek 7.11 Validace, obyčejné polynomy a úroková míra

V tabulce 14 a v tabulce 15 je vidět obrovský rozdíl v parametrech u polynomů stejných řádů, ale jak si můžeme všimnout na obrázku 7.11 a na obrázku 7.12, výsledky validací regrese na základě obyčejných polynomů vypadají téměř totožně s výsledky validací ortogonálních polynomů a nevykazují systematické zkreslení. Obě metody odhadu funkce odhadu BE_1 jsou velmi podobné a dají se použít pro simulaci odhadu BE_1 .



Obrázek 7.12 Validace, ortogonální polynomy a úroková míra

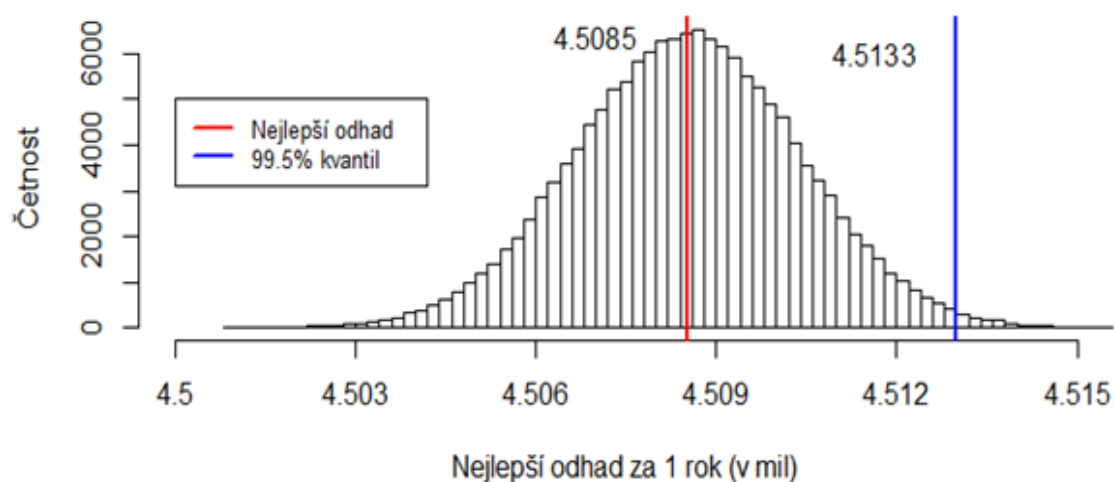
Obrázky týkající se validace pro míru inflace a porovnání funkcí obyčejných a ortogonálních polynomů jsou uvedeny v příloze. Vycházejí podobně jako pro úrokovou míru, kdy odhady z Nested Monte Carlo simulací leží v blízkosti regresní funkce, proto je zde neuvádím.

Validace potvrzují, že LSMC poskytuje dostatečně kvalitní odhad funkce odhadu BE_1 . Danou metodu a odhad funkce tak můžeme použít pro další analýzy, jako například výpočet kvantilu, průměru odhadu BE_1 nebo očekávané ztráty během jednoho roku. To bychom provedli generováním real world scénářů a jejich použitím jako vstupních hodnot do odhadnuté funkce. Tímto postupem dostaneme rozdělení odhadu BE_1 , se zohledněním jednoletého vývoje. Nadto LSMC umožňuje provádět různé ekonomické analýzy se zkoumáním vlivu jednotlivých rizikových faktorů.

7.6.2 Simulace BE_1

Ve druhé části LSMC algoritmu vygenerujeme 150 000 real world scénářů vývoje úrokové míry a míry inflace pomocí korelovaných CIR procesů se vstupními parametry, jako v případě Nested Monte Carlo. Tyto hodnoty pak vložíme do regresní funkce odhadnuté pomocí obyčejných polynomů. Použijeme raději jednodušší a snáze interpretovatelnou funkci, protože mezi oběma není téměř žádný rozdíl. Výsledné rozdělení po vložení real world scénářů vidíme na obrázku 7.13. Na první pohled je hned patrné, že celé rozdělení odhadu BE_1 je více vyhlazené, než rozdělení odhadu BE_1 z metody Nested Monte Carlo na obrázku 7.6. Je to z toho důvodu, že v metodě Least squares Monte Carlo máme výsledky pro rozdělení odhadu BE_1 o 150 000 hodnot prakticky okamžitě, stačí je vložit do regresní funkce. V metodě Nested Monte Carlo jsme limitováni výpočetním výkonem, který musíme více alokovat na inner scénáře, což se negativně projeví na počtu real world scénářů a celkové rozdělení odhadu BE_1 simulovaného metodou Nested Monte Carlo není tak vyhlazené. Co se týče časové náročnosti, generování real world scénářů pro LSMC zabere zlomek času oproti Nested Monte Carlo. Celkem 150 000 scénářů, navíc pouze jednoletých, je vygenerováno během několika vteřin, do kterých se vejde i výpočet průměru odhadu BE_1 pomocí regresní funkce. Větším problémem se tak stává zvolení správné definice real world scénářů. Můžeme je generovat jednoduše pomocí CIR procesu tak, jako v této práci nebo se zapojením expertního pohledu. V praxi bychom mohli pro generování real world scénářů

používají kopuly pro zachycení korelací mezi jednotlivými rizikovými faktory nebo zmíněné expertní scénáře.



Obrázek 7.13 Rozdělení odhadu BE_1 odhadnutého regresní funkcí

Tabulka 16: Výsledek aplikace LSMC

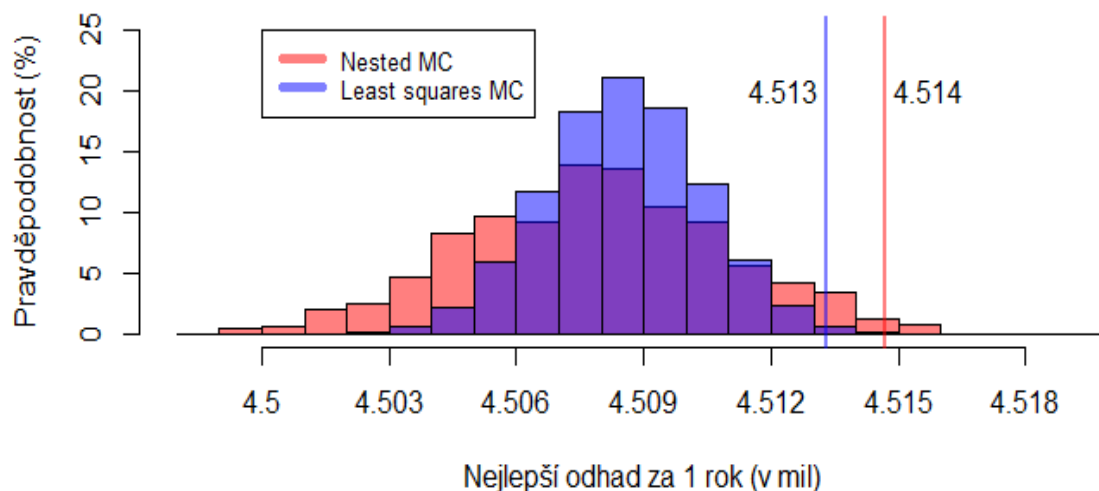
	Odhad BE_1 pomocí LSMC
Počet real world scénářů	150 000
Čas výpočtu	2.53 sek
Průměr odhadu BE_1	4508525
σ	1857.76
Špičatost	-0.004297986
Šikmost	-2.714698e-05
99.5% kvantil	4513293

V tabulce 16 jsou uvedeny některé hodnoty rozdělení odhadu BE_1 metodou Least squares Monte Carlo. Jak bylo zmíněno, vygenerování 150 000 real world scénářů jednoletého vývoje a výpočet predikcí z polynomicke regresní funkce máme prakticky okamžitě.

Směrnice Solvency II říká, že pojišťovny, které používají interní modely, mají odvozovat SCR rovnou z pravděpodobnostního rozdělení, pokud je to možné (článek 122/2). Což je, jak vidíme, jedním z výstupů Nested Monte Carlo simulace.

7.7 Porovnání Least squares Monte Carlo a Nested Monte Carlo

Na závěr porovnejme obě rozdělení odhadu BE_1 získaná jak metodou Nested Monte Carlo, tak metodou Least squares Monte Carlo v histogramu, obrázek 7.14.



Obrázek 7.14 Porovnání rozdělení LSMC a Nested Monte Carlo

Jak je vidět, rozdělení nejlepšího odhadu v Nested Monte Carlo má vyšší rozptyl a tak i 99.5% kvantil je více vzdálen od průměru odhadu BE_1 . Oproti tomu můžeme pozorovat symetričtější rozdělení odhadu BE_1 metodou Least squares Monte Carlo, které má menší rozptyl, tudíž více hodnot je soustředěno okolo svého průměru, než v Nested Monte Carlo.

Obě dvě rozdělení nejsou stejná, ale na pohled jsou si podobná. Dále nás zajímají kvantily rozdělení, v tomto případě 99.5% kvantil. Jak vyplývá z obrázku 7.14., kvantil rozdělení z Nested Monte Carlo je kvůli svému většímu rozptylu více vzdálen od průměru odhadu BE_1 . Oproti tomu 99.5% kvantil z Least squares Monte Carlo má nižší hodnotu. Rozdělení odhadu BE_1 z Nested Monte Carlo bychom mohli ještě více zpřesnit a přiblížit ho tak rozdělení z Least squares Monte Carlo, pokud bychom zvyšovali počet simulovaných scénářů. Je nutné říci, že rozdíl mezi oběma rozděleními i kvantily se na obrázku 7.14 může zdát značný, ale v případě kvantilů se jedná o chybu pouze 0.01%, což je jistě dobrý výsledek na to, že oba kvantily pocházejí z rozdělení dvou různých metod odhadu BE_1 . Stejně tak nejlepší odhad vykazuje chybu mezi oběma metodami ve výši 0.016%.

Při rozhodování, kterou metodu zvolit musíme vzít v potaz i časovou náročnost výpočtů. V případě simulace BE_1 metodou Nested Monte Carlo výpočet zabral téměř 3 hodiny. Oproti tomu simulace metodou LSMC zabrala ve výsledku pár minut výpočetního času. Metoda LSMC vyžaduje více pozornosti při odhadu regresní funkce a při její validaci, což skutečný čas nutný k odhadu BE_1 prodlouží, ale jakmile máme výslednou regresní funkci k dispozici, je možné tuto funkci využívat vícekrát pro různé scénáře vývoje rizikových faktorů. V případě Nested Monte Carlo bychom při změně nebo testování real world scénářů museli simulaci spouštět pokaždé celou znovu.

Na základě výše uvedeného se použití metody LSMC pro simulaci rozdělení odhadu BE_1 , jeví jako výhodnější.

Výsledná hodnota kvantilu získaná pomocí metody Least squares Monte Carlo by tak mohla být použita pro stanovení kapitálového požadavku (SCR). Celá regresní funkce by pak mohla být použita například k různým stres testům a citlivostním analýzám.

8. Závěr

Na začátku práce byl představen rámec Solvency II a definována úloha odhadu SCR jako horního 99,5% kvantilu rozdělení BE_1 . V dalších částech byly popsány modely úrokových měr, které jsou stěžejní pro praktickou část. Byl popsán základní koncept simulací podle metody Nested Monte Carlo a Least squares Monte Carlo.

V praktické části byl sestaven model, který pomocí Nested Monte Carlo simuluje rozdělení odhadu BE_1 . Z výsledků vyplývá, že průměr odhadu BE_1 se stabilizuje již od počtu 500 real world scénářů a počtu 500 inner scénářů. Naopak konvergence odhadu rozptylu probíhá velmi pomalu a je vidět nepřímá závislost na počtu simulací. Byly vyzkoušeny a na příkladech ukázány dvě metody pro zrychlení simulací Nested Monte Carlo, AV metoda a vektorizace. Metoda AV se ukázala jako prospěšná a přispěla tak ke konzistentnějším odhadům. Díky snížení rozptylu bylo možné nasimulovat méně scénářů a výpočet tak urychlit. Naopak CIR model se nepovedlo vektorizovat, ale na příkladu s Ornstein-Uhlenbeck modelem bylo ukázáno, že vektorizace kódu nemusí vždy přinést zrychlení času výpočtu.

V druhém modelu jsme rozdělení odhadu BE_1 simulovali pomocí Least squares Monte Carlo, který se ukázal jako mnohem příznivější, co se týče doby výpočtu. Model je sice složitější o správnou volbu regresní funkce, ale tento krok by se dal zjednodušit automatizací a volbou regresní funkce a jejích členů na základě nějakého kritéria, např.: AIC, R^2 nebo jejich kombinací. V rámci této metody byly odhadnuty dvě regresní funkce pomocí obyčejných polynomů a pomocí ortogonálních polynomů. Obě dvě regresní funkce se velmi liší v odhadnutých parametrech, ale výsledky bodového odhadu BE_1 dávají velmi podobné. Pro snadnou a intuitivní interpretaci parametrů byla zvolena jednodušší regresní funkce využívající obyčejné polynomy. V předposlední části byly validovány výsledky získané pomocí regrese z Least squares Monte Carlo metody. Bylo ukázáno, že regresní funkce dobře vystihuje průměr odhadu BE_1 i na větším intervalu, než který s největší pravděpodobností pokryjí real world scénáře. Vygenerováním real world scénářů na jednoletém horizontu a jejich vložení do regresní funkce bylo získáno rozdělení odhadu BE_1 .

Při porovnání obou metod odhadu bylo dospěno k závěru, že obě metody odhadu BE_1 dávají velmi podobné výsledky jak průměru odhadu BE_1 , tak jeho 99.5% kvantilu. Zároveň je výhodnější použít metodu Least squares Monte Carlo, kvůli nízké výpočetní

náročnosti a širokému uplatnění odhadnuté funkce odhadu BE_1 . Metodu Least squares Monte Carlo bychom tak mohli využít k výpočtu SCR, jak bylo definováno v kapitole 2.3.

Jako další rozšíření této práce by bylo možno podrobněji prozkoumat stochastické modely popisující chování úrokových sazeb. Šlo by předpokládat investici do portfolia s různým složením podkladových aktiv a modelovat jeho vývoj. Další potenciál je v odhadu regresní funkce, kde by bylo možné využít jiné metody než polynomy a mocniny proměnných. A v neposlední řadě by se také vyplatilo použití další z technik pro snížení rozptylu pro simulování složitějších modelů.

9. Zdroje

ANDĚL, J. (2005). *ZÁKLADY MATEMATICKÉ STATISTIKY*. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-86732-40-1

BOOGERT, A and DE JONG, C, 2008, *GAS STORAGE VALUATION USING A MONTE CARLO METHOD*, The Journal of Derivatives, Spring 2008

URL: <http://www.energyquants.com/assets/uploads/files/publications/boogert%20de%20jong%20%20JOD%20gas%20storage%20valuation%20using%20a%20monte%20carlo%20method.pdf>

BRIGO, D. and MERCURIO, F. (2006) *INTEREST RATE MODELS - THEORY AND PRACTICE: WITH SMILE, INFLATION AND CREDIT*, 2nd ed. Berlin: Springer, 2006. liv, 981 s. Springer finance. ISBN 3-540-22149-2.

CATHCART, M; (2012) *MONTE CARLO SIMULATION APPROACHES TO THE VALUATION AND RISK MANAGEMENT OF UNIT-LINKED INSURANCE PRODUCTS WITH GUARANTEES*, Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy

CATHCART, M; MORRISON, S. (2014) *VARIABLE ANNUITY ECONOMIC CAPITAL: THE LEAST-SQUARES MONTE CARLO APPROACH*, Insurance Risk.

URL: <http://www.maths.ed.ac.uk/~mthdat25/insurance/Variable-annuity-economic-capital-the-least-squares-Monte-Carlo-approach.pdf>

ČESKÁ ASOCIACE POJIŠŤOVEN (2017), *VÝROČNÍ ZPRÁVA 2016* [online], Česká asociace pojišťoven. [cit. 5. 12. 2017]. Dostupné z: <http://www.cap.cz/images/onas/vyrocnizpravy/2016.pdf>

Cox, J.C.; Ingersoll J.E. Jr.; Ross S.A. (1985) *A THEORY OF THE TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES*, Econometrica Volume 53, Issue 2.

URL: <http://efinance.org.cn/cn/FEshuo/A%20Theory%20of%20the%20Term%20Structure%20of%20Interest%20Rates1985.pdf>

ELLIOT, Martin a Brian ROBINSON. ERM: Proxy models. *The Actuary* [online]. 2014.

URL: <http://www.theactuary.com/features/2014/04/erm-proxy-models/>

Gamba, Andrea (2003) *REAL OPTIONS VALUATION: A MONTE CARLO APPROACH*, University of Verona.

HAUGH, M (2004) *VARIANCE REDUCTION METHODS*, Přednáška Monte Carlo Simulation: IEOR E4703

URL: http://www.columbia.edu/~mh2078/MCS04/MCS_var_red1.pdf

HORIG, M; MURRAY, K; PHELAN, E; LIETSCHKIS, M. (2013) *AN APPLICATION OF MONTE CARLO PROXY TECHNIQUES TO VARIABLE ANNUITY BUSINESS A CASE STUDY*, Milliman Research Report

URL: <http://de.milliman.com/uploadedFiles/insight/2013/Monte-Carlo-proxy-techniques.pdf>

HULL, JOHN C. (2012) *OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVES*, Eight edition, Pearson Education, ISBN: 978-0-13-216494-8

HURSEY, Ch., Cocke, M, Hannibal, C, Jakhria, P, MacIntyre, I, Modisett, M (2014) *HEAVY MODELS, LIGHT MODELS AND PROXY MODELS A WORKING PAPER*, Presented to the Institute and Faculty of Actuaries, London: 24 February 2014

IACUS, S, M (2008) SIMULATION AND INFERENCE FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH R EXAMPLES, Springer, ISBN 978-0-387-75839-8

URL:http://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9780387758381-c2.pdf?SGWID=0-0-45-539204-p173786703

JEDLIČKA, PETR (2017) *VÝŠE ŠKODY NA ZDRAVÍ V POV STÁLE ROSTE*[online]. Opojisteni.cz.

URL:<http://www.opojisteni.cz/tema/petr-jedlicka-vyse-skody-na-zdravi-v-pov-stale-roste/>

JONSSON, M and RESLOW, A (2015) *INTEREST AND INFLATION RATES THROUGH THE LENS OF THE THEORY OF IRVING FISHER*, Sveriges Riksbank Economic Review 2015:2

URL:http://www.riksbank.se/Documents/Rapporter/POV/2015/2015_2/rap_pov_artikel_1_150917_eng.pdf

LONGSTAFF, F, A; SCHWARTZ E, S, (2001) *VALUING AMERICAN OPTIONS BY SIMULATION: A SIMPLE LEAST-SQUARES APPROACH*, The Review of Financial Studies Spring 2001 Vol. 14. No. 1

URL:<https://people.math.ethz.ch/~hjfurrer/teaching/LongstaffSchwartzAmericanOptionsLeastSquareMonteCarlo.pdf>

MOTL, L a ZAHRADNÍK, M (2002) *PĚSTUJEME LINEÁRNÍ ALGEBRU*, Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 3. vyd. Praha, 348 s. 2002., ISBN: 8024604213

URL: <http://matematika.cuni.cz/zahradnik-pla.html>

SCHURMAN,G MBE, CFA (2009), *VASICEK BOND PRICE UNDER THE EULER DISCRETIZATION*

URL: <http://www.appliedbusinesseconomics.com/files/gvsvasprf.pdf>

SOLVENCY II (2017). *ASYMPTOTIX*

URL: <http://www.asymptotix.eu/content/solvency-ii>

UK PARLIAMENT WEBSITE.MEMORANDUM BY THE ASSOCIATION OF BRITISH INSURERS (ABI).

URL: <https://publications.parliament.uk/pa/ld200708/ldselect/ldeucom/42/7112002.htm>

UGLY DUCKLING. *STANDARD FORMULA AND SOLVENCY CAPITAL REQUIREMENTS.*

URL:<https://uglyduckling.nl/blog/solvency/standard-formula-and-solvency-capital-requirements/>

VASICEK, O. (1977) *AN EQUILIBRIUM CHARACTERIZATION OF THE TERM STRUCTURE*,Wells Fargo Bank and University of California, Berkeley, CA, U.S.A.

URL:http://www.wisem.fr/dyn/biblios_fichiers/67/vasicek-1977-an-equilibrium-characterization-of-the-term-structure.pdf

ZIMMERMANN, P. (2012) *INDEX CLAUSE: ANALYTICAL PROPERTIES AND THE CAPITALIZATION STRATEGY*, Eur. Actuar. J. (2012) 2: 149.
doi:10.1007/s13385-012-0048-2

ZVÁRA, K (2008) *REGRESE*, MatfyzPress, 2008,ISBN: 9788073780418

9.1 Použité knihovny v R

R Core Team (2016). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

URL: <https://www.R-project.org/>.

Kristian Brock and Daniel Slade (2015). poisson: Simulating Homogenous & Non-Homogenous Poisson Processes. R package version 1.0.

URL: <https://CRAN.R-project.org/package=poisson>

Rmetrics Core Team, Diethelm Wuertz, Tobias Setz and Yohan Chalabi (2014). fBasics: Rmetrics - Markets and Basic Statistics. R package version 3011.87.

URL: <https://CRAN.R-project.org/package=fBasics>

Hadley Wickham (2016). scales: Scale Functions for Visualization. R package version 0.4.1. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=scales>

Gregory R. Warnes, Ben Bolker and Thomas Lumley (2015). gtools: Various R Programming Tools. R package version 3.5.0.

URL: <https://CRAN.R-project.org/package=gtools>

Lukasz Komsta and Frederick Novomestky (2015). moments: Moments, cumulants, skewness, kurtosis and related tests. R package version 0.14.

URL: <https://CRAN.R-project.org/package=moments>

Hadley Wickham (2016). scales: Scale Functions for Visualization. R package version 0.4.1. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=scales>

10. Seznam obrázků

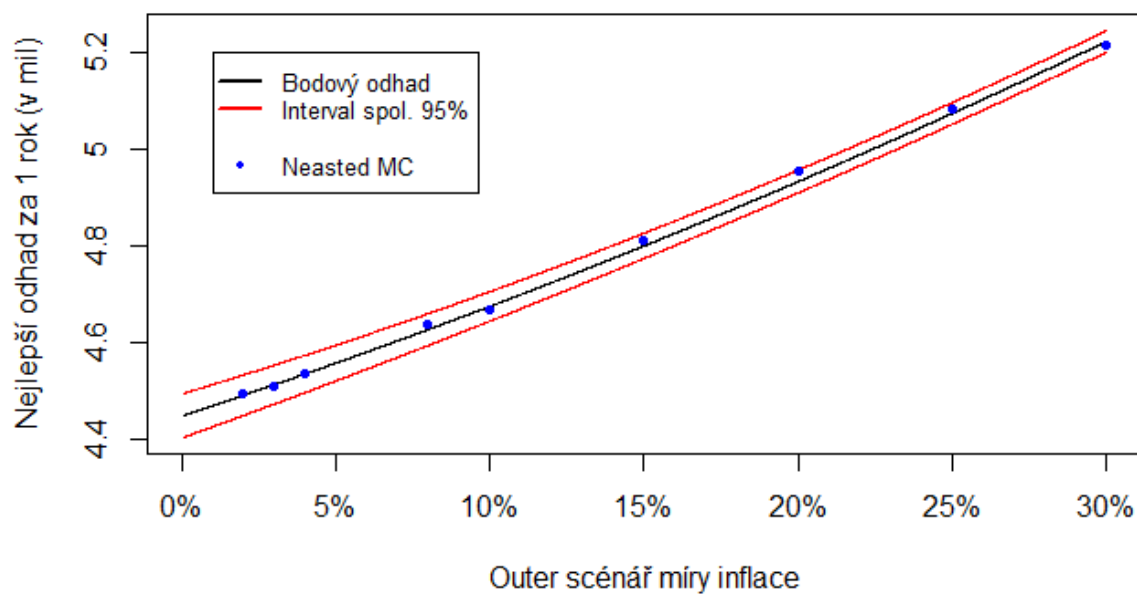
Obrázek 2.1: Tři pilíře Solvency II	5
Obrázek 2.2: Rozvaha pojišťovny	6
Obrázek 2.3: Hierarchická struktura rizik v Solvency II v rámci standardního přístupu	9
Obrázek 3.1: Škody na zdraví vyplácené na povinném ručení	13
Obrázek 4.1 Vlastnost mean-reversion	16
Obrázek 5.1 Ilustrace Nested Monte Carlo simulace	21
Obrázek 5.2 Ilustrace Least squares Monte Carlo	24
Obrázek 5.3 Regrese v LSMC	25
Obrázek 5.4 Ilustrace metody Curve fitting	29
Obrázek 6.1 Výplatní funkce call opce	32
Obrázek 7.1 Porovnání míry úmrtnosti pro dvě generace, muži	42
Obrázek 7.2 Příklad realizace korelovaného CIR modelu pro úrok a inflaci	45
Obrázek 7.3 Příklad realizace změny zdravotního stavu	45
Obrázek 7.4 Příklad real-world a inner scénářů pro simulaci úroku.	47
Obrázek 7.5 Závislost nejlepšího odhadu na počtu real world scénářů	48
Obrázek 7.6 Rozdělení výsledku Simulace 4.	49
Obrázek 7.7 Outer scénáře Least squares Monte Carlo	53
Obrázek 7.8 Real world scénáře Nested Monte Carlo	54
Obrázek 7.9 Závislost úroku a nejlepšího odhadu za 1 rok	54
Obrázek 7.10 Závislost míry inflace a odhadu závazku za 1 rok	55
Obrázek 7.11 Validace, obyčejné polynomy a úroková míra	58
Obrázek 7.12 Validace, ortogonální polynomy a úroková míra	58
Obrázek 7.13 Rozdělení odhadu $BE1$ odhadnutého regresní funkcí	60
Obrázek 7.14 Porovnání rozdělení LSMC a Nested Monte Carlo	61

Obrázek 12.1: Validace, obyčejné polynomy a míra inflace	72
Obrázek 12.2: Validace, ortogonální polynomy a míra inflace	72

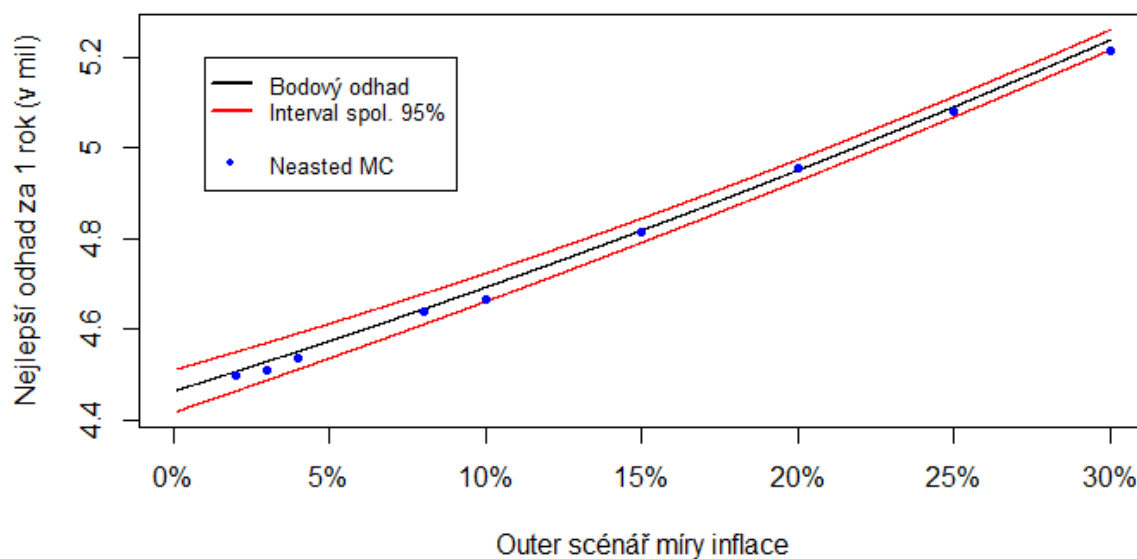
11. Seznam Tabulek

Tabulka 1: Vývoj ceny podkladové akcie	35
Tabulka 2: Cash flow v čase $t = 3$	36
Tabulka 3: Regrese v čase $t = 2$	36
Tabulka 4: Optimální rozhodnutí v čase $t = 2$	37
Tabulka 5: Cash-flow v čase $t = 2$	38
Tabulka 6: Regrese v čase $t = 1$	39
Tabulka 7: Optimální rozhodnutí v čase $t = 1$	39
Tabulka 8: Optimální strategie při realizaci opce	40
Tabulka 9: Cash flow při realizaci optimální strategie	40
Tabulka 10 Parametry modelu	44
Tabulka 11 Výsledky simulací -Nested Monte Carlo	47
Tabulka 12 Porovnání simulací s a bez AV metody	50
Tabulka 13 Časová náročnost simulace OU modelu	52
Tabulka 14: Odhad parametrů funkce odhadu $BE1$ obyčejnými polynomy	56
Tabulka 15: Odhad parametrů funkce odhadu $BE1$ pomocí ortogonálních polynomů	57
Tabulka 16: Výsledek aplikace LSMC	60

12. Přílohy



Obrázek 12.1 Validace, obyčejné polynomy a míra inflace



Obrázek 12.2 Validace, ortogonální polynomy a míra inflace