

Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta financí a účetnictví

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2018

Bc. Barbara Midová

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

Fakulta financí a účetnictví

Katedra bankovníctví a pojišťovnictví

Studijní obor: Finanční inženýrství



**Využití metod předvídání volatility při obchodování vybraných
opčních strategií**

Diplomová práce

Autor diplomové práce: Bc. Barbara Midová

Vedoucí diplomové práce: Ing. Milan Fičura

Rok obhajoby: 2018

Čestné prohlášení

Tímto prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Využití metod předvídání volatility při obchodování vybraných opčních strategií* vypracovala samostatně, s využitím literatury a zdrojů, na které se v práci odkazuji.

V Praze dne

Podpis

Pod'akovanie

Touto cestou by som rada pod'akovala Ing. Milanovi Fičurovi za cenné rady, pripomienky a pomoc, ktoré mi počas písania diplomovej práce poskytoval.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá metodami předvídání volatility finančních aktiv a možností jejich využití v rámci obchodování vybraných opčních strategií. Práce se soustředí na vybrané modely realizované volatility (konkrétně modely časových řad ARIMA/ARFIMA-RV a HAR-RV) a dále na model GARCH, který je jednou ze standardních metod modelování podmíněného rozptylu. Cílem aplikace modelů je predikce volatility (směrodatné odchylky) měnového páru EUR/USD na různé časové období (den, týden a měsíc). Kromě toho se práce věnuje teorii opcí a jejich oceňování, implikované volatilitě a podmínkám ziskovosti opčních strategií, které spekulují na vysokou nebo nízkou volatilitu podkladového aktiva. Celkovým cílem práce je zjistit, jestli je možné pomocí vhodných modelů předikovat volatilitu a na základě této předpovědi (resp. na základě odchylky od implikované opční volatility) vstupovat do opčních strategií tak, aby byl (i dlouhodobě) realizovaný zisk. Aplikací modelů je zjištěna dlouhá paměť v autokorelační struktuře realizované volatility daného měnového páru a taktéž jistá týdenní sezonnost. Z tohoto důvodu se jako úspěšné ukazují modely ARFIMA-RV i ARIMA-RV s vyšším řádem MA složky. Model HAR-RV se též jeví jako vhodný, o čemž svědčí například vysoká hodnota koeficientu R-Squared. V případě vstupu do strategií na základě předpovědí tohoto modelu byl taktéž dosažen nejvyšší kumulativní zisk, který je téměř konstantně stoupající. U ostatních modelů je vývoj kumulativního zisku nejednoznačný – zisk osciluje okolo nuly, s většími či menšími odchylkami v závislosti na jednotlivých modelech, s nejasným trendem. Celkově práce ukazuje, že předpovídáním volatility na základě vhodně zvoleného modelu a následným vstupem do příslušné opční strategie je možné realizovat i kladný kumulativní zisk, a to i v delším časovém období, pravděpodobné je však i dosažení ztráty.

Klíčová slova

EUR/USD, realizovaná volatilita, implikovaná volatilita, opční strategie

Abstrakt

Diplomová práca sa zaoberá metódami predvídania volatility finančných aktív a možnosťou ich využitia v rámci obchodovania vybraných opčných stratégií. Práca sa sústreďí na vybrané modely realizovanej volatility (konkrétne modely časových radov ARIMA/ARFIMA-RV a HAR-RV) a ďalej na model GARCH, ktorý je jednou zo štandardných metód modelovania podmieneného rozptylu. Cieľom aplikácie modelov je predikcia volatility (smerodajnej odchýlky) menového páru EUR/USD na rôzne časové obdobia (deň, týždeň a mesiac). Okrem toho sa práca venuje teórii opcií a ich oceňovania, implikovanej volatilite a podmienkam ziskovosti opčných stratégií, ktoré špekulujú na vysokú alebo nízku volatilitu podkladového aktíva. Celkovým cieľom práce je zistiť, či je možné pomocou vhodných modelov predikovať volatilitu a na základe tejto predpovede (resp. na základe odchýlky od implikovanej opčnej volatility) vstupovať do opčných stratégií tak, aby bol (i dlhodobo) realizovaný zisk. Aplikáciou modelov je zistená dlhá pamäť v autokorelačnej štruktúre realizovanej volatility daného menového páru a taktiež istá týždenná sezónnosť. Z tohto dôvodu sa ako vhodné ukazujú modely ARFIMA-RV i ARIMA-RV s vyšším radom MA zložky. Model HAR-RV sa taktiež javí ako úspešný, o čom svedčí napríklad vysoká hodnota koeficientu R-Squared. V prípade vstupu do stratégií na základe predpovedí tohto modelu bol taktiež dosiahnutý najvyšší kumulatívny zisk, ktorý je takmer konštantne stúpajúci. U ostatných modelov je vývoj kumulatívneho zisku nejednoznačný – zisk osciluje okolo nuly, s väčšími či menšími odchýlkami v závislosti na jednotlivých modeloch, s nejasným trendom. Celkovo práca ukazuje, že predpovedaním volatility na základe vhodne zvoleného modelu a následným vstupom do príslušnej opčnej stratégie je možné realizovať i kladný kumulatívny zisk, a to aj v dlhšom časovom období, pravdepodobné je však i dosiahnutie straty.

Kľúčové slová

EUR/USD, realizovaná volatilita, implikovaná volatilita, opčné stratégie

Abstract

The diploma thesis deals with methods of volatility forecasting and the possibility of their use for options strategies trading. The thesis focuses on chosen realized volatility models (specifically, time series models ARIMA/ARFIMA-RV and HAR-RV) and also on GARCH model, which is a standard method for conditional variance modelling. The goal of the models' application is a prediction of volatility (standard deviation) of the EUR/USD currency pair for various time horizons (day, week, month). Besides that, the thesis deals with the theory of options and their pricing, implied volatility and the terms in which option strategies speculating on the underlying's high or low volatility are profitable. The overall aim of the thesis is to find out whether it is possible to predict volatility using appropriate models and to achieve a profit from entering the option strategies based on the predictions (or on their variance against the implied option volatility). By applying the models, it is discovered that there is long memory and also some sort of weekly seasonality in the autocorrelation structure of realized volatility. Based on this, ARFIMA-RV and ARIMA-RV models with higher order of MA part seem suitable. HAR-RV model also seem successful, proving it for example with a high value of R-Squared coefficient. The highest cumulative profit was also achieved in case of entering the strategies based on this model's predictions – the profit is almost constantly increasing. The evolution of the profit is not clear in regards of other models – the profit oscillates around zero, with smaller or bigger deviations for respective models, with an unknown trend. To sum up, the thesis shows that it is possible to achieve also a positive cumulative profit (even for a longer period of time) from entering an option strategy, based on volatility predictions made with a suitable model. However, there is also a probability that an investor will gain a loss.

Key words

EUR/USD, realized volatility, implied volatility, option strategies

Obsah

1.	Úvod	1
2.	Teoretická časť	3
2.1.	Volatilita finančných aktív	3
2.2.	Metódy predvídania volatility	6
2.2.1.	ARIMA/ARFIMA-RV modely	6
2.2.2.	HAR-RV model	9
2.2.3.	GARCH model	10
2.2.4.	Prehľad literatúry	12
2.3.	Opcie	16
2.3.1.	Opčný mechanizmus a základné charakteristiky	17
2.3.2.	Opčné výplatné funkcie – porovnanie s pevnými kontraktmi	18
2.3.3.	Black – Scholes – Mertonov model.....	20
2.3.4.	Implikovaná volatilita	27
2.3.5.	Opčné stratégie	28
3.	Metodická časť	36
3.1.	Výstavba modelov.....	36
3.1.1.	ARIMA/ARFIMA-RV model	36
3.1.2.	HAR-RV model	44
3.1.3.	GARCH model	44

4.	Aplikačná časť	47
4.1.	Príprava a analýza dát	47
4.2.	Aplikácia modelov	50
4.2.1.	ARIMA-RV model	50
4.2.2.	ARFIMA-RV model	58
4.2.3.	HAR-RV model	63
4.2.4.	GARCH model	66
4.3.	Konštrukcia predpovede.....	71
4.4.	Implikovaná volatilita a opčné stratégie	74
4.5.	Zhodnotenie.....	79
4.6.	Backtesting.....	81
5.	Záver.....	85
6.	Použité zdroje	87
6.1.	Literatúra, odborné publikácie a články.....	87
6.2.	Internetové zdroje.....	90
7.	Zoznam obrázkov	92
8.	Zoznam tabuliek	95

1. Úvod

Volatilita sa vo všeobecnosti chápe ako „*tendencia častých, náhlych alebo výrazných odchýlok*“ (Aizenman – Pinto, 2005). Ide teda o akési vyjadrenie neistoty ohľadom budúceho vývoja sledovanej veličiny, ktorá vyplýva z toho, že hodnota danej veličiny v budúcnosti nemusí odpovedať nami očakávanej hodnote, alebo sa od nej môže dokonca výrazne líšiť. Vyššie spomínaní autori taktiež rozlišujú dva „komponenty“ volatility, a to variabilitu (premenlivosť) a neistotu. Variabilita pritom odpovedá celkovému pohybu hodnôt, neistota iba pohybu v dôsledku neočakávaných a neznámych javov. Autori teda rozdeľujú volatilitu v určitom časovom úseku na očakávanú zmenu a neočakávanú zmenu. Z vyššie uvedeného intuitívne vyplýva, že volatilita nie je okamžite sledovateľnou a merateľnou veličinou; je iba možné ju odhadnúť na základe historických dát.

Táto diplomová práca sa zaoberá porovnaním vybraných metód predvídania volatility finančných aktív a ich možnou aplikáciou na opčné stratégie. Opcie naberajú v kontexte volatility zvláštny význam, pretože vďaka ich špecifickým výplatným funkciám je možné ich kombinovať tak, aby bol prípadný negatívny vplyv vyššej volatility podkladového aktíva minimalizovaný, alebo naopak, aby bol vďaka nej realizovaný zisk. K tomu, aby to bolo možné zrealizovať, je potrebné vedieť volatilitu vhodne predpovedať a následne porovnať predpokladaný výnos s nákladmi na vstup do vybranej opčnej stratégie.

Cieľom práce je porovnať niektoré z najznámejších modelov časových radov a posúdiť vhodnosť ich využitia pre účely predpovedania volatility konkrétneho finančného aktíva. Konkrétne budú v práci skúmané modely tzv. realizovanej volatility, a to ARIMA/ARFIMA-RV a HAR-RV, a ďalej model GARCH, ktorý patrí k štandardným modelom volatility. Taktiež bude predstavená možnosť predvídania volatility z cien opcií, a to prostredníctvom implikovanej volatility kótovanej na základe Black – Scholes – Mertonovej rovnice. Na základe výsledkov, získaných z praktickej aplikácie vybraných modelov i implikovanej volatility, je následne cieľom preskúmať možnú ziskovosť opčných stratégií, ktorých ziskovosť je na volatilitu daného podkladového aktíva silne závislá, konkrétne stratégií typu butterfly, straddle a strangle.

Práca je členená na teoretickú, metodickú a praktickú časť. V teoretickej časti je najskôr charakterizovaná volatilita na finančných trhoch a chovanie cien a výnosov finančných aktív. Neskôr sú popísané teoretické východiská a definície modelov, ktoré budú v práci skúmané, spolu s teóriou opcií, Black – Scholes – Mertonovým modelom pre oceňovanie opcií, konceptom implikovanej volatility a možnosťou vstupu do opčných stratégií. V metodickej časti je detailnejšie popísaná aplikácia vybraných modelov, s dôrazom na vhodné zvolenie modelu v závislosti na charaktere dát, správne odhadnutie parametrov modelu a testovanie kvality modelu. V praktickej časti sú zvolené modely aplikované na predpoveď volatility vybranej finančnej veličiny, konkrétne logaritmických výnosov menového páru EUR/USD. Následne je zhodnotená prípadná ziskovosť vstupu do jednej alebo viacerých zo skúmaných opčných stratégií. Menové trhy boli pre účely práce zvolené z toho dôvodu, že sa na nich zriedka vyskytujú asymetrie.

2. Teoretická časť

Teoretická časť obsahuje tri podkapitoly. V prvej podkapitole bude charakterizovaná volatilita na finančných trhoch a chovanie cien, resp. výnosov finančných aktív. V druhej budú predstavené vybrané metódy a modely predvídania volatility, uvedené základné predpoklady a vzťahy. Nakoniec, v tretej časti bude popísaná teória opcií, koncept implikovanej volatility a možnosť predpovedania volatility z cien opcií, a na záver definované opčné stratégie typu butterfly, straddle a strangle.

2.1. Volatilita finančných aktív

U finančných aktív je volatilita vo všeobecnosti chápaná ako miera variability ceny alebo výnosovej miery. Najčastejšie sa pod týmto pojmom rozumie smerodajná odchýlka, resp. rozptyl logaritmických výnosov. Tieto logaritmické výnosy je možné vyjadriť ako:

$$u_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \quad (2.1.1)$$

kde S_t predstavuje cenu aktíva v čase t .¹

Logaritmické výnosy vykonávajú istý stochastický (náhodný) proces. Na tento proces je možné sa pozeráť ako na spojitý, alebo diskretný.

V *diskrétnom* čase vykonávajú logaritmické výnosy proces:

$$u_t = \mu_{t|t-1} + \varepsilon_t = \mu_{t|t-1} + \sigma_{t|t-1}a_t \quad (2.1.2)$$

kde u_t predstavuje logaritmický výnos aktíva a $\mu_{t|t-1}$ jeho podmienenú strednú hodnotu v čase t , definovanú ako očakávanú hodnotu u_t v čase $t-1$, za podmienky využitia Ω_{t-1} , a síce množiny všetkých dostupných informácií v čase $t-1$. ε_t ďalej predstavuje náhodnú zložku daného procesu, skladajúcu sa podmienenej volatility logaritmického

¹ Takýmto spôsobom je možné určiť logaritmické výnosy za rôzne obdobia, napríklad denné, týždenné, či mesačné, no aj za kratšie obdobie – minútové či hodinové.

výnosu $\sigma_{t|t-1} = E[(u_t - \mu_{t|t-1})^2 | \Omega_{t-1}]$ a veličiny a_t , ktorá označuje tzv. proces bieleho šumu. Podľa Arlta a Arltovej (2009, s.26), proces bieleho šumu je rad nekorelovaných náhodných veličín jedného pravdepodobnostného rozdelenia s nulovou strednou hodnotou a konštantným rozptylom. Označuje sa ako gaussovský, ak je jeho združené pravdepodobnostné rozdelenie normálne.

V prípade *spojitého* procesu sa predpokladá, že logaritmické výnosnosti nasledujú proces:

$$du_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dz(t) \quad (2.1.3)$$

kde du_t je diferenciál logaritmického výnosu, $\mu(t)$ je okamžitá stredná hodnota alebo tzv. drift, dt je zmena času, $\sigma(t)$ označuje okamžitú volatilitu (smerodajnú odchýlku) a $dz(t)$ tzv. Wienerov proces. Wienerov proces (niekedy označovaný tiež ako Brownov pohyb) je typom stochastického (náhodného) procesu s nulovou strednou hodnotou zmeny a ročným rozptylom 1,0 (Hull, 2012, s. 282). Je vhodné uviesť, že premenná z nasleduje Wienerov proces v prípade splnenia dvoch podmienok:

- Zmena z (Δz) počas krátkeho časového úseku t (Δt) je:

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.1.4)$$

kde ϵ má štandardizované normálne rozdelenie N so strednou hodnotou 0 a rozptylom 1;

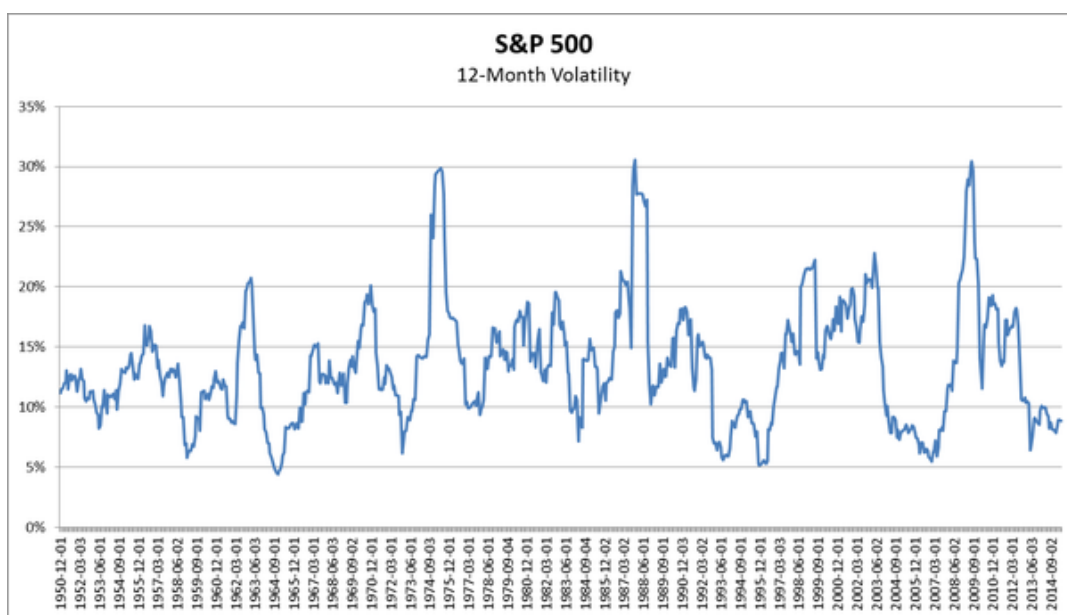
- Hodnoty Δz počas akýchkoľvek dvoch krátkych časových úsekov Δt sú nezávislé.

Samotné Δz má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a rozptylom Δt (smerodajnou odchýlkou $\sqrt{\Delta t}$).

Aj keď logaritmické výnosy pri vysokofrekvenčnom obchodovaní možno označiť za v podstate spojité, v praxi sa častejšie používa modelovanie s predpokladom diskrétného času, a to kvôli jednoduchosti výpočtu a odhadu parametrov modelu.

Pri určovaní volatility je dôležitý aj časový horizont, napr. či sa jedná o dennú, mesačnú, alebo ročnú volatilitu.

Obrázok 1: Příklad - ročná volatilita indexu S&P 500



Zdroj: quora.com

2.2. Metódy predvídania volatility

V tejto podkapitole budú predstavené modely, ktoré budú ďalej aplikované v praktickej časti na odhadnutie budúcej volatility skúmaného aktíva.

Priestor bude najskôr venovaný tzv. modelom realizovanej volatility, a to konkrétne ARIMA/ARFIMA-RV modelom a HAR-RV modelom. Realizovaná volatility vychádza z konceptu realizovaného rozptylu (po prvý raz spomenuté Andersenom a Bollerslevom, 1998), ktorý je kalkulovaný ako suma štvorcov logaritmických výnosov za určité obdobie. Tieto modely teda nebudú aplikované priamo na časový rad logaritmických výnosov, ale na rad ich realizovanej volatility podľa definície, ktorá je uvedená v metodologickej časti tejto práce (s. 36-37).

Ako tretí bude charakterizovaný model volatility typu GARCH. Tento model patrí k štandardným modelom volatility a pracuje priamo s úrovňovými dátami, teda bude aplikovaný na samotný časový rad logaritmických výnosov.

Podkapitola bude zakončená prehľadom literatúry a odborných článkov, pojednávajúcich o metódach predvídania volatility. Dôraz bude kladený na modely, ktoré budú v tejto práci prakticky aplikované, no spomenuté budú aj niektoré ďalšie metódy.

2.2.1. ARIMA/ARFIMA-RV modely

ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average; Box – Jenkins, 1970) procesy zaraďujú Arlt a Arltová (2009) medzi lineárne modely nestacionárnych časových radov. Predstavujú štandardné modely pre modelovanie podmienenej strednej hodnoty. Pre pochopenie fungovania a konštrukcie tohto modelu je potrebná analýza jeho jednotlivých zložiek.

Realizáciu $ARMA(p,q)$ procesov je možné pozorovať u niektorých stacionárnych časových radov. Stacionarita znamená, že „*stredná hodnota a rozptyl pozorovanej náhodnej veličiny sú v čase nemenné a kovariančná a korelačná funkcia závisia iba na časovej vzdialenosti náhodných veličín.*“ (Arlt – Arltová, 2009, s. 25). Proces ARMA sa skladá z dvoch samostatných procesov, a to $AR(p)$ a $M(q)$.

AR(p) označuje autoregresný proces radu p , ktorý je možné zapísať ako:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t \quad (2.2.1.1)$$

kde a_t je proces bieleho šumu a $\phi_1, \dots, \phi_p$ sú koeficienty. Hodnota veličiny X v čase t je teda podľa procesu AR lineárnou funkciou jej minulých hodnôt a procesu bieleho šumu.

MA(q) označuje proces klzavých priemerov radu q a je možné ho zapísať ako:

$$X_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.2.1.2)$$

kde μ je očakávaná hodnota veličiny (často sa predpokladá nulová) a $\theta_1, \dots, \theta_q$ sú koeficienty. Hodnota veličiny X v čase t je teda podľa procesu MA lineárnou funkciou minulých hodnôt procesu bieleho šumu.

ARMA(p, q) proces je kombináciou AR a MA procesov a je možné ho zapísať ako:

$$X_t = a_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} \quad (2.2.1.3)$$

Je potrebné pripomenúť, že ARMA model je vhodné použiť iba u stacionárnych procesov. V praxi sa však často vyskytujú časové rady, ktoré sú tvorené nestacionárnymi procesmi. Tieto časové rady sú charakteristické prítomnosťou trendu.² Pri takýchto časových radoch je vhodné použiť ARIMA procesy, ktoré vychádzajú z tzv. procesu náhodnej prechádzky. Ide o zvláštny prípad procesu AR(1), kde $\phi_1 = 1$, a teda

$$X_t = X_{t-1} + a_t \quad (2.2.1.4)$$

Vyjadrením a_t z rovnice (2.2.1.4) dostaneme:

² „Trend odráža dlhodobé zmeny v priemernom chovaní časového radu resp. všeobecnú tendenciu vývoja skúmaného javu za dlhé obdobie.“ (Arlt - Arltová, 2009, s.13)

$$a_t = X_t - X_{t-1}$$

alebo, vyjadrené pomocou tzv. operátora oneskorenia B , pre ktorý v tomto prípade platí, že $BX_t = X_{t-1}$:

$$(1 - B)X_t = a_t \quad (2.2.1.5)$$

V tomto prípade sa teda prvá diferenciácia procesu rovná bielemu šumu a proces sa nazýva integrovaný radu jedna a označuje sa ako $I(1)$. V prípade, že je modifikovaný do podoby

$$(1 - B)^d X_t = a_t \quad (2.2.1.6)$$

nazýva sa integrovaným procesom radu d a označuje sa ako $I(d)$.

Vyjadríme proces $ARMA(p,q)$ taktiež pomocou operátora oneskorenia B :

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)a_t \quad (2.2.1.7)$$

V tejto súvislosti je vhodné definovať, kedy je proces stacionárny a kedy invertibilný. „Aby bol proces $ARMA(p,q)$ stacionárny, musia ležať korene rovnice $(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) = 0$ mimo jednotkového kruhu, aby bol invertibilný, musia korene rovnice $(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) = 0$ ležať mimo jednotkového kruhu.“ (Arlt – Arltová, 2009, s. 36)

Ak máme nestacionárny proces, ktorý je po integrovaní pomocou diferenciácie d -tého radu možné vyjadriť vo forme stacionárneho a invertibilného modelu $ARMA(p,q)$, potom tento proces nazývame $ARIMA(p,d,q)$, teda autoregresným integrovaným procesom kľzavých priemerov radu p , d , q a má tvar:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)a_t \quad (2.2.1.8)$$

V praxi to teda znamená, že v prípade nestacionárnych časových radov sa neaplikuje model $ARMA$ na samotné dáta, ale na ich d -tú diferenciáciu, ak časový rad týchto diferenciácií je stacionárny.

Rady modelu p a q (nazývajú sa tiež rady polynómov $\phi_p(B)$ a $\theta_q(B)$) je možné správne určiť pomocou výberovej autokorelačnej (ACF) a parciálnej autokorelačnej (PACF) funkcie procesu. K určeniu nutnosti stacionarizácie časového radu pomocou diferenciácie sa najčastejšie používa Dickey – Fullerov test jednotkových koreňov. Tieto testy budú popísané v metodologickej časti práce.

Proces ARFIMA (autoregresný frakcionálne integrovaný proces kľzavých priemerov; Granger – Joyeux, 1981) sa od procesu ARIMA líši tým, že rad diferenciácie d nemusí byť celé číslo. Podľa Arlta a Arltovej (2009, s. 48) je zaujímavé to, že aj keď sú tieto procesy pri $0,5 < d < 1$ nestacionárne, na rozdiel od procesov typu $I(1)$ či $I(2)$ sú stále charakteristické, rovnako ako stacionárne procesy, tým, že vygenerované hodnoty časových radov vykazujú vlastnosť „mean reversion“.

ARFIMA model sa využíva pri tzv. časových radoch s dlhou pamäťou. Sú to časové rady tvorené procesmi, ktorých i veľmi časovo vzdialené náhodné veličiny sú silne závislé. Tento fenomén bol po prvý raz pozorovaný u hydrologických dát, následne i u ďalších ekonomických či demografických veličín. ARFIMA model má teda schopnosť zachytiť dlhú pamäť v autokorelačnej štruktúre procesu.

2.2.2. HAR-RV model

Ďalším modelom realizovanej volatility je model HAR-RV (Heterogenous Autoregressive), ktorý bol predstavený Fulviom Corsim (2004) a zaradzuje sa medzi tzv. kaskádové modely. Corsi vychádza z teórie heterogénnych trhov, ktorá tvrdí, že na trhu vystupujú rôzne subjekty s rôznymi preferenciami a rôznou frekvenciou obchodovania. Tieto frekvencie vykazujú podľa Corsiho rozdielnu realizovanú volatilitu (teda napríklad, pri obchodovaní na hodinovej báze bude volatilita aktíva iná, než na dennej, týždennej báze atď.). Je to spôsobené tým, že vysokofrekvenční obchodníci upravujú svoje obchodné stratégie a očakávania aj na základe sledovania volatility pre dlhšie časové horizonty, no naopak to neplatí (investori, ktorí obchodujú napríklad na mesačnej báze, zriedka kedy sledujú dennú volatilitu a pod.)

Hlavnou myšlienkou modelu je pri odhadovaní volatility pre deň $n+1$ použiť nielen dennú realizovanú volatilitu predchádzajúcich dní, ale taktiež (v rovnici, s ktorou

pracoval Corsi) týždennú a mesačnú volatilitu. Výsledná rovnica vyzerá nasledovne (podľa Fičura, 2013, s. 60):

$$RV_{n+1} = \beta_1 RV_n^d + \beta_2 RV_n^w + \beta_3 RV_n^m \quad (2.2.2.1)$$

kde RV znamená realizovanú volatilitu, $\beta_{1,2,3}$ sú koeficienty a d, w, m je označenie dennej, týždennej alebo mesačnej volatility pozorovanej v deň n . Z rovnice je možné vidieť podobnosť s modelom AR(1). Z tohto dôvodu bude pri odhade modelu použitá metodológia modelu ARIMAX(1,0,0,2), ktorý k modelu ARIMA (1,0,0) pridáva dve exogénne premenné, a to týždennú a mesačnú volatilitu. Detailnejší postup je opäť možné nájsť v metodologickej časti práce.

2.2.3. GARCH model

GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) model patrí k modelom volatility. Radí sa k modelom časových radov, no ako píše Arlt a Arltová (2009, s. 127), nezaoberá sa úrovňou (hodnotou) časových radov, teda prvým podmieneným momentom, ale ich variabilitou, čiže druhým podmieneným momentom. Na rozdiel od modelu typu ARIMA/ARFIMA teda neslúži k modelovaniu podmienenej strednej hodnoty, ale podmieneného rozptylu sledovanej veličiny. Z hľadiska funkčnej formy modelu ho vyššie spomenutí autori radia k lineárnym modelom volatility.

Model bol po prvý raz predstavený Bollerslevom v roku 1986, a je možné ho chápať ako modifikáciu modelu EWMA (Exponentially Weighted Moving Average). Podstatou týchto modelov je odhadovanie budúcej hodnoty volatility na základe minulých hodnôt volatility i výnosností skúmaného aktíva, pričom novším hodnotám sú vo výpočte priradzované vyššie váhy (teda výraznejšie ovplyvňujú odhad budúcej hodnoty). Z toho teda vyplýva, že volatilita podľa týchto modelov nie je stála, ale mení sa v čase. Táto vlastnosť sa ukazuje byť veľmi dôležitá v prostredí finančných trhov, ako pripomínajú aj Ruppert a Matteson (2015, s. 405), pretože finančné dáta často vykazujú volatilitu premenlivú v čase a tiež tzv. zhukovanie volatility („volatility clustering“), teda striedanie časových období s nízkou a vysokou volatilitou.

Hull (2012, s. 498-509) aplikuje tieto modely na odhadnutie σ_t – volatility tržného aktíva pre deň t , pričom odhad je uskutočnený v deň $t-1$ (σ_t^2 je miera rozptylu). Hodnota tržného aktíva na konci dňa i je S_i . Premenná u_i je definovaná ako spojito úročený výnos počas dňa i :

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \quad (2.2.3.1)$$

Potom podľa modelu EWMA:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) u_{t-1}^2 \quad (2.2.3.2)$$

kde λ je konštanta medzi 0 a 1.

Pre m -dní dozadu platí:

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{t-i}^2 + \lambda^m \sigma_{t-m}^2 \quad (2.2.3.3)$$

GARCH model je potom možné chápať ako model podmienenej volatility $\sigma_{t|t-1}$, ktorý je určený jednak na základe svojich minulých hodnôt, no tiež minulých hodnôt reziduálnych štvorcov, alebo druhej mocniny náhodnej zložky procesu logaritmickej výnosov (označovanou vyššie v texte ako ε_t). To, že je v modeli zahrnutá tiež minulé hodnota samotnej volatility, je výhodou oproti modelu ARCH(q), ktorý bol jeho predchodcom (predstavený Englem, 1982). Tento model totiž chápe podmienenú volatilitu iba ako funkciu minulých hodnôt reziduálnych štvorcov ε_t . Aby bola takto odhadnutým modelom pokrytá celá autokorelačná štruktúra podmienenej volatility, je potrebné pracovať s veľkým počtom oneskorení (q je vysoké číslo). Tu však často vzniká problém so správnym odhadom parametrov modelu. GARCH(p, q) model rieši tento problém práve pridaním minulých hodnôt samotnej podmienenej volatility. Do modelu sa tiež pridáva parameter $\omega = \gamma V_L$, ktorý môže označovať istý dlhodobý level volatility (Hull, 2012, s. 502).

Najčastejšie používaným je model GARCH(1,1). Pre podmienený rozptyl v čase t platí:

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1|t-2}^2 \quad (2.2.3.4)$$

Kladný podmienený rozptyl zaručujú podmienky $\omega > 0$, $\alpha > 0$ a $\beta \geq 0$.

Všeobecne je možné model GARCH(p, q) vyjadriť ako:

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (2.2.3.5)$$

Postup pri výstavbe modelu bude taktiež popísaný v metodologickej časti práce.

2.2.4. Prehľad literatúry

Výhody a nevýhody využitia špecifických modelov volatility sú diskutované v mnohých odborných publikáciách. Veľký priestor je venovaný modelovaniu volatility pomocou klasických ARIMA modelov, a ich komparácii s priamym modelovaním volatility pomocou modelov typu ARCH/GARCH. Literatúra vo všeobecnosti uvádza tri hlavné prednosti využitia modelu typu ARIMA. Prvou výhodou je ich jasná interpretovateľnosť, keďže teória lineárnych diferenčných rovníc je veľmi obsiahla a detailne popísaná. Po druhé, ich praktická aplikácia je jednoduchá a užívateľsky menej náročná. V dnešnej dobe existuje mnoho štatistických softvérov, ktoré ponúkajú balíčky pre prácu s modelmi tohto typu. Treťou, podstatnou prednosťou je fakt, že analýza a predikcia dát pomocou týchto modelov je do značnej miery úspešná: napríklad stacionárny AR(1) proces bol aplikovaný Poterbou a Summersom (1986) na modelovanie volatility mesačných výnosov indexu S&P, French, Schwert a Stambaugh (1987) zas použili model ARIMA(0,1,3) pre model logaritmu volatility mesačných výnosov indexu S&P. Tieto modely sú považované za značne dobre fungujúce.

V praxi však väčšina finančných dát vykazuje premenlivú a skokovitú variabilitu; okrem asymetrií a náhlych skokov je u mnohých časových radov možné pozorovať striedajúce sa obdobia vysokej a nízkej volatility. Toto je podľa Xiao a Aydemira (2007) typické pre menové kurzy. Modely typu ARIMA majú obmedzenú schopnosť zachytiť tieto charakteristiky a práve to tvorí hlavnú výhodu využitia modelov typu ARCH/GARCH.

Tzv. „ARCH efekty“ sú pozorované a popísané v mnohých publikáciách, napríklad Akgirayom (1989) pri skúmaní výnosov indexov, Schwertom (1990) pre futures trhy, a Englom a Mustafom (1992) pre individuálne výnosy z akcií.

Xiao a Aydemir (2007) uvádzajú ako kľúčovú charakteristiku GARCH modelu jeho linearitu. GARCH model v podobe predstavenej Bollerslevom (1986) má charakteristiky procesu typu ARMA pre proces $\{\varepsilon^2\}$. To umožňuje jednoduché skúmanie pravdepodobnostného rozdelenia a jeho charakteristík pre ε_t .

Je však možné nájsť vlastnosti ARCH/GARCH modelov, ktoré by sa dali považovať za ich nedostatky. Mnohí popisujú skutočnosť, že ARCH efekt, ktorý je jasne pozorovateľný u denných a týždenných údajov, slabne so znižujúcou sa frekvenciou dát. Nerlove (1989), Hsieh, Gallant a Tauchen (1991) vysvetľujú toto pozorovanie tým, že v kratších časových intervaloch spracováva trh prichádzajúce informácie v podstate „naraz“, teda vplyv novej informácie alebo udalosti na výkyv ceny sa v krátkych časových okamihoch nebude príliš líšiť. Engle, Ito a Lin (1990) nadväzujú tým, že navrhujú spracovávanie informácií ako zdroj tzv. volatility clusteringu (spomenutého už v teoretickej časti tejto práce). Ďalšou pozorovanou skutočnosťou, popísanou napr. Christiem (1982), Campbellom a Hentschelom (1992) či Nelsonom (1990, 1991) je to, že u ARCH/GARCH modelov je vplyv minulých hodnôt rezíduí na súčasnú volatilitu iba funkciou ich sily (veľkosti). To však na finančných trhoch nemusí platiť, pretože vyššie spomínaní autori poukazujú na určitú asymetriu, kedy volatilita zvykne narásť po období jej nízkych hodnôt, skôr, než po minulom podobnom náraste. Forma podmieneného rozptylu podľa modelu GARCH neumožňuje zachytiť tento fenomén. Medzi ďalšie možné nevýhody modelu GARCH je možné zaradiť jeho linearitu, krátku pamäť a fakt, že odhady sú robené zväčša na základe údajov o denných výnosoch, ktoré môžu vykazovať zvýšenú mieru šumu, než je tomu pri použití napr. intradenných výnosov pri modeloch realizovanej volatility.

Ďalej sa v literatúre spomína predpoklad normálnej podmienenej hustoty pravdepodobnosti. Avšak empirické pozorovania ukazujú tzv. „tučné konce“³ nepodmieneného rozdelenia pravdepodobnosti cien a výnosov niektorých finančných aktív (napr. Fama, 1965). To platí napríklad u denných alebo týždenných výnosov zmenných kurzov pri predpoklade podmienenej normality (aj keď je tiež pravdou, že u intradenných výnosov je tento fenomén možno ešte viditeľnejší). To vedie k odklonom od predpokladov normality.

Niektoré nedostatky modelu GARCH môžu byť eliminované jeho mnohými modifikáciami. Medzi ne patrí napríklad AGARCH (Assymetric GARCH; Engle, 1990), ktorý umožňuje zachytiť tzv. „pákový efekt“, vychádzajúci z predpokladu, že negatívne výnosy (negatívne odchýlky od očakávanej hodnoty) zvyšujú volatilitu viac, než pozitívne odchýlky rovnakej veľkosti (predovšetkým na akciových trhoch). Ďalšími modifikáciami sú napr. FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH; Baillie – Bollerslev – Mikkelsen, 1996), ktorý sa pokúša zachytiť dlhú pamäť v autokorelačnej štruktúre volatility, alebo EGARCH (Exponential GARCH; Nelson – Cao, 1992), ktorý nemodeluje podmienený rozptyl logaritmickej výnosov, ale logaritmus tohto rozptylu. Podrobnú rozpravu o modifikáciách modelov GARCH poskytuje napríklad Bollerslev (2008).

Modelovaniu volatility za použitia realizovanej volatility sa podrobnejšie venujú Barndorff-Nielsen a Shephard (2002), ktorí prezentujú využitie RV modelov ako jednoduchý a efektívny spôsob predpovedania volatility na základe vysokofrekvenčných dát. Ďalej sa tejto problematike venujú napríklad Giot a Laurent (2004) v súvislosti s modelovaním Value-at-Risk a komparáciou s modelmi typu ARCH, alebo Takahasi, Omori a Watanabe (2009) v súvislosti s modelmi stochastickej volatility (viď nižšie). Čo sa týka použitia modelov s dlhou pamäťou (akým je napríklad ARFIMA-RV), ako uvádza napr. Fičura (2013), zachytenie dlhej pamäte v autokorelačnej štruktúre procesu je

³ Zjednodušenou definíciou tučných koncov je vyššia pravdepodobnosť výskytu extrémnych hodnôt.

žiadúcim atribútom u modelovania volatility. Po prvý krát bol model ARFIMA použitý k modelovaniu realizovanej volatility Ebensom v roku 1999.

Okrem doteraz spomínaných modelov existujú aj iné, napríklad modely stochastickej volatility (SV), modely premenlivých režimov, či prahové modely (podľa Xiao a Aydemir, 2007).

SV modely predpokladajú, že volatilita, ako nepozorovaná premenná, nasleduje nejaký stochastický (náhodný) proces. *Modely premenlivých režimov (regime switching models)* taktiež súvisia so stochastickými procesmi – predpokladajú, že náhle zmeny v parametroch modelov sa dajú vysvetliť tzv. Markovovými reťazcami. Markovov reťazec je „*stochastický model, popisujúci sekvenciu možných udalostí, v ktorej pravdepodobnosť výskytu každej udalosti závisí iba na stave dosiahnutom v minulej udalosti.*“ (Oxford Dictionaries). Po prvý raz bolo použitie Markovových reťazcov v kontexte časových radov a volatility navrhnuté Hamiltonom (1989), ako vysvetlenie vplyvu náhlych ekonomických a politických zmien na vlastnosti ekonomických a finančných časových radov. Podstatou modelov s premenlivými režimami je teda predpoklad, že dáta, ktoré ukazujú zmenu v režime, sa budú v budúcnosti opakovať. Je teda možné predpovedať budúce stavy za použitia odhadov parametrov z minulých pozorovaní. Posuny medzi režimami sú modelované Markovovými reťazcami, z ktorých je možné vyvodiť exogénnu zmenu medzi režimami. Jedinou informáciou nutnou pre predpoveď budúcich hodnôt sledovaných premenných je súčasný režim časového radu.

Prahové modely (threshold models) je taktiež možné považovať za modely s premenlivými režimami. Zmena medzi režimami je však explicitne určená v kontexte daného časového radu, inými slovami, existuje istá prahová hodnota (alebo hodnoty), ktorá determinuje rozsah budúcich možných hodnôt premennej pri určitej zmene režimu. Základná idea využitia „prahu“ bola predstavená Tongom v roku 1990.

Ďalej je samozrejme možné volatilitu predpovedať z cien opcií, no tejto problematike sa venuje samostatná podkapitola v nasledujúcej časti venovanej opciám.

2.3.Opcie

V tejto podkapitole budú popísané parametre a charakteristiky opčných kontraktov a mechanizmus obchodovania s opciami. Ďalej bude predstavená Black – Scholes – Mertonova rovnica pre výpočet ceny opcie, ktorá priamo súvisí s pojmom implikovanej volatility, a konkretizovaná pre menové opcie, ktoré budú v tejto práci neskôr analyzované. V závere budú taktiež charakterizované opčné stratégie, ktorých ziskovosť je silne závislá na volatilita podkladového aktíva.

Opcie sú druhom finančných derivátov. K finančným derivátom by sa dalo všeobecne povedať, že ich označenie vzniklo „na základe toho, že obchody takto označované sú odvodené – derivované od v základe ležiacich inštrumentov.“ (Dvořák, 2006, s. 15). Dvořák tiež zdôrazňuje dve ďalšie typické charakteristiky derivátov:

- *Termínový charakter* – plnenie derivátového kontraktu prebieha spravidla v budúcnosti;
- *Možnosť eliminácie rizík* – deriváty vo svojej podstate slúžia na ochranu proti riziku vyplývajúcemu zo zmien hodnôt podkladového aktíva/záväzku.

Deriváty je možné členiť podľa viacerých kritérií. Najčastejšie sa rozlišujú podľa aktíva ležiaceho v základe – typickými sú akciové, menové, úrokové či kreditné deriváty. Deriváty predstavujú istý druh budúceho obchodu alebo transakcie, ktorý je spojený s vyššie uvedenými aktívami a vo svojej podstate slúžia predovšetkým na ochranu proti riziku, ktoré môže vzniknúť v dôsledku nepriaznivého vývoja ceny daného podkladového aktíva. Podstatou derivátového kontraktu je zaistenie stabilnej budúcej ceny daného aktíva, v prípade, že do budúcnosti je plánovaný nákup alebo predaj tohto aktíva a vývoj jeho ceny je nejasný.

Ďalšími dôležitými rozlišujúcimi charakteristikami derivátov sú:

- *Charakter práva*
 - pevné/nepodmienené kontrakty – obidve strany majú súčasne právo i povinnosť zjednaný obchod v dohodnutom čase splniť;

- podmienené/opčné kontrakty – subjekt kupujúci derivátový kontrakt má právo, nie však povinnosť, zjednať obchod v dohodnutom čase splniť a zároveň predávajúci subjekt má povinnosť tento obchod v dohodnutom čase splniť, ak o tom rozhodne kupujúci.
- *Forma obchodovania*
 - burzové deriváty – obchodované ako štandardizované kontrakty na derivátových burzách;
 - mimoburzové deriváty – neštandardizované kontrakty obchodované na mimoburzových (OTC) trhoch.

2.3.1. Opčný mechanizmus a základné charakteristiky

V súvislosti s vyššie uvedeným je možné opcie definovať ako podmienené derivátové kontrakty, s ktorými je možné obchodovať v štandardizovanej forme na derivátových burzách i mimoburzovo, na OTC trhoch. Na burzách sa opcie zvyčajne obchodujú paralelne s futures kontraktmi⁴ na rovnaké podkladové aktívum. Na OTC trhoch sa najčastejšie vyskytujú menové a tzv. exotické opcie (Witzany, 2013, s. 84). Podmienenosť kontraktu vo všeobecnosti znamená, že plnenie je závislé na vôli kupujúceho kontraktu. Ten ho môže využiť, v prípade, že spotová cena podkladového aktíva v čase splatnosti opcie je preňho nevýhodnejšia, než tá dohodnutá v rámci kontraktu. V opačnom prípade má právo nechať kontrakt prepadnúť.

Pri uzavretí opčného kontraktu musia byť špecifikované nasledujúce parametre:

- *Podkladové aktívum a jeho objem* (akcia, menový pár a pod.);
- *Typ budúcej transakcie* – nákup alebo predaj podkladového aktíva v danom množstve;
- *Dátum expirácie kontraktu* (čas maturity);
- *Typ opcie*

⁴ Futures kontrakty sú štandardizovanou formou tzv. forwardových kontraktov, ktoré sú nepodmienené a kupujúceho pevne zaväzujú k budúcnemu naplneniu dohodnutej transakcie.

- európska – je možné ju uplatniť iba v čase maturity;
- americká – je možné ju uplatniť v akýkoľvek okamih pred a vrátane času maturity;
- *Realizačná cena (strike price)* – cena/menový kurz, pri ktorej bude v prípade uplatnenia opcie obchod realizovaný;
- *Opčná prémie* – čiastka, ktorú platí kupujúci opcie predávajúcemu, ako kompenzáciu za podmienený charakter kontraktu; je tiež možné ju chápať ako cenu opcie.

Zrejme základnou charakteristikou opcie pre zmluvné strany (kupujúceho a predávajúceho) je typ obchodu, ktorý má byť v budúcnosti realizovaný, teda či držiteľ opcie má záujem v budúcnosti podkladové aktívum kúpiť, alebo predat'. Na základe toho sa opcie delia na kúpne (call) a predajné (put). Nasledujúca tabuľka zobrazuje možné opčné pozície a súvisiace práva a povinnosti zmluvných strán.

Tabuľka 1: Opčné pozície

Pozícia/Typ opcie	Kúpna (call)	Predajná (put)
Dlhá pozícia – držiteľ (kupujúci) opcie	Právo nakúpiť určité množstvo aktíva za realizačnú cenu a povinnosť zaplatiť prémie	Právo predat' určité množstvo aktíva za realizačnú cenu a povinnosť zaplatiť prémie
Krátka pozícia – vypisovateľ (predajca) opcie	Povinnosť predat' určité množstvo aktíva za realizačnú cenu a právo inkasovať prémie	Povinnosť nakúpiť určité množstvo aktíva za realizačnú cenu a právo inkasovať prémie

Zdroj: vlastné spracovanie

2.3.2. Opčné výplatné funkcie – porovnanie s pevnými kontraktmi

Kupujúci forwardového (pevného) kontraktu sa zaväzuje nakúpiť alebo predat' vopred určené množstvo aktíva za vopred dohodnutú cenu vo vopred určenom termíne. Funkcia jeho zisku alebo straty je lineárna, je daná rozdielom spotovej ceny v čase maturity a forwardovej ceny (v prípade nákupu aktíva) alebo opačne, rozdielom forwardovej ceny a spotovej ceny v čase maturity (v prípade predaja aktíva). Zisk i strata môžu byť teoreticky nekonečné. Výplatná funkcia opcie nie je lineárna, pretože strata je

limitovaná výškou opčnej prémie. Rovnako zisk z využitia opcie je redukovaný práve zaplatenou opčnou prémieu. Výplatné funkcie opcií je možné vyjadriť nasledujúcimi rovnicami:

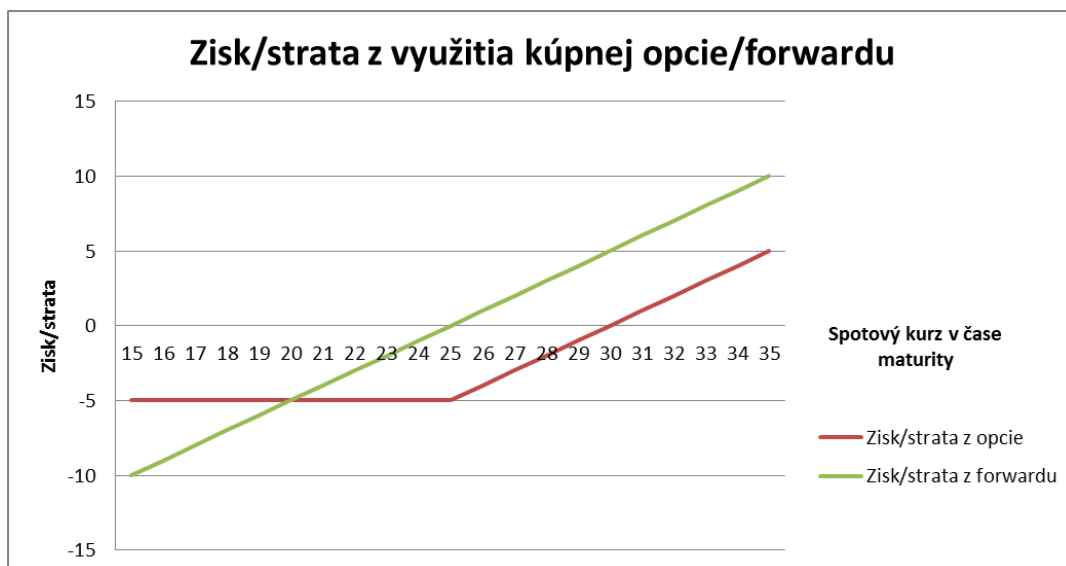
$$Payoff_{call} = \max(S - K, 0) - c \quad (2.3.2.1)$$

$$Payoff_{put} = \max(K - S, 0) - p \quad (2.3.2.2)$$

kde S je súčasná spotová cena/kurz, K je realizačná cena, c je cena call opcie a p je cena put opcie. Tieto rovnice teda platia pre držiteľa opcie, výplatná funkcia vypisovateľa je zrkadlová (s opačným znamienkom), teda jeho možný zisk je obmedzený a strata redukovaná výškou inkasovanej prémie.

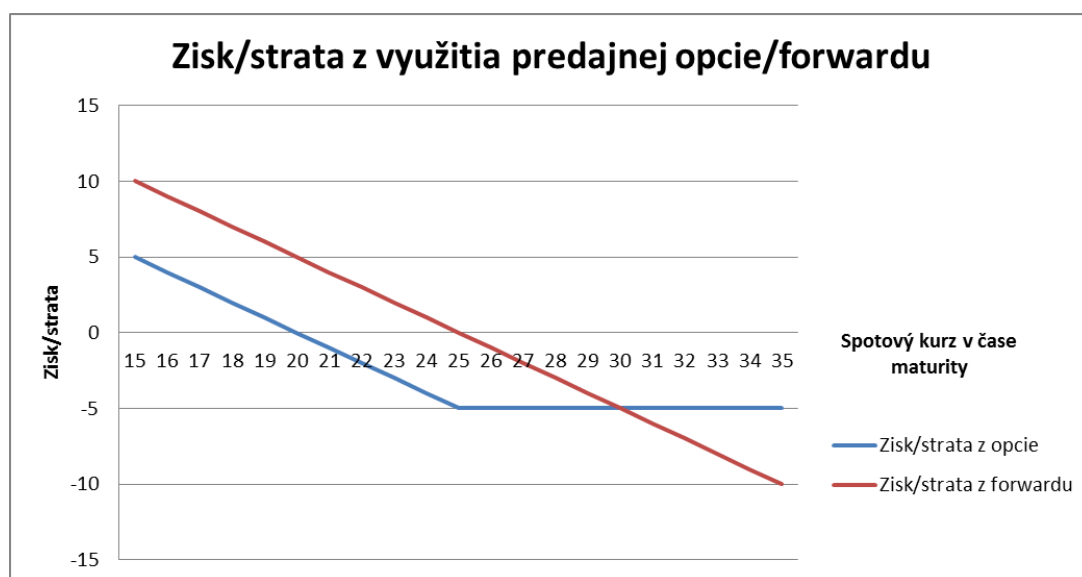
Nasledujúce grafy zobrazujú výplatné funkcie európskej menovej opcie a forwardu na imaginárnom príklade. Zobrazený je zisk/strata na 1 EUR zo zaistenia budúceho kurzu CZK/EUR pomocou forwardu, resp. opcie. Predpokladajme, že realizačná cena opcie aj forwardový kurz sú 25 CZK/EUR a opčná prémie je 5 CZK/EUR.

Obrázok 2: Kúpna opcia/forward



Zdroj: vlastné spracovanie

Obrázok 3: Predajná opcia/forward



Zdroj: vlastné spracovanie

V súvislosti vzťahu realizačnej a spotovej ceny sa zvyknú používať nasledujúce pojmy:

- *At-the-money* opciou sa nazýva taká, ktorej realizačná cena a spotová cena podkladového aktíva sa rovnajú;
- *In-the-money* opciou sa nazýva taká, ktorej realizačná cena je nižšia (v prípade call opcie), resp. vyššia (v prípade put opcie) než spotová cena podkladového aktíva;
- *Out-of-the-money* opciou sa nazýva taká, ktorej realizačná cena je vyššia (v prípade call opcie), resp. nižšia (v prípade put opcie) než spotová cena podkladového aktíva.

2.3.3. Black – Scholes – Mertonov model

Black – Scholesova rovnica je jedným z najznámejších modelov pre oceňovanie európskeho typu opcií. Zvykne sa tiež nazývať Black – Scholes – Mertonovým modelom, pretože okrem Fischera Blacka a Myrona Scholesa sa Robert Merton na začiatku 70. rokov 20. storočia taktiež zaoberal touto problematikou. Jeho prístup sa mierne odlišoval od Blackovho a Scholesovho, napriek tomu však formulovali závery a konečné rovnice

modelu spoločne. Tento model má do dnešných dní značný vplyv na spôsob, akým investori a obchodníci zaisťujú svoje portfóliá a akým oceňujú derivátové kontrakty.

Model bol pôvodne formulovaný a aplikovaný na akciové opcie. Ako uvádza aj Hull (2012, s. 300), základným predpokladom je, že *percentuálne zmeny cien akcií počas krátkého časového úseku sú normálne rozdelené*, teda platí:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \quad (2.3.3.1)$$

kde ΔS je zmena ceny akcie S v čase Δt , μ je ročný očakávaný výnos z danej akcie, σ je ročná volatilita ceny akcie a $N(m, v)$ označuje normálne rozdelenie so strednou hodnotou m a rozptylom v .

Pre logaritmický výnos v čase maturity T potom platí, že:

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (2.3.3.2)$$

a teda

$$\ln S_T \sim N \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (2.3.3.3)$$

Tieto vzťahy vyplývajú z predpokladu, že ceny akcií nasledujú tzv. *Itôov proces* (K. Itô, 1951). Ten vo všeobecnosti tvrdí, že premenná x vykonáva proces:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (2.3.3.4)$$

kde dz je Wienerov proces a a a b sú funkciami premennej x a času t . a je drift premennej x a b^2 je miera rozptylu. Podľa tzv. Itôovho Lemma, funkcia G , ktorá je funkciou premennej x a času t , vykonáva proces:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (2.3.3.5)$$

kde ∂ je označenie parciálnej derivácie funkcie G . Za predpokladu, uvedeného tiež v podkapitole venovanej základným charakteristikám volatility finančných aktív, cena akcie S vykonáva proces:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.3.3.6)$$

ktorý je známy ako *Geometrický Brownov pohyb*⁵. Ďalej predpokladajme, že μ a σ sú konštantné. Potom podľa Itôovho lemma, pre funkciu $G(S, t)$ platí:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \quad (2.3.3.7)$$

Pozn.: Z rovnice je vidieť, že S aj G sú ovplyvňované rovnakým zdrojom neistoty, dz . Tento fakt je dôležitý pri odvodzovaní Black – Scholes – Mertonovho modelu.

Ak ďalej určíme $G = \ln S$, dostaneme:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

a dosadením do rovnice (2.3.3.7) získame:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (2.3.3.8)$$

Keďže μ a σ sú konštantné, táto rovnica naznačuje, že $G = \ln S$ vykonáva generalizovaný Wienerov proces s konštantným driftom $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ a konštantnou mierou rozptylu σ^2 . Zmena $\ln S$ medzi časovými okamihmi 0 a T je teda normálne rozdelená, so strednou hodnotou $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$ a rozptylom $\sigma^2 T$, čo odpovedá rovnici (2.3.3.3) a takéto rozdelenie nazývame lognormálne.

⁵ Geometrický Brownov pohyb teda je Itôovým procesom.

Okrem vyššie uvedenej základnej podmienky pre proces, ktorý vykonáva cena akcie, formulovali Black, Scholes a Merton ďalšie predpoklady svojho modelu (podľa Hull, 2012, s. 309):

1. Neexistujú transakčné náklady a dane. Všetky aktíva sú dokonale deliteľné;
2. Počas životnosti derivátu nie sú vyplácané žiadne dividendy;
3. Neexistujú bezrizikové arbitrážne príležitosti;
4. Obchodovanie s aktívami je spojité;
5. Bezriziková úroková miera, r , je konštantná a rovnaká pre všetky doby maturity.

Tieto podmienky slúžia k odvodeniu *Black – Scholes – Mertonovej diferenciálnej rovnice*. Ako však píše Hull, nemusia byť v niektorých prípadoch striktne dodržiavané, napríklad σ a r môžu byť funkciou t (čo je v praxi často realitou). Úrokové miery môžu byť tiež stochastické, za podmienky, že rozdelenie ceny akcie v čase maturity opcie je stále lognormálne.

Opäť pripomeňme predpoklad, že cena akcie vykonáva proces:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.3.3.9)$$

V diskrétnnej verzii má rovnica podobu:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (2.3.3.10)$$

Predpokladajme ďalej, že f je cena call opcie alebo iného derivátu, s podkladovým aktívom S (f je funkciou S a t). Potom podľa Itôovho lemma:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (2.3.3.11)$$

Δf a ΔS v týchto rovniciach sú zmeny f a S v malom časovom úseku Δt . Ako bolo spomenuté vyššie, Wienerove procesy (Δz) pre f a S sú rovnaké. Z toho vyplýva, že je možné vytvoriť portfólio, obsahujúce akciu a súvisiaci derivát, takým spôsobom, že Wienerov proces bude eliminovaný. Takéto portfólio sa bude skladať z -1 derivátu a

$+\partial f/\partial S$ akcií, teda majiteľ portfólia je v dlhej pozícii v $\partial f/\partial S$ akciách a krátkej pozícii v jednom deriváte.

Označme toto portfólio ako Π . Platí:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (2.3.3.12)$$

a tiež

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (2.3.3.13)$$

Dosadením za Δf z rovnice (2.3.3.11) dostaneme:

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (2.3.3.14)$$

Rovnica neobsahuje Δz , takže portfólio je bezrizikové v čase Δt . Z predpokladov Black – Scholes – Mertonovho modelu uvedených vyššie je možné odvodiť, že portfólio musí niesť rovnakú mieru výnosu ako ostatné krátkodobé bezrizikové aktíva (súvisí to s podmienkou neexistencie arbitrážnych vzťahov). Z toho vyplýva, že:

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \quad (2.3.3.15)$$

kde r je bezriziková úroková miera. Dosadením za $\Delta \Pi$ a Π z rovníc (2.3.3.12) a (2.3.3.14) dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (2.3.3.16)$$

Táto rovnica je *Black – Scholes – Mertonovou diferenciálnou rovnicou*. Má mnoho riešení, v závislosti na konkrétnom deriváte f s aktívom S vo svojom podklade. Riešenie závisí taktiež na hraničných podmienkach, ktoré sú určené. Hodnota derivátu je špecifikovaná v medziach možných hodnôt S a t . Konkrétne pre európsku call opciu, hraničná podmienka je:

$$f = \max(S - K, 0) \text{ keď } t = T$$

V prípade európskej put opcie je hraničná podmienka:

$$f = \max(K - S, 0) \text{ keď } t = T$$

kde K je realizačná cena opcie (strike price).

Hull (2012, s. 311) zdôrazňuje kľúčovú charakteristiku tejto diferenciálnej rovnice, a síce, že neobsahuje žiadne premenné, ktoré by boli ovplyvňované rizikovými preferenciami investorov. To by neplatilo v prípade, že by rovnica zahŕňala i očakávaný výnos z akcie μ , pretože jeho hodnota závisí na rizikovom apete investora – čím averznejší postoj má daný investor k riziku, tým bude hodnota μ vyššia. Premenné, ktoré do rovnice vstupujú, sú však na rizikových preferenciách nezávislé. Tento fakt tvorí základ jedného z najdôležitejších nástrojov pre analýzu derivátov, a to tzv. *rizikovo neutrálneho oceňovania*.

Najznámejším riešením Black – Scholes – Mertonovej diferenciálnej rovnice sú rovnice vyjadrujúce cenu európskych call a put opcií. Tieto rovnice sú:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.3.3.17)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2.3.3.18)$$

kde c je cena call opcie, p je cena put opcie, e je Eulerovo číslo, $N(d)$ je kumulatívna distribučná funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia a ďalej platí:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.3.3.19)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.3.3.20)$$

Z rovníc pre cenu opcie je tiež možné odvodiť vplyv jednotlivých premenných alebo parametrov opcie:

Tabuľka 2: Vplyv premenných na cenu európskej call a put opcie

Premenná/parameter	Call opcia	Put opcia
Spotová cena S	+	-
Realizačná cena K	-	+
Čas do maturity $T-t$	?	?
Volatilita σ	+	+
Úroková miera r	+	-

Zdroj: Witzany, 2013

2.3.3.1. Oceňovanie menových opcií

Vyššie uvedené rovnice pre ocenenie opcií je možné upraviť podľa typu a špecifik podkladového aktíva (napr. opcie na futures, opcie na akcie s dividendovým výnosom, opcie na akciové indexy a pod.) Táto podkapitola sa venuje úprave Black – Scholes – Mertonovej rovnice pre účely ocenenia menových opcií (podľa Hull, 2012, s. 355).

Definujme S_0 ako spotový výmenný kurz (hodnotu jednotky cudzej meny vyjadrenú v domácej mene). Predpokladajme, že majiteľ cudzej meny, v prípade jej držania, z nej získava zahraničnú bezrizikovú mieru r_f . To nastane napríklad v prípade, že čiastku v tejto cudzej mene investuje do zahraničných štátnych dlhopisov. Potom je možné rovnice pre cenu call a put opcie upraviť nasledovne:

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-r T} N(d_2) \quad (2.3.3.1.1)$$

$$p = K e^{-r T} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1) \quad (2.3.3.1.2)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.3.3.1.3)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.3.3.1.4)$$

Obe úrokové miery, r aj r_f , sú mierami pre čas maturity T . Put a call opcie na danú menu sú symetrické, teda put opcia na predaj meny A za menu B pri realizačnom kurze K je rovnaká ako call opcia na nákup meny B za menu A pri realizačnom kurze $1/K$.

2.3.4. Implikovaná volatilita

Práve s Black – Scholes – Mertonovými rovnicami pre cenu call a put opcií súvisí pojem *implikovanej volatility*. Volatilita, ako už bolo v práci spomenuté, totiž v rovnicach nie je priamo pozorovateľnou veličinou, môže byť iba odhadovaná na základe historických údajov o cene aktíva. V praxi sa teda zvyčajne využíva práve implikovaná volatilita, ktorej praktický výpočet prebieha dosadením známej tržnej ceny opcie do spomínanej rovnice a vyjadrenie volatility ako neznámej. Implikované volatility sa používajú na monitorovanie „názoru“ trhu na volatilitu konkrétneho aktíva. Ako píše Hull (2012, s. 319), obchodníci často kótujú implikovanú volatilitu opcie radšej, než jej samotnú cenu. To sa ukazuje ako výhodný postup, pretože implikovaná volatilita je menej premenlivá než cena opcie.

V prípade predvídania volatility z cien opcií však môže byť nevýhodou to, že volatilita vypočítaná z cien in-the-money a out-of-the-money opcií je spravidla vyššia, než tá z cien at-the-money opcií. Je to spôsobené tým, že volatilita je v praxi stochastická a často dochádza k skokom, ktoré Geometrický Brownov pohybe nedokáže zachytiť, a Black – Scholesov model tak podhodnocuje in-the-money a out-of-the-money opcie. Keď sa potom spočíta implikovaná volatilita z pozorovaných opčných cien, vychádza spravidla vyššia. V praxi teda nastáva otázka, aké opcie k výpočtu implikovanej volatility použiť. Častým postupom je použitie at-the-money opcií, alternatívou v prípade ich nedostupnosti môže byť akýsi vážený priemer z najbližších in-the-money a out-of-the-money opcií. Ďalším problémom je fakt, že Black – Scholes – Mertonov model uvažuje konštantný rozptyl ceny podkladového aktíva počas celej životnosti opcie, čo však v praxi neplatí.

Figlewski (1997) vidí ďalej problém v tom, že v praxi sa trhy málokedy chovajú tak, ako to predpokladajú derivátové oceňovacie modely. V kontexte implikovanej volatility zdôrazňuje predovšetkým to, že opčné trhy podľa neho nie sú natoľko efektívne, aby ceny opcií verne odrážali tržné očakávania volatility podkladového aktíva.

Zdôvodňuje to najmä tým, že arbitrážne obchodovanie (vychádzajúce z arbitrážneho vzťahu pre derivát a podkladové aktívum), ktoré je základom oceňovacích modelov a ktoré by malo ceny opcií „nútiť“ pohybovať sa v zhode s tržným očakávaním volatility, nie je v praxi dostatočne aktívne.

2.3.5. Opčné stratégie

Opčnou stratégiou sa vo všeobecnosti rozumie kombinovanie opcií s rovnakým podkladovým aktívom a dátumom expirácie, väčšinou so špekulačným zámerom (Witzany, 2013, s. 95). Obchodník teda špekuluje na určitý budúci vývoj ceny podkladového aktíva a vstupom do konkrétnej opčnej stratégie si zaistuje zisk, samozrejme, iba v prípade, že jeho očakávania sa ukážu ako správne. Kombinovanie opcií pritom znamená vstupovanie do rôznych pozícií (krátka, dlhá) v rôznych typoch opcií (call, put), s rôznymi realizačnými cenami.

Lyu (2001, s. 78) uvádza, že obchodná stratégia všeobecne môže byť z pohľadu trhu medvedieho, býčieho alebo neutrálneho typu. Podľa expozície k riziku ďalej rozlišuje stratégie agresívne, defenzívne, alebo v podstate bezrizikové. Agresívnu stratégiu vysvetľuje ako stratégiu s rizikom maximálnej straty („dolár za dolár“), prípade nenaplnení očakávaní. K agresívnejším stratégiám radí pákové obchodovanie, alebo práve opčné stratégie.

Medvedia stratégia špekuluje na pokles ceny podkladového aktíva, *býčia* stratégia na rast. Práve *neutrálne* stratégie sú potom z hľadiska tejto práce zaujímavé, pretože nešpekulujú na konkrétny smer pohybu ceny akcie, ale na jeho nízku alebo vysokú volatilitu. Najznámejšími neutrálnymi stratégiami sú tzv. *butterfly*, *straddle a strangle a condor*. Táto práca sa bude konkrétnejšie venovať stratégiám long a short call butterfly a long a short straddle a strangle. V kontexte práce je dôležité spomenúť, že ziskovosť opčnej stratégie výrazne závisí i na výške opčnej prémie, resp. cene opcie, keďže pre investora (špekulanta) je to významná nákladová položka. Stratégie počítajú so základnými vzťahmi pre ceny opcie, odvodenými z Black – Scholes – Mertonovho modelu a uvedenými napr. v Tabuľke 2.

2.3.5.1. Stratégia typu long call butterfly

Stratégia long call butterfly kombinuje dlhé a krátke pozície v európskych call opciách na rovnaké podkladové aktívum a s rovnakou dobou splatnosti, ale inou realizačnou cenou K . Konkrétne:

- Dlhá pozícia (nákup) v 1 call opcii s K_1
- Krátka pozícia (predaj) v 2 call opciách s K_2
- Dlhá pozícia (nákup) v 1 call opcii s K_3

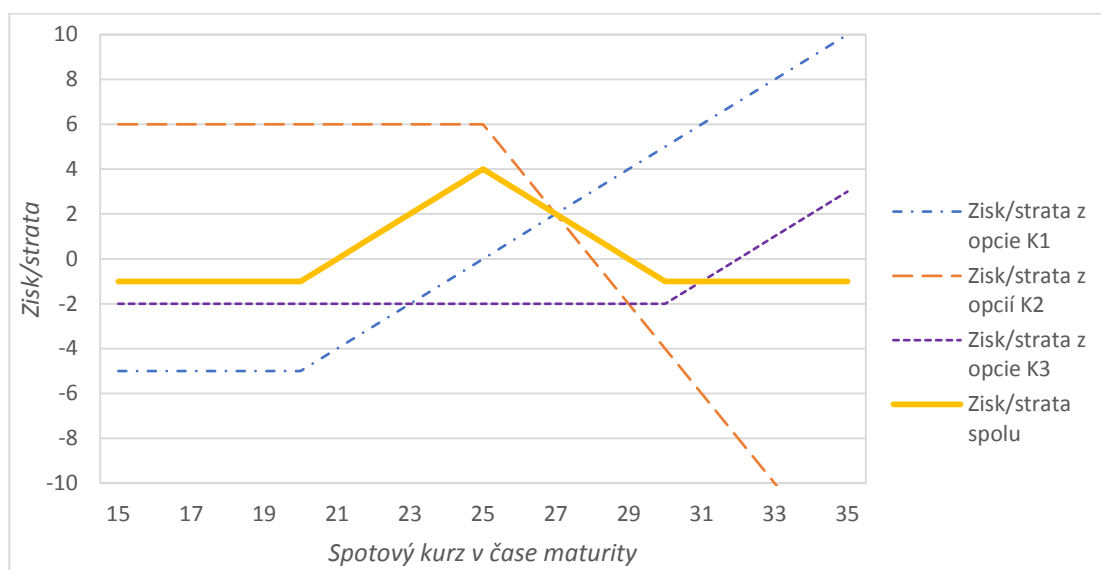
pričom platí $K_1 < K_2 < K_3$. Z Tabuľky 2 je vidieť, že medzi realizačnou cenou a cenou call opcie je inverzný vzťah, teda opcia s najnižším K bude najdrahšia (bude mať najvyššiu opčnú prémii).

Predpokladajme nasledujúce parametre menových call opcií:

	Realizačný kurz	Cena call opcie (prémia)
Opcia 1	20 CZK/EUR	5 CZK/EUR
Opcia 2	25 CZK/EUR	3 CZK/EUR
Opcia 3	30 CZK/EUR	2 CZK/EUR

Potom, pri vstupe do stratégie call butterfly s týmito opciami, bude zisková funkcia (zisk na 1 EUR) vyzerat' nasledovne:

Obrázok 4: Stratégia long call butterfly



Zdroj: vlastné spracovanie

Z grafu je vidieť, že kladný celkový zisk zo stratégie je realizovaný pri relatívne úzkom intervale výšky spotového kurzu v čase maturity 21 až 29 CZK/EUR. Je teda zrejmé, že long call butterfly stratégia je špekuláciou na nízku volatilitu menového kurzu.

2.3.5.2. Stratégia typu short call butterfly

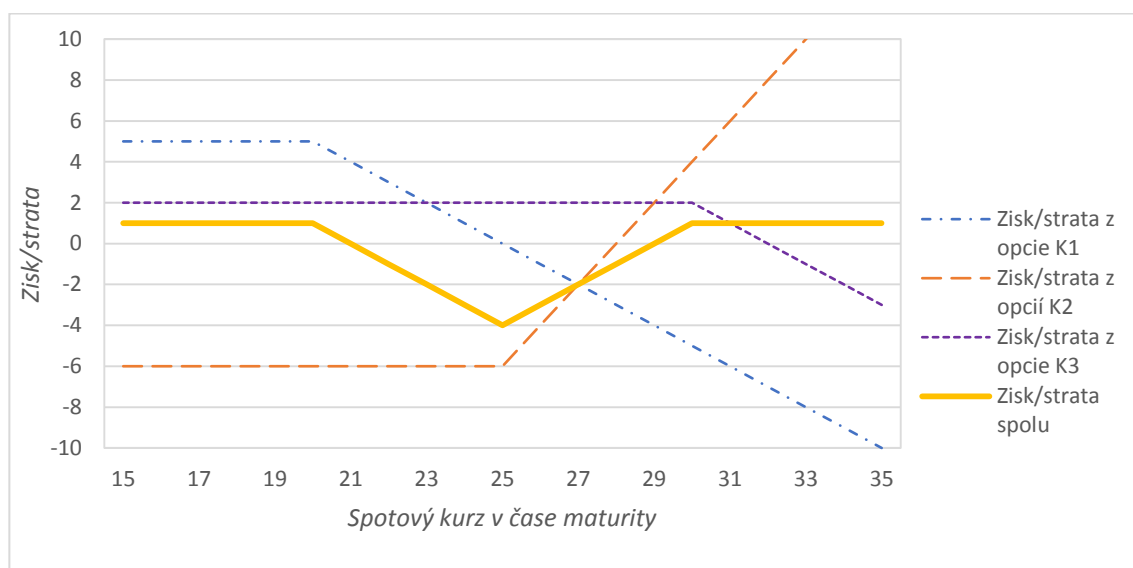
Short call butterfly je opačnou stratégiou k long call butterfly, teda investor vstupuje do nasledujúcich pozícií:

- Krátka pozícia (predaj) v 1 call opcii s K_1
- Dlhá pozícia (nákup) v 2 call opciách s K_2
- Krátka pozícia (predaj) v 1 call opcii s K_3

pričom opäť platí $K_1 < K_2 < K_3$.

Za rovnakých predpokladov o menových call opciách, ako pri long call butterfly stratégii, bude zisková funkcia vyzeráť takto:

Obrázok 5: Stratégia short call butterfly



Zdroj: vlastné spracovanie

Z grafu je vidieť, že kladný celkový zisk zo stratégie je realizovaný pri extrémnejších hodnotách kurzu, teda short call butterfly stratégia je špekuláciou na vysokú volatilitu menového kurzu.

2.3.5.3. Stratégie typu straddle a strangle

Butterfly i condor (ktorý bude pre informáciu popísaný nižšie) sú stratégie, ktoré ponúkajú obmedzenie výšky straty vo všetkých štyroch prípadoch, ako je možné vidieť aj na vyššie uvedených grafoch. Zisk z týchto stratégií je však takisto obmedzený; celkovo by sa teda stratégie typu butterfly a condor dali označiť za menej rizikové opčné stratégie, kde je vopred známa maximálna možná výška zisku i straty. *Straddle* a *strangle* sú ďalšie stratégie, ktoré špekulujú na nízku či vysokú volatilitu podkladového aktíva, no sú o poznanie rizikovejšie, keďže zisk, resp. strata (podľa konkrétneho typu stratégie a pozícií) z nich môže byť teoreticky neobmedzená.

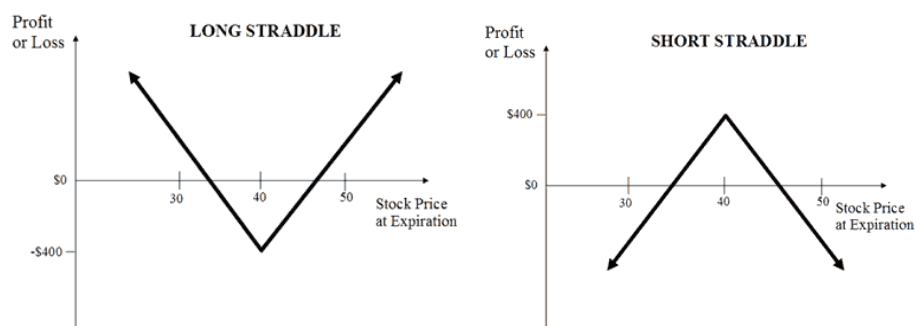
Nasledujúca tabuľka a grafy ponúkajú súhrn možných pozícií v týchto stratégiách a ich ziskové funkcie.

Tabuľka 3: Straddle a strangle stratégie

Pozícia/stratégia	Straddle	Strangle ⁶
Long	Dlhá pozícia v 1 call s K	Dlhá pozícia v 1 call s K_1
	Dlhá pozícia v 1 put s K	Dlhá pozícia v 1 put s K_2
Short	Krátka pozícia v 1 call s K	Krátka pozícia v 1 call s K_1
	Krátka pozícia v 1 put s K	Krátka pozícia v 1 put s K_2

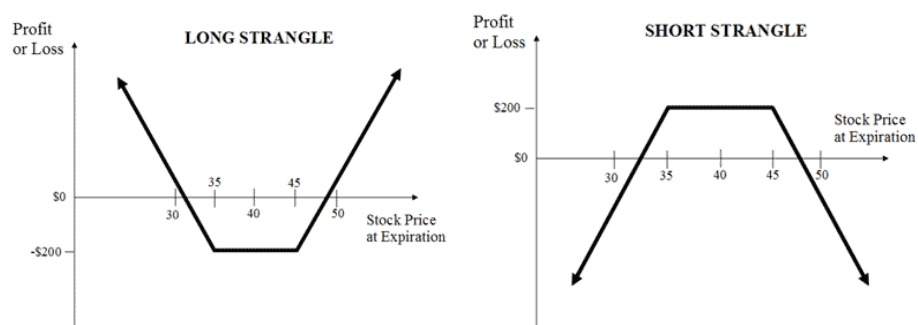
Zdroj: vlastné spracovanie podľa Witzany, 2013

Obrázok 6: Straddle stratégie



Zdroj: theoptionsguide.com

Obrázok 7: Strangle stratégie



Zdroj: theoptionsguide.com

⁶ V oboch prípadoch platí, že $K_2 < K_1$.

„Long“ stratégie teda v oboch prípadoch špekulujú na vysokú volatilitu podkladového aktíva, „short“ stratégie zasa na nízku. Je vidieť, že stratégie „long“ môžu priniesť teoreticky neobmedzený zisk, stratégie „short“ naopak teoreticky neobmedzenú stratu.

2.3.5.4. *Stratégie typu call condor*

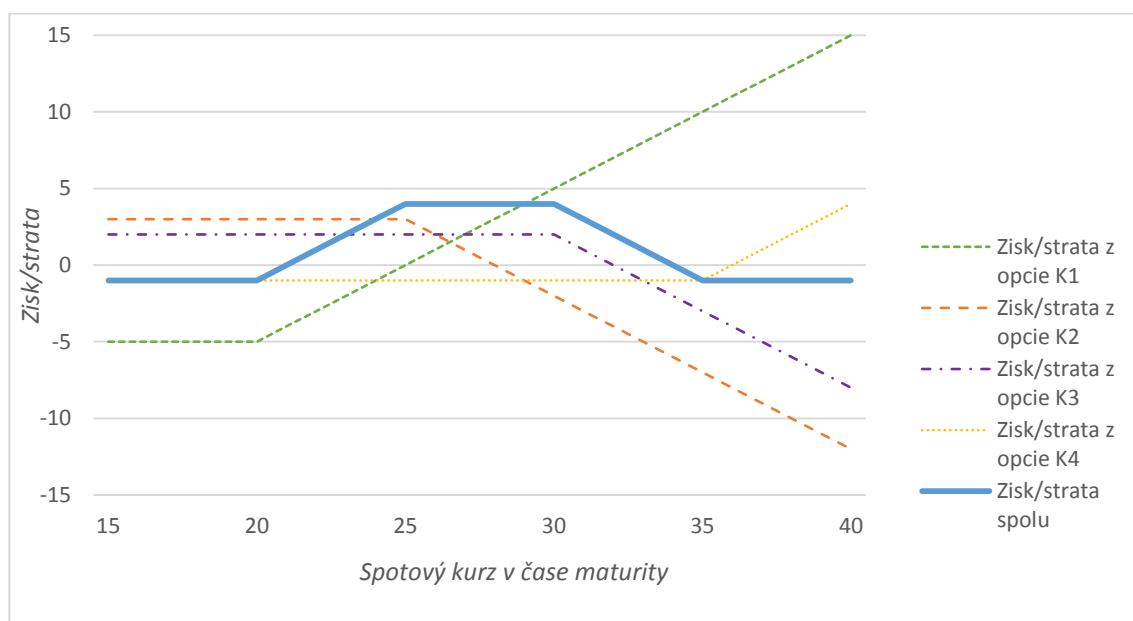
Aj keď v praktickej časti práce budú skúmané iba stratégie typu butterfly, straddle a strangle, je vhodné spomenúť i stratégie typu condor, ktoré taktiež patria k opčným stratégiám závislým na volatilitu podkladového aktíva. Stratégie typu condor sú modifikáciou stratégií typu butterfly. Rozdiel spočíva v tom, že kombinované sú štyri opcie so štyrmi rôznymi realizačnými cenami. Investor teda v prípade long call condor stratégie vstupuje do nasledujúcich pozícií:

- Dlhá pozícia (nákup) v 1 call opcii s K_1
- Krátka pozícia (predaj) v 1 call opcii s K_2
- Krátka pozícia (predaj) v 1 call opcii s K_3
- Dlhá pozícia (nákup) v 1 call opcii s K_4

pričom platí $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$.

Jeho výplatná funkcia vyzerá nasledovne:

Obrázok 8: Stratégia long call condor



Zdroj: vlastné spracovanie

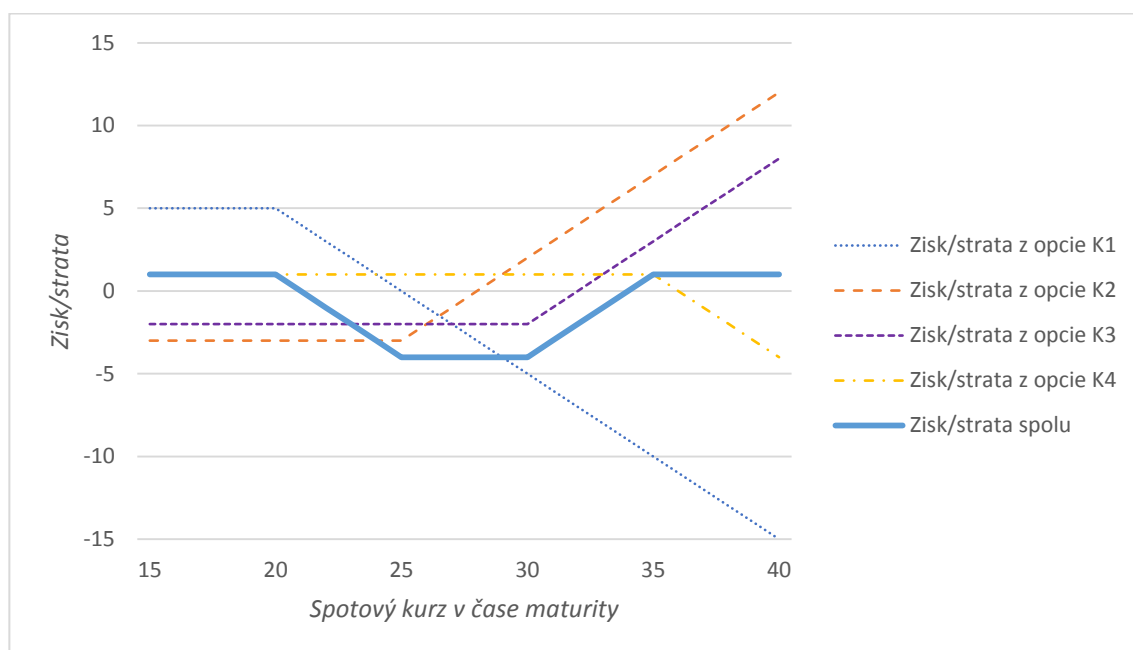
Z grafu je možné vidieť podobnosť so stratégiou long call butterfly, pretože predpokladom ziskovosti je opäť nízka volatilita kurzu. Stratégia condor je však ziskovejšia v širšom intervale spotového kurzu v čase maturity, a taktiež maximálny zisk je možné dosiahnuť pri viacerých hodnotách spotového kurzu, nie iba pri jednej konkrétnej, ako je tomu u stratégie butterfly.

Analogicky, short call condor je opačnou stratégiou k long call condor a je opäť modifikáciou short call butterfly stratégie. V tomto prípade investor vstúpi do nasledujúcich pozícií:

- Krátka pozícia (predaj) v 1 call opcii s K_1
- Dlhá pozícia (nákup) v 1 call opcii s K_2
- Dlhá pozícia (nákup) v 1 call opcii s K_3
- Krátka pozícia (predaj) v 1 call opcii s K_4

pričom opäť platí $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$. Jeho zisková funkcia bude vyzerat' nasledovne:

Obrázok 9: Stratégia short call condor



Zdroj: vlastné spracovanie

Opäť je zjavné, že táto stratégia špekuluje na veľké výkyvy v hodnote kurzu, a teda na jeho vysokú volatilitu. Podobne ako v prípade long call condor stratégie, interval spotového kurzu v čase maturity, pri ktorom je dosahovaná strata, je väčší, ako pri stratégii butterfly, a maximálna hodnota straty je dosiahnuteľná pri viacerých hodnotách spotového kurzu. Táto vlastnosť je, na rozdiel od long call condor stratégie, však v tomto prípade skôr na škodu.

Je potrebné spomenúť, že pre všetky vyššie spomínané stratégie platí, že ich vstupné náklady môžu byť veľmi vysoké, keďže zahŕňajú (okrem short straddle a short strangle stratégií) nákup niekoľkých opcií za rôzne ceny. To je tiež jedným z faktorov ovplyvňujúcich ziskovosť konkrétnej opčnej stratégie.

3. Metodická časť

3.1. Výstavba modelov

V tejto podkapitole budú charakterizovaný postup pri výstavbe modelov, ktorými bude neskôr predpovedaná volatilita. Pozornosť bude venovaná predovšetkým postupu pri odhade parametrov, konštrukcii predpovedí na základe odhadnutých modelov a diagnostickej kontrole modelov. Pri modeloch typu ARIMA/ARFIMA bude priestor venovaný taktiež určeniu radu diferencovania d (separátne pre modely ARIMA a modely ARFIMA) a radov polynómov p a q . U modelov ARIMA/ARFIMA a HAR, ktoré vychádzajú z realizovanej volatility, bude taktiež táto realizovaná volatilita definovaná.

Modely budú vo všeobecnosti použité na predpoveď dennej volatility menového páru EUR/USD, pričom druhotným cieľom bude taktiež konštrukcia dlhodobej predpovede (týždennej a mesačnej volatility). Dáta budú rozdelené na tzv. tréningovú a testovaciu časť. Testovacie dáta budú slúžiť pri validácii modelov odhadnutých na tréningových dátach. Odhady modelov budú vykonávané v programe EViews⁷.

3.1.1. ARIMA/ARFIMA-RV model

Modely ARIMA a ARFIMA budú aplikované na časový rad dennej realizovanej volatility logaritmickej výnosov sledovaného menového páru. Pojem realizovanej volatility bol odvodený od konceptu realizovaného rozptylu. Po prvý raz bol predstavený Andersenom a Bollerslevom (1998) a je často využívaným a úspešným postupom k meraniu variability vnútrodných výnosov. Prvým krokom je kalkulácia vnútrodných logaritmickej výnosov na určitej časovej báze. V tejto práci sa bude v rámci ARIMA modelu pre tieto účely pracovať s výnosmi na 15-minútovej báze. Táto kalkulácia bude vykonaná podľa vzorca, predstaveného v teoretickej časti práce:

⁷ Technická poznámka k programu EViews – tento program používa v rovniciach MA modelov opačné znamienko MA koeficientov, ako je uvádzané v teoretickej a metodologickej časti práce (podľa Arlta a Arltovej, 2009), teda plus namiesto mínus.

$$u_m = \ln \frac{S_{15m}}{S_{15m-1}} \quad (3.1.1.1)$$

kde $15m$ je označenie 15-minútovej periódy.

V ďalšom kroku je denný realizovaný rozptyl vypočítaný ako suma druhých mocnín týchto výnosov za N - minút:

$$RVar^d = \sum_{m=1}^N u_{15m}^2 \quad (3.1.1.2)$$

Dennou realizovanou volatilitou sa potom chápe druhá odmocnina realizovaného rozptylu, teda $RV^d = \sqrt{\sum_{m=1}^N u_{15m}^2}$.

3.1.1.1. Odhad parametrov

Parametre modelov budú odhadnuté *podmienenou metódou maximálnej vierohodnosti* (podľa Artl – Arltová, 2009, s. 55-56). Za predpokladu, že $a_t = \phi_p(B)\theta_q(B)^{-1}X_t = \pi(B)X_t$ a $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, je možné podmienenú vierohodnostnú funkciu modelu ARMA(p, q) (počiatočné hodnoty $X_1, \dots, X_p$ sú pevne dané) vyjadriť ako:

$$\ln \left(L(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_a^2) \right) = -\frac{T-p}{2} \ln(2\pi) - \frac{T-p}{2} \ln \sigma_a^2 - \frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=p+1}^T a_t^2 \quad (3.1.1.1.1)$$

Odhady parametrov sa získajú maximalizáciou tejto funkcie, resp. minimalizáciou $\sum a_t^2$ vzhľadom k týmto parametrom.

Predpoveď modelu v čase T na horizont h je potom za pomoci odhadnutých parametrov možné vyjadriť ako:

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(h) = & \hat{a}_1 \hat{X}_T(h-1) + \dots + \hat{a}_{p+d} \hat{X}_T(h-p-d) + \hat{a}_T(h) - \hat{\theta}_1 \hat{a}_T(h-1) - \dots \\ & - \hat{\theta}_q \hat{a}_T(h-q) \end{aligned} \quad (3.1.1.1.2)$$

v prípade, že platí:

$$\alpha_{p+d}(B) = \phi_p(B)(1 - B)^d \quad (3.1.1.1.3)$$

3.1.1.2. Určenie radu diferenciácie d - ARIMA

Pri analýze ekonomických a finančných časových radov je väčšinou možné sa stretnúť s integrovanými radami maximálne radu dva, teda radami typu $I(2)$ (podľa Arlt – Arltová, 2009, s. 59). Najčastejšie sa však vyskytujú rady typu $I(1)$, teda časové rady sa stacionarizujú prostredníctvom prvej diferenciácie. V tejto súvislosti je jedným z najznámejších *Dickey – Fullero* test jednotkových koreňov, ktorý rozhoduje o tom, či daný časový rad je typu $I(0)$ alebo $I(1)$, teda či je vôbec potrebné stacionarizovať časový rad pomocou diferenciácie prvého radu.

Test spočíva v zisťovaní prítomnosti jednotkového koreňa, ktorý svedčí o nestacionarite pôvodného časového radu. V súčasnosti sa často používa tzv. rozšírený Dickey – Fullero test (*Augmented Dickey – Fuller test*, alebo *ADF*), ktorý je aplikovateľný na zložitejšie modely časových radov. *ADF* testuje nulovú hypotézu o prítomnosti jednotkového koreňa, oproti alternatívnej hypotéze o stacionarite alebo trendovej stacionarite⁸ časového radu, pričom je možné do hypotéz zahrnúť i prítomnosť konštanty v časovom rade.

Za predpokladu modelu $X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$, testové kritérium t je rovné:

$$t = \frac{\hat{\phi}_1 - \phi_1^{(T)}}{s_{\hat{\phi}_1}} \quad (3.1.1.2.1)$$

kde $s_{\hat{\phi}_1}$ je odhad smerodajnej chyby odhadu $\hat{\phi}_1$. Toto testové kritérium má pri testovaní hypotézy $H_0: \phi_1 = \phi_1^{(T)}$, pre $|\phi_1^{(T)}| < 1$ asymptoticky normálne rozdelenie. V malých výberoch má táto štatistika približne Studentovo t rozdelenie. V prípade, kedy

⁸ Trendová stacionarita znamená, že časová rada je stacionárna, no obsahuje tiež deterministický trend.

$\phi_1^{(T)} = 1$, však toto neplatí, rozdelenie testového kritéria nie je asymptoticky normálne a ani symetrické. Fuller (1976) publikoval kritické hodnoty rozdelenia štatistík t a $T(\hat{\phi}_1 - 1)$ pri platnosti nulovej hypotézy $\phi_1 = 1$, po prvý raz ich tabeloval Dickey v tom istom roku. Test môže byť použitý i na procesy so zložitejšou autokorelačnou štruktúrou než proces uvedený vyššie, napr. proces AR(p):

$$\phi_p(B)X_t = a_t \quad (3.1.1.2.2)$$

kde $\phi_p(B) = (1 - B)\phi_{p-1}^*(B)$ a kde všetky korene polynómu $\phi^*(B)$ ležia vo vnútri jednotkového kruhu. Tento proces je I(1) a v závislosti na forme polynómu $\phi^*(B)$ môže byť aproximovaný modelom:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i \Delta X_{t-i} + a_t \quad (3.1.1.2.3)$$

Práve z tohto modelu sa vychádza pri testovaní prítomnosti jednotkového koreňa. Pre $T \rightarrow \infty$ majú štatistiky t a $T(\hat{\phi}_1 - 1)$ limitné rozdelenie tabelované v Dickeyho tabuľkách. Voľba oneskorenia p v modeli sa vykonáva štandardným spôsobom na základe posúdení vlastností rezíduí (tzv. p – hodnota v porovnaní s hladinou významnosti).

V praxi teda samotný ADF test prebieha formou výpočtu testového kritéria a porovnaní s kritickými hodnotami na danej hladine významnosti. Ak je hodnota testového kritéria menšia, než kritická hodnota, je možné na danej hladine významnosti zamietnuť nulovú hypotézu o prítomnosti jednotkového koreňa a teda skúmaný časový rad je stacionárny (je možné použiť model ARMA, alebo ARIMA($p,0,q$)). V opačnom prípade prijímame nulovú hypotézu a v ďalšom kroku časový rad stacionarizujeme (model je typu ARIMA($p,1,q$) v prípade, že druhé oneskorenie sa v ADF teste ukáže ako nevýznamné, a teda na stacionarizáciu je postačujúca prvá diferenciácia).

3.1.1.3. Určenie radu diferenciácie d - ARFIMA

V prípade ARFIMA modelov rad diferenciácie d nemusí byť celé číslo. Tu sa ukazuje ADF test ako nedostačujúci, pretože testuje iba možnosti I(0) alebo I(1). Baum

(2013) píše, že testom vhodným pre účely ARFIMA modelov by mohol byť tzv. KPSS test (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin, 1992). Oproti ADF, no i ďalším testom jednotkového koreňa, nulovou hypotézou nie je prítomnosť jednotkového koreňa, ale (trendová) stacionarita ($I(0)$).

Pre rad diferenciácie d v týchto modeloch platí (čerpané z Fičura, 2013):

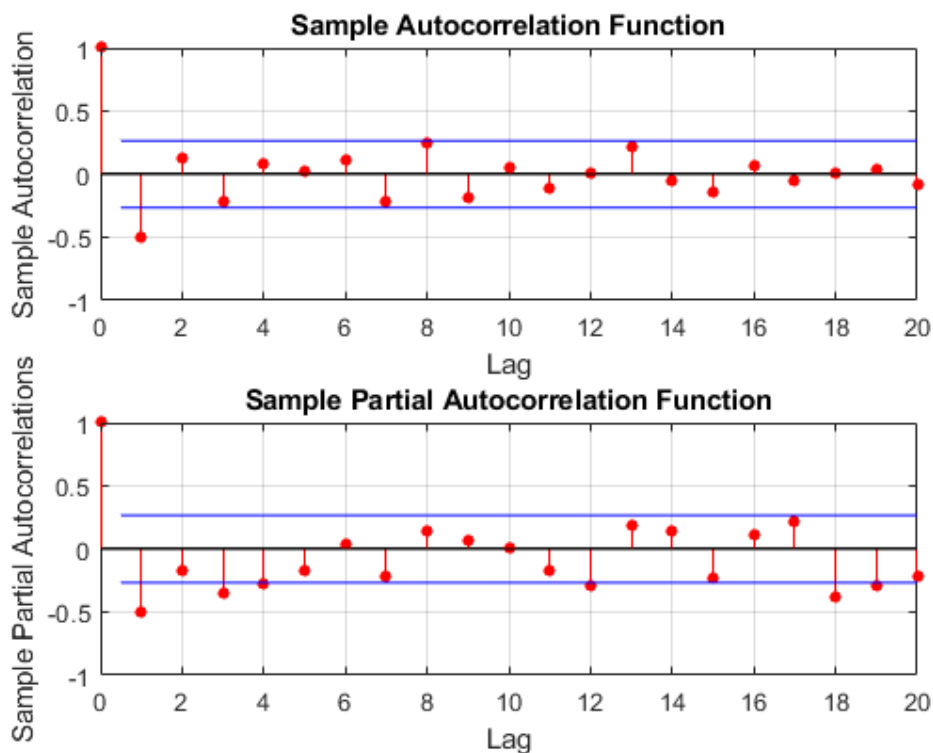
- Ak $d = 0$, model je typu ARMA (p,q) – model s krátkou pamäťou
- Ak $d = 1$, model je typu ARIMA $(p,1,q)$ – model s nekonečnou pamäťou
- Ak $d > 0$, ide o proces s dlhou pamäťou
- Ak $-1 < d < 0,5$, proces je stacionárny a invertibilný
- Ak $0,5 \leq d < 1$, proces už nie je stacionárny, no stále má vlastnosť „mean – reversion“, ktorá z procesu zmizne až pri $d \geq 1$

3.1.1.4. Určenie radu polynómov $\phi_p(B)$ a $\theta_q(B)$

Rady ARMA procesu p a q sa určujú pomocou výberovej autokorelačnej funkcie (ACF) a výberovej parciálnej autokorelačnej funkcie (PACF). Autokorelácia vyjadruje lineárnu závislosť medzi dvoma časovo odlišnými hodnotami jednej premennej (resp. medzi hodnotou premennej v čase t a jej oneskorením v čase $t-k$). Parciálna autokorelácia taktiež vyjadruje lineárnu závislosť medzi takýmito hodnotami, no odstraňuje vplyv prípadnej vzájomnej lineárnej závislosti hodnôt ležiacich medzi nimi. Teda, ak skúmame lineárnu závislosť medzi hodnotami premennej X v čase t a $t-k$, PACF ignoruje prípadnú autokoreláciu hodnôt $x_1, x_2, \dots, x_{t-k+1}$. „Tradičná metóda spočíva v hľadaní podrobností v tvare výberovej ACF a výberovej PACF a ich teoretických protikladov známych modelov.“ (Artl – Arltová, 2009, s. 65) Štatistické a ekonometrické softvéry v súčasnosti ponúkajú možnosti grafického zobrazenia týchto funkcií spolu s porovnaním s teoretickými „hraničnými“ hodnotami významnosti; samotné určenie radov p a q potom prebieha skôr na základe intuitívneho posúdenia, v ktorých oneskoreniach nadobúdajú ACF a PACF ešte relatívne významných hodnôt, pričom o rade AR procesu p rozhodujú hodnoty PACF, o rade MA procesu q hodnoty ACF.

Príkladom môže byť graf ACF a PACF vykreslený v prostredí MatLab a publikovaný na jeho oficiálnej webovej stránke, spolu s návodom na konštrukciu týchto funkcií:

Obrázok 10: Výberová ACF a PACF (príklad MatLab)



Zdroj: *mathworks.com*

Horná časť zobrazuje výberovú ACF, dolná výberovú PACF. Na horizontálnej osi je počet oneskorení. Viditeľná je silná autokorelácia v oneskorení 1 a silná parciálna autokorelácia v oneskorení 1, 3 a 4.⁹ Tutoriál na webovej stránke *mathworks.com* uvádza, že na základe výrazne vysokej hodnoty ACF v prvom oneskorení a postupnejšieho poklesu PACF by sa ako vhodný model pre tieto dáta mohol ukázať MA(1) model.

⁹ Aj v ďalších oneskoreniach je možné vidieť hodnoty autokorelácie prekračujúce hranice významnosti (napr. oneskorenia 12, 18, 19), no takto vysoké čísla oneskorení sa obvykle zanedbávajú.

3.1.1.5. Diagnostická kontrola modelu

Po odhadnutí výsledného modelu je potrebné vykonať jeho kontrolu. Ako píše Arlt a Arltová (2009, s. 66), „kvalitne postavený model by mal viesť k vzťahu:

$$a_t = \frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)} \Delta^d X_t, \quad (3.1.1.5.1)$$

tzn. že „odfiltrovanie“ systematickosti analyzovaného procesu by malo viesť k procesu bieleho šumu. Základná diagnostická kontrola teda spočíva v posúdení rezíduí

$$\hat{a}_t = \frac{\hat{\phi}_p(B)}{\hat{\theta}_q(B)} \Delta^d X_t \quad (3.1.1.5.2)$$

kde $\hat{\phi}_p(B)$ a $\hat{\theta}_q(B)$ vzniknú z $\phi_p(B)$ a $\theta_q(B)$ po dosadení odhadov parametrov. “

V tejto súvislosti je žiadúce, aby rezíduá vykazovali nasledujúce vlastnosti:

- *Konštantný rozptyl* nesystematickej zložky – najjednoduchšie je intuitívne vizuálne posúdenie konštantnosti rozptylu na základe grafu rezíduí; je prípadné možné previesť tzv. ARCH test (test podmienenej heteroskedasticity), prípadne test autokorelácie štvorcov rezíduí;
- *Neautokorelácia* nesystematickej zložky – testuje sa pomocou výberovej ACF rezíduí – ak ani v jednom oneskorení neprekročia hodnoty autokorelácie hraničné hodnoty, je možné konštatovať neautokoreláciu náhodnej zložky (najjednoduchšie je opäť zhodnotenie na základe grafu);
- *Normalita* nesystematickej zložky – najčastejšie používaným je *Jarque – Berov* test (1980), založený na súčasnom testovaní šikmosti a špicatosti. Základom je porovnanie hodnoty testového kritéria *JB* a kritických hodnôt, alebo porovnanie *p* – hodnoty a hladiny významnosti (ak je *p* – hodnota väčšia, než hladina významnosti, na danej hladine nezamietame nulovú hypotézu o normalite náhodnej zložky).

3.1.1.6. Voľba správneho modelu

V prípade, že bolo odhadnutých viacero rôznych modelov, existuje viacero kritérií na posúdenie ich kvality a výber toho najvhodnejšieho. V tejto práci budú sledované nasledujúce kritériá:

- *Akaikeho informačné kritérium (AIC):*

$$AIC(M) = \ln \hat{\sigma}_a^2 + 2M/T \quad (3.1.1.6.1)$$

kde $M = p + q$, $\hat{\sigma}_a^2$ je reziduálny rozptyl tohto modelu a T je počet rezíduí získaných na základe daného modelu. Platí, že čím nižšia hodnota AIC, tým je model kvalitnejší.

- *Schwarzovo kritérium (SC):*

$$SC(M) = \ln \hat{\sigma}_a^2 + M(\ln T)/T \quad (3.1.1.6.2)$$

Opäť platí, že nižšia hodnota signalizuje kvalitnejší model.

- *Durbin – Watson štatistika (DW):*

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (a_t - a_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T a_t^2} \quad (3.1.1.6.3)$$

DW štatistika taktiež súvisí so skúmaním autokorelácie rezíduí. Jej hodnoty sa pohybujú v intervale 0 až 4 a platí, že čím je hodnota daného modelu bližšie k 2, tým je kvalitnejší.

- *Koeficient determinácie (R – Squared):*

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{S_t} \quad (3.1.1.6.4)$$

kde S_e je reziduálny a S_t je celkový súčet štvorcov. Tento koeficient nadobúda hodnôt z uzavretého intervalu 0 až 1 a je možné ho interpretovať ako podiel rozptylu

závislej premennej, ktorý sa podarilo modelom vysvetliť (väčšie číslo udáva väčšiu úspešnosť modelu).

3.1.2. HAR-RV model

HAR je ďalším z modelov realizovanej volatility. Ako bolo spomenuté v teoretickej časti, podľa modelu HAR bude denná volatilita odhadnutá pomocou metodológie ARIMAX(1,0,0,2) modelu, ktorý k modelu ARIMA(1,0,0) (teda modelu AR(1)) pridáva dve exogénne premenné, a sice týždennú a mesačnú volatilitu. V tejto súvislosti sa pod týždennou volatilitou bude rozumieť týždenný priemer dennej realizovanej volatility a pod mesačnou volatilitou mesačný priemer dennej realizovanej volatility, pričom dennou realizovanou volatilitou sa chápe druhá odmocnina sumy štvorcov 15-minútových logaritmickejých výnosov (podľa definície v metodológii modelu ARIMA).

Postup pri výstavbe modelu môže byť identický s postupom pri modeli ARIMA, no do rovnice modelu vyjadrenej pomocou operátora oneskorenia B pribudnú spomínané exogénne premenné:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d X_t = \beta_1 RV_n^w + \beta_2 RV_n^m + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t \quad (3.1.2.1)$$

Ako upozorňuje Hyndman (2010), koeficienty pri exogénnych premenných nevyjadrujú efekt na vysvetľovanú premennú pri zmene vysvetľujúcej premennej o 1, ako je tomu pri regresii, ale je treba mať na pamäti aj oneskorené hodnoty rezíduí i samotnej vysvetľovanej premennej.

3.1.3. GARCH model

Ako bolo spomenuté už v teoretickej časti práce, GARCH model bude aplikovaný priamo na časovú radu denných logaritmickejých výnosov sledovaného aktíva. Nasledujúca podkapitola popisuje postup pri odhade parametrov modelu, i možnosť testovania rezíduí modelu.

3.1.3.1. Odhad parametrov

Parametre modelu GARCH budú odhadnuté metódou maximálnej vierohodnosti. Tá spočíva v maximalizácii funkcie

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.1.3.1.1)$$

kde

$$l_t(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma_{t|t-1}^2 - \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_{t|t-1}^2} \quad (3.1.3.1.2)$$

Arlt a Arltová (2009, s. 148) označujú ako $\boldsymbol{\theta}$ vektor parametrov tzv. kompletného modelu výnosov finančných časových radov, ktorý sa skladá z lineárneho či nelineárneho modelu úrovne časového radu a lineárneho či nelineárneho modelu volatility časového radu. $\{\varepsilon_t\}$ je proces s nulovou podmienenou strednou hodnotou a podmieneným rozptylom $\sigma_{t|t-1}^2$ typu lineárneho alebo nelineárneho modelu GARCH.

Ak sú k dispozícii odhady parametrov modelu volatility, potom v prípade modelu GARCH(p, q) bodová predpoveď s horizontom h konštruovaná v čase T má tvar:

$$\hat{\sigma}_T^2(h) = \hat{\omega} + \hat{\alpha}_1 \hat{\varepsilon}_T^2(h-1) + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\varepsilon}_T^2(h-q) + \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_T^2(h-1) + \dots + \hat{\beta}_p \hat{\sigma}_T^2(h-p) \quad (3.1.3.1.3)$$

3.1.3.2. Diagnostická kontrola modelu

Modely volatility vychádzajú z formulácie, že

$$\varepsilon_t = e_t h_t^{1/2} \quad (3.1.3.2.1)$$

kde veličiny procesu $\{e_t\}$ sú nezávislé náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom a h_t je podmienený rozptyl v čase t . Ak je teda model správne určený, potom by štandardizované rezíduá

$$\hat{e}_t = \hat{\varepsilon}_t \hat{h}_t^{-1/2} \quad (3.1.3.2.2)$$

mali indikovať tieto vlastnosti nesystematickej zložky. Pre diagnostickú kontrolu je možné použiť niektoré testy úrovňového modelu, popísané v podkapitole o výstavbe ARIMA modelu, konkrétne testy autokorelácie a normality.

4. Aplikačná časť

V aplikačnej časti bude čitateľ najskôr zoznámený s dátami, ktoré budú použité – predovšetkým s ich interpretáciou, potrebnými úpravami, časovým rozmedzím a niektorými empirickými štatistickými vlastnosťami. Neskôr budú v tejto kapitole predstavené konkrétne výsledky aplikácie vybraných modelov a konštrukcie dlhodobej predpovede. Taktiež budú diskutované zistené hodnoty implikovanej volatility z cien konkrétnych opcí a možná ziskovosť vstupu do vybraných opčných stratégií.

4.1. Príprava a analýza dát

Ako už bolo spomenuté, modely budú prakticky aplikované na časové rady historických údajov o kurze EUR/USD.¹⁰ Použité budú jednak denné dáta (pre účely modelu GARCH) – tie budú čerpané zo stránky www.investing.com (táto stránka je tiež zdrojom pre týždenné a mesačné dáta, ktorých empirické charakteristiky budú použité pri porovnaní s nízkofrekvenčnými dátami), ďalej za účelom výpočtu realizovanej dennej volatility pre RV modely budú potrebné údaje na 15-minútovej frekvencii, čerpané zo stránky www.histdata.com. Vo všetkých prípadoch je použitý uzatvárací kurz. Sledované obdobie (časové rozmedzie dát) je nasledujúce:

- 2.1.2001 – 30.3.2018 pre denné, týždenné a mesačné dáta;
- 1.1.2014 – 30.3.2018 pre 15-minútové dáta.

Z hodnôt kurzu EUR/USD sú následne vypočítané logaritmické výnosy podľa definície v teoretickej časti práce, pre účely RV modelov taktiež suma štvorcov vnútrodených (15-minútových) výnosov ako reprezentant dennej volatility podľa definície v metodologickej časti práce.

Pre výpočet realizovanej volatility boli najskôr stiahnuté minútové dáta za obdobie január 2014 až marec 2018, tieto boli neskôr zredukované na 15-minútové logaritmické

¹⁰ Tradične sa používa táto forma kotácie, no hodnoty kurzu v skutočnosti vyjadrujú, koľko USD treba na zakúpenie 1 EUR.

výnosy.¹¹ Pred aplikáciou RV modelov bolo potrebné urobiť ešte pár ďalších úprav na 15-minútových dátach. Predovšetkým je dôležité spomenúť, že nie každý deň sa obchoduje rovnaký počet hodín (napr. v nedele je to iba polovica dňa). Keďže realizovaná denná volatilita je rovná súčtu štvorcov vnútrodených logaritmických výnosov, hodnoty pre dni s menším počtom vnútrodených pozorovaní by boli vychýlené. Bolo teda potrebné prenásobiť hodnoty realizovanej volatility v týchto dňoch určitou konštantou pomernou k dňom so štandardným počtom pozorovaní (u 15-minútových dát bol štandardný denný počet pozorovaní 96). Ďalšia úprava súvisela s faktom, že v stiahnutých dátach chýbali soboty (sobota nie je obchodným dňom). Medzi posledným piatkovým a prvým nedeľným pozorovaním mohlo teda dochádzať k výraznejším odchýlkam, ktoré by vychyľovali celkovú dennú hodnotu RV. Preto boli logaritmické výnosy medzi vyššie uvedenými pozorovaniami vynulované (keďže očakávaná hodnota realizovanej volatility je 0, je možné tento postup považovať za korektný).

Nasledujúca tabuľka ponúka prehľad empirických charakteristík logaritmických výnosov pre vybrané dáta na rôznych frekvenciách¹². Všetky charakteristiky boli vypočítané v prostredí MS Excel.

Tabuľka 4: Empirické charakteristiky logaritmických výnosov EUR/USD

	Stredná hodnota	Smerodajná odch.	Šikmosť	Špicatosť	Medzikvartil. rozpätie
15MIN	-0,000000288	0,000566238	0,315806162	37,91786162	0,000436332
1D	0,000056643	0,006137466	0,05117811	1,811065977	0,006836549
1W	0,000287386	0,013533441	-0,340023212	1,055738566	0,017489123
1M	0,001407683	0,02921754	-0,352265684	1,312166226	0,03413952

¹¹ U 15 minútových dát sa predpokladala štatisticky menej významná autokorelácia logaritmických výnosov, než u minútových dát, a zároveň sa jedná o relevantný počet pozorovaní pre výpočet dennej RV.

¹² MIN = minúta, D = deň, W = týždeň, M = mesiac.

Podľa očakávaní je vidieť, že hodnoty nepodmienennej strednej hodnoty, vypočítaná smerodajná odchýlka i medzikvartilové rozpätie¹³ sa zvyšujú spolu so znižujúcou sa frekvenciou dát.

Šikmost' (skewness) a *špicatosť* (kurtosis) patria medzi tzv. miery tvaru, a pomáhajú určovať, nakoľko sa štatistické rozdelenie sledovaných dát líši od normálneho rozdelenia (Hendl, 2009). Koeficient šikmosti udáva smer asymetrie rozloženia premennej. Nulová hodnota svedčí o symetrickom rozdelení, kladná hodnota o pravostrannej asymetrickosti (väčšina získaných hodnôt sa nachádza pod priemerom) a záporná o ľavostrannej asymetrii (väčšina získaných hodnôt sa nachádza nad priemerom). Špicatosť určuje relatívnu strmosť alebo plochosť rozdelenia vzhľadom na špicatosť normálneho rozdelenia (ktorá je rovná 3 alebo 0 podľa metodiky výpočtu; charakteristiky v Tabuľke 4 boli vypočítané podľa vzorca, ktorý predpokladá nulový koeficient špicatosti u normálneho rozdelenia); resp. udáva, ako sa v rozložení početností vyskytujú veľmi vysoké a veľmi nízke hodnoty. Kladný koeficient špicatosti hovorí o strmšom rozdelení, záporný o plochom rozdelení.

Z Tabuľky 4 je vidieť, že koeficient šikmosti na všetkých sledovaných frekvenciách je blízky nule, pričom na týždennej a mesačnej frekvencii je mierne záporný. Dá sa teda konštatovať, že na kratších časových frekvenciách sú logaritmické výnosy pravostranne zošikmené (väčšina hodnôt sa nachádza pod priemerom), na dlhších frekvenciách zase ľavostranne zošikmené (väčšina hodnôt sa nachádza nad priemerom). Čo sa týka koeficientu špicatosti, je možné vidieť veľmi vysokú hodnotu u 15-minútových dát. Vysoká špicatosť u vysokofrekvenčných výnosov je relatívne častá a je spôsobená intradennými skokmi v cene, prípadne intradennými cyklami a sezónnosťou vo volatilitě. U nižších frekvencií sa hodnoty pohybujú okolo 1 až 1,8, čo svedčí o relatívne strmšom rozdelení.

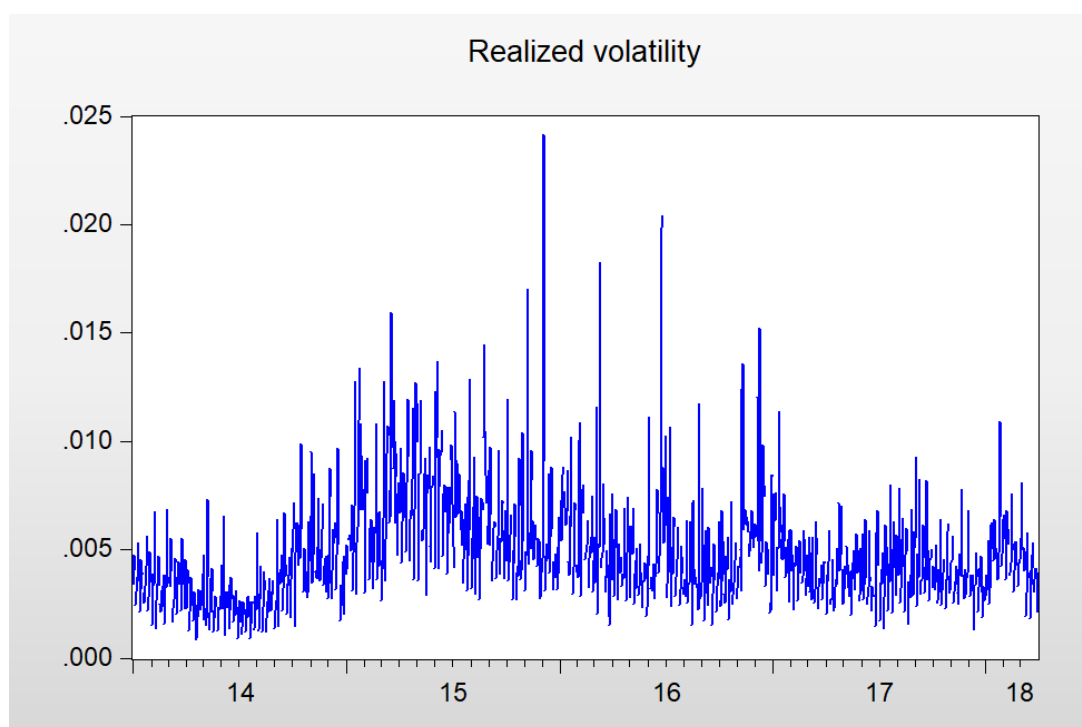
¹³ Medzikvartilovým rozpätím sa rozumie rozdiel hodnoty tretieho a prvého kvartilu (75 a 25% kvantilu) daného súboru dát.

4.2. Aplikácia modelov

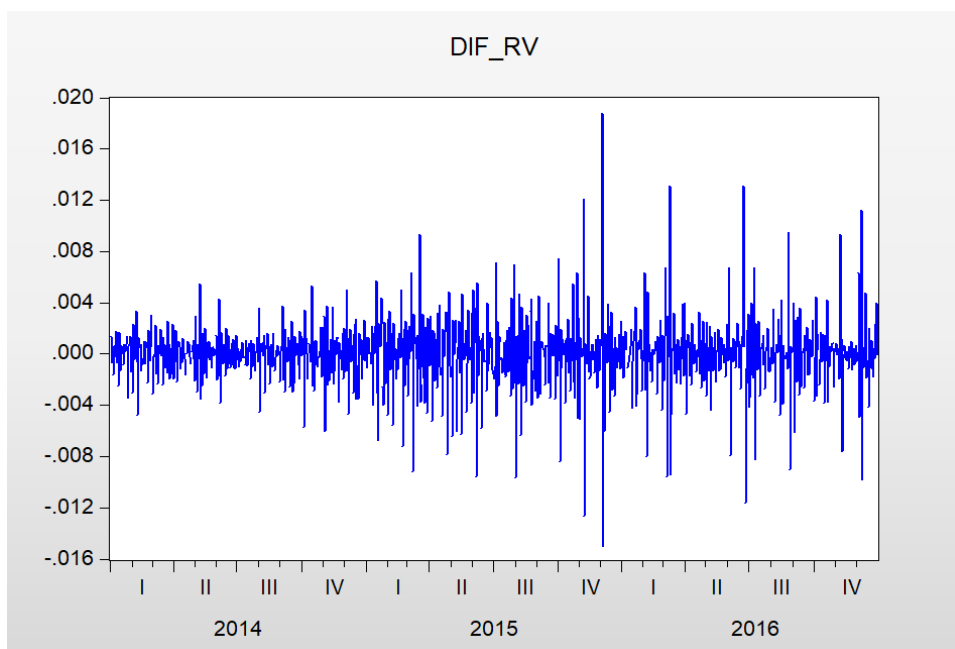
4.2.1. ARIMA-RV model

Dáta boli pred aplikáciou ARIMA modelov rozdelené na trénovaciu časť (tzv. in-sample), ktorá zahŕňa dáta za roky 2014 až 2016, a testovaciu časť (out-sample), ktorá obsahuje dáta od začiatku roku 2017 po 30.3.2018. Ako prvé je dôležité pozrieť sa na graf samotnej realizovanej volatility.

Obrázok 11: Realizovaná volatility log. výnosov EUR/USD 1/2014 - 3/2018

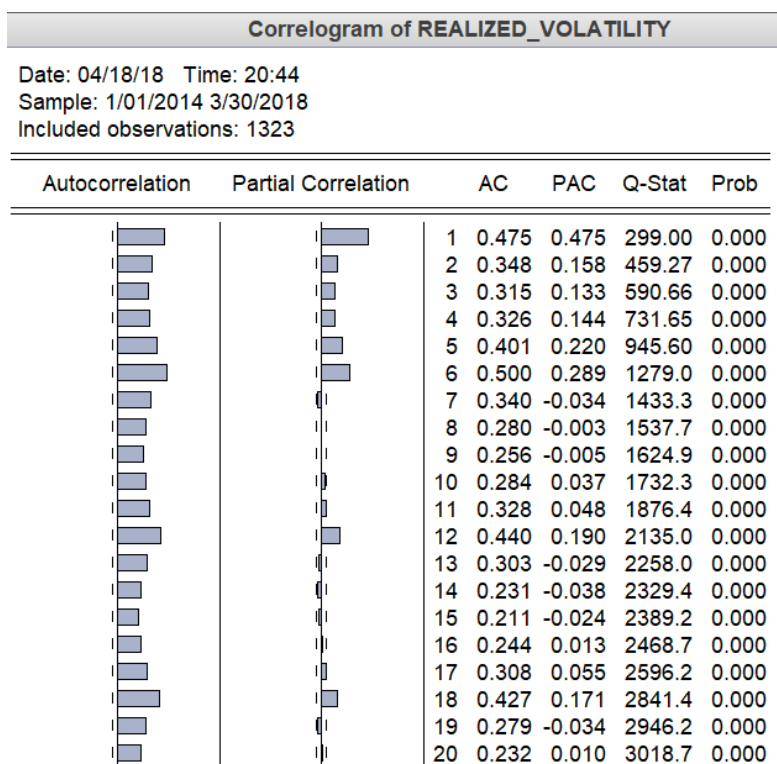


Z grafu je vidieť nekonštantný rozptyl realizovanej volatility – je možné pozorovať niekoľko skokov, najvýraznejší ku koncu roka 2015, a potom pár väčších skokov v priebehu roka 2016. Podobne nekonštantný rozptyl je viditeľný i na grafe prvej diferencie dennej RV (pozn.: tentoraz je v grafe zahrnutá iba in-sample vzorka).



Z tohto pohľadu sa javí, že ARMA ani ARIMA model možno nemusí byť vyhovujúci. Pozrime sa bližšie na korelogram realizovanej volatility.

Obrázok 12: ACF a PACF realizovanej volatility



ACF je veľmi výrazná (pozitívnym smerom) vo všetkých oneskoreniach, PACF najmä v oneskorení 1 až 6 a potom v násobkoch šiesteho oneskorenia (12, 18). Toto by mohlo indikovať istú týždennú cyklickosť (keďže obchodný týždeň má v našom prípade 6 dní). Zároveň by sa dal vyvodiť záver o dlhej pamäti v autokorelačnej štruktúre realizovanej volatility, preto je možné, že vhodným modelom bude práve ARFIMA.

Nasledujúci obrázok zobrazuje výsledok Dickey – Fulleroého testu jednotkového koreňa.

Obrázok 13: Dickey - Fulleroého test pre realizovanú volatility

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on REALIZED_VOLATILITY		
Null Hypothesis: REALIZED_VOLATILITY has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 17 (Automatic - based on SIC, maxlag=22)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.451404	0.0095
Test critical values:		
1% level	-3.435150	
5% level	-2.863547	
10% level	-2.567888	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Podľa hodnôt testového kritéria i p – hodnoty je možné odvodiť, že časový rad realizovanej volatility nemá jednotkový koreň, a teda je možné zamietnuť nulovú hypotézu o prítomnosti jednotkového koreňa.

Na základe ACF a PACF i výsledku ADF testu som sa rozhodla otestovať a porovnať modely ARIMA (1,0,1) a ARIMA (1,0,6).

ARIMA (1,0,1)

Obrázok 14: Model ARIMA-RV (1,0,1)

Dependent Variable: REALIZED_VOLATILITY

Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)

Date: 04/18/18 Time: 20:51

Sample: 1/01/2014 12/30/2016

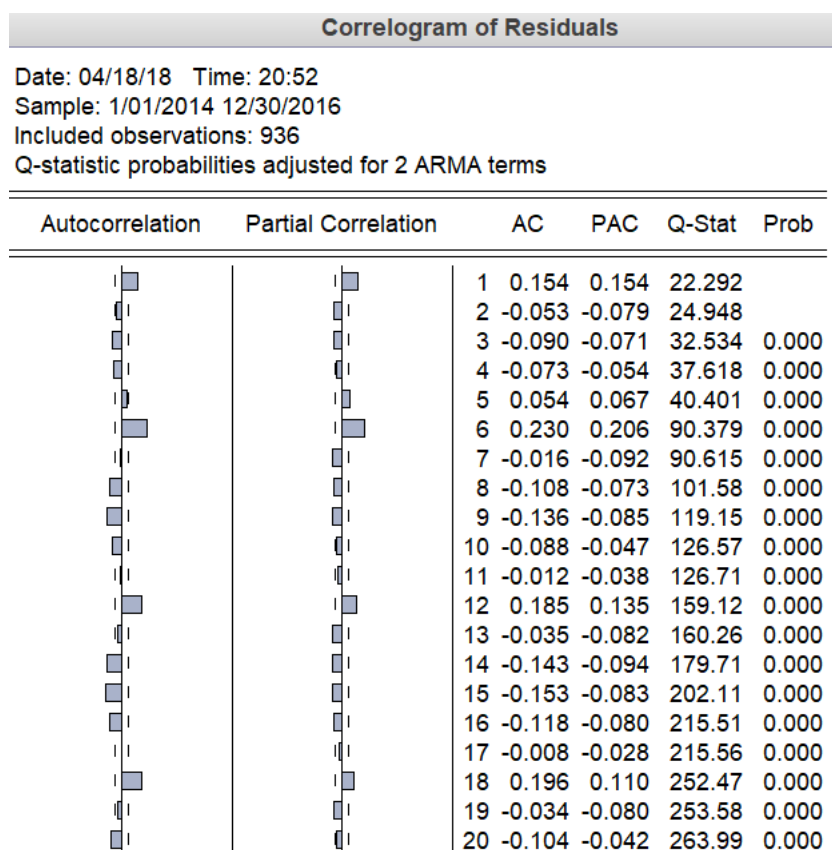
Included observations: 936

Convergence achieved after 46 iterations

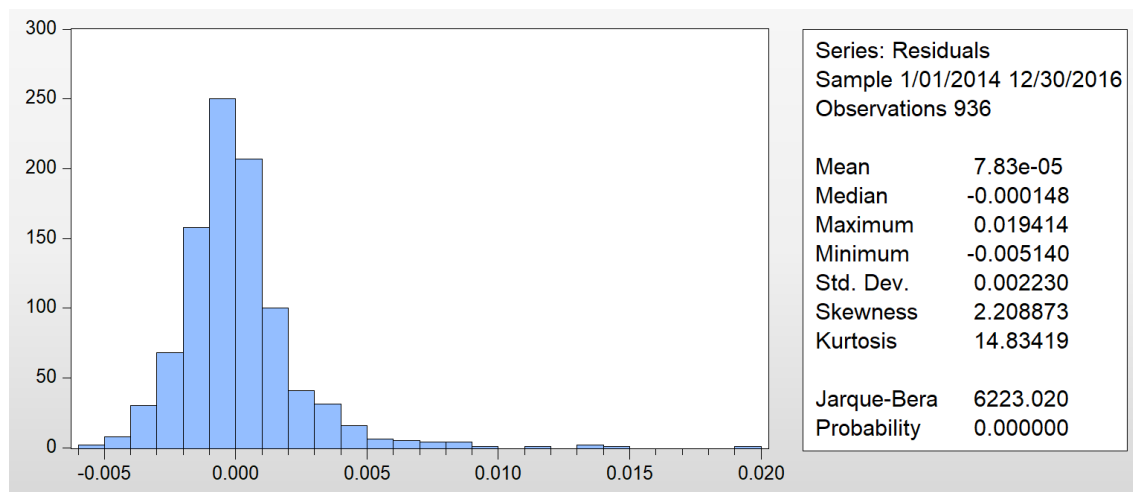
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.998508	0.001876	532.3594	0.0000
MA(1)	-0.875862	0.012519	-69.96165	0.0000
SIGMASQ	4.97E-06	1.02E-07	48.94830	0.0000
R-squared	0.314698	Mean dependent var		0.005095
Adjusted R-squared	0.313229	S.D. dependent var		0.002696
S.E. of regression	0.002234	Akaike info criterion		-9.363595
Sum squared resid	0.004656	Schwarz criterion		-9.348077
Log likelihood	4385.163	Hannan-Quinn criter.		-9.357678
Durbin-Watson stat	1.686846			
Inverted AR Roots	1.00			
Inverted MA Roots	.88			

Obrázok 15: ACF a PACF rezíduí ARIMA-RV (1,0,1)



Obrázok 16: Histogram rezíduí ARIMA-RV (1,0,1)



Na základe testov rezíduí je zjavná významnejšia autokorelácia a parciálna autokorelácia vo viacerých oneskoreniach, predovšetkým v prvom, a ďalej v už spomínaných násobkoch 6. Na Obrázku 16 je tiež vidieť nenormalitu rezíduí podľa

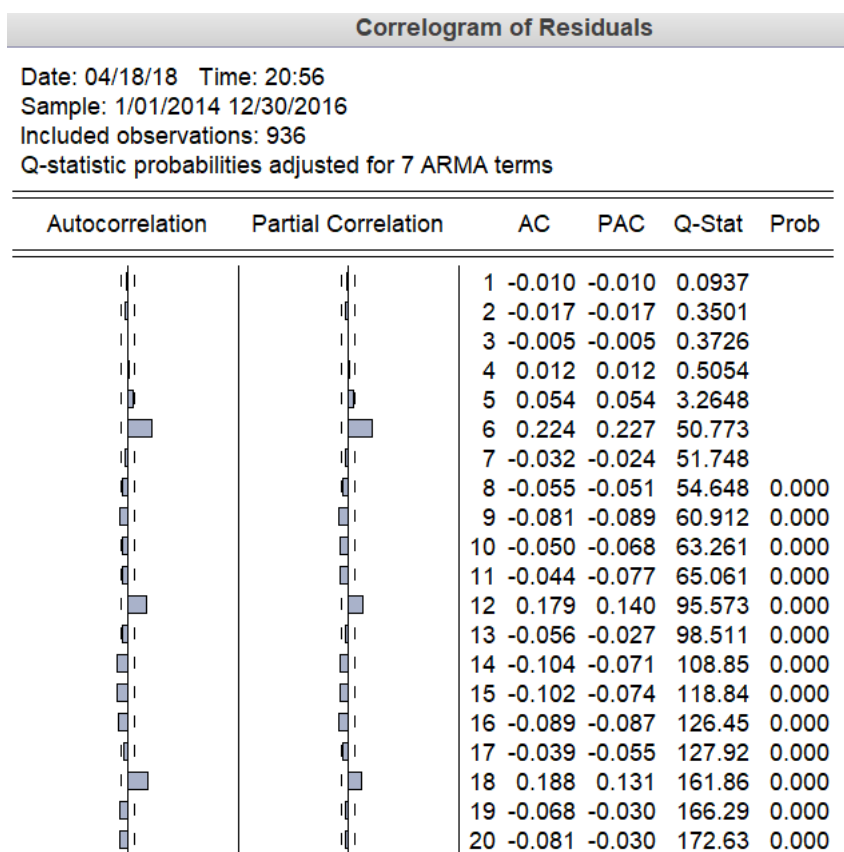
Jarque-Bera testu. To je bohužiaľ u intradenných dát bežné. Možným riešením by bolo nemodelovať smerodajnú odchýlku, ale logaritmus rozptylu.

ARIMA (1,0,6)

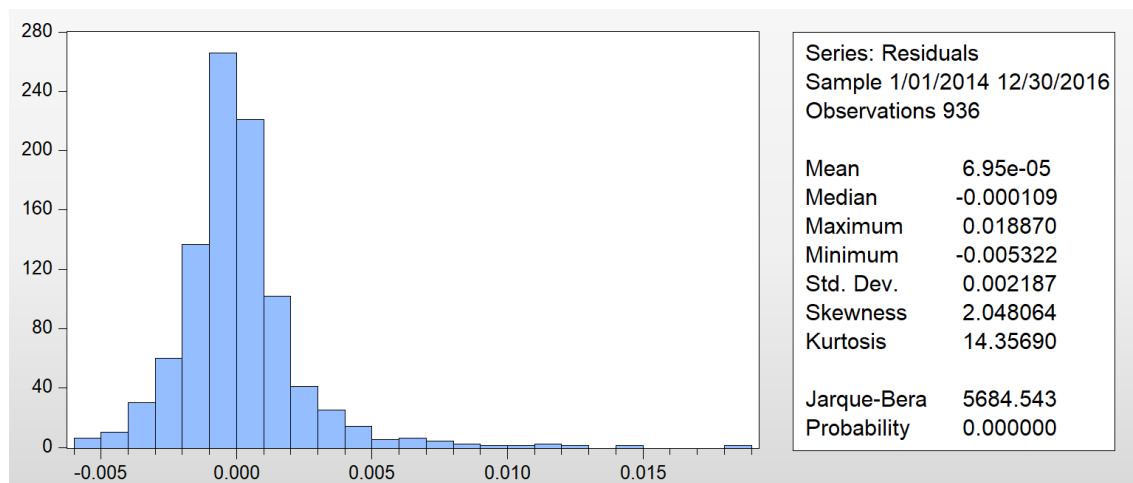
Obrázok 17: Model ARIMA-RV(1,0,6)

Dependent Variable: REALIZED_VOLATILITY					
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)					
Date: 04/18/18 Time: 20:55					
Sample: 1/01/2014 12/30/2016					
Included observations: 936					
Convergence achieved after 58 iterations					
Coefficient covariance computed using outer product of gradients					
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	
AR(1)	0.999213	0.001274	784.4641	0.0000	
MA(1)	-0.700896	0.022230	-31.52880	0.0000	
MA(2)	-0.165625	0.039096	-4.236330	0.0000	
MA(3)	-0.059366	0.052160	-1.138141	0.2554	
MA(4)	-0.047665	0.044828	-1.063291	0.2879	
MA(5)	0.025296	0.034461	0.734041	0.4631	
MA(6)	0.038423	0.032320	1.188833	0.2348	
SIGMASQ	4.78E-06	1.02E-07	47.09708	0.0000	
R-squared	0.341298	Mean dependent var		0.005095	
Adjusted R-squared	0.336329	S.D. dependent var		0.002696	
S.E. of regression	0.002196	Akaike info criterion		-9.392254	
Sum squared resid	0.004475	Schwarz criterion		-9.350873	
Log likelihood	4403.575	Hannan-Quinn criter.		-9.376476	
Durbin-Watson stat	2.016594				
Inverted AR Roots	1.00				
Inverted MA Roots	.92	.57	.03-.56i	.03+.56i	
	-.43+.22i	-.43-.22i			

Obrázok 18: ACF a PACF rezíduí ARIMA-RV(1,0,6)



Obrázok 19: Histogram rezíduí ARIMA-RV (1,0,6)

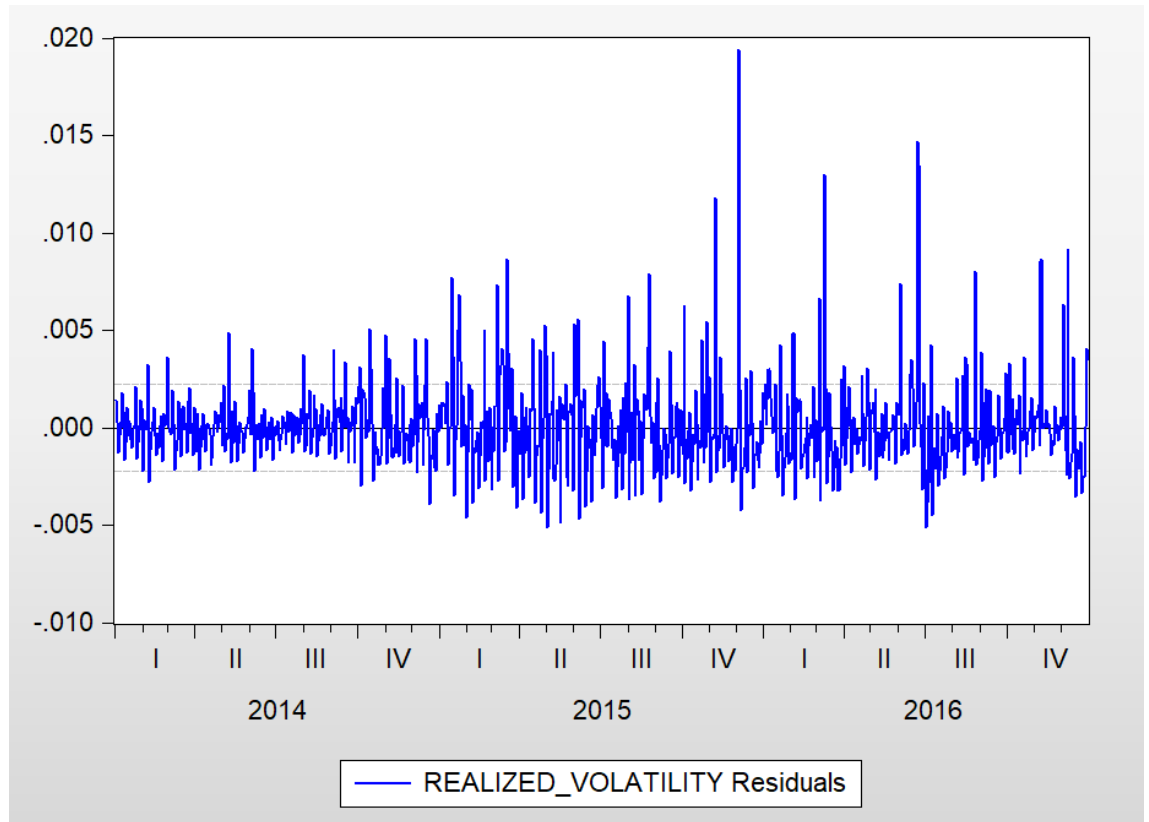


Testy rezíduí tohto modelu stále ukazujú istú štatisticky významnú autokoreláciu a parciálnu autokoreláciu i nenormalitu rezíduí, no hodnoty sú oproti modelu ARIMA(1,0,1) „lepšie“ – redukovaná ACF a PACF v prvých piatich oneskoreniach, i nižšia hodnota Jarque-Bera štatistiky.

Porovnanie

Čo sa týka testov rezíduí, je možné konštatovať, že ani jeden z modelov nie je úplne vyhovujúci. Ak by sa mala posúdiť konštantnosť rozptylu rezíduí, je možné pozrieť sa na graf:

Obrázok 20: Rezíduá realizovanej volatility (in-sample)



kde je vidieť, že ich rozptyl zrejme nie je možné označiť za konštantný. Ďalej, pri pohľade na ACF a PACF rezíduí u oboch modelov je zjavná autokorelácia rezíduí, predovšetkým v už spomínaných oneskoreniach násobkov 6. A konečne, Jarque – Berov test taktiež nepreukazuje normalitu rezíduí (na základe nízkej p – hodnoty).

Ďalej je možné porovnať kvalitu oboch modelov pomocou kritérií, uvedených v metodologickej časti práce, a taktiež pomocou strednej štvorcovej chyby odhadu (RMSE), získanej z dynamickej predpovede na out – sample (testovacích) dátach:

Tabuľka 5: Porovnanie modelov ARIMA(1,0,1) a ARIMA(1,0,6)

	ARIMA (1,0,1)	ARIMA (1,0,6)
Akaikeho kritérium	-9,363595	-9,392254
Schwarzovo kritérium	-9,348077	-9,350873
Durbin – Watson	1,686846	2,016594
R – Squared	0,314698	0,341298
RMSE	0,001564	0,001542

V Tabuľke 5 je vidieť, že na základe všetkých skúmaných kritérií sa ako úspešnejší javí model ARIMA (1,0,6) – má nižšiu hodnotu AIC, SC a RMSE, vyššiu hodnotu R – Squared koeficientu a DW štatistika je veľmi blízko 2, čo je žiadúce.

4.2.2. ARFIMA-RV model

Pred konštrukciou ARFIMA modelu (taktiež v prostredí EViews) je najskôr prevedený KPSS test jednotkového koreňa:

Obrázok 21: KPSS test realizovanej volatility

KPSS Unit Root Test on REALIZED_VOLATILITY		
Null Hypothesis: REALIZED_VOLATILITY is stationary		
Exogenous: Constant		
Bandwidth: 22 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		1.068831
Asymptotic critical values*:	1% level	0.739000
	5% level	0.463000
	10% level	0.347000

*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)

Autori tohto testu odvodili tzv. jednostrannú LM testovú štatistiku a určili kritické hodnoty na rôznych hladinách významnosti (na obrázku uvedené ako Asymptotic critical values). Vypočítaná LM štatistika pre realizovanú volatilitu je vyššia, než kritické hodnoty, na základe toho teda zamietame nulovú hypotézu o (trendovej) stacionarite tohto časového radu. Je opäť možné sa domnievať, že aj keď Dickey – Fullerov test

zamietol hypotézu o jednotkovom koreni a teda časový rad nebol modelovaný modelom ARIMA ($p,1,q$), môže byť vhodné použiť práve frakcionálne integrovaný model.

Následne budú otestované dva modely, a to ARFIMA (1, d ,1) a ARFIMA (1, d ,6).

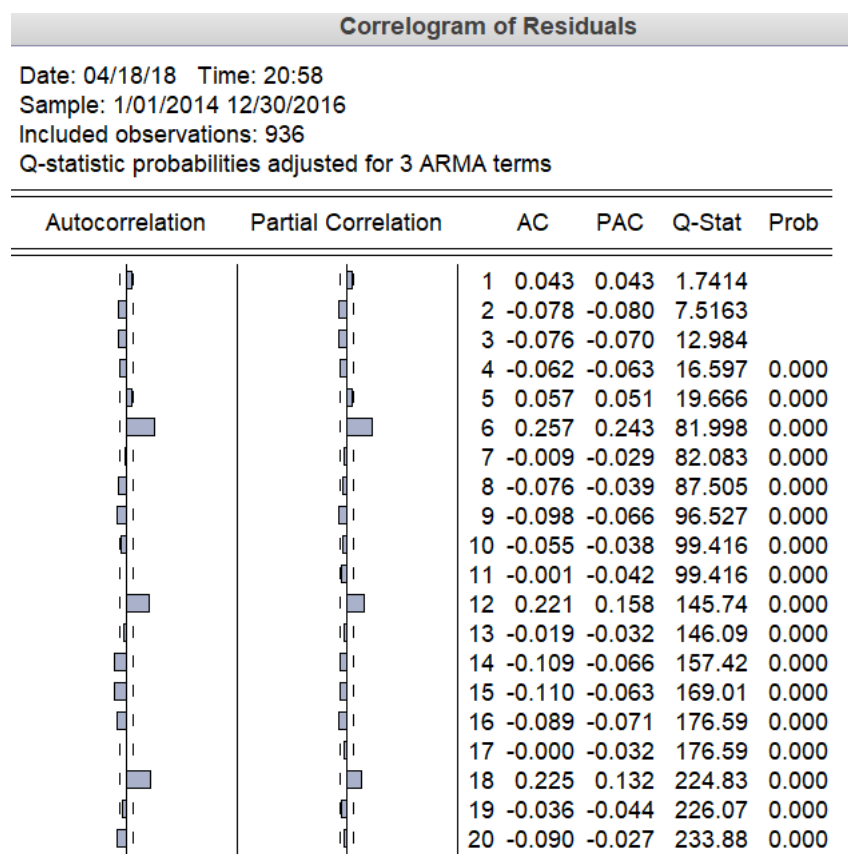
ARFIMA (1, d ,1)

Obrázok 22: Model ARFIMA-RV(1, d ,1)

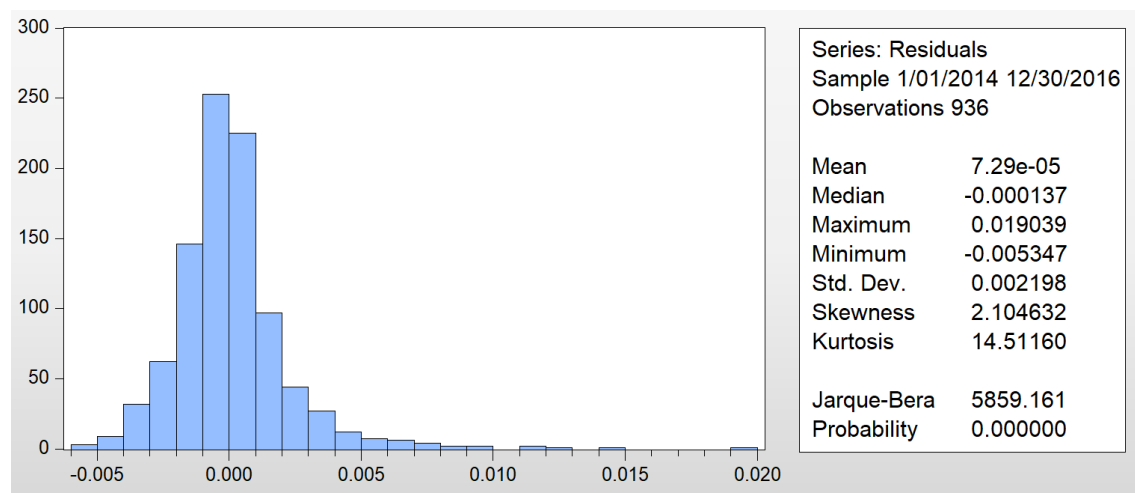
Dependent Variable: REALIZED_VOLATILITY				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 04/18/18 Time: 20:57				
Sample: 1/01/2014 12/30/2016				
Included observations: 936				
Convergence achieved after 26 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D	0.213184	0.023306	9.147065	0.0000
AR(1)	0.998673	0.001735	575.6646	0.0000
MA(1)	-0.976462	0.009687	-100.7964	0.0000
SIGMASQ	4.83E-06	1.03E-07	46.72083	0.0000
R-squared	0.334211	Mean dependent var		0.005095
Adjusted R-squared	0.332068	S.D. dependent var		0.002696
S.E. of regression	0.002203	Akaike info criterion		-9.390148
Sum squared resid	0.004523	Schwarz criterion		-9.369457
Log likelihood	4398.589	Hannan-Quinn criter.		-9.382258
Durbin-Watson stat	1.909680			
Inverted AR Roots	1.00			
Inverted MA Roots	.98			

Rad diferenciácie d má hodnotu v rozmedzí $-1 < d < 0,5$, čo značí stacionaritu a invertibilitu procesu a jeho vlastnosť mean – reversion (viď metodická časť práce).

Obrázok 23: ACF a PACF rezíduí ARFIMA-RV (1,d,1)



Obrázok 24: Histogram rezíduí ARFIMA-RV (1,d,1)



Výsledky oboch testov rezíduí sú porovnateľné s modelom ARIMA(1,0,6).

ARFIMA (1,d,6)

Obrázok 25: Model ARFIMA-RV (1,d,6)

Dependent Variable: REALIZED_VOLATILITY

Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)

Date: 04/18/18 Time: 21:02

Sample: 1/01/2014 12/30/2016

Included observations: 936

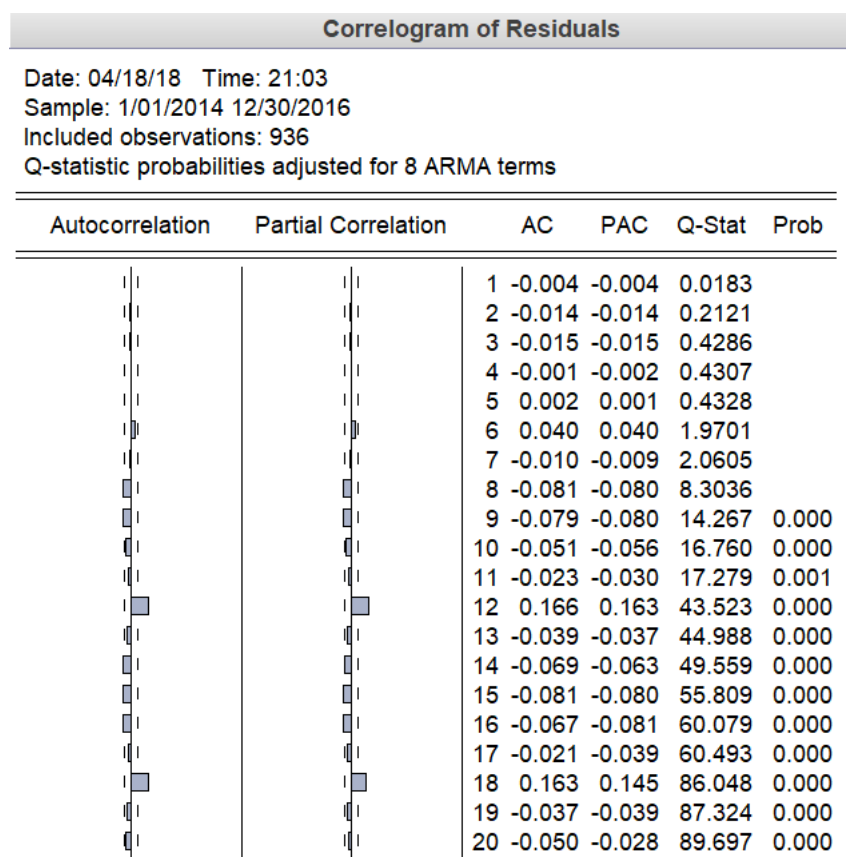
Convergence achieved after 44 iterations

Coefficient covariance computed using outer product of gradients

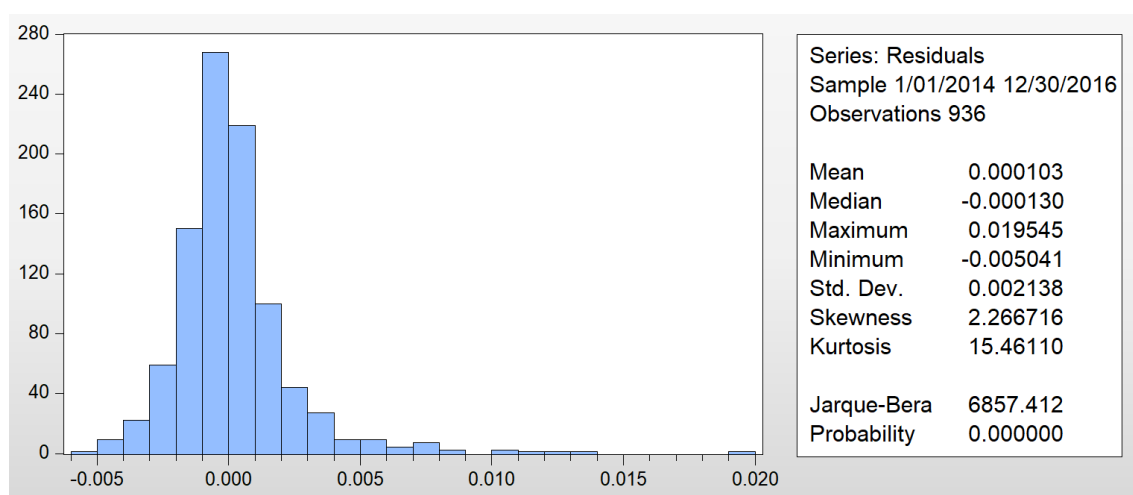
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D	0.480112	0.036810	13.04293	0.0000
AR(1)	-0.324024	0.165203	-1.961367	0.0501
MA(1)	0.126548	0.156132	0.810521	0.4178
MA(2)	-0.200199	0.052174	-3.837101	0.0001
MA(3)	-0.111817	0.046247	-2.417798	0.0158
MA(4)	-0.085704	0.036383	-2.355619	0.0187
MA(5)	0.030869	0.032345	0.954348	0.3402
MA(6)	0.195762	0.026075	7.507590	0.0000
SIGMASQ	4.58E-06	8.59E-08	53.31019	0.0000
R-squared	0.369346	Mean dependent var		0.005095
Adjusted R-squared	0.363904	S.D. dependent var		0.002696
S.E. of regression	0.002150	Akaike info criterion		-9.433087
Sum squared resid	0.004285	Schwarz criterion		-9.386533
Log likelihood	4423.685	Hannan-Quinn criter.		-9.415336
Durbin-Watson stat	2.001453			
Inverted AR Roots	-.32			
Inverted MA Roots	.70-.31i	.70+.31i	-.06+.75i	-.06-.75i
	-.70-.33i	-.70+.33i		

Rad diferenciácie d je v tomto prípade opäť z intervalu $-1 < d < 0,5$.

Obrázok 26: ACF a PACF rezíduí ARFIMA-RV (1,d,6)



Obrázok 27: Histogram rezíduí ARFIMA-RV (1,d,6)



Aj keď test normality rezíduí sa v tomto modeli nevylepšil, na Obrázku 26 vidno výraznú elimináciu ich autokorelácie a parciálnej autokorelácie v prvých oneskoreniach.

Porovnanie

Je vidieť, že modelu ARFIMA (1,d,1) sa iba v obmedzenej miere podarilo odstrániť nedostatky modelu ARIMA (1,0,1) – čo sa týka diagnostiky rezíduí i kritérií vhodnosti modelu. Naopak, modelu ARFIMA (1,d,6) sa podarilo znížiť autokoreláciu rezíduí, a to najmä v prvom až šiestom oneskorení. Lepšie výsledky dosiahli taktiež ukazovatele R – Squared, Akaikeho a Schwarzovo kritérium, i Durbin – Watson štatistika, ktorá je takmer úplne rovná 2. Je teda možné sa domnievať, že model ARFIMA (1,d,6) je zatiaľ najvhodnejším k modelovaniu časového radu realizovanej volatility. Faktom však ostáva nenormalita rezíduí na základe Jarque – Bera testu.

Nasledujúca tabuľka opäť ponúka zhrnutie kritérií vhodnosti modelu pre ARFIMA-RV modely.

Tabuľka 6: Porovnanie modelov ARFIMA(1,d,1) a ARFIMA(1,d,6)

	ARFIMA (1,d,1)	ARFIMA (1,d,6)
Akaikeho kritérium	-9,390148	-9,433087
Schwarzovo kritérium	-9,369457	-9,386533
Durbin – Watson	1,909680	2,001453
R – Squared	0,334211	0,369346
RMSE	0,001548	0,004487

V tabuľke je viditeľný možný nedostatok ARFIMA(1,d,6) modelu, a síce vysoká hodnota RMSE z dynamickej predpovede na out-sample dátach. Pri statickej predpovedi je tento ukazovateľ ešte vyšší.

4.2.3. HAR-RV model

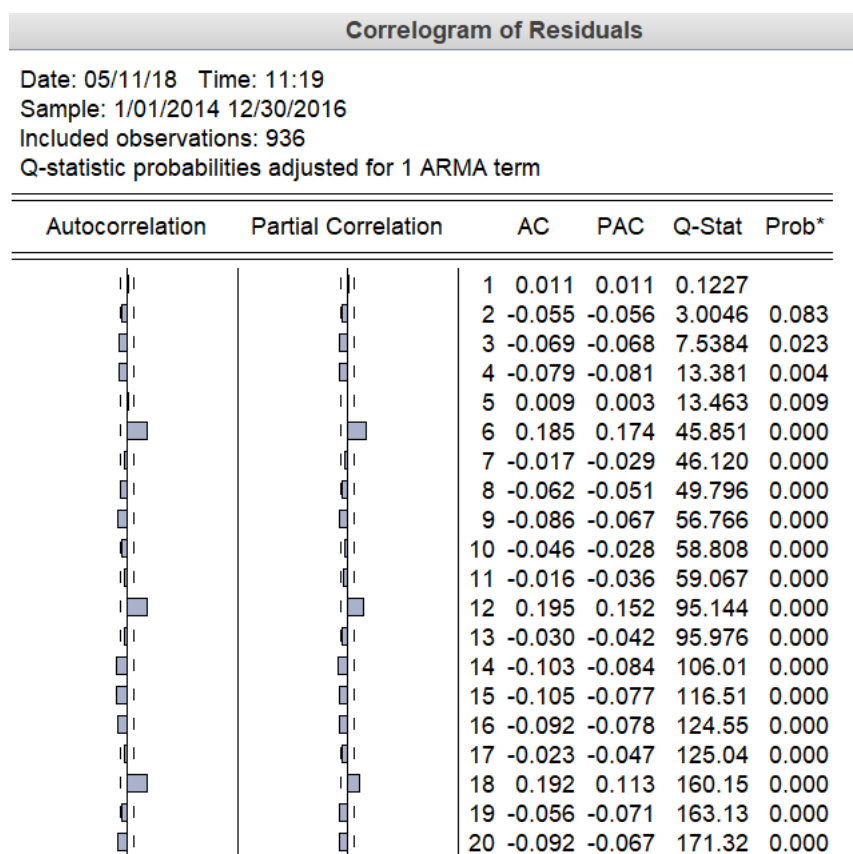
Pred konštrukciou HAR-RV modelu bola najskôr vypočítaná i priemerná týždenná a mesačná volatility (jedná sa o kľzavé priemery, pre týždňový priemer 6 dní dozadu a pre mesačný priemer 24 dní dozadu, pričom posledným dňom pre výpočet priemernej/mesačnej RV priradenej k hodnote dennej RV v deň t je $t-1$) v súvislosti s jednotlivými dennými hodnotami. Tieto premenné vystupujú v modeli

ARIMAX(1,0,0,2) ako dve exogénne premenné. Dáta sú opäť rozdelené na in-sample a out-sample časť, rovnako ako u modelov ARIMA a ARFIMA.

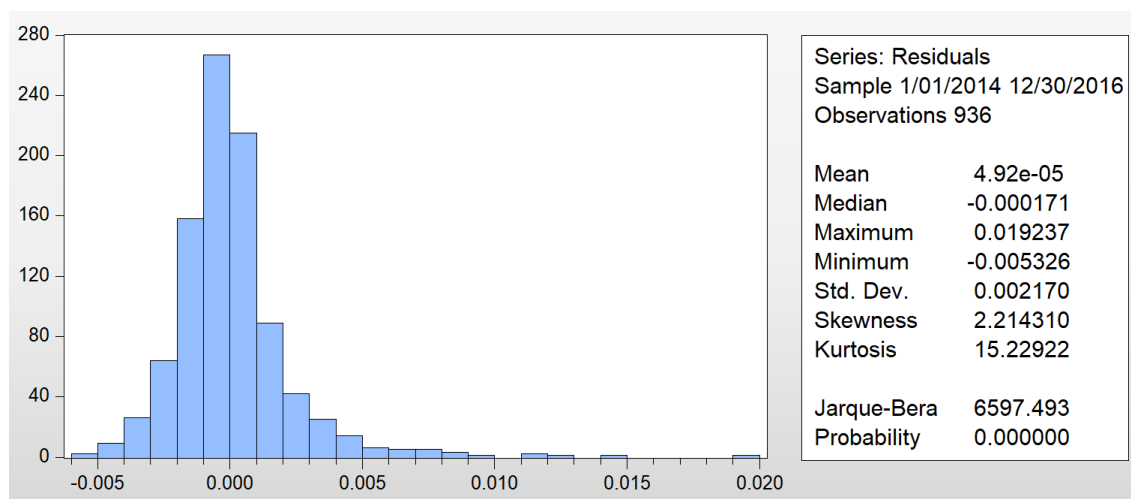
Obrázok 28: HAR-RV model

Dependent Variable: RV_DAILY				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 05/11/18 Time: 11:18				
Sample: 1/01/2014 12/30/2016				
Included observations: 936				
Convergence achieved after 21 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RV_WEEKLY_AV	0.472586	0.080975	5.836182	0.0000
RV_MONTHLY_AV	0.518891	0.083032	6.249297	0.0000
AR(1)	0.170521	0.024357	7.000828	0.0000
SIGMASQ	4.70E-06	9.78E-08	48.08093	0.0000
R-squared	0.351854	Mean dependent var		0.005095
Adjusted R-squared	0.349768	S.D. dependent var		0.002696
S.E. of regression	0.002174	Akaike info criterion		-9.420505
Sum squared resid	0.004404	Schwarz criterion		-9.399814
Log likelihood	4412.796	Hannan-Quinn criter.		-9.412616
Durbin-Watson stat	1.974324			
Inverted AR Roots	.17			

Obrázok 29: ACF a PACF rezíduí HAR-RV



Obrázok 30: Histogram rezíduí HAR-RV



V rámci porovnania s ARIMA/ARFIMA-RV modelmi by sa dalo skonštatovať, že HAR model dosiahol veľmi podobných výsledkov (čo sa týka testov rezíduí i diagnostickej kontroly modelu). Opäť je možné vidieť vyššie hodnoty ACF a PACF rezíduí v oneskoreniach s násobkom 6. Zhrnutie ponúka nasledujúca tabuľka:

Tabuľka 7: Kritériá a štatistiky modelu HAR-RV

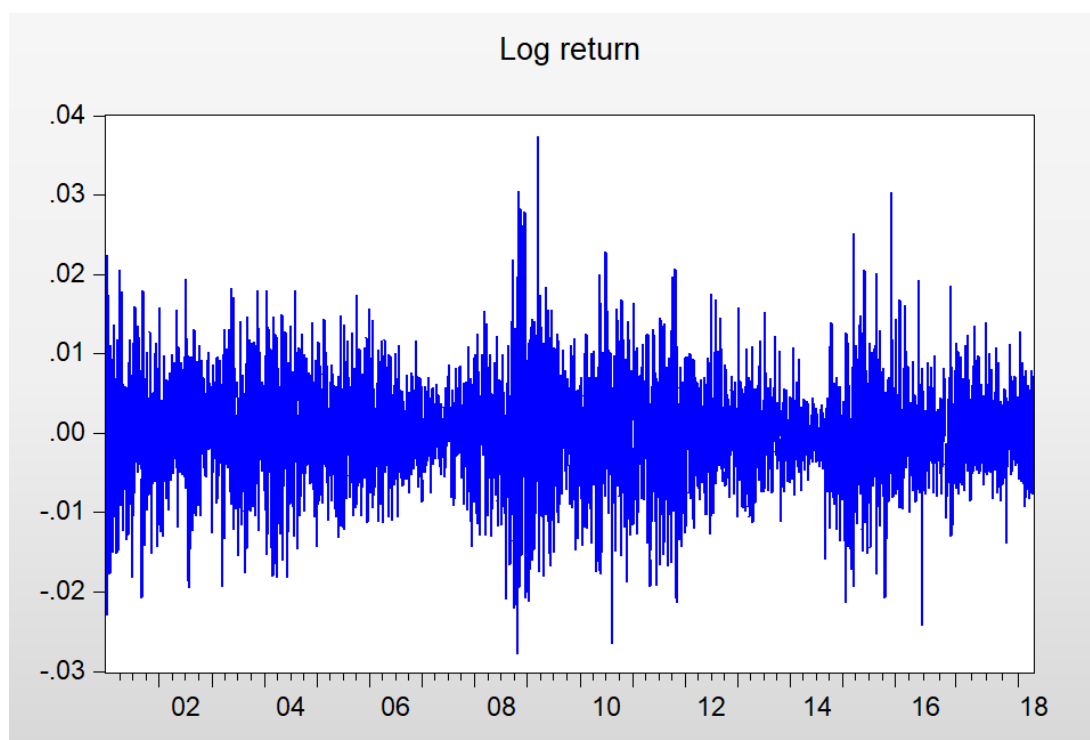
	HAR-RV
Akaikeho kritérium	-9,420505
Schwarzovo kritérium	-9,399814
Durbin – Watson	1,974324
R – Squared	0,351854
RMSE	0,001347

Pri výstupe modelu HAR-RV tiež stojí za zmienku fakt, že denná realizovaná volatilita je v približne rovnakej miere determinovaná týždennou i mesačnou priemernou RV (koeficienty blízko 0,5). Koeficient autoregresie prvého radu dosahuje hodnoty približne 0,17.

4.2.4. GARCH model

Pre účely modelu GARCH(1,1) budú použité denné údaje o kurze EUR/USD a jeho logaritmických výnosoch za obdobie január 2001 až marec 2018. Tie logaritmické výnosy sú zobrazené na nasledujúcom grafe:

Obrázok 31: Denné logaritmické výnosy EUR/USD za obdobie 1/2001-3/2018



Podľa očakávaní je najväčšie skoky vo výnosoch vidieť v období 2008-2009, teda v čase globálnej finančnej krízy. Takisto je možné všimnúť si skoky v rokoch 2015 a 2016, čo korešponduje s grafom dennej realizovanej volatility v rokoch 2014-2018 (Obrázok 11).

Model GARCH bude následne aplikovaný priamo na časový rad týchto logaritmických výnosov. Opäť bude vyčlenená out-sample vzorka dát z obdobia január 2017 až marec 2018. Výsledný model vyzerá takto:

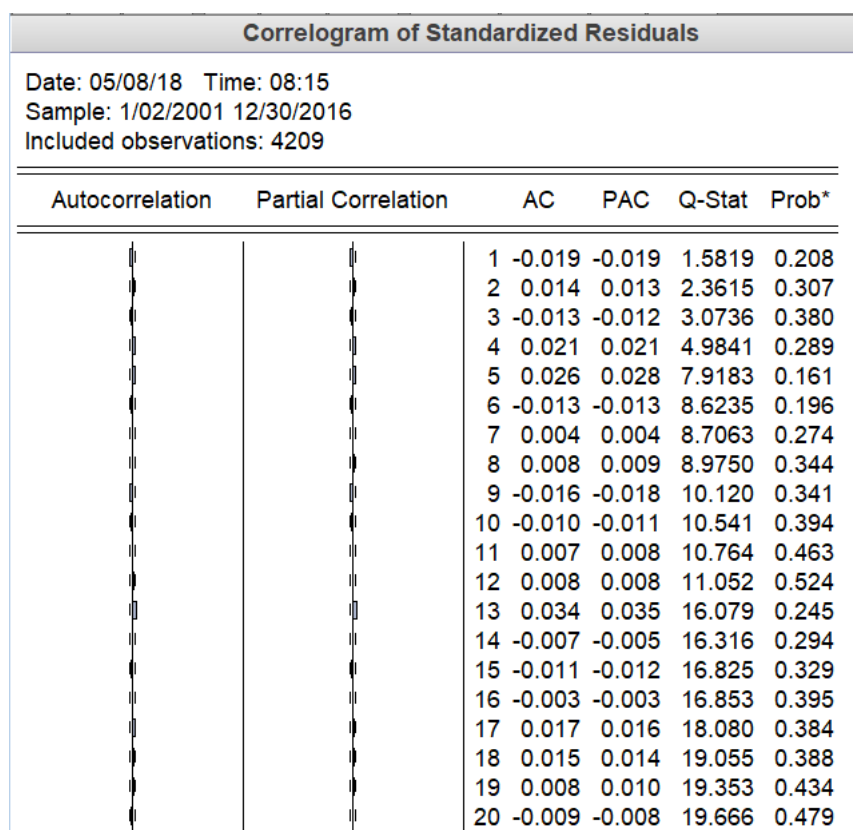
Obrázok 32: Model GARCH(1,1)

Dependent Variable: LOG_RETURN
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 05/08/18 Time: 08:14
Sample (adjusted): 1/03/2001 12/30/2016
Included observations: 4209 after adjustments
Convergence achieved after 29 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(1) + C(2)*RESID(-1)^2 + C(3)*GARCH(-1)

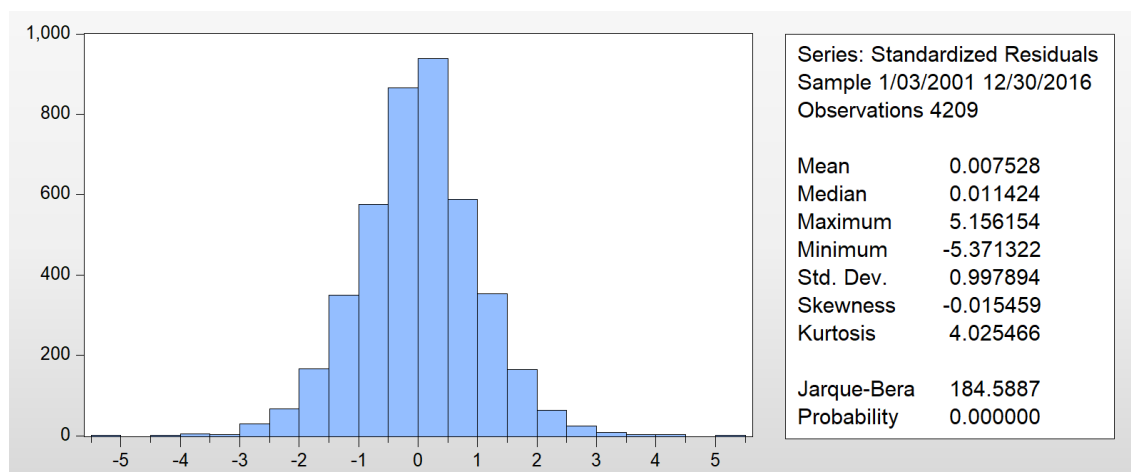
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	1.67E-07	2.97E-08	5.634282	0.0000
RESID(-1)^2	0.036792	0.003766	9.770279	0.0000
GARCH(-1)	0.958885	0.003713	258.2168	0.0000
R-squared	-0.000015	Mean dependent var	2.42E-05	
Adjusted R-squared	0.000223	S.D. dependent var	0.006285	
S.E. of regression	0.006284	Akaike info criterion	-7.438265	
Sum squared resid	0.166200	Schwarz criterion	-7.433743	
Log likelihood	15656.83	Hannan-Quinn criter.	-7.436666	
Durbin-Watson stat	2.035742			

Ak použijeme štandardné diagnostické testy rezíduí (autokorelácie a normality), výsledky vyzerajú nasledovne:

Obrázok 33: ACF a PACF štandardizovaných rezíduí modelu GARCH(1,1)



Obrázok 34: Histogram štandardizovaných rezíduí modelu GARCH(1,1)

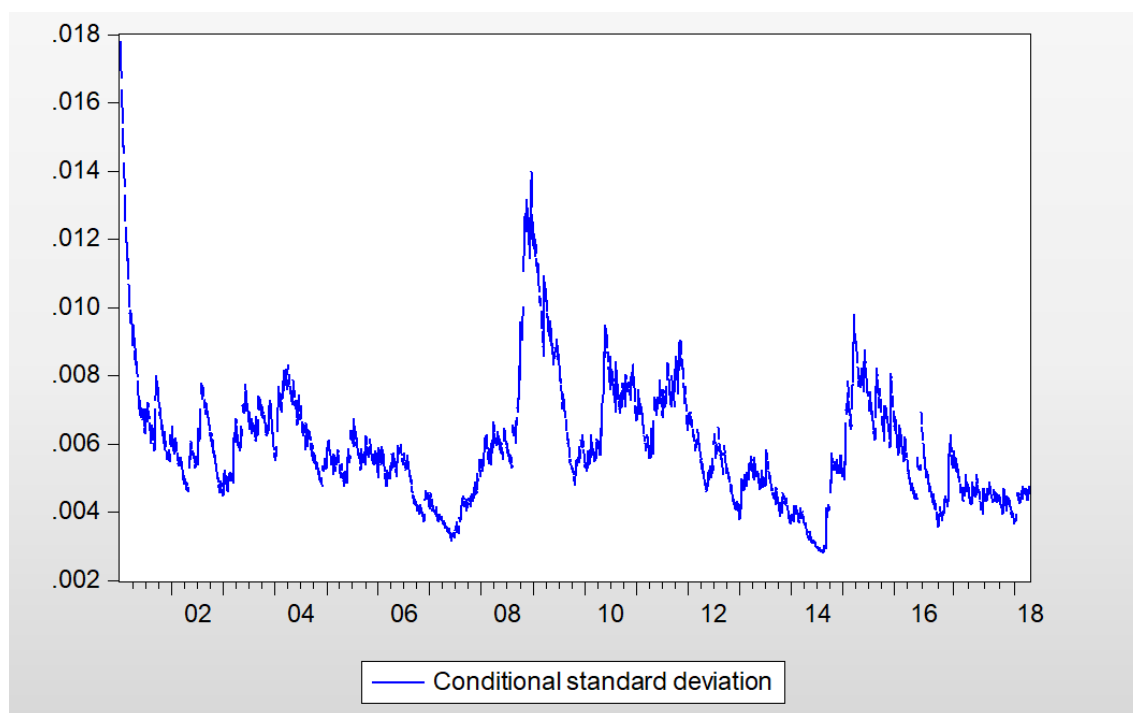


Na Obrázku 32, zobrazujúcom odhad modelu GARCH(1,1) je možné vidieť, že výsledný model má trochu odlišnú podobu, než modely typu ARIMA. V prvom rade je treba spomenúť, že model neobsahuje žiadne regresory (ak zanedbáme konštantu); obsahuje iba koeficienty oneskorenia rezíduí a GARCH prvku. Z tohto dôvodu nemá v prípade modelov GARCH zmysel interpretácia štatistiky R – Squared (v našom prípade

je dokonca záporná). Je tiež možné pozorovať vyššie hodnoty Akaikeho a Schwarzovho kritéria, než u modelov ARIMA/ARFIMA a HAR. Durbin – Watson štatistika je však veľmi blízko hodnote 2. Pri pohľade na testy štandardizovaných rezíduí je vidieť nevýznamnú autokoreláciu a parciálnu autokoreláciu rezíduí. Hodnota Jarque-Bera testu je výrazne najnižšia spomedzi skúmaných modelov. RMSE z predpovede na out-sample dátach dosiahla úrovne 0,004241, teda je opäť na pomerne vysokej úrovni v porovnaní s väčšinou predošlých modelov.

EViews taktiež umožňuje vygenerovať graf podmienenej smerodajnej odchýlky na kompletnej vzorke dát:

Obrázok 35: Podmienená smerodajná odchýlka denných log. výnosov podľa modelu GARCH(1,1)



Ak sa pozrieme na graf skutočných logaritmických výnosov, uvedený vyššie na Obrázku 31, vidíme, že vyšší predpovedaný rozptyl v roku 2009, a tiež v rokoch 2015 a 2016 s týmto grafom súhlasí – v tomto období sú viditeľné výrazné skoky vo výnosoch.

4.3. Konštrukcia predpovede

V tejto podkapitole budú predstavené výsledky dlhodobej predpovede volatility (smerodajnej odchýlky) na základe vybraných vyššie odhadnutých modelov. Na základe výsledkov kritérií vhodnosti modelu považujem za potenciálne najkvalitnejšie a teda najvhodnejšie modely ARIMA-RV (1,0,6), ARFIMA-RV (1,d,6)¹⁴, HAR-RV a GARCH(1,1) a tieto modely použijem k tvorbe predpovede. Horizont predpovede je vždy jeden týždeň a jeden mesiac, pričom predpovede budú konštruované i pre konkrétne dátumy, vzhľadom k splatnostiam opcií a ich implikovanej volatilitě, ktoré budú uvedené v texte nižšie.

Vzhľadom k tomu, že všetky modely sú lineárne, predpovede bolo možné konštruovať i v prostredí MS Excel. Výstupom je predpovedaná smerodajná odchýlka – k výpočtu predpovede týždennej a mesačnej hodnoty bolo potrebné najskôr sčítať štvorce denných predpovedaných hodnôt (rozptyly) a následne tento súčet odmocniť. Posledným dňom so skutočnými pozorovanými hodnotami bolo 30.3.2018. Vo výpočte sa zanedbáva fakt, že v niektoré dni sa neobchoduje, alebo sa obchoduje iba určitú časť dňa, teda hodnoty sú vypočítané pre všetky, celé dni v danom časovom intervale.

¹⁴ A to i napriek vyššej hodnote RMSE pri predpovedi na out-sample dátach, pretože je zjavná dlhá pamäť v autokorelácii logaritmických výnosov a som toho názoru, že tento fakt treba zohľadniť.

Tabuľka 8: Dlhodobá predpoveď volatility

	ARIMA- RV(1,0,6)	ARFIMA- RV(1,d,6)	HAR-RV	GARCH(1,1)
<i>Skutočná vol.</i> 30.3	0,002125877	0,002125877	0,002125877	0,006137467
<i>Denná vol.</i> 31.3.	0,003449544	0,002805055	0,004134272	0,006019
<i>Týždenná vol.</i> (31.3.-6.4.)	0,010121206	0,007348979	0,012220235	0,01497897
<i>Mesačná vol.</i> (31.3-30.4.)	0,021240177	0,015920312	0,035130053	0,025324891
<i>Vol.</i> 20.4.- 27.4.	0,010738613	0,008153708	0,020720778	0,010418942
<i>Denná vol.</i> 23.4.	0,003798155	0,003425242	0,007192223	0,003713926

Z Tabuľky 8 je viditeľný rozdiel v predpovedi dennej volatility na najbližší deň, teda 31.3., pričom výraznejšie vyššia hodnota je zjavná u modelu GARCH. To je spôsobené i tým, že u modelu GARCH sa pracovalo priamo s logaritmickými výnosmi, a to za dlhšie časové obdobie, než u RV modelov, a teda ich skutočná denná smerodajná odchýlka k 30.3. bola vyššia, než vypočítaná denná realizovaná volatilita v RV modeloch. To sa prejavuje i pri týždennej predpovedi, kde hodnoty vypočítané modelom GARCH sú mierne vyššie, než u zvyšných modelov. U mesačnej predpovede vidíme najvyššiu hodnotu napočítanú modelom HAR-RV. Rozdiely sa postupne strácajú pri predpovediach na obdobie 20.4.-27.4. a predovšetkým pri predpovedi dennej smerodajnej odchýlky na dátum 23.4., kde sú si hodnoty veľmi blízke, s výnimkou modelu HAR, kde sú všetky predpovedané hodnoty pomerne vysoké. Treba skonštatovať, že ARFIMA-RV model má tendenciu predpovedať najnižšie hodnoty; rozdiel je viditeľný i v porovnaní s modelom ARIMA-RV a HAR-RV, aj keď vychádzajú z rovnakej počiatočnej hodnoty, a to zrejme vďaka tomu, že ARFIMA-RV v najväčšej miere zohľadňuje hodnotu RV v minulom období (to je viditeľné predovšetkým v neskorších dátumoch predpovede, kde MA časť modelu vypadne kvôli chýbajúcim reziduálnym hodnotám), no koeficient autoregresie

rádu 1 je i tak pomerne menej významný (cca -0,32). HAR-RV model pritom do veľkej miery zohľadňuje i priemernú mesačnú a týždennú volatilitu, a to počas celého horizontu predpovede; ARIMA-RV model zas vykazuje vysokú hodnotu AR(1) koeficientu (0,99). Taktiež stojí za zmienku, že hodnoty predpovedané modelmi ARIMA-RV a GARCH sú si spomedzi modelov najbližšie (okrem dennej volatility 31.3.)

4.4. Implikovaná volatilita a opčné stratégie

Údaje o konkrétnych opčných stratégiách typu butterfly, straddle a strangle na EUR/USD opcie, o implikovaných volatilitách týchto opcií, boli prevzaté z terminálu Thomson Reuters Eikon, ktorý je prístupný študentom Vysokej školy ekonomickej. Stiahnuté boli jednak údaje o opciách s 1D splatnosťou (k 23.4., splatnosť 24.4.) a jednak opcie s týždennou splatnosťou (k 20.4.2018, dátum splatnosti 27.4.).

Nasledujúce tabuľky zobrazujú kótované parametre opcií v jednotlivých opčných stratégiách (najskôr so splatnosťou 1D, potom 1W). Reuters po zvolení žiadanej opčnej stratégie sám nakombinuje opcie a určí ich parametre, *je však dôležité uviesť, že stratégiu long/short butterfly nechápe rovnako, ako je to uvedené v metodickej časti (teda iba s využitím call opcií), ale kombinuje tu i put opcie. Princíp stratégie i ziskovej funkcie sú však rovnaké.*

Je vhodné tiež pripomenúť, že volatilita, implikovaná z Black – Scholesovho modelu sa chápe ako anualizovaná smerodajná odchýlka logaritmických výnosov podkladového aktíva. Pre porovnanie s predpovedanou dennou, resp. týždennou volatilitou, vypočítanou vyššie na základe zvolených modelov, je potrebné prepočítať kótovanú hodnotu nasledujúcim spôsobom:

- $Denná\ IV = Ročná\ IV / \sqrt{365}$
- $Týždenná\ IV = Denná\ IV \times \sqrt{7}$

Rozhodla som sa prepočítať ročnú IV na všetky dni v roku, nie iba pracovné, a to z toho dôvodu, že predpoveď volatility na základe modelov RV a GARCH som robila taktiež na všetky dni v danom horizonte (ignorujúc víkendy a sviatky). Zároveň u 1W opcií sa týždenná splatnosť naozaj rovná 7 kalendárnym dňom.

Tabuľka 9: Stratégia long butterfly - 1D splatnosť

	Leg 1	Leg 2	Leg 3	Leg 4
Deal Type	Buy	Sell	Sell	Buy
Call/Put	Put	Put	Call	Call
Strike	1,223	1,2272	1,2272	1,2314
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,08196	0,08084	0,08084	0,08312
Premium (USD)	657,500	2 077,500	2 066,500	664,500
EUR/USD spot	1,2269	1,2269	1,2269	1,2269
Denná IV 23.4.	0,004289982	0,004231359	0,004231359	0,004350438

Tabuľka 10: Stratégia short butterfly - 1D splatnosť

	Leg 1	Leg 2	Leg 3	Leg 4
Deal Type	Sell	Buy	Buy	Sell
Call/Put	Put	Put	Call	Call
Strike	1,2242	1,2272	1,2272	1,2302
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,08132	0,08084	0,08084	0,08217
Premium (USD)	936,500	2 077,000	2 066,000	942,500
EUR/USD spot	1,2269	1,2269	1,2269	1,2269
Denná IV 23.4.	0,004256222	0,004231359	0,004231359	0,004300713

Tabuľka 11: Stratégia long straddle - 1D splatnosť

	Leg 1	Leg 2
Deal Type	Buy	Buy
Call/Put	Call	Put
Strike	1,2272	1,2272
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,08084	0,08084
Premium (USD)	2 067	2 078
EUR/USD spot	1,2269	1,2269
Denná IV 23.4.	0,004231359	0,004231359

Tabuľka 12: Stratégia short straddle - 1D splatnosť

	Leg 1	Leg 2
Deal Type	Sell	Sell
Call/Put	Call	Put
Strike	1,2271	1,2271
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,08084	0,08084
Premium (EUR)	2 066	2 077
EUR/USD spot	1,2269	1,2269
Denná IV 23.4.	0,004231359	0,004231359

Tabuľka 13: Stratégia long strangle - 1D splatnosť

	Leg 1	Leg 2
Deal Type	Buy	Buy
Call/Put	Call	Put
Strike	1,2314	1,2229
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,08315	0,08199
Premium (USD)	658	651
EUR/USD spot	1,2269	1,2269
Denná IV 23.4.	0,00435227	0,004291553

Tabuľka 14: Stratégia short strangle - 1D splatnosť

	Leg 1	Leg 2
Deal Type	Sell	Sell
Call/Put	Call	Put
Strike	1,23	1,2243
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,08210	0,08127
Premium (USD)	975	969
EUR/USD spot	1,2269	1,2269
Denná IV 23.4.	0,004297049	0,004253605

Tabuľka 15: Stratégia long butterfly - 1W splatnosť

	Leg 1	Leg 2	Leg 3	Leg 4
Deal Type	Buy	Sell	Sell	Buy
Call/Put	Put	Put	Call	Call
Strike	1,223	1,2313	1,2313	1,2399
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,06776	0,06750	0,06750	0,07042
Premium (USD)	1 614,000	4 616,500	4 563,000	1 662,500
EUR/USD spot	1,2305	1,2305	1,2305	1,2305
Týždenná IV 20.4-27.4.	0,00938374	0,009347734	0,009347734	0,009751418

Tabuľka 16: Stratégia long straddle - 1W splatnosť

	Leg 1	Leg 2
Deal Type	Buy	Buy
Call/Put	Call	Put
Strike	1,2311	1,2311
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,06725	0,06725
Premium (USD)	9 146	7 015
EUR/USD spot	1,2305	1,2305
Týždenná IV 20.4-27.4.	0,009313113	0,009313113

Tabuľka 17: Stratégia long strangle - 1W splatnosť

	Leg 1	Leg 2
Deal Type	Buy	Buy
Call/Put	Call	Put
Strike	1,2396	1,2226
Notional (EUR)	1 000 000	1 000 000
Volatility BS	0,07019	0,06752
Premium (USD)	1 644	1 594
EUR/USD spot	1,2305	1,2305
Týždenná IV 20.4-27.4.	0,009720259	0,009350504

Pri pohľade na tabuľky vyššie stojí za zmienku fakt, že vo väčšine prípadov vyššia volatilita opcie neznamená vyššiu opčnú prémiiu. Tento teoretický aspekt oceňovania

opcií na základe B-S modelu teda nie je, na základe týchto kotácií, vždy splnený. Je však tiež viditeľné, že prémia je odvodená predovšetkým na základe faktu, či a ako veľmi je daná opcia in-the-money alebo out-of-the-money (viditeľné napríklad v Tabuľke 15). Respektíve je možné konštatovať, že konečná hodnota opčnej premie je kombináciou vplyvu faktoru „moneyness“ a tržnej očakávanej volatility. Napríklad v už spomínanej Tabuľke 15, má call opcia v Nohe č. 4 relatívne vysoký strike v pomere k spotovej cene, a teda je out-of-the-money. Zároveň však vidíme vyššiu volatilitu, než u ostatných opcií v tejto stratégii. Zdá sa teda, že trh u tejto opcie očakáva, že kurz EUR/USD by sa mohol priblížiť realizačnej cene. U opcií z Nohy 2 a 3 je tomu naopak (put opcia v Nohe 2 je in-the-money, call opcia v Nohe 3 out-of-the-money). Niekde však výška opčnej premie nie je pochopiteľná, napríklad neprimerane vysoké prémie v týždňovej long straddle stratégii, v porovnaní s napríklad long strangle týždňovou stratégiou.

Za zmienku stojí tiež fakt, že ročná kótovaná volatilita u opcií so splatnosťou jeden týždeň je celkovo nižšia, než u opcií so splatnosťou jeden deň.

4.5. Zhodnotenie

V tejto podkapitole budú zhrnuté a porovnané poznatky nadobudnuté na základe odhadnutých modelov i implikovanej volatility z cien opcií. Bude zhodnotená možnosť využitia metód predvídania volatility na základe historických hodnôt v rámci vstupu do opčných stratégií, kde je pri kótovaní použitá implikovaná volatilita.

Tabuľka 18: Zhrnutie - predpovede volatility

	ARIMA- RV(1,0,6)	ARFIMA- RV(1,d,6)	HAR-RV	GARCH(1,1)	IV - interval
<i>Denná vol.</i> 23.4.	0,003798155	0,003425242	0,00719222	0,003713926	0,00423- 0,00435
<i>Týždenná vol.</i> 20.4.- 27.4.	0,010738613	0,008153708	0,02072078	0,010418942	0,00931- 0,00975

V Tabuľke 18 vidíme časť Tabuľky 8, a síce dlhodobej predpovede volatility na základe historických hodnôt, pre rozhodné obdobia životnosti opcií. Hodnoty implikovanej volatility jednotlivých opcií v stratégiách uvedených vyššie sú zhrnuté do intervalu hodnôt, v ktorých sa pohybujú.

Je vidieť, že čo sa týka predpovede dennej volatility na 23.4.2018, implikovaná volatilita všetkých opcií vo vybraných stratégiách je vyššia, než hodnoty odhadnuté pomocou modelov RV a GARCH, s výnimkou modelu HAR-RV. U týždenného horizontu je naopak implikovaná volatilita celkovo nižšia, než hodnota vypočítaná modelmi ARIMA-RV, HAR-RV a GARCH, no stále vyššia, než u modelu ARFIMA-RV. Táto relatívne nižšia hodnota zrejme súvisí aj s vyššie spomenutým faktom, že ročná implikovaná volatilita opcií s týždennou splatnosťou (životnosť 20.4.-27.4) bola celkovo nižšia, než u tých s dennou splatnosťou (životnosť 23.4-24.4.).

Ak by teda investor plánoval vstup do vybraných opčných stratégií na základe predpovedí volatility podľa RV a GARCH modelov v porovnaní s implikovanou volatilitou opcií v týchto stratégiách, *odporúčania by mohli byť nasledovné:*

1. Keďže implikovaná volatilita opcií s dennou splatnosťou je vyššia, než sú predpovede volatility na základe modelov s výnimkou modelu HAR-RV, mohol by sa ukázať ako výhodný vstup do stratégií s 1D splatnosťou, ktoré sú ziskové pri nižších hodnotách volatility – konkrétne teda long butterfly, short straddle a short strangle. Najvýhodnejšia stratégia z pohľadu opčnej prémie by bola pre investora short straddle, kde by ako predávajúci opcie inkasoval dokopy prémiiu 4 143 USD ($2\,066 + 2\,067$).
2. Spomedzi týždenných stratégií by bola podľa modelu ARFIMA-RV výhodná opäť stratégia long butterfly (a potenciálne short straddle a short strangle, no tie v porovnaní nie sú). Podľa zvyšných modelov je však predpokladaná volatilita v týždni 20.4.-27.4. vyššia, než tá implikovaná, a teda by malo byť výhodné vstúpiť do stratégií long straddle a long strangle. Tu je z pohľadu nákladov na prémiiu jednoznačne výhodnejšia stratégia long strangle, kde by investor zaplatil oveľa menej.

4.6. Backtesting

Za účelom overenia spoľahlivosti modelov je ešte vhodné otestovať predpovede na out-sample vzorke dát (3.1.2017 až 30.3.2018), teda za obdobie, kedy poznáme skutočné hodnoty kurzu EUR/USD a vieme zhodnotiť kumulatívnu historickú ziskovosť prípadného vstupu do opčných stratégií. Bude teda prevedená nasledujúca analýza:

1. Z terminálu Thomson Reuters Eikon sú stiahnuté údaje o historickej *jednodennej* implikovanej volatilita za vyššie spomenuté obdobie, a to z grafu tzv. „volatility smilu“. Ten vo všeobecnosti udáva vzťah medzi implikovanou volatilitou a realizačnou cenou opcie (tento vzťah je spomínaný už v teoretickej časti práce, pri podkapitole o implikovanej volatilita), pričom názov tejto krivky napovedá, že najnižšia volatilita bude u at-the-money opcií, a zvyšuje sa spolu s tým, ako veľmi je opcia in-the-money alebo out-of-the-money. Následne je z tohto smilu vypočítaná priemerná volatilita za daný deň.
2. Sú skonštruované denné predpovede na dané obdobie (posledným skutočným dňom je 2.1.2017) podľa štyroch vyššie uvedených modelov a prevedené na ročnú volatilitu (anualizované – tu však uvažujeme iba 252 obchodných dní v roku)
3. Testuje sa *jednodenná stratégia call butterfly* (long i short, ako sú definované v teoretickej časti práce). Ak je modelmi predpovedaná anualizovaná volatilita nižšia, než priemerná implikovaná volatilita v danom dni, vstúpime do stratégie long call butterfly, ak je vyššia, vstúpime do short call butterfly. Vstup sa však uskutoční iba v prípade, že predpovedaná volatilita je minimálne o 10% pod alebo nad implikovanou. V opačnom prípade sa nevstúpi do žiadnej stratégie.
4. Realizačné ceny opcií, do ktorých v rámci stratégií chceme vstupovať, sú následne vypočítané ako

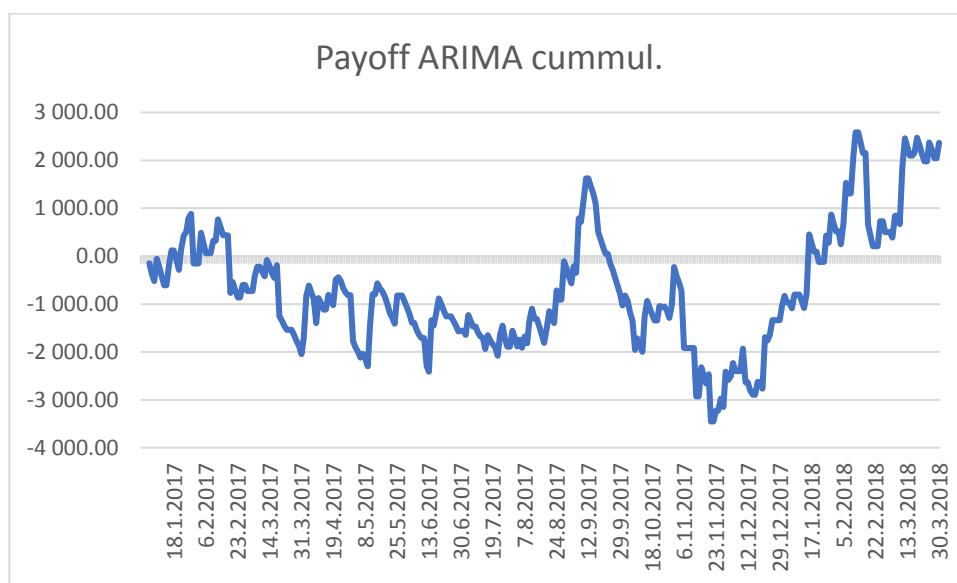
$$\text{Lower(upper)strike} = (1 - (+)30\% \times \text{Predpovedaná denná volatilita}) \times \text{Denný spotový kurz}$$

Vstúpime do call opcií s lower strike (in-the-money), upper strike (out-of-the-money) a at-the-money, kedy sa realizačná cena rovná spotovej; vstup bude závisieť na danej stratégii (pre call butterfly stratégiu platí, že $K1 < K2 < K3$; v našom prípade $K1$ = lower strike, $K2$ = ATM; $K3$ = upper strike).

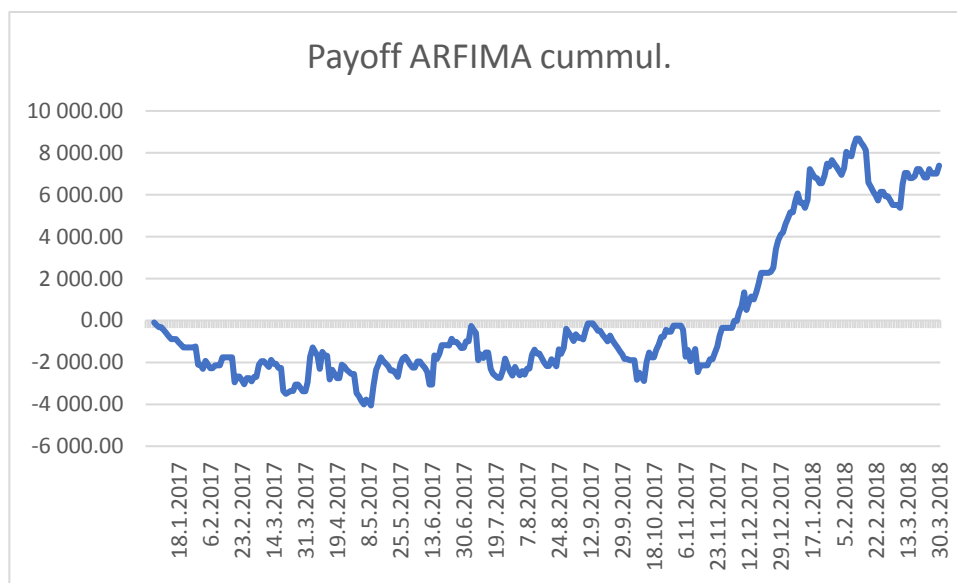
5. Zo získaných údajov sú následne vypočítané členy d_1 a d_2 používané v rovnici k oceneniu call opcie, podľa definície v teoretickej časti práce.¹⁵ Z týchto členov je potom možné vypočítať deltu konkrétnych opcií, do ktorých chceme vstupovať. Delta znamená citlivosť zmeny ceny opcie na zmenu podkladového aktíva. Tento výpočet je dôležitý, pretože v termináli Reuters sú implikované volatility kótované pre jednotlivé úrovne delty (delta 0,5 = at-the-money opcia). Následne, pomocou lineárnej interpolácie a extrapolácie z pôvodných údajov o IV pre jednotlivé delty, dopočítame implikované volatility pre naše konkrétne opcie.
6. Následne vypočítame cenu call opcie podľa Black – Scholesovho vzorca.
7. Spočítame si cenu celkovej stratégie, do ktorej vstúpime – v prípade long call butterfly zaplatíme prémie za jednu in-the-money a jednu out-of-the-money opciu a inkasujeme prémie za dve at-the-money opcie; v prípade short call butterfly sú znamienka pri platbe prémie presne opačné. Objem transakcie je vždy 1 000 000 EUR, vypočítané prémie sú v USD.
8. Vypočítame zisk z prípadnej realizácie opčnej stratégie nasledujúci deň po vstupe, podľa výplatnej funkcie call opcie uvedenej v teoretickej časti práce (s. 19). Od tohto zisku je ešte potrebné odčítať celkovú zaplatenú prémie v danej stratégii. Všetky náklady (resp. výnosy) v podobe prémie a takisto zisky sú v USD.
9. Nakoniec vypočítame kumulatívne denné zisky za sledované obdobie. Funkcie týchto ziskov pre jednotlivé modely volatility zobrazujú nasledujúce grafy:

¹⁵ Bezriziková úroková miera bola získaná zo stránky Bloomberg.com a v tejto súvislosti sa predpokladá výnosová miera amerických štátnych dlhopisov so splatnosťou 1 rok (v čase analýzy to bolo 2,24% p.a.).

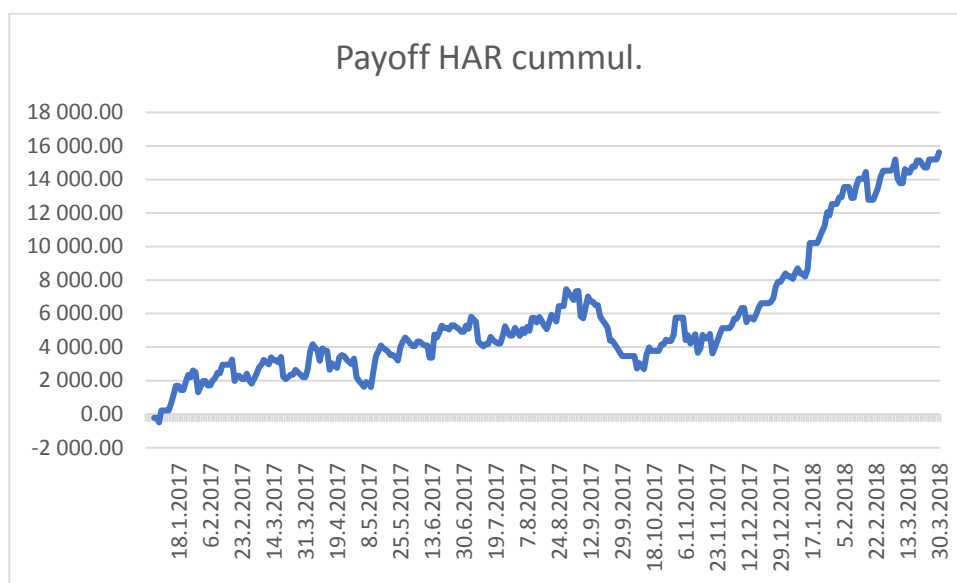
Obrázok 36: Kumulatívna výplatná funkcia opčných stratégií – ARIMA-RV



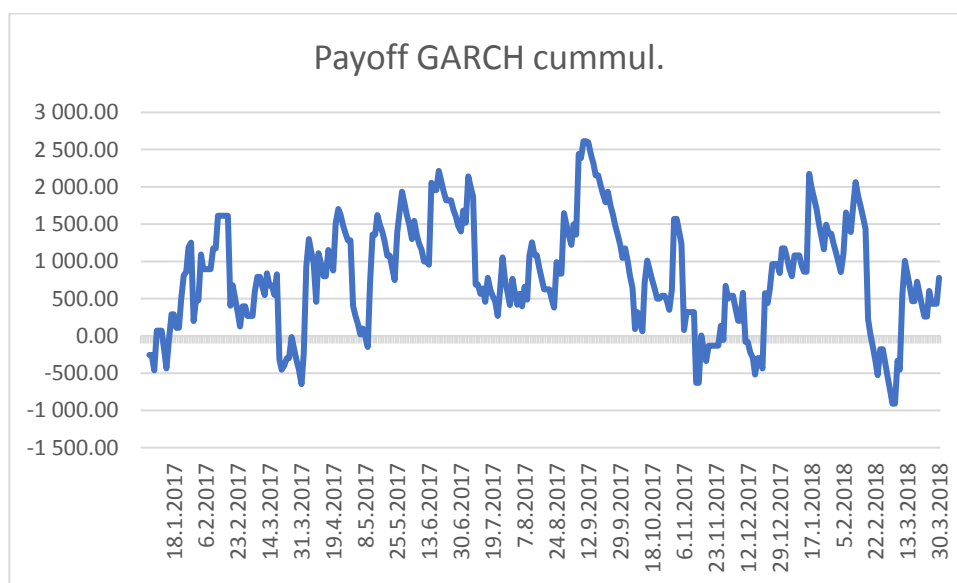
Obrázok 37: Kumulatívna výplatná funkcia opčných stratégií – ARFIMA-RV



Obrázok 38: Kumulatívna výplatná funkcia opčných stratégií – HAR-RV



Obrázok 39: Kumulatívna výplatná funkcia opčných stratégií – GARCH



Na základe grafov by sa dalo skonštatovať, že najvyšší zisk by investorovi priniesli predpovede modelu HAR-RV – funkcia má takmer konštantne stúpajúci trend. O ostatných modeloch by sa dalo povedať, že grafy ich kumulatívnych ziskov oscilujú blízko nuly – v prípade GARCH modelu je väčšinou mierne nad nulou, u modelu ARIMA a ARFIMA-RV zas mierne pod nulou, pričom funkcie ich kumulatívnych ziskov nemajú klesajúci alebo stúpajúci trend, s výnimkou istej časti grafu zisku podľa modelu ARFIMA, kde vidíme nárast v období od konca roku 2017.

5. Záver

V práci boli predstavené jedny z najznámejších metód predvídania volatility, a síce vybrané modely realizovanej volatility (ARIMA/ARFIMA-RV a HAR-RV) a model GARCH, ktorý patrí k štandardným metódam modelovania podmieneného rozptylu. V teoretickej časti sú najskôr tieto modely definované a popísané, neskôr je v kapitole predstavený prehľad literatúry, pojednávajúcej o výhodách a nevýhodách jednotlivých modelov, spolu so stručným prehľadom iných metód predvídania volatility. V metodologickej časti je potom popísaný postup pri výstavbe modelov – odhad parametrov, testy rezíduí, kritériá vhodnosti modelu a ďalšie špecifiká. Okrem toho sa práca venuje i tomu, ako je tieto modely možné prakticky využiť pri obchodovaní opčných stratégií, ktorých ziskovosť je na volatilitu podkladového aktíva silne závislá. Z tohto dôvodu je v teoretickej časti predstavená i teória opcií – definícia ako finančného inštrumentu, podmienky ich ziskovosti, a predovšetkým teória oceňovania opcií postavená na Black – Scholes – Mertonovom modeli a z nej vychádzajúci koncept implikovanej volatility. Ďalej sa teoretická časť venuje špeciálne opčným stratégiám so závislosťou na volatilitu podkladového aktíva – najznámejšie takéto stratégie sú typu tzv. butterfly, straddle, strangle a condor. Konkrétne sú špecifikované podmienky ich ziskovosti (vysoká/nízka volatilita) a na fiktívnych príkladoch vykreslené ich ziskové funkcie.

V aplikačnej časti sú predstavené modely aplikované na menový pár EUR/USD – v prípade modelov RV na časový rad dennej realizovanej volatility¹⁶ logaritmickej výnosov tohto páru za obdobie 1.1.2014 – 30.3.2018, v prípade GARCH modelu na samotný časový rad denných logaritmickej výnosov za obdobie 2.1.2001 – 30.3.2018. Metódami popísanými v metodologickej časti práce je posúdená kvalita vybraných modelov. Na základe týchto testov sa ako najkvalitnejšie javia modely ARIMA-RV(1,0,6), ARFIMA-RV(1,d,6), HAR-RV i GARCH. Tieto modely sú následne použité na konštrukciu predpovede budúcej volatility – prvotným cieľom je predpoveď dennej volatility, následne i týždennej a mesačnej. V ďalšej časti sú tieto predpovede porovnané s reálne kótovanými hodnotami implikovanej volatility opcií v stratégiách butterfly,

¹⁶ Realizovaná volatilita je definovaná na stranách 36-37.

straddle a strangle, stiahnutými z terminálu Thomson Reuters Eikon. Na základe diferencií medzi týmito hodnotami sú formované prípadné odporúčania vstupu do daných opčných stratégií – ak je predikovaná hodnota volatility nižšia, než implikovaná volatilita, odporúča sa vstúpiť do stratégií, ktoré špekulujú na nízku volatilitu – to sú konkrétne stratégie long butterfly, short straddle a short strangle. Ak je naopak vyššia, odporúča sa vstúpiť do stratégií short butterfly, long straddle a long strangle. Praktická časť je zakončená tzv. backtestingovou analýzou – jedná sa o analýzu reálnej ziskovosti prípadného vstupu do stratégie butterfly s dennou splatnosťou, za rozhodovania pomocou predpovedí volatility podľa vyššie spomenutých modelov. Analýza je prevedená na skutočných dátach (skutočných hodnotách kurzu EUR/USD i kótovaných hodnotách implikovanej volatility) za obdobie 3.1.2017 až 30.3.2018 (jedná sa o tzv. out – sample vzorku dát použitých pri samotnom odhade modelov). Pre interpretáciu výsledkov sú vykreslené grafy kumulatívnych ziskov pre každý model zvlášť. Je zistené, že vstup do stratégií podľa predpovedí modelu HAR-RV by investorovi priniesol konštantne stúpajúci kumulatívny zisk počas celého sledovaného obdobia. U ostatných modelov, teda ARIMA a ARFIMA-RV a GARCH sa nepreukázala schopnosť predikcie generovať konštantný zisk – zisky oscilujú okolo nuly, s väčšími či menšími odchýlkami a nejasným trendom. Z tejto analýzy by teda bolo možné odvodiť, že modely realizovanej volatility i model GARCH ponúkajú potenciálny spôsob odhadu vhodnosti vstupu do vybranej opčnej stratégie, kde by investor realizoval kladný kumulatívny zisk i za dlhšie obdobie, avšak s výnimkou modelu HAR-RV by investor v určitých úsekoch sledovaného obdobia dosahoval i stratu.

Práca zhŕňa základné poznatky o modelovaní volatility i o opčných stratégiách, ktoré sú na volatilitu silne závislé. Sú predstavené možnosti využitia predpovedí za pomoci modelov časových radov k vstupu do vybraných opčných stratégií, sústrediac sa na vhodnosť použitia jednotlivých modelov, schopnosť predpovede a jednoduchosť či naopak zložitosť ich aplikácie. Poznatky získané v tejto práci môžu prípadnému investorovi pomôcť lepšie sa zorientovať v správnosti ocenenia opcií a určenia implikovanej volatility a prípadné nedostatky opčného oceňovacieho mechanizmu využiť k dosiahnutiu zisku.

6. Použité zdroje

6.1. Literatúra, odborné publikácie a články

1. AIZENMAN, Joshua a PINTO, Brian. *Managing Economic Volatility and Crises: A Practitioner's Guide*. 2005. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511510755.
2. AKGIRAY, Vedat. *Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Return: Evidence and Forecasts*. *Journal of Business*, strany 55-80. 1989.
3. ANDERSEN, Torben G. a BOLLERSLEV, Tim. *Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts*. *International Economic Review*, strany 885-905. 1998.
4. ARLT, Josef a ARLTOVÁ, Markéta. *Ekonomické časové řady*. 2009. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6.
5. BAILIE, Richard, BOLLERSLEV, Tim a MIKKELSEN, Hans Ole. *Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics*, strany 3-30. 1996.
6. BARNDORFF-NIELSEN, Ole E. a SHEPHARD, Neil. *Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models*. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, strany 253-280. 2002.
7. BAUM, Christopher F. *ARFIMA (long memory) models*. EC 327: *Financial Econometrics*, Boston College. 2013.
8. BLACK, Fischer a SCHOLES, Myron. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. *Journal of Political Economy*, strany 637-654. 1973.
9. BOLLERSLEV, Tim. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics*, strany 307-327. 1986.
10. BOLLERSLEV, Tim. *Glossary to ARCH (GARCH)*. 2008.
11. BOX, George a JENKINS, Gwilym. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 1970. San Francisco: Holden-Day.
12. CAMPBELL, John a HENTSCHEL, Ludger. *No news is good news *1: An asymmetric model of changing volatility in stock returns*. *Journal of Financial Economics*, strany 281-318. 1992.

13. CORSI, Fulvio. *A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility. Journal of Financial Econometrics*, strany 174-196. 2009.
14. DICKKEY, David A., a FULLER, Wayne A. *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. Journal of the American Statistical Association*, strany 427–431. 1979.
15. DIEBOLD, Francis X. a NERLOVE, Marc. *The dynamics of exchange rate volatility: A multivariate latent factor ARCH model. Journal of Applied Econometrics*. 1989.
16. DVOŘÁK, Petr. *Deriváty*. 2006. Praha: Nakladatelství Oeconomica. ISBN 80-245-1033-2.
17. EBENS, Heiko. *Realized Stock Volatility*. Baltimore. Working paper. The John Hopkins University. 1999.
18. ENGLE, Robert F. a MUSTAFA, Chowdhury. *Implied ARCH models from options prices. Journal of Econometrics*, strany 289-311. 1992.
19. ENGLE, Robert F. *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica*, strany 987-1007. 1982.
20. ENGLE, Robert F. *Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of '87. Review of Financial Studies*. 1990
21. ENGLE, Robert F., ITO, Takatoshi a LIN, Wen – Ling. *Meteor Showers or Heat Waves? Heteroskedastic Intra-daily Volatility in the Foreign Exchange Market. Econometrica*, strany 525-542. 1990.
22. FAMA, Eugene F. *The Behavior of Stock-Market Prices. The Journal of Business*, strany 34-105. 1965.
23. FIČURA, Milan. *Metody předvídání volatility*. 2013. Praha. Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze.
24. FIGLEWSKI, Stephen. *Forecasting Volatility. Financial Markets, Institutions & Instruments*, strany 1-88. 1997.
25. FRENCH, Kenneth R., SCHWERT, G. William a STAMBAUGH, Robert F. *Expected stock returns and volatility. Journal of Financial Economics*, strany 3-29. 1987.
26. GALLANT, A. Ronald, HSIEH, David a TAUCHEN, George. *Estimation of stochastic volatility models with diagnostics. Journal of Econometrics*, strany 159-192. 1997.

27. GIOT, Pierre a LAURENT, Sébastien. *Modelling daily Value-at-Risk using realized volatility and ARCH type models. Journal of Empirical Finance*, strany 379-398. 2004.
28. GRANGER, Clive a JOYEUX, Roselyne. *An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. Journal of Time Series Analysis*, strany 15-29. 1980.
29. HAMILTON, James D. *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. Econometrica*, strany 357-384. 1989.
30. HENDL, Jan. *Přehled statistických metod zpracování dat: Analýza a metaanalýza dat*. 2009. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-482-3.
31. HULL, John C. *Options, futures and other derivatives*. 2012. Boston: Prentice Hall. ISBN 978-0-13-216494-8.
32. HYNDMAN, Rob J. *The ARIMAX model muddle*. 2010.
33. CHRISTIE, Andrew A. *The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. Journal of Financial Economics*, strany 407-432. 1982.
34. ITÔ, Kiyosi. *On stochastic differential equations. Memoirs, American Mathematical Society* 4, strany 1–51. 1951.
35. KWIATKOWSKI, Denis, PHILLIPS, Peter C. B., SCHMIDT, Peter a SHIN, Yongcheol. *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. Journal of Econometrics*, strany 159–178. 1992.
36. LYUU, Yuh – Dauh. *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, Algorithms*. 2001. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511546839.008.
37. MERTON, Robert C. *Theory of Rational Option Pricing. The Bell Journal of Economics and Management Science*, strany 141-183. 1973.
38. NELSON, Daniel B. a CAO, Charles Q. *Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model. Journal of Business & Economic Statistics*, strany 229-235. 1992.
39. NELSON, Daniel B. *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. Econometrica*, strany 347-370. 1991.
40. POTERBA, James M. a SUMMERS, Lawrence H. *Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications. Journal of Financial Economics*, strany 27-59. 1988.

41. RUPPERT, David a MATTESON, David S. *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*. 2015. New York: Springer. ISBN 978-1-4939-2613-8.
42. SCHWERT, G. William. *Stock Returns and Real Activity: A Century of Evidence*. *The Journal of Finance*, strany 1237-1257. 1990.
43. TAKAHASHI, Makoto, OMORI, Yasuhiro a WATANABE, Toshiaki. *Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously*. *Computational Statistics & Data Analysis*, strany 2404-2426. 2009.
44. WITZANY, Jiří. *Financial Derivatives: Valuation, Hedging and Risk Management*. 2013. Praha: Nakladatelství Oeconomica. ISBN 978-80-245-1980-7.
45. XIAO, Linlan a AYDEMIR, Abdurrahman. *Volatility modelling and forecasting in finance*. *Forecasting Volatility in the Financial Markets*, strany 1-46. 2007. Oxford: Elsevier Ltd. ISBN 978-0-7506-6942-9.

6.2. Internetové zdroje

1. *Detect Autocorrelation* [online]. [cit. 2018-03-03]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/econ/test-for-autocorrelation.html>
2. *Download Free Forex Historical Data* [online]. [cit. 2018-05-19]. Dostupné z: <http://www.histdata.com/download-free-forex-historical-data/?/excel/1-minute-bar-quotes/EURUSD>
3. *EUR/USD - Euro US Dollar* [online]. [cit. 2018-05-19]. Dostupné z: <https://www.investing.com/currencies/eur-usd-historical-data>
4. *Forecasting Realized Volatility with HAR-RV* [online]. 2012 [cit. 2018-02-17]. Dostupné z: <https://mathtrading.wordpress.com/2012/05/12/forecasting-realized-volatility-with-har-rv/>
5. *Long Straddle (Buy Straddle)* [online]. [cit. 2018-03-14]. Dostupné z: <http://www.theoptionsguide.com/long-straddle.aspx>
6. *Long Strangle (Buy Strangle)* [online]. [cit. 2018-03-14]. Dostupné z: <http://www.theoptionsguide.com/long-strangle.aspx>
7. OXFORD DICTIONARIES. *Markov chain | Definition of Markov chain in US English by Oxford Dictionaries*. [online]. [cit. 2018-03-18]. Dostupné z: https://en.oxforddictionaries.com/definition/us/markov_chain

8. *Realized Volatility* [online]. [cit. 2018-03-14]. Dostupné z: <http://breakingdownfinance.com/finance-topics/risk-management/realized-volatility/>
9. *Short Straddle (Sell Straddle)* [online]. [cit. 2018-03-14]. Dostupné z: <http://www.theoptionsguide.com/short-straddle.aspx>
10. *Short Strangle (Sell Strangle)* [online]. [cit. 2018-03-14]. Dostupné z: <http://www.theoptionsguide.com/short-strangle.aspx>
11. *United States Rates & Bonds* [online]. [cit. 2018-05-19]. Dostupné z: <https://www.bloomberg.com/markets/rates-bonds/government-bonds/us>
12. *What is the average monthly volatility of the S&P 500 in the long term?* [online]. [cit. 2018-02-17]. Dostupné z: <https://www.quora.com/What-is-the-average-monthly-volatility-of-the-S-P-500-in-the-long-term>

7. Zoznam obrázkov

Obrázok 1: Príklad - ročná volatilita indexu S&P 500.....	5
Obrázok 2: Kúpna opcia/forward	19
Obrázok 3: Predajná opcia/forward.....	20
Obrázok 4: Stratégia long call butterfly	30
Obrázok 5: Stratégia short call butterfly	31
Obrázok 6: Straddle stratégie	32
Obrázok 7: Strangle stratégie	32
Obrázok 8: Stratégia long call condor	34
Obrázok 9: Stratégia short call condor	35
Obrázok 10: Výberová ACF a PACF (príklad MatLab)	41
Obrázok 11: Realizovaná volatilita log. výnosov EUR/USD 1/2014 - 3/2018.....	50
Obrázok 12: ACF a PACF realizovanej volatility.....	51
Obrázok 13: Dickey - Fullero test pre realizovanú volatilitu.....	52
Obrázok 14: Model ARIMA-RV (1,0,1).....	53
Obrázok 15: ACF a PACF rezíduí ARIMA-RV (1,0,1).....	54
Obrázok 16: Histogram rezíduí ARIMA-RV (1,0,1)	54
Obrázok 17: Model ARIMA-RV(1,0,6).....	55
Obrázok 18: ACF a PACF rezíduí ARIMA-RV(1,0,6).....	56

Obrázok 19: Histogram rezíduí ARIMA-RV (1,0,6)	56
Obrázok 20: Rezíduá realizovanej volatility (in-sample).....	57
Obrázok 21: KPSS test realizovanej volatility	58
Obrázok 22: Model ARFIMA-RV(1,d,1).....	59
Obrázok 23: ACF a PACF rezíduí ARFIMA-RV (1,d,1)	60
Obrázok 24: Histogram rezíduí ARFIMA-RV (1,d,1)	60
Obrázok 25: Model ARFIMA-RV (1,d,6).....	61
Obrázok 26: ACF a PACF rezíduí ARFIMA-RV (1,d,6)	62
Obrázok 27: Histogram rezíduí ARFIMA-RV (1,d,6)	62
Obrázok 28: HAR-RV model.....	64
Obrázok 29: ACF a PACF rezíduí HAR-RV	65
Obrázok 30: Histogram rezíduí HAR-RV.....	65
Obrázok 31: Denné logaritmické výnosy EUR/USD za obdobie 1/2001-3/2018.	67
Obrázok 32: Model GARCH(1,1).....	68
Obrázok 33: ACF a PACF štandardizovaných rezíduí modelu GARCH(1,1).....	69
Obrázok 34: Histogram štandardizovaných rezíduí modelu GARCH(1,1)	69
Obrázok 35: Podmienená smerodajná odchýlka denných log. výnosov podľa modelu GARCH(1,1).....	70
Obrázok 36: Kumulatívna výplatná funkcia opčných stratégií – ARIMA-RV	83
Obrázok 37: Kumulatívna výplatná funkcia opčných stratégií – ARFIMA-RV...	83

Obrázok 38: Kumulatívna výplatná funkcia opčných stratégií – HAR-RV 84

Obrázok 39: Kumulatívna výplatná funkcia opčných stratégií – GARCH 84

8. Zoznam tabuliek

Tabuľka 1: Opčné pozície	18
Tabuľka 2: Vplyv premenných na cenu európskej call a put opcie	26
Tabuľka 3: Straddle a strangle stratégie	32
Tabuľka 4: Empirické charakteristiky logaritmickej výnosov EUR/USD	48
Tabuľka 5: Porovnanie modelov ARIMA(1,0,1) a ARIMA(1,0,6)	58
Tabuľka 6: Porovnanie modelov ARFIMA(1,d,1) a ARFIMA(1,d,6).....	63
Tabuľka 7: Kritériá a štatistiky modelu HAR-RV	66
Tabuľka 8: Dlhodobá predpoveď volatility.....	72
Tabuľka 9: Stratégia long butterfly - 1D splatnosť	75
Tabuľka 10: Stratégia short butterfly - 1D splatnosť	75
Tabuľka 11: Stratégia long straddle - 1D splatnosť	75
Tabuľka 12: Stratégia short straddle - 1D splatnosť	76
Tabuľka 13: Stratégia long strangle - 1D splatnosť	76
Tabuľka 14: Stratégia short strangle - 1D splatnosť	76
Tabuľka 15: Stratégia long butterfly - 1W splatnosť	77
Tabuľka 16: Stratégia long straddle - 1W splatnosť	77
Tabuľka 17: Stratégia long strangle - 1W splatnosť	77
Tabuľka 18: Zhrnutie - predpovede volatility	79

