Vysoká škola ekonomická v Praze
Fakulta financí a účetnictví
Katedra bankovnictví a pojišťovnictví
Studijní obor: Finanční inženýrství

SABR model a jeho využití při modelování volatility

Autor diplomové práce: Bc. Ksenia Molodkina
Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.
Rok obhajoby: 2018

Čestné prohlášení: Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „SABR model a jeho využití při modelování volatility“ vypracovala samostatně a veškerou použitou literaturu a další prameny jsem řádně označila a uvedla v přiloženém seznamu.

V Praze dne 28.05.2018 Ksenia Molodkina

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé diplomové práce prof. Jiřímu Witzanymu za pomoc při výběru tématu, vstřícný přístup a odborné vedení diplomové práce.

Název práce: SABR model a jeho využití při modelování volatility

Autor: Bc. Ksenia Molodkina

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Abstrakt: Diplomová práce je věnována modelování volatility smilu pro swapce. Začíná se úvodem do teorie swapce a oceňování swapce pomocí Black-76 modelu. Následně se řeší problematika modelování implikovaných volatilit. Nejdřív se prezentuje model lokální volatility a jeho výhody a nevýhody. Dále je podstatná část práce věnována SABR modelu stochastické volatility a kalibraci tohoto modelu na tržní data. V závěru práce se zhodnotí efektivita SABR modelu jako nástroje pro modelování volatility smilu.

Klíčová slova: swapce, volatility smile, kalibrace, model lokální volatility, SABR model

Title: The SABR model and its use for volatility modeling

Author: Bc. Ksenia Molodkina

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Abstract: The diploma thesis is devoted to modeling of volatility smiles for swaptions. Initially, the theory of swaptions and the valuation process with Black-76 model are introduced. Following, the ways of handling the modeling of the implied volatilities are presented. Firstly, the local volatility model and its advantages and disadvantages are discussed. Furthermore, a substantial part of the thesis is devoted to the SABR model and its calibration to market data. Finally, the evaluation of the SABR model takes place as well as its ability to fit the volatility smiles.

Keywords: swaption, volatility smile, calibration, local volatility model, SABR model

Obsah

Úvod **1**

1 Úrokové sazby **2**

2 Úrokové swapy **6**

3 Opce **8**

3.1 Oceňování opcí 9

3.2 Black-Scholesův model 11

4 Swapce **13**

4.1 Black-76 model 15

5 Volatilita **16**

6 Lokální volatilita **19**

7 SABR model **23**

7.1 Kalibrace modelu 24

7.1.1 Parametr β 26

7.1.2 Parametry α, ρ, ν 26

7.2 Parametry SABR modelu 27

7.2.1 Parametr α 27

7.2.2 Parametr β 29

7.2.3 Parametr ρ 29

7.2.4 Parametr ν 30

7.2.5 Parametr f 30

8 Aplikace SABR modelu **32**

8.1 Swapce typu xx1Y 32

8.1.1 Swapce typu 1M1Y 32

8.1.2 Swapce typu 1Y1Y 34

8.1.3 Swapce typu 10Y1Y 36

8.1.4 Swapce typu 20Y1Y 36

8.1.5 Swapce typu 30Y1Y 39

8.2 Swapce typu xx10Y 41

8.2.1 Swapce typu 1Y10Y 41
8.2.2 Swapce typu 30Y10Y 43
8.3 Swapce typu xx20Y 43
8.3.1 Swapce typu 1Y20Y 43
8.3.2 Swapce typu 20Y20Y 46
8.4 Swapce typu xx30Y 48
8.4.1 Swapce typu 1Y30Y 48
8.4.2 Swapce typu 20Y30Y 48

Závěr **53**

Appendices **56**

Seznam obrázků

1 Volatility smile 18
2 Implikované a lognormální rozdělení 18
3 Úroveň n a $n+1$ v implikovaném stromu 19
4 Pohyb implikované volatility $\sigma_B(f,K)$ při poklesu f 22
5 Pohyb implikované volatility $\sigma_B(f,K)$ při růstu f 22
6 Páteř pro $\beta = 0$ 25
7 Páteř pro $\beta = 1$ 25
8 SABR model kalibrovaný pro 1Y1Y swapci 28
9 Dynamika parametru α 28
10 Dynamika parametru β 29
11 Dynamika parametru ρ 30
12 Dynamika parametru ν 31
13 Dynamika parametru f 31
14 1M1Y, $\beta = 0$ 33
15 1M1Y, $\beta = 0{,}5$ 33
16 1M1Y, $\beta = 1$ 33
17 1Y1Y, $\beta = 0$ 35
18 1Y1Y, $\beta = 0{,}5$ 35
19 1Y1Y, $\beta = 1$ 35
20 10Y1Y, $\beta = 0$ 37
21 10Y1Y, $\beta = 0{,}5$ 37

22 10Y1Y, $\beta = 1$ 37
23 20Y1Y, $\beta = 0$ 38
24 20Y1Y, $\beta = 0{,}5$ 38
25 20Y1Y, $\beta = 1$ 38
26 30Y1Y, $\beta = 0$ 40
27 30Y1Y, $\beta = 0{,}5$ 40
28 30Y1Y, $\beta = 1$ 40
29 1Y10Y, $\beta = 0$ 42
30 1Y10Y, $\beta = 0{,}5$ 42
31 1Y10Y, $\beta = 1$ 42
32 30Y10Y, $\beta = 0$ 44
33 30Y10Y, $\beta = 0{,}5$ 44
34 30Y10Y, $\beta = 1$ 44
35 1Y20Y, $\beta = 0$ 45
36 1Y20Y, $\beta = 0{,}5$ 45
37 1Y20Y, $\beta = 1$ 45
38 20Y20Y, $\beta = 0$ 47
39 20Y20Y, $\beta = 0{,}5$ 47
40 20Y20Y, $\beta = 1$ 47
41 1Y30Y, $\beta = 0$ 49
42 1Y30Y, $\beta = 0{,}5$ 49
43 1Y30Y, $\beta = 1$ 49
44 20Y30Y, $\beta = 0$ 50
45 20Y30Y, $\beta = 0{,}5$ 50
46 20Y30Y, $\beta = 1$ 50
47 XX1Y Swaption Volatility 56
48 XX10Y Swaption Volatility 57
49 XX20Y Swaption Volatility 57
50 XX30Y Swaption Volatility 58

Seznam tabulek

1 Parametry SABR modelu pro 1Y1Y swapci 27
2 Parametry SABR modelu pro 1M1Y swapci 34
3 Parametry SABR modelu pro 1Y1Y swapci 34

4 Parametry SABR modelu pro 10Y1Y swapci 36
5 Parametry SABR modelu pro 20Y1Y swapci 39
6 Parametry SABR modelu pro 30Y1Y swapci 39
7 Parametry SABR modelu pro 1Y10Y swapci 41
8 Parametry SABR modelu pro 30Y10Y swapci 43
9 Parametry SABR modelu pro 1Y20Y swapci 46
10 Parametry SABR modelu pro 20Y20Y swapci 46
11 Parametry SABR modelu pro 1Y30Y swapci 48
12 Parametry SABR modelu pro 20Y30Y swapci 51

Úvod

Tato diplomová práce je věnována volatility smilu – jevu, který se týká empirického pozorování implikované volatility. Vzniká při aplikaci Black-Sholesova modelu k oceňování finančních derivátů, kdy se volatilita (jeden z parametrů Black-Sholesova modelu) implikovaná tržními cenami liší pro různé realizační ceny. Cílem této diplomové práce je popsat modelování volatility smilu pro swapce.

Diplomovou práci začneme definováním teoretických pojmů zásadních pro pochopení principu swapce. Uvedeme stručný přehled základních úrokových sazeb, definici úrokového swapu a jeho oceňování, definici opce a její oceňování pomocí Black-Sholesova modelu. Následně se věnujeme teorii swapce (neboli opce na úrokový swap) a ocenění tohoto derivátu pomocí Black-76 modelu.

První model, který v práci analyzujeme, je model lokální volatility. Popíšeme techniku oceňování pomocí modelu lokální volatility, především se zaměříme na to, jak zvládá tento model modelování implikované volatility. Zjistíme, že tento model sice umí vystihnout tvar volatility smilu, neumí ale správně předpovědět jeho dynamiku.

Dále prezentujeme SABR model. Diskutujeme dva způsoby kalibrace SABR modelu a uvedeme krátkou studii, jak ovlivňuje kalibraci modelu změna jednoho z parametrů. Nejpodstatnější část diplomové práce je věnována aplikaci SABR modelu na reálná data: budeme zkoumat efektivitu modelování volatility smilu pro implikované volatility swapce pomocí SABR modelu. Kalibrace se provádí pomocí softwaru MATLAB. Pro lepší přehlednost použijeme dva způsoby kalibrace a swapce různých typů, které mají různé délky expirace opce a různé tenory swapu. Výsledky analýzy poukazují na to, že je SABR model vhodný a efektivní nástroj na modelování volatility smilu, avšak pro dosažení nejlepších výsledků je důležité věnovat pozornost procesu kalibrace.

1 Úrokové sazby

V současné době koncept úrokové sazby vstupuje do každodenního života a je vnímán jako běžná věc, s níž si umí poradit každý. Při vložení určitého množství peněz na spořící bankovní účet se očekává, že původní částka vzroste v čase. Z toho můžeme usoudit, že půjčování peněz musí být nějakým způsobem odměňováváno. Na tomto principu je založeno fungování většiny investičních nástrojů, které jsou k dispozici na finančním trhu. V této diplomové práci jde řeč o swapci – finančním nástroji, jehož podkladovým aktivem je výměna úrokových závazků.

Aparát potřebný k pochopení teorie swapcí začneme budovat podle kapitol 1.1, 1.2 a 1.4 knihy [Brigo and Mercurio, 2006]. První základní definicí, kterou tady uvedeme, je definice bankovního účtu (anglicky money-market account). Bankovní účet představuje bezrizikovou investici, která se zhodnocuje v čase pomocí bezrizikové úrokové sazby. Formální zápis vypadá následovně.

Definice 1 (Bankovní účet)**.** *Definujme $B(t)$ jako hodnotu bankovního účtu v čase $t \geq 0$. Položme $B(0) = 1$ a předpokládáme, že bankovní účet se vyvíjí v souladu s diferenciální rovnicí*

$$dB(t) = r_t B(t)dt, \quad B(0) = 1, \tag{1}$$

kde r_t je kladná funkce času. V důsledku máme

$$B(t) = e^{\int_0^t r_s ds}. \tag{2}$$

Výše uvedená definice říká, že jednotková částka investovaná v čase 0 přinese v čase t hodnotu ekvivalentní výrazu 2, přičemž částka na bankovním účtu je úročená okamžitou spotovou úrokovou sazbou (nebo short-rate sazbou) r_t. Jinými slovy můžeme r_t označit za míru růstu bankovního účtu v období $(0, t)$. Můžeme také říci, že odměna za půjčování peněz je v tomto případě určena sazbou r_t.

Nyní si položíme otázku: jak velkou peněžní částku musíme v čase t vložit na bankovní účet, abychom obdrželi v čase $T > t$ hodnotu $B(T)$? Za tímto účelem zavedeme pojem diskontního faktoru.

Definice 2 (Diskontní faktor)**.** *Diskontní faktor $D(t,T)$ v časovém intervalu (t,T) je peněžní částka vložená na účet v čase t, která odpovídá jednotkové peněžní částce splatné v čase T:*

$$D(t,T) = e^{-\int_t^T r_s ds}. \tag{3}$$

O diskontních faktorech se budeme bavit hlavně v souvislosti s bezkupónovým dluhopisem, který je pro nás zásadním instrumentem z hlediska odvozování úrokových sazeb. Bezkupónový dluhopis udává v čase t současnou hodnotu peněžní částky, kterou získá držitel dluhopisu v čase T, v den splatnosti dluhopisu. Jinak řečeno cena bezkupónového dluhopisu je zároveň jeho diskontním faktorem. Toho budeme využívat v případě, když budeme potřebovat diskontovat budoucí peněžní toky, což se hodí zejména při oceňování swapů či swapcí.

Definice 3 (Bezkupónový dluhopis)**.** *Bezkupónový dluhopis se splatností T je typ cenného papíru, který nepřináší držiteli kupónové platby. V čase T držitel zaručeně získá jednorázovou peněžní částku. Cenu bezkupónového dluhopisu v časovém intervalu (t,T) označíme funkcí $P(t,T)$.*

Na tomto místě si poznamenáme, že bezkupónový dluhopis je především teoretickým nástrojem, který není přimo pozorovatelný na trhu. Nicméně pomocí ceny bezkupónového dluhopisu se dá vyjádřit v podstatě jakákoli úroková sazba. Bezkupónový dluhopis také hraje důležitou roli při konstruování časové struktury úrokových sazeb, která vyjadřuje variabilitu úrokových sazeb v závislosti na době splatnosti $(T-t)$.

Definice 4 (Spotová úroková sazba se spojitým úročením)**.** *Spotová úroková sazba definovaná pomocí spojitého úročení od času t do času $T > t$ je konstantní sazba $R(t,T)$, při které se investovaná částka $P(t,T)$ zhodnotí na jednotkovou peněžní částku v čase T. Formulujeme:*

$$P(t,T)e^{R(t,T)(T-t)} = 1. \tag{4}$$

Z rovnice 4 můžeme snadno vyjádřit $R(t,T)$:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{(T-t)}. \tag{5}$$

Spotová úroková sazba při spojitém úročení se využívá u finančních nástrojů, u nichž se předpokládá dlouhodobé zhodnocení peněz v čase (typicky doba splatnosti $(T-t)$ je v této situaci delší než jeden rok). Může se stát, že doba splatnosti $(T-t)$ je kratší nebo rovna jednomu roku. V tomto případě hovoříme o jednoduchém úročení.

Definice 5 (Spotová úroková sazba s jednoduchým úročením)**.** *Spotová úroková sazba definovaná pomocí jednoduchého úročení od času t do času $T > t$ je konstantní sazba $L(t,T)$, při které se investovaná částka $P(t,T)$ zhodnotí na jednotkovou peněžní částku v čase T, přitom se úroky kumulují úměrně délce životnosti investice. Formulujeme:*

$$P(t,T)(1 + L(t,T)(T-t)) = 1. \tag{6}$$

Z rovnice 6 můžeme snadno vyjádřit $L(t,T)$:

$$L(t,T) = \frac{1 - P(t,T)}{(T-t)P(t,T)}. \tag{7}$$

Předchozí definice 4 a definice 5 jsou ekvivalentní v případě, když se časový interval (t,T) blíží nule. Již zmiňovaná okamžitá spotová úroková sazba r_t není nic jiného než limita definovaných výše spotových úrokových sazeb, pro všechna t platí

$$\begin{aligned} r_t &= \lim_{T \to t^+} R(t,T) \\ &= \lim_{T \to t^+} L(t,T). \end{aligned} \tag{8}$$

Dále se budeme zabývat teorií forwardových úrokových sazeb. K tomu bude potřeba definovat finanční nástroj forward rate agreement (FRA). Tento kontrakt se sjednává na mimoburzovním (over-the-counter, OTC) trhu. FRA představuje smluvní ujednání dvou stran o výměně dvou částek finančních prostředků v budoucnosti. Předmětem tohoto ujednání je dohoda o budoucí úrokové sazbě.

Forward rate agreement je určen třemi časovými okamžiky $t < T_1 < T_2$. Za t označíme den sjednání FRA. T_1 udává časovou vzdálenost ode dne sjednání FRA do začátku platnosti kontraktu, T_2 - do konce platnosti kontraktu. Například pro FRA 6×9 začíná FRA-období půl roku od času

t a trvá tři měsíce. Období $(T_2 - T_1)$ se říká FRA-období.

Kupující FRA se zajišťuje proti vzestupu úrokových sazeb v budoucnosti. Na základě sjednaného kontraktu kupující FRA zaplatí úrok vypočtený podle sjednané fixní sazby a obdrží úrok vypočtený podle platné referenční sazby odvozené od aktuální tržní spotové úrokové sazby. Prodávající FRA se naopak zajišťuje proti poklesu úrokových sazeb v budoucnosti, což znamená, že zaplatí referenční úrokovou sazbu a obdrží sjednanou fixní sazbu. Tržní spotová úroková sazba se vztahuje k FRA-období, označíme ji proto $L(T_1, T_2)$. Výše úrokového plnění z FRA se odvozuje z nominální hodnoty, která je stejná pro obě protistrany. V této práci položíme nominální hodnotu rovnou jedné.

K termínu T_2 můžeme vypočítat výši plnění z FRA z pohledu kupujícího:

$$(L(T_1, T_2) – r_{fix})(T_2 - T_1), \tag{9}$$

kde r_{fix} je sjednaná fixní úroková sazba.

V praxi se plnění z FRA oceňuje zpravidla v čase t, musí tedy být diskontováno k času t. Uděláme to ve dvou krocích. Nejdřív diskontujeme výraz 9 pomocí ceny bezkupónového dluhopisu $P(T_1, T_2)$ k termínu T_1, přitom nahradíme $L(T_1, T_2)$ výrazem 7. Dostaneme

$$1 - P(T_1, T_2) – r_{fix})(T_2 - T_1)P(T_1, T_2). \tag{10}$$

Ve druhém kroku diskontujeme pomocí ceny bezkupónového dluhopisu $P(t, T_2)$. Získáme výši plnění v čase t.

$$P(t, T_1) - P(T_1, T_2) – r_{fix})(T_2 - T_1)P(t, T_2). \tag{11}$$

K tomu, abychom spočítali forwardovou úrokovou sazbu, stačí položit výraz 11 rovný nule a vyjádřit z něj fixní sazbu r_{fix}.

Definice 6 (Forwardová úroková sazba)**.** *Nechť $F(t, T_1, T_2)$ je forwardová úroková sazba v intervalu (T_1, T_2) stanovená v čase t. Platí:*

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right). \tag{12}$$

V případě, když se interval $(T_2 - T_1)$ blíží k nule, obdržíme okamžitou forwardovou úrokovou sazbu $f(t,T)$:

$$\begin{aligned} f(t,T_1) = \lim_{T_2 \to T_1^+} F(t,T_1,T_2) &= -\lim_{T_2 \to T_1^+} \frac{1}{P(t,T_2)} \frac{P(t,T_2) - P(t,T_1)}{(T_2 - T_1)} \\ &= -\frac{1}{P(t,T_1)} \frac{\partial P(t,T_1)}{\partial T} \\ &= -\frac{\partial \ln P(t,T_1)}{\partial T_1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Z toho plyne

$$P(t,T_1) = e^{-\int_t^{T_1} f(t,u)du}. \tag{14}$$

2 Úrokové swapy

V této kapitole budeme hovořit o široce využívaném finančním nástroji – úrokovém swapu, anglicky interest rate swap (IRS). Tento kontrakt je velmi podobný forward rate agreementu, o kterém jsme vedli řeč v předchozí kapitole a je také obchodován na OTC trzích. Úrokový swap se liší od FRA hlavně tím, že na rozdíl od FRA předpokládá, že během doby platnosti kontraktu každá protistrana uskuteční sérii plateb. K definování úrokového swapu využijeme kapitoly 1.5 knihy [Brigo and Mercurio, 2006].

Základ úrokového swapu tvoří dvojstranná dohoda mezi účastníky kontraktu o vzájemných budoucích úrokových platbách, přitom jedna strana platí pohyblivou sazbu, druhá pevnou sazbu. Prodávající IRS platí úroky vypočtené podle pohyblivé úrokové sazby, čímž se zajišťuje proti poklesu úrokových sazeb. Tomuto typu swapu se říká payer swap. Kupující IRS platí úroky vypočtené podle fixní sazby, čímž se zajišťuje proti nárůstu úrokových sazeb. Tomuto typu swapu se říká receiver swap. Sérii plateb úroků vypočtených podle pohyblivé sazby budeme říkat pohyblivá noha, podle fixní sazby pevná noha.

Poté, co jsme popsali základní vlastnosti úrokového swapu, můžeme se začít věnovat jeho ocenění, respektive ocenění noh kontraktu. Označíme za N nominální hodnotu kontraktu, z níž se počítají úrokové výše plnění pro obě protistrany. Jelikož se jedná o sérii plateb, označíme časové okamžiky plateb

následujícím způsobem: T_i, kde $i = \alpha + 1, \ldots, \beta$. Další označení ponecháme stejné jako u FRA: ujednaná fixní úroková sazba r_{fix} a pohyblivá referenční úroková sazba $L(T_{i-1}, T_i)$. O pohyblivé úrokové sazbě, která se platí v čase T_i, se rozhoduje v čase T_{i-1}. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že platby úroků pohyblivé a pevné nohy se uskutečňují ve stejných časových okamžicích.

Platbu vypočtenou podle pohyblivé úrokové sazby můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$N(T_i - T_{i-1})L(T_{i-1}, T_i), \tag{15}$$

Platbu vypočtenou podle pevné úrokové sazby, formulujeme takto:

$$N(T_i - T_{i-1})r_{fix}, \tag{16}$$

kde r_{fix} je pevná úroková sazba.

Hodnota pohyblivé nohy IRS v čase $t < T_\alpha$ se vypočítá jako součet diskontovaných plateb vypočtených podle pohyblivé úrokové sazby

$$PV_{float} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i)N(T_i - T_{i-1})L(T_{i-1}, T_i). \tag{17}$$

Hodnota pevné nohy IRS v čase t se vypočítá analogicky jako součet diskontovaných plateb vypočtených podle pevné úrokové sazby

$$PV_{fix} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i)N(T_i - T_{i-1})r_{fix}. \tag{18}$$

Správně sestavená kombinace vypočítaných současných hodnot obou noh IRS odpovídá celkové hodnotě swapového kontraktu. Současná hodnota kontraktu typu payer swap (strana platí pevný úrok a přijímá pohyblivý úrok) se pak rovná

$$PV_{swap}^{payer} = PV_{float} - PV_{fix} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i)N(T_i - T_{i-1})(L(T_{i-1}, T_i) - r_{fix}). \tag{19}$$

Receiver swap (strana platí pevný úrok a přijímá pohyblivý úrok) je reverzí kontraktu typu payer swap: $PV_{swap}^{payer} = -PV_{swap}^{receiver}$. To znamená, že platí

$$PV_{swap}^{receiver} = PV_{fix} - PV_{float} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_i)N(T_i - T_{i-1})(r_{fix} - L(T_{i-1},T_i)). \tag{20}$$

Jelikož nemůžeme vědět, jakých hodnot bude nabývat pohyblivá úroková sazba $L(T_{i-1},T_i)$ v budoucnu, oceníme swap jako portfolio kontraktů forward rate agreement. Ze spotových sazeb $L(T_{i-1},T_i)$, které máme k dispozici v čase t, odvodíme forwardové sazby $F(t,T_{i-1},T_i)$ (tento proces popisuje [Hull, 2012] v kapitolách 4.5 a 4.6) a následně zaměníme $L(T_{i-1},T_i)$ na $F(t,T_{i-1},T_i)$, čímž za použití definice 12 získáme:

$$PV_{swap}^{payer} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_i)N(T_i - T_{i-1})(F(t,T_{i-1},T_i) - r_{fix}) \tag{21}$$

$$PV_{swap}^{receiver} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_i)N(T_i - T_{i-1})(r_{fix} - F(t,T_{i-1},T_i)). \tag{22}$$

V okamžiku vstupu do swapového kontraktu se současná hodnota tohoto kontraktu rovná nule. Položme $PV_{float} = PV_{fix}$ a vyřešíme rovnici $PV_{swap}^{payer} = 0$ nebo $PV_{swap}^{receiver} = 0$ pro odpovídající pevnou sazbu r_{fix}. Tímto definujeme forwardovou swapovou úrokovou sazbu.

Definice 7 (Forwardová swapová úroková sazba)**.** *Forwardová swapová sazba $S(t,T_\alpha,T_\beta)$ v čase $t, t \leq T_\alpha < T_\beta$ je sazba pevné nohy kontraktu IRS, pro kterou platí:*

$$S(t,T_\alpha,T_\beta) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}(T_i - T_{i-1})P(t,T_i)}. \tag{23}$$

3 Opce

Úvod do teorie opcí budeme definovat podle kapitol 10 a 13 knihy [Hull, 2012]. Základní statistický aparát potřebný k odvození hodnoty opce a oceňovacích modelů zavedeme pomocí přílohy C knihy [Brigo and Mercurio, 2006]. Opce je finančním nástrojem, který představuje dohodu o provedení obchodu v budoucnu. Rozlišujeme dva

základní typy opcí. Call opce je smlouva, která dává držiteli opce právo (neukládá mu však povinnost) koupit konkrétní aktivum (tzv. podkladové aktivum) za konkrétní cenu, v konkretně stanoveném čase nebo časovém období. Put opce je ekvivalentní call opci s tím rozdílem, že dává právo podkladové aktivum prodat. Podkladovým aktivem mohou být akcie, komodity, měny nebo i jiný finanční instrument. Předem dohodnuté ceně, za kterou se dá koupit (prodat) podkladové aktivum, se říká realizační cena (anglicky strike price), označíme ji K. Předem dohodnutý čas, kdy nebo do kdy se získává právo koupit (prodat), se označuje jako doba splatnosti opce (anglicky expiration time), značíme T. Cenu podkladového aktiva značíme $S_t, t = 1, ..., T$.

Podle umístění realizační ceny K vzhledem k aktuální ceně podkladového aktiva S_t může opce nabývat pozici:

- na penězích (at-the-money) - pro držitele call opce platí, že $S_t = K$,
- v penězích (in-the-money) - pro držitele call opce platí, že $S_t > K$,
- mimo peníze (out-of-money) - pro držitele call opce platí, že $S_t < K$.

Specifika opce závisí na jejím druhu. Evropská prodejní opce umožňuje její uplatnění pouze v době splatnosti. Americká opce může být uplatněna kdykoli během stanovené časové lhůty až do dne splatnosti opce včetně. Hodnota opce je vždy nezáporná, a následně se zaměříme na to, jak se tato hodnota odvozuje.

3.1 Oceňování opcí

Za nejvýznamnější oceňovací model se považuje Black-Scholesův model (model sestrojili ekonomové Black a Scholes a publikovali jej v roce 1973). Tento model byl původně vytvořen k oceňování evropských kupních a prodejních opcí, jejichž podkladovými aktivy byly akcie společnosti nevyplácející dividendy. Model popišeme na základě kapitoly 14 knihy [Hull, 2012].

Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a nechť $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ je náhodný proces.

Systém sigma-algeber $\{\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}, 0 \leq t \leq T\}$, takový, že pro $s < t, 0 \leq s \leq T$ platí $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, nazýváme filtrací.

Nechť $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ je náhodný proces, kde X_t je $\mathcal{F}_t$-měřitelná. Říkáme, že náhodný proces $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ je $\mathcal{F}$-adaptovaný pro každé t.

Podmíněnou střední hodnotu X_t označíme $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{G}]$, kde $\mathcal{G} \in \mathcal{F}_t$ a zároveň je $\mathcal{G}$ σ-algebrou. $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[X_t]$, jelikož v čase $t = 0$ nedisponujeme informacemi, a $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_t] = X_t$, jelikož X_t je $\mathcal{F}_t$-měřitelná, to znamená, X_t je známá. Tento princip umožňuje zadefinovat fundamentální koncept finanční matematiky - martingal (dále dle kapitoly 27 knihy [Hull, 2012]).

Definice 8 (Martingal)**.** *Náhodný proces* $(X_t, t \in T)$ *definovaný na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *je* $\mathcal{F}$*-adaptovaný pro nějakou filtraci* $(\mathcal{F}_t, t \in T)$*. Řekneme, že* $(X_t, t \in T)$ *je martingal vzhledem k filtraci* $(\mathcal{F}_s, s \in T)$*, jestliže*

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{24}$$

Jedním z nejdůležitějších předpokladů při odvozování ceny opce je neexistence arbitrážní příležitosti. Neexistence arbitrážní příležitosti znamená, že různé finanční instrumenty se stejnou výnosností musí mít stejnou cenu k dnešnímu dni. Očekávaná výnosnost investic tedy není ovlivněna rizikem a je určena bezrizikovou úrokovou sazbou r_t. Tohoto principu využili i Black a Scholes při odvozování svého modelu.

Ekonomický předpoklad neexistence arbitráže se dá vyjádřit matematicky pomocí rizikově neutrální martingalové míry Q s tím, že se jako numéraire[1] použije bankovní účet $B(t)$:

$$X_t = \mathbb{E}_Q[D(t,T)X_T|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{25}$$

Jinými slovy při rizikově neutrální pravděpodobnosti Q je hodnota X_t vyjádřena v jednotkách bankovního účtu $B(t)$, přitom $\frac{X_T}{B(t)} \Longleftrightarrow D(t,T)X_T$ je martingalem pro míru Q. To znamená, že pro rizikově neutrální míru Q se hodnota X_t rovná diskontované očekávané hodnotě X_T pro všechny

[1] Numéraire představuje aktivum, k jehož hodnotě vyjadřujeme hodnotu všech ostatních aktiv v modelu.

informace známé v období $(0, T)$.

Jako vhodné numéraire může být zvoleno jakékoli jiné aktivum. V této situaci mluvíme o změně numéraire. Technika změny numéraire spočívá v tom, že hodnotu bankovního účtu $B(t)$ nahradíme hodnotou jiného aktiva (označíme ji N_t). Předpokládejme tedy, že existuje numéraire N_t a pravděpodobnostní míra Q^N, ekvivalentní pravděpodobnostní míře Q, přitom výraz $\frac{X_t}{N_t}$je martingal. Pro náhodný proces X_t pak platí:

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_{Q^N}\left[\frac{X_T}{N_T}\Big|\mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{26}$$

Definice 9 (Wienerův proces)**.** *Wienerův proces $\{W_t, t \geq 0\}$ je náhodný proces s normálním rozdělením $\mathcal{N}(0, t)$ s vlastnostmi:*

- $W_0 = 0$
- *přírůstky procesu $\{W_t, t \geq 0\}$ jsou nezávislé náhodné veličiny*
- *nezávislé přírůstky $\{W_t - W_s, 0 \leq s \leq t\}$ mají normální rozdělení $\mathcal{N}(0, t - s)$.*

Věta 1 (Martingalová reprezentační věta)**.** *Nechť W_t, $0 \leq t \leq T$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $\mathcal{F}_t$, $0 \leq t \leq T$ je filtrace generovaná procesem W_t. Nechť $M_t, 0 \leq t \leq T$ je martingal vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t$. Pak existuje $\mathcal{F}_t$-adaptovaný náhodný proces $C_u, 0 \leq u \leq T$ takový, že*

$$M_t = M_0 + \int_0^t C_u dW_u, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{27}$$

neboli

$$dM_t = C_t dW_t. \tag{28}$$

Tato věta říká, že vývoj martingalu M_t se dá vyjádřit pomocí Wienerova procesu vynásobeného nějakým procesem C_t.

3.2 Black-Scholesův model

Rovnice 25 udává hodnotu evropské opce na akcii nevyplácející dividendy. Formulujeme:

$$V(t) = D(t, T)\mathbb{E}_Q[V(T)|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T, \tag{29}$$

kde $V(t)$ je cena opce v čase t, platí $V(T) = [a * (S_T - K)]^+$; $V(t)$ je call opcí pro $a = 1$ nebo put opcí pro $a = -1$.

Podle rovnice 25 také platí, že

$$S_0 = \mathbb{E}_Q[D(0,t)S_t|\mathcal{F}_t] \tag{30}$$

pro rizikově neutrální míru Q. Z toho vyplývá, že hodnota $D(0,t)S_t$ je martingalem, což znamená, že při odvozeni Black-Scholesova modelu můžeme uplatnit martingalovou reprezentační větu. Platí:

$$dD(0,t)S_t = C_t dW_t, \quad D(0,0)S_0 = s \tag{31}$$

kde C_t je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný náhodný proces a W_t je Wienerův proces.
Pomocí Itoovy formule (podrobně popsané v kapitole 12 knihy [Hull, 2012] a za určitých předpokladů[2] dospějeme k rovnici

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad S_0 = s, \tag{32}$$

kde μ je očekávaná výnosnost aktiva (nebo drift) a σ je volatilita aktiva. První část rovnice obsahuje deterministickou funkci času a odráží očekávanou míru růstu ceny aktiva. Druhá část rovnice je prezentována pomocí stochastického procesu a odráží skutečnost, že se cena aktiva vyvíjí zcela náhodně. Rovnice 32 je nejvyužívanějším modelem vývoje ceny aktiva. Předpokládáme, že $\frac{dS_t}{S_t}$ má normální rozdělení, tedy platí $\frac{dS_t}{S_t} \sim \mathcal{N}(\mu dt, \sigma^2 dt)$. Po aplikaci Itoovy formule získáváme:

$$\ln S_t \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right), \tag{33}$$

kde S_t je cena aktiva v budoucím čase T a S_0 je cena aktiva v čase 0. Vidíme, že výraz $\ln S_t$ má normální rozdělení, v důsledku čehož platí, že S_t má lognormální rozdělení.

[2] 1. Bezriziková úroková sazba je konstantní a je stejná v průběhu života opce. 2. Cena akci sleduje Wienerův proces s konstantní volatilitou. 3. Neexistence dividend v průběhu života opce. 4. Neexistence daní a transakčních nákladů při nákupu a prodeji. 5. Short selling je povolen. 6. Neexistence arbitrážních příležitostí. 7. Obchodování probíhá kontinuálně.

Black-Scholesův model za uvedených předpokladů udává formuli pro ocenění evropské call opce v čase t:

$$V_{call}(t) = S_t \Phi(d_1) - D(t,T) K \Phi(d_2), \tag{34}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r_t + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{35}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{36}$$

Funkce $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce normálního rozdělení.

4 Swapce

Nyní, když jsme obeznámení s pojmy swap a opce, můžeme definovat swapci, která je kombinací obou. K definování a oceňování swapce použijeme kapitolu 28 v [Hull, 2012] a kapitolu 1.6 v [Brigo and Mercurio, 2006]. Swapcí nazýváme opci na úrokový swap. Jedná se tedy o opci, jejímž podkladovým aktivem je swapový kontrakt. Kupující swapce získá právo (nikoli povinnost) k určitému budoucímu datu uzavřít nebo naopak zrušit úrokový swap a za toto právo zaplatí prodávajícímu swapce opční prémium.

Důvodem vstupu do swapce je pochopitelně snaha vyhnout se rizikům souvisejícím s vývojem budoucích úrokových měr. Uvažujme společnost, která uchází o kontrakt na výstavbu továrny. Tato zakázka, pokud ji tato společnost získá, si vyžádá financování pětiletým úvěrem s pohyblivou úrokovou sazbou. Společnost dává přednost financování za pevnou úrokovou sazbu namísto proměnlivé, a v tomto případě si vyhledá swapového partnera, aby s ním uzavřela swapový kontrakt.

Výsledky výběrového řízení budou však vyhlášeny až za šest měsíců. Ekonomické prognózy přitom předpovídají zvýšení úrokových sazeb během těchto šesti měsíců. Management společnosti sice nechce uzavřít swap dnes pro případ, že by firma uvedený kontrakt nezískala; rád by však zajistil financování za dnešních podmínek v budoucnosti pro případ, že firma bude ve výběrovém řízení úspěšná. V tomto případě si koupí šestiměsíční opci na

pětiletý swap, který umožní vyměňovat pohyblivou sazbu 6M LIBOR za pevnou sazbu (např. 8%) v období pěti let začínajícím za šest měsíců. Jestli společnost zvítězí ve výběrovém řízení v čase za šest měsíců a swapová sazba bude v tomto okamžiku vyšší než 8%, společnost uplatní swapci a vstoupí do swapu. Jestliže společnost získá kontrakt a swapová sazba bude nižší než 8%, společnost nechá swapci vypršet a uzavře swap za existující nižší pevnou úrokovou sazbu.

Stejně jako u swapů, existují dva základní typy swapcí: payer swapce (s právem vstoupit do payer swapu) a receiver swapce (s právem vstoupit do receiver swapu). Payer swapce dává kupujícímu právo k uzavření swapu, na jehož základě bude kupující platit pevnou sazbu a obdrží sazbu pohyblivou. Majitel tohoto typu swapce se zajišťuje proti nárůstu úrokových sazeb. Receiver swapce dává kupujícímu právo k uzavření swapu, na jehož základě bude kupující platit pohyblivou sazbu a obdrží sazbu pevnou. Tímto typem swapce zajišťuje majitel svou pohyblivě úročenou investici. Vstup do swapu se uskuteční v okamžiku, který odpovídá dni expirace opce. Délce trvání úrokového swapu $(T_\beta - T_\alpha)$ říkáme tenor swapce.

Výplatu payer swapce diskontovanou k času t formulujeme pomocí hodnoty payer swapu, přitom si musíme uvědomit, že se payer swapce realizuje v okamžiku, kdy je hodnota payer swapu kladná. Máme proto:

$$PV_{swapce}^{payer} = ND(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i)(T_i - T_{i-1})(F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - r_{fix}) \right)^+ . \tag{37}$$

O payer swapci se řekne, že je na penězích (at-the-money) tehdy a jenom tehdy, pokud platí:

$$r_{fix} = S(0, T_\alpha, T_\beta) = \frac{P(0, T_\alpha) - P(0, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) P(0, T_i)}. \tag{38}$$

V předložené práci se budeme zabývat oceněním swapcí. Začneme tím, že představíme Black-76 model (dle kapitoly 28 knihy [Hull, 2012]), který je denně využíván k oceňování swapcí v bankách, pojišťovnách a konzultačních firmách.

4.1 Black-76 model

Black-76 model je rozšířením Black-Sholesova modelu. Toto rozšíření umožňuje ocenit opce, jejichž podkladovým aktivem je forwardová úroková sazba. Black-76 model tak primárně pracuje s forwardovou cenou a je díky tomu standardním nástrojem oceňování úrokových derivátů jako například opce na dluhopis, cap, floor nebo swapce (opce na úrokový swap).

K odvozování forwardové ceny je potřeba zavést jiné numéraire. Pro forwardovou rizikově neutrální martingalovou míru Q^T se jako vhodné numéraire jeví cena bezkupónového dluhopisu $P(t,T)$:

$$\frac{F_t}{P(t,T)} = \mathbb{E}_{Q^T}\left[\frac{F_T}{P(T,T)}\Big|\mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{39}$$

Na tomto místě se opět obrátíme k martingalové reprezentační větě 1, která udává vývoj forwardové ceny pro forwardovou míru Q^T pomocí následující rovnice:

$$F_t = C_t dW_t, \quad F_0 = f. \tag{40}$$

Black-76 model předpokládá, že se koeficient C_t rovná $\sigma_t F_t$. Oproti Black-Sholesovu modelu jsou v Black-76 modelu splněny dvě podmínky navíc: nulový drift a volatilita závislá na čase. Model vývoje ceny pro F_t sestavíme analogicky s modelem vývoje spotové ceny aktiva (rovnice 32):

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma_t dW_t, \quad F_0 = f, \tag{41}$$

kde σ_t je volatilita závislá na čase a W_t je Wienerův proces.

Za předpokladu, že forwardová úroková sazba F_t má lognormální rozdělení, Black-76 přeformuluje cenu evropské call opce (rovnice 34) v čase t:

$$V_{call}(t) = P(t,T)\left[F_t\Phi\left(d_1\right) - K\Phi\left(d_2\right)\right], \tag{42}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(F_t/K) + (r_t + \sigma_t^2/2)(T-t)}{\sigma_t\sqrt{T-t}}, \tag{43}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_t\sqrt{T-t}. \tag{44}$$

Funkce $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce normálního rozdělení.

Jak jsme si již řekli, swapce je opce, jejímž podkladovým aktivem je úrokový swap. Při oceňování swapce se předpokládá, že swapová úroková sazba $S(t, T_\alpha, T_\beta)$ má v čase expirace opce lognormální rozdělení. Jako numéraire použijeme tzv. anuitu:

$$A(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) P(t, T_i). \tag{45}$$

Pak cenu payer swapce v čase 0 můžeme pomocí Black-76 modelu formulovat takto:

$$V_{swapce}^{payer}(0) = NA(0)\left[S(0, T_\alpha, T_\beta)\Phi(d_1) - r_{fix}\Phi(d_2)\right], \tag{46}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S(0, T_\alpha, T_\beta)/r_{fix}) + (\sigma_t^2/2)(T-t)}{\sigma_t\sqrt{T-t}}, \tag{47}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_t\sqrt{T-t}. \tag{48}$$

5 Volatilita

Důležitým parametrem při oceňování derivátů, s nímž jsme se již setkali v předchozím výkladu, je volatilita. Volatilita σ měří nejistotu, že bude dosaženo požadovaného výnosu. Volatilita může být definována jako směrodatná odchylka výnosů za jeden rok, přitom výnos je vyjadřován pomocí spojitého úročení. Jeden z přístupů k modelování volatility uvádí [Hull, 2012] v kapitole 19.

Volatilitu můžeme odhadovat z historických dat. Nechť $S_i, i = 0, 1, ..., n$ cena aktiva na konci i-tého intervalu, $n+1$ počet pozorování, τ délka intervalu v letech. Položme

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \tag{49}$$

pro $i = 1, ..., n$.

Odhad směrodatné odchylky pro u_i je

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}. \tag{50}$$

Odhadovaná volatilita je pak dána výrazem

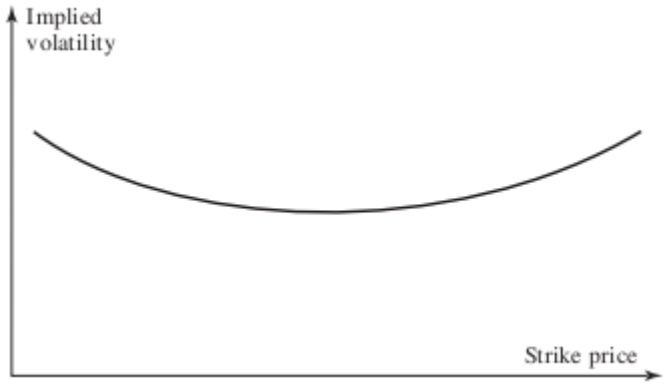
$$\frac{s}{\sqrt{\tau}}. \tag{51}$$

Volatilita podkladového aktiva je jedním ze vstupních parametrů Black-Sholesova modelu při výpočtu ceny opce. Cenu spočítanou na základě Black-Sholesova modelu můžeme porovnat s tržní cenou opce. Pokud nejsou tyto ceny totožné, vložíme tržní cenu opce do modelu a získáme zpětným iteračním výpočtem volatilitu implikovanou touto tržní cenou. Implikovaná volatilita je na rozdíl od historické volatility orientována na kolísavost ceny podkladového aktiva v budoucnosti, proto bývá spolu s opční cenou často využívána při kótování.

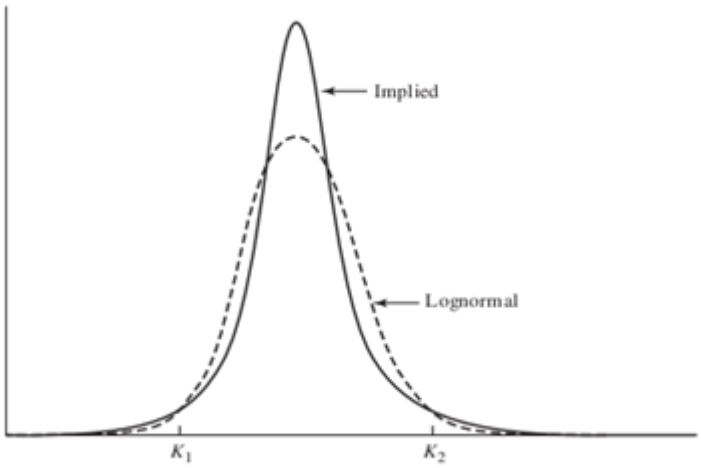
V případě, kdybychom dosadili do Black-Scholesova modelu tržní ceny opcí se stejnou dobou expirace při různých realizačních cenách, získáme implikované volatility, které nebudou totožné. Pokud zaneseme hodnoty implikovaných volatilit v závislosti na realizačních cenách do grafu, dostali bychom křivku, které se říká volatility smile. Tento jev můžeme pozorovat na následujícím obrázku 1. Implikovaná volatilita je nižší pro opce na penězích a vyšší pro opce v penězích a mimo peníze.

Pomocí volatility smilu můžeme odvodit rozdělení ceny podkladového aktiva pro časový okamžik T. Říkáme tomu implikované rozdělení. Volatility smile na obrázku 1 odpovídá implikovanému rozdělení (zobrazeno pomocí spojité čáry) na obrázku 2. Lognormální rozdělení (zobrazeno pomocí přerušované čáry) se stejnou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou, které předpokládá využití Black-Sholesova modelu, vypadá poněkud odlišně: implikované rozdělení je špičatější a má tlustší chvosty. Volatility smile nám tedy poukazuje na to, že předpoklad lognormálního rozdělení vede k podhodnocování pravděpodobnosti extrémních výkyvů cen. Lognormální rozdělení cen podkladového aktiva může být splněno za dvou podmínek:

- volatilita podkladového aktiva je konstantní,



Obrázek 1: Volatility smile
[Hull, 2012]



Obrázek 2: Implikované a lognormální rozdělení
[Hull, 2012]

- pohyb ceny je plynulý a bez skoků.

Ani jedna z těchto podmínek nemůže být dodržena v praxi. Je tedy potřeba zvolit jiný přístup, jehož základní myšlenkou bude zaměřit se na modelování implikovaného rozdělení a implikované volatility.

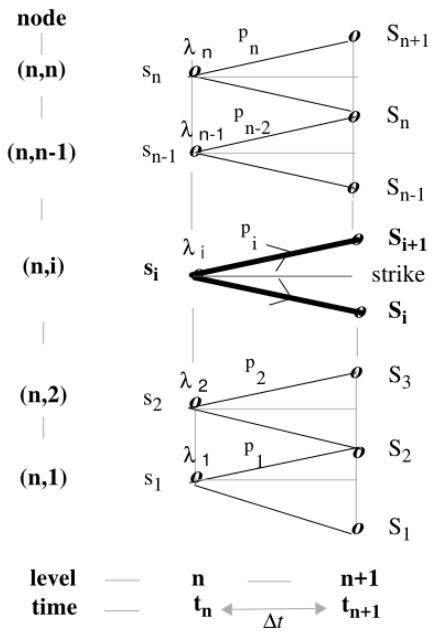
6 Lokální volatilita

První kroky na cestě k modelování volatility smilu udělali [Dupire, 1994] a následně [Derman and Kani, 1994], když vytvořili model lokální volatility. Model předpokládá, že koeficient C_t z rovnice vývoje forwardové ceny 40 je markovovský: $C_t = C(t, F_t)$ a rovná se $\sigma_{loc}(t, F_t)F_t$. Pak pro forwardovou míru Q^T platí:

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma_{loc}(t, F_t)dW_t, \quad F_0 = f, \tag{52}$$

kde $\sigma_{loc}(t, F_t)$ je volatilita závislá na čase a forwardové ceně F_t (neboli funkce lokální volatility) a W_t je Wienerův proces. Naším cílem je odvodit funkci lokální volatility tak, aby opční ceny vypočítané pomocí modelu, odpovídaly tržnímu volatility smilu.

[Derman and Kani, 1994] používají techniku oceňování opcí pomocí binomického modelu. Pracujeme s tzv. implikovaným stromem (obrázek 3), ve kterém opční ceny pro všechna K a T určují pozici každého uzlu v implikovaném stromu a pravděpodobnost, se kterou se do tohoto uzlu dostaneme.



Obrázek 3: Úroveň n a $n+1$ v implikovaném stromu [Derman and Kani, 1994]

Předpokládejme, že máme k dispozici n úrovní implikovaného stromu, jejichž uzly odpovídají implikovaným volatilitám všech opcí pro všechna K v čase t_n. Známou cenu podkladového aktiva na úrovni n označíme $s_i, i = 1, \ldots, n$. Potřebujeme stanovit uzly implikovaného stromu na úrovni $n+1$ v čase t_{n+1}. Vycházíme z i-tého uzlu na úrovni n (značíme (n, i)) a pohybem směrem nahoru skončíme v uzlu s neznámou cenou podkladového aktiva S_{i+1} (budeme říkat up uzel), pohybem směrem dolů – v uzlu s neznámou cenou podkladového aktiva S_i (budeme říkat down uzel). p_i je pravděpodobnost, se kterou se uskuteční pohyb z uzlu (n, i) do uzlu $(n+1, i+1)$. Každému uzlu (n, i) také přiřadíme známou Arrow-Debreu cenu λ_i.

Implikovaný strom je rizikově neutrální. To znamená, že očekávaná hodnota s_i na úrovni $n+1$ se bude rovnat forwardové ceně podkladového aktiva (označíme F_i). Dostáváme se k soustavě n rovnic, kde pro každé i $= 1, \ldots, n$ platí:

$$F_i = p_i S_{i+1} + (1 - p_i) S_i, \tag{53}$$

kde F_i je známá forwardová cena. Uvedená soustava rovnic společně s rovnicí 53 určuje pravděpodobnosti p_i a cenu S_i (v tomto případě uvažujeme put opci) nebo S_{i+1} (uvažujeme call opci).

Nechť $C(s_i, t_{n+1})$ je známá hodnota call opce, $T = t_{n+1}$. V každém uzlu binomického stromu můžeme spočítat teoretickou hodnotu této opce pro realizační cenu K pomocí Arrow-Debreu ceny λ_j:

$$C(K, t_{n+1}) = e^{-r_t \Delta t} \left(S_{j+1} - K\right)^+ \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j p_j + \lambda_{j+1}(1 - p_{j+1})\right). \tag{54}$$

Pokud položíme $K = s_i$, zdůrazníme tím první up uzel v pozici v penězích:

$$e^{r_t \Delta t} C(s_i, t_{n+1}) = \lambda_i p_i (S_{i+1} - s_i) + \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_j (F_j - s_i). \tag{55}$$

Jelikož F_i a $C(s_i, t_{n+1})$ jsou známé z volatility smilu, vyřešíme rovnice 53 a 55 ve vztahu k s_i:

$$S_{i+1} = \frac{S_i \left[e^{r_t \Delta t} C(s_i, t_{n+1}) - \Sigma\right] - \lambda_i s_i (F_i - S_i)}{\left[e^{r_t \Delta t} C(s_i, t_{n+1}) - \Sigma\right] - \lambda_i (F_i - S_i)}, \tag{56}$$

$$p_i = \frac{F_i - S_i}{S_{i+1} - S_i}, \tag{57}$$

kde $\Sigma = \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_j (F_j - s_i)$.

Nechť $P(s_i, t_{n+1})$ je známá hodnota put opce, $T = t_{n+1}$. Analogickým způsobem vypočítáme S_i:

$$S_i = \frac{S_{i+1}\left[e^{r_t \Delta t} P(s_i, t_{n+1}) - \Sigma\right] + \lambda_i s_i (F_i - S_{i+1})}{\left[e^{r_t \Delta t} C(s_i, t_{n+1}) - \Sigma\right] + \lambda_i (F_i - S_{i+1})}, \tag{58}$$

kde $\Sigma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (F_j - s_i)$.

Pak implikovaná volatilita pro každý uzel je:

$$\sigma_i = \sqrt{p_i(1 - p_i)} \log \frac{S_{i+1}}{S_i}. \tag{59}$$

[Hagan et al., 2002] se poprvé zamysleli nad dynamikou modelu lokální volatility. Za tímto účelem zjednodušili původní model tím, že vynechali faktor času, čímž ziskali rovnici

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma_{loc}(F_t) dW_t, \quad F_0 = f. \tag{60}$$

[Hagan and Woodward, 1999] analyzovali model 60 pomocí techniky singulární perturbace, čímž získali tržní implikovanou volatilitu (označíme ji $\sigma_B(f, K)$), která je jedním z parametru Black-76 modelu (viz 41):

$$\sigma_B(f, K) = \sigma_{loc}\left(\frac{f + K}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{24} \frac{\frac{d^2 \sigma_{loc}}{df^2}\left(\frac{f+K}{2}\right)}{\sigma_{loc}\left(\frac{f+K}{2}\right)} (f - K)^2 + \ldots\right]. \tag{61}$$

Výraz $\sigma_{loc}\left(\frac{f+K}{2}\right)$ nejvýznamněji přispívá k hodnotě $\sigma_B(f, K)$, proto [Hagan and Woodward, 1999] nadále uvažuje rovnici 61 v zjednodušeném tvaru

$$\sigma_B(f, K) = \sigma_{loc}\left(\frac{f + K}{2}\right). \tag{62}$$

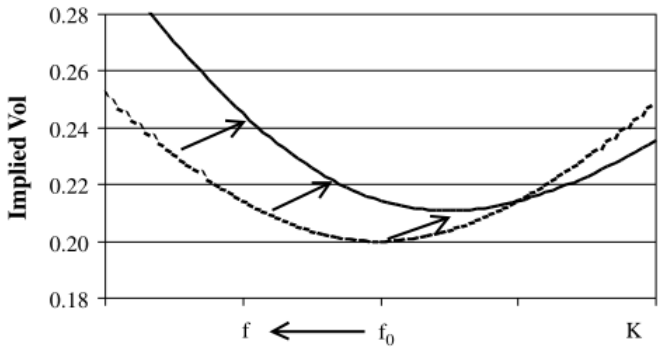
Implikovaná volatilita je závislá na forwardové ceně f a realizační ceně K. Nechť dnešní forwardová cena je f_0. Při kalibraci modelu na tržní data vyjadříme lokální volatilitu $\sigma_{loc}(F_t)$ pomocí implikované volatility v čase 0 (značíme $\sigma_B^0(f_0, K)$). Dostaneme

$$\sigma_{loc}(F_t) = \sigma_B^0 (2F_t - f_0)(1 + \ldots). \tag{63}$$

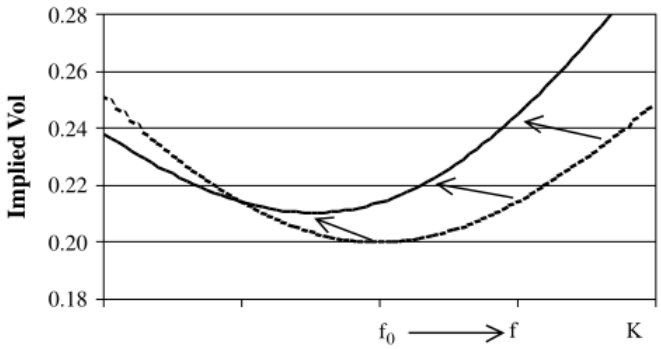
Dalším krokem je zhodnotit předpovídající schopnost kalibrovaného modelu lokální volatility. Za hodnotu f_0 dosadíme jinou (novou) hodnotu f, čímž získáme novou předpověď implikované volatility:

$$\sigma_B(f, K) = \sigma_B^0(K + f - f_0)(1 + \ldots). \tag{64}$$

To nám poukazuje na jednu velmi důležitou vlastnost modelu lokální volatility. Na obrázcích 4 a 5 vidíme, že křivka implikované volatility $\sigma_B(f, K)$ se pohybuje opačně, než jak se pohybuje cena podkladového aktiva f a navíc se ještě v obou případech posouvá nahoru.



Obrázek 4: Pohyb implikované volatility $\sigma_B(f, K)$ při poklesu f [Hagan et al., 2002]



Obrázek 5: Pohyb implikované volatility $\sigma_B(f, K)$ při růstu f [Hagan et al., 2002]

Tato vlastnost je v rozporu s tím, jak se chová reálný trh. V této situaci [Hagan et al., 2002] museli konstatovat, že model lokální volatility nedokáže správně předpovědět dynamiku smilu. Tento problém se vyřešil pomocí dvoufaktorového SABR modelu, kterému se budeme věnovat v následujícím výkladu.

7 SABR model

Cílem SABR modelu je nejenom vystihnout tvar volatility smilu, ale také předpovědět jeho dynamiku. Výstupem modelu tedy není samotná cena finančního derivátu, ale odhad implikovaných volatilit, které dosadíme do Black-76 modelu a tím získáme hledanou cenu. SABR model je vhodný pro modelování volatility smilu u derivátů, které mají jen jedno expirační datum. K takovým derivátům patří například i swapce.

SABR je akronym, utvořený ze slov Stochastic, Alpha, Beta, Rho. Jedná se o dvoufaktorový model, který předpokládá, že se koeficient C_t z rovnice 40 rovná $\alpha_t F_t^\beta$, a navíc uvažuje o volatilitě α_t jako o stochastickém procesu. Při forwardové míře Q^T je forwardová cena řízena soustavou stochastických rovnic:

$$dF_t = \alpha_t F_t^\beta dW_t^1, \quad F_0 = f \tag{65}$$

$$d\alpha_t = \nu \alpha_t dW_t^2, \quad \alpha_0 = \alpha \tag{66}$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt, \tag{67}$$

kde Wienerovy procesy dW_t^1 a dW_t^2 jsou korelovány korelačním koeficientem ρ.

V příloze článku [Hagan et al., 2002] je analyzován SABR model pomocí techniky singulární perturbace. Implikovaná volatilita $\sigma_B(f, K)$ se pák rovná:

$$\sigma_B(f, K) \simeq U\left(\frac{z}{x(z)}\right) V, \tag{68}$$

kde

$$U = \alpha \left\{ (fK)^{(1-\beta)/2} \left[1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 \left(\frac{f}{K} \right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 \left(\frac{f}{K} \right) \right] \right\}^{-1} \tag{69}$$

$$V = \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho\beta\nu\alpha}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T + ... \right\}, \tag{70}$$

kde

$$z = \frac{\nu}{\alpha} (fK)^{(1-\beta)/2} \log(f/K), \tag{71}$$

$$x(z) = \log \left\{ \frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right\}. \tag{72}$$

Pro speciální případ opce v pozici na penězích se výraz zjednoduší v důsledku konvergence $\log(f/K)$ k nule:

$$\sigma_B(f,f) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}} \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{f^{(2-2\beta)}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\nu\alpha}{f^{(1-\beta)}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T + ... \right\}. \tag{73}$$

Křivka implikované volatility $\sigma_B(f,K)$ s měnícím se argumentem K při pevném f zobrazuje hledaný volatility smile, zatímco křivka $\sigma_B(f,f)$ s měnícím se argumentem $K = f$ zobrazí tzv. páteř smilu (anglicky backbone). Výraz $\frac{\alpha}{f^{1-\beta}}$ nejvýznamněji přispívá k hodnotě $\sigma_B(f,f)$, proto [Hagan et al., 2002] nadále uvažuje rovnici **??** v zjednodušeném tvaru. Logaritmováním rovnice **??** získáme:

$$\log \sigma_B(f,f) \approx \log \alpha - \log (1-\beta) f, \tag{74}$$

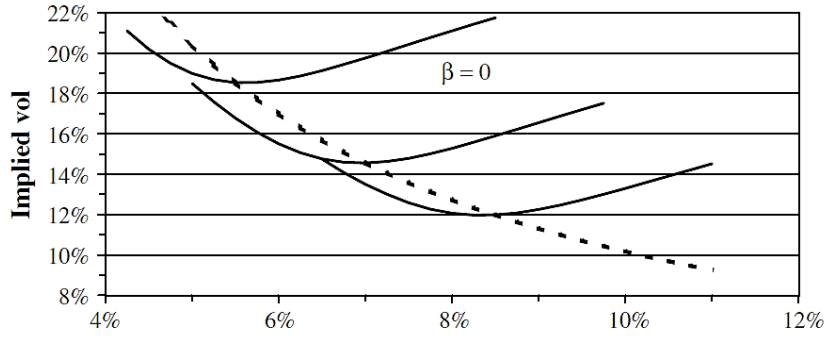
z toho plyne:

$$\sigma_B(f,f) \approx \frac{\alpha}{f^{(1-\beta)}}. \tag{75}$$

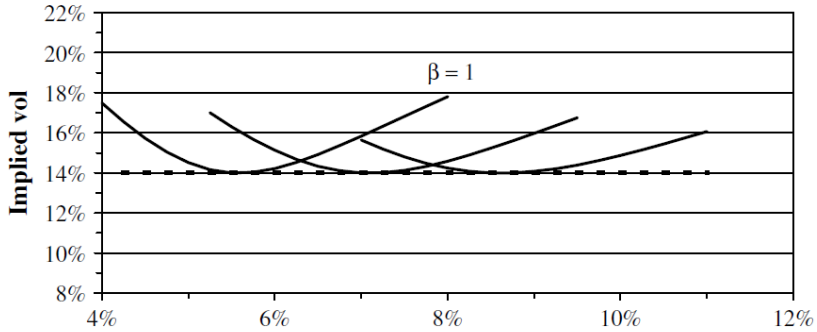
Vidíme, že dynamika páteře je nejvíc závislá na parametru β. Na následujících obrázcích 6 a 7 můžeme vidět, jak vypadá tvar páteře při změně parametru f: pro $\beta = 0$ je prudce klesající, pro $\beta = 1$ je téměř vodorovný.

7.1 Kalibrace modelu

Implikovaná volatilita $\sigma_B(f,K)$ s měnícím se argumentem K při pevném f vyžaduje odhadování parametrů α, β, ρ, ν takovým způsobem, aby se mo-



Obrázek 6: Páteř pro $\beta = 0$
[Hagan et al., 2002]



Obrázek 7: Páteř pro $\beta = 1$
[Hagan et al., 2002]

delovaný volatility smile co nejvíce přibližoval tomu tržnímu. V této podkapitole budeme věnovat pozornost teorii kalibrace SABR modelu. Kalibraci provádíme metodou nejmenších čtverců: řešíme

$$\min_{\alpha,\beta,\rho,\nu} \sum_i \left(\hat{\sigma}_i - \sigma_B(\alpha, \beta, \rho, \nu, f, K_i)\right)^2, \tag{76}$$

kde $\hat{\sigma}_i$ je implikovaná tržní volatilita a $\sigma_B(\alpha, \beta, \rho, \nu, f, K_i)$ je implikovaná volatilita jako výsledek SABR modelu, respektive funkce vstupních parametrů pro SABR model. Jako první parametr se stanoví parametr β, čímž se určí implikovaná volatilita v pozici na penězích. Pomocí metody nejmenších čtverců získáme následně parametry α, ρ a ν.

7.1.1 Parametr β

Již víme, že parametr β souvisí s chováním páteře smilu. Při odhadování tohoto parametru bychom proto mohli využít rovnice 74 a časových řad pro $\sigma_B(f, f)$ a f. Nicméně, v praxi je parametr β velice často stanoven na základě preference uživatele. To nám umožňuje fakt, že kvalita kalibrace volatility smilu zůstává stejná při různých zvolených variantách β, β významně neovlivní tvar volatility smilu. V této práci budeme uvažovat tři varianty: $\beta = 0$, $\beta = 0{,}5$, $\beta = 1$.

Varianta $\beta = 0$ transformuje SABR model do stochastického normálního modelu, $\beta = 0{,}5$ – do stochastického modelu typu CIR, varianta $\beta = 1$ – do stochastického lognormálního modelu. Hodnoty parametru $\beta = 0{,}5$ a $\beta = 1$ se liší od $\beta = 0$ hlavně tím, že neumožňují forwardové ceně F_t se stát zápornou.

7.1.2 Parametry α, ρ, ν

Ve chvíli, když budeme mít parametr pevně stanovený β, můžeme se začít věnovat odhadování ostatních parametrů SABR modelu. Odhadování parametrů α, ν, ρ můžeme provádět dvěma různými způsoby. První způsob (dále způsob 1) je jednoduchý a spočívá v minimalizaci rozdílu mezi tržní a modelovanou volatilitou. Opět využijeme metody nejmenších čtverců:

$$\min_{\alpha,\rho,\nu} \sum_i \left(\hat{\sigma}_i - \sigma_B(\alpha, \rho, \nu, f, K_i)\right)^2 . \tag{77}$$

Argumenty α, ρ, ν získáme přímo pomocí iterační numerické metody.

Druhý způsob (dále způsob 2) můžeme matematicky vyjádřit následujícím způsobem:

$$\min_{\rho,\nu} \sum_i \left(\hat{\sigma}_i - \sigma_B(\alpha(\rho, \nu), \rho, \nu, f, K_i)\right)^2 . \tag{78}$$

To znamená, že se nejdřív odhadnou parametry ρ a ν, a následně odvodíme pomocí rovnice 73 parametr α. α je v tomto případě kořenem kubické rovnice:

$$\left[\frac{(1-\beta)^2 T}{24 f^{2-2\beta}}\right] \alpha^3 + \left[\frac{\rho, \beta, \nu, T}{4 f^{1-\beta}}\right] \alpha^2 + \left[1 + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \nu^2 T\right] \alpha - \sigma_B(f, f) f^{1-\beta} = 0. \tag{79}$$

Tabulka 1: Parametry SABR modelu pro 1Y1Y swapci

	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 2	0,02894	0,5	-0,19231	0,53044	0,00007

Získáme-li více než jeden reálný kořen, volíme nejmenší kladný kořen a tím máme všechny parametry odhadnuté [West, 2004].

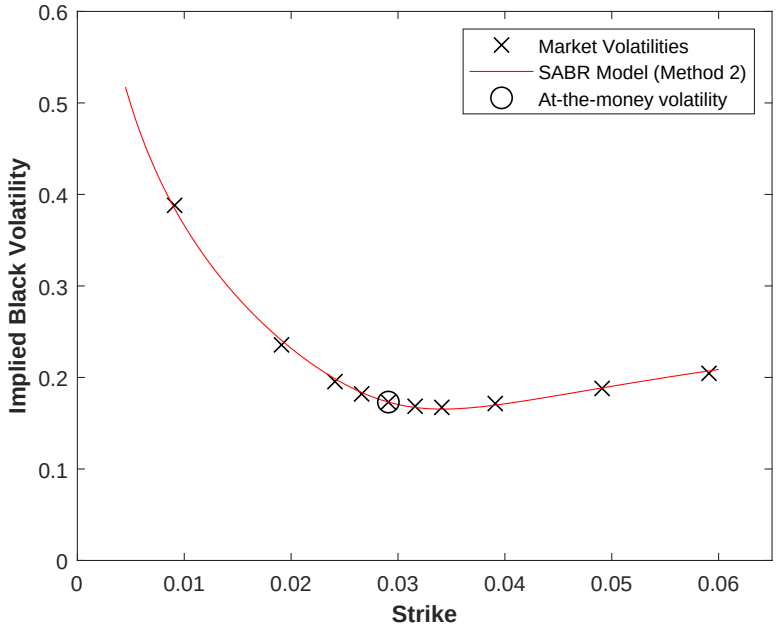
7.2 Parametry SABR modelu

V této podkapitole budeme blíž zkoumat parametry SABR modelu a jejich dynamiku. Zaměříme se především na to, jak přispívají jednotlivé parametry kvalitě konstruovaného modelu a ovlivňují tvar volatility smilu. Také se zamyslíme nad tím, jakých hodnot můžou parametry nabývat a jaké to může mít důsledky. Níže představíme SABR model kalibrovaný na tržní data. Následně budeme vždy měnit jeden parametr, přitom ostatní parametry zůstanou neměnné. Tímto způsobem můžeme zkoumat jednotlivé parametry zvlášť. V následující tabulce 1 uvádíme soubor hodnot parametrů $\{\alpha, \beta, \rho, \nu, \epsilon$[3]$\}$, který jsme obdrželi po kalibraci SABR modelu způsobem 2 na implikované volatility pro 1Y1Y swapci v empirické části diplomové práce. Na obrázku 8 můžeme vidět tržní implikované volatility a křivku volatility smilu odhadnutou SABR modelem.

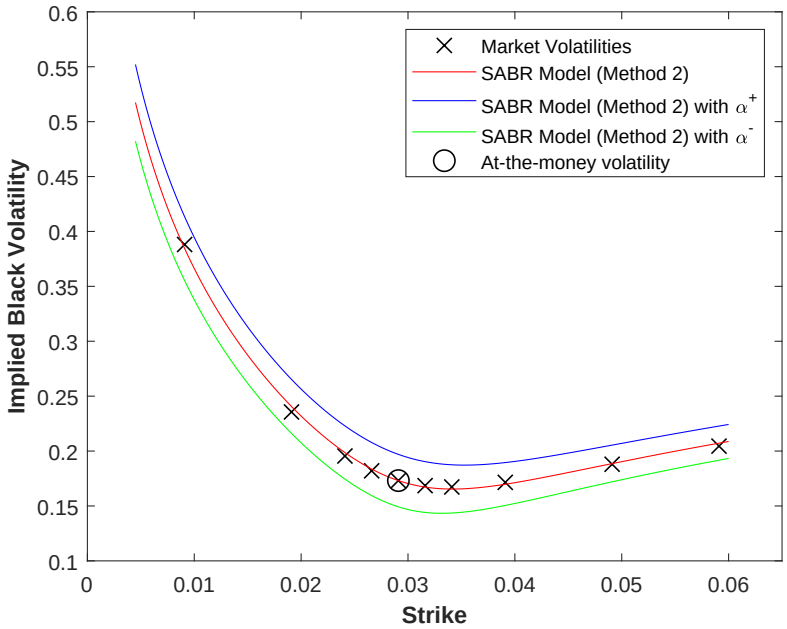
7.2.1 Parametr α

Parametr α je stochastický parametr SABR modelu. Hodnotu tohoto parametru jsme upravili přičtením a odečtením čísla 0,004. Na obrázku 9 můžeme vidět, že zvýšení parametru α posouvá křivku volatility smilu nahoru, zatímco snížení parametru α posouvá křivku dolů. Parametr má vliv na vertikální polohu křivky, v důsledku čehož platí $\alpha > 0$ – vyhneme se tak záporné volatilitě. Tvar volatility smilu není změnou parametru α významně ovlivněn.

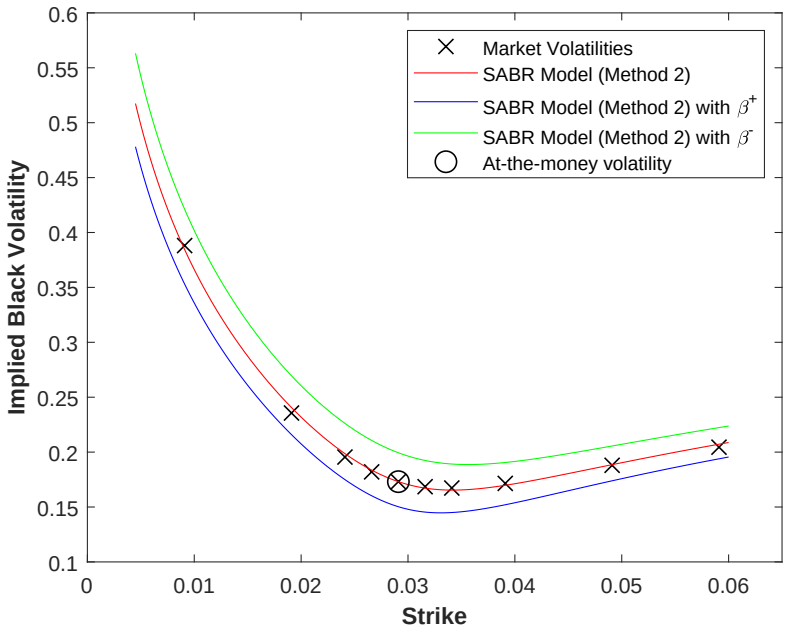
[3] Chyba odhadu $\epsilon = \sum_i (\hat{\sigma}_i - \sigma_B(f, K_i))^2$



Obrázek 8: SABR model kalibrovaný pro 1Y1Y swapci



Obrázek 9: Dynamika parametru α



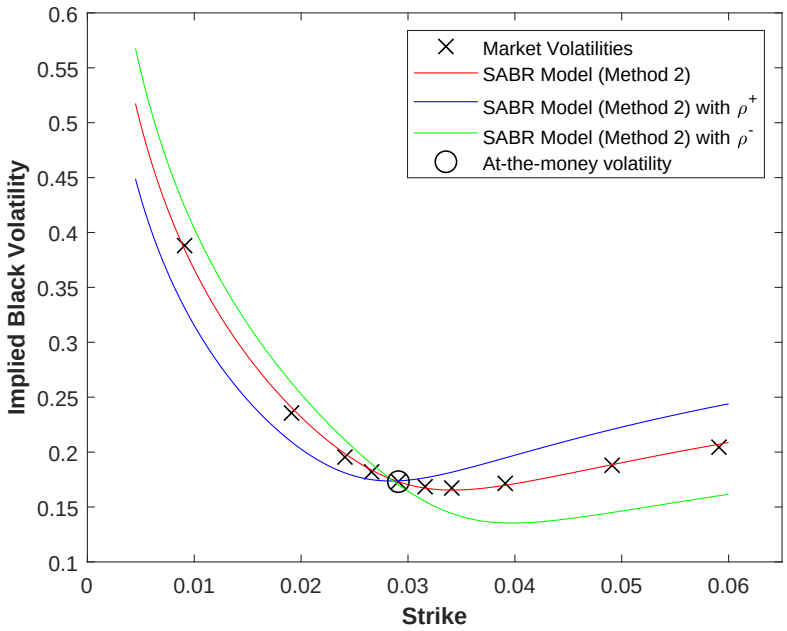
Obrázek 10: Dynamika parametru β

7.2.2 Parametr β

Parametr β je exponentem forwardové ceny F_t. Obor hodnot tohoto parametru je $\beta \in [0, 1]$. Dřív jsme uvedli, že změna parametru β má vliv na chování páteře volatility smilu. Na obrázku 10 můžeme pozorovat, jak ovlivňuje volatility smile změna hodnoty β o 0,04 na obě strany. Je zřejmé, že změna β ovlivní polohu smilu opačným způsobem než změna parametru α: při zvýšení parametru β se křivka volatility smilu posouvá nahoru, při snížení dolů. Zároveň si povšimneme, že vyšší hodnota parametru β dělá křivku užší, ostřejší, zatímco nižší hodnota širší, rovnější.

7.2.3 Parametr ρ

Parametr ρ je korelačním koeficientem mezi dW_t^1 a dW_t^2, proto platí $\rho \in [-1, 1]$. Původní hodnotu parametru ρ zvýšíme a snížíme o 0,4. Na obrázku 11 vidíme, že se křivka volatility smilu otáčí kolem ATM bodu. Při snížení hodnoty parametru se křivka otáčí proti směru hodinových ručiček a stává se užší a ostřejší, při zvýšení hodnoty se otáčí po směru hodinových ručiček a stává se širší a rovnější.



Obrázek 11: Dynamika parametru ρ

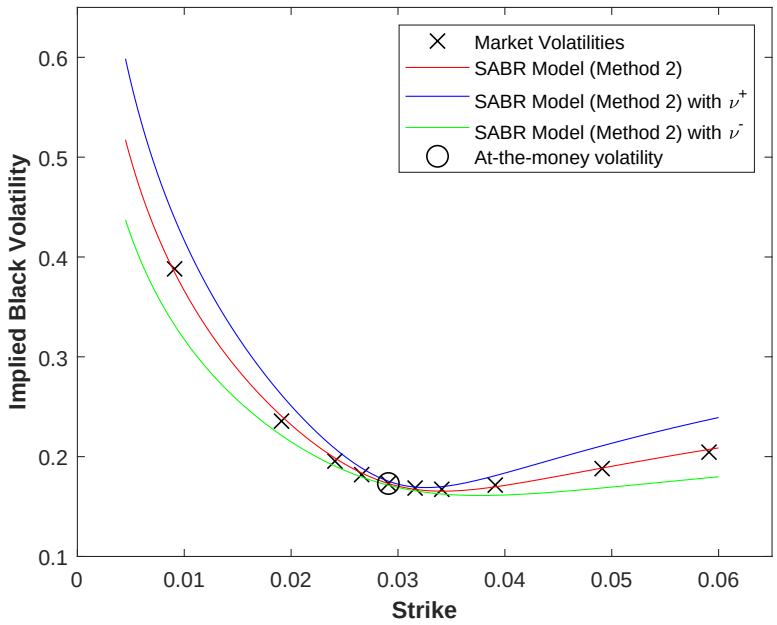
7.2.4 Parametr ν

Parametru ν se říká volatilita volatility. Po volatilitě se běžně požaduje, aby byla kladná, dá se proto tvrdit, že platí $\nu > 0$. Hodnotu parametru ν měníme o hodnotu 0,15 na obě strany. Na obrázku 12 můžeme vidět, že při zvýšení parametru ν obdržíme užší a ostřejší křivku, která leží nad původní křivkou volatility smilu, při snížení parametru ν širší a rovnější křivku, která leží pod křivkou volatility smilu, přičemž tvar křivky se mění v ATM bodě.

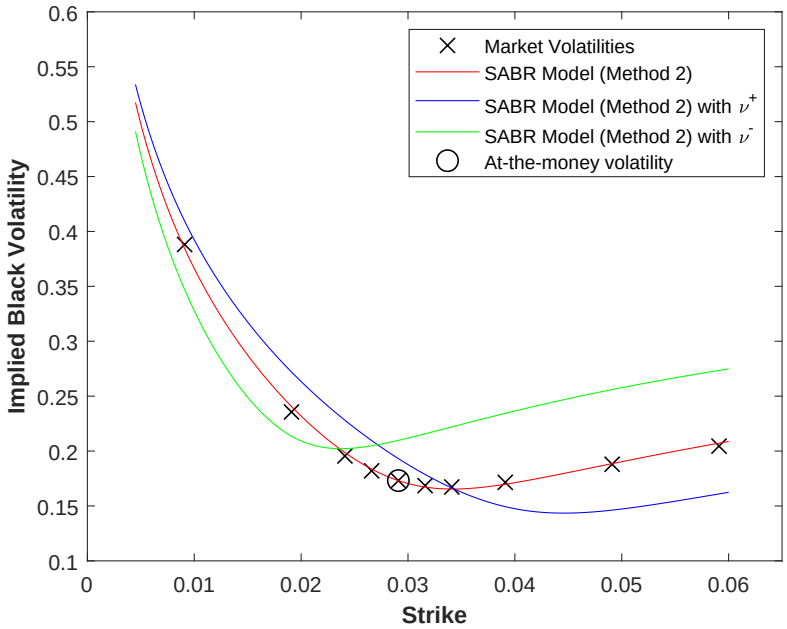
7.2.5 Parametr f

Na závěr se zaměříme na to, jak se změní křivka volatility smilu při změně parametru f. Problém, se kterým jsme se setkali u modelů lokální volatility byl ten, že se křivka modelované volatility posunula opačným směrem než parametr f. Na obrázku 13 vidíme, že SABR model předpovídá dynamiku volatility smilu správně: při zvýšení hodnoty f se křivka volatility smilu posouvá doleva, při snížení hodnoty f doprava, což odpovídá situaci na trhu.

Z této studie jsme vypozorovali, že všechny parametry svým způsobem



Obrázek 12: Dynamika parametru ν



Obrázek 13: Dynamika parametru f

ovlivňují křivku volatility smilu, přitom některé parametry mají společné vlastnosti. Parametry α a β posouvají volatility smile nahoru a dolů. Parametry β a ν mají vliv na zakřivení volatility smilu. Parametr ρ otáčí křivku, čímž ovlivní jak polohu, tak zakřivení volatility smilu.

8 Aplikace SABR modelu

Jako ilustraci aplikace SABR modelu kalibrujeme model na tržní implikované volatility, které byly získány pomocí Black-Scholes modelu. Tržní data včetně realizačních cen byly staženy z portálu Bloomberg ve formátu swaption volatility cube (viz Příloha). To znamená, že budeme zkoumat kvalitu kalibrace modelu pro swapce, které mají různé délky expirace opce (1M, 1Y, 10Y, 20Y, 30Y) a různé tenory swapu (1Y, 10Y, 20Y, 30Y). Budeme uvažovat tři varianty parametrů $\beta = 0$, $\beta =$0,5 a $\beta = 1$ a následně použijeme dva způsoby kalibrace zbývajících parametrů, které jsme uvedli v teoretické části. Výpočty jsou prováděny pomocí softwaru MATLAB. Kód, který byl použit při výpočtech, byl z velké části převzít z internetových stránek [MathWorks, 2018].

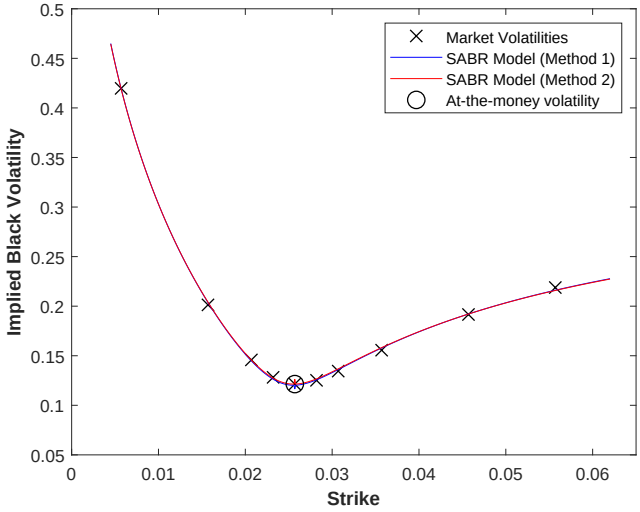
8.1 Swapce typu xx1Y

V této podkapitole se zaměříme na výsledky kalibrace SABR modelu pro swapce s tenorem 1 rok, přitom zvážíme všechny délky expirace, které máme k dispozici.

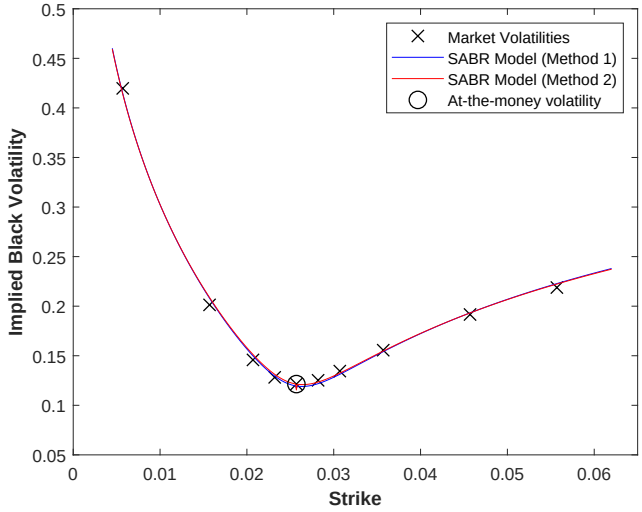
8.1.1 Swapce typu 1M1Y

Jako první si zobrazíme grafické a numerické výsledky kalibrace pro swapci s délkou expirace 1 měsíc.

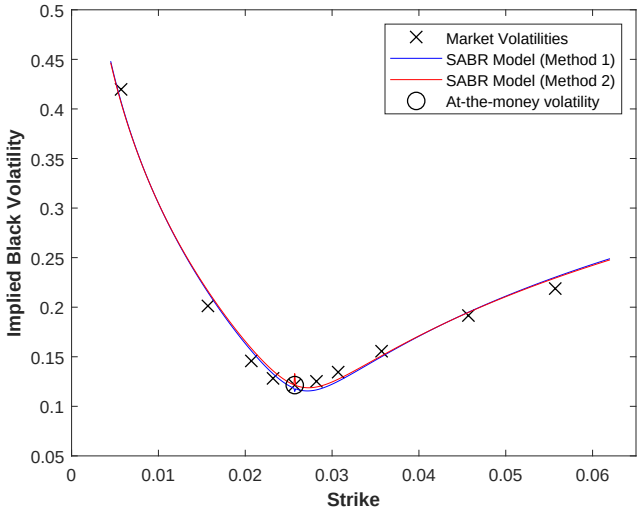
Na obrázcích 14, 15 a 16 vidíme, že SABR model perfektně odhadl volatility smile pro swapci typu 1M1Y, přičemž mezi způsobem 1 a způsobem 2 není vidět patrný rozdíl. To nám potvrzují i chyby odhadu v tabulce 2, které jsou téměř stejné nezávisle na tom, jaký způsob kalibrace používáme. Nejlépe dopadla kalibrace modelu s volbou parametru $\beta = 0$, následuje $\beta = 0{,}5$, výrazně hůř dopadla kalibrace s parametrem $\beta = 1$. Celkově se dá říci, že



Obrázek 14: 1M1Y, $\beta = 0$



Obrázek 15: 1M1Y, $\beta = 0{,}5$



Obrázek 16: 1M1Y, $\beta = 1$

Tabulka 2: Parametry SABR modelu pro 1M1Y swapci

	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,00308	0,0	0,19075	0,69745	0,00003
Způsob 2	0,00311	0,0	0,19152	0,69155	0,00003
Způsob 1	0,01909	0,5	-0,01618	0,69962	0,00013
Způsob 2	0,0194	0,5	-0,01761	0,69013	0,00015
Způsob 1	0,11764	1,0	-0,23464	0,74542	0,00081
Způsob 2	0,12105	1,0	-0,24066	0,72931	0,00086

Tabulka 3: Parametry SABR modelu pro 1Y1Y swapci

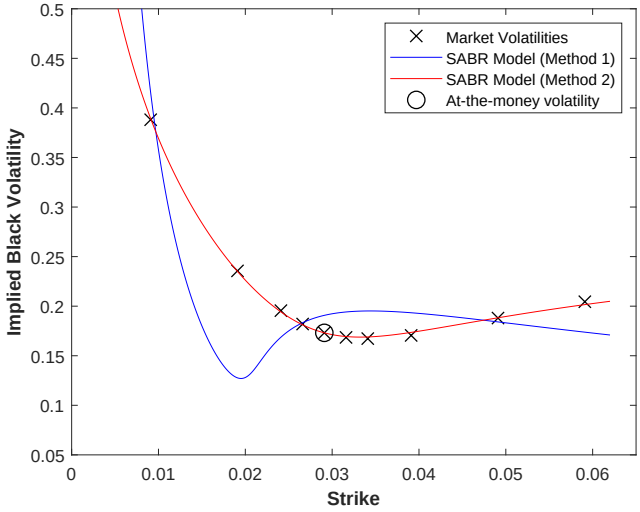
	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,04525	0,0	0,9787	0,51835	0,01629
Způsob 2	0,00493	0,0	0,07804	0,50336	0,00002
Způsob 1	0,02882	0,5	-0,19168	0,53359	0,00006
Způsob 2	0,02894	0,5	-0,19231	0,53044	0,00007
Způsob 1	0,17065	1,0	-0,42185	0,59674	0,00044
Způsob 2	0,17126	1,0	-0,42319	0,59427	0,00045

výsledky kalibrace pro typ 1M1Y jsou velice uspokojivé.

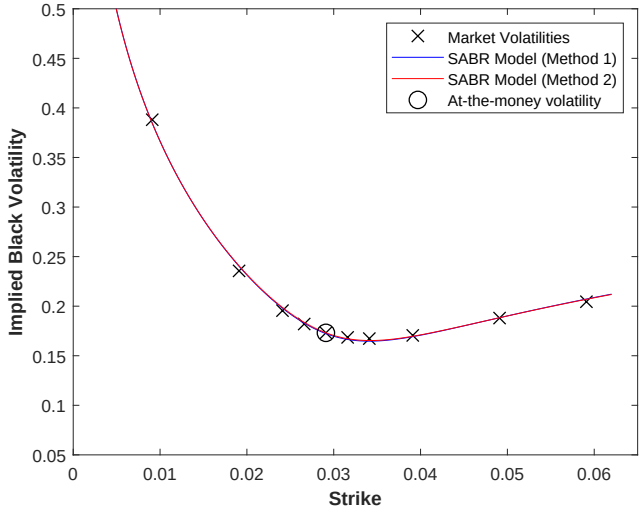
8.1.2 Swapce typu 1Y1Y

Zobrazíme si výsledky kalibrace modelu pro swapci s délkou expirace 1 rok.

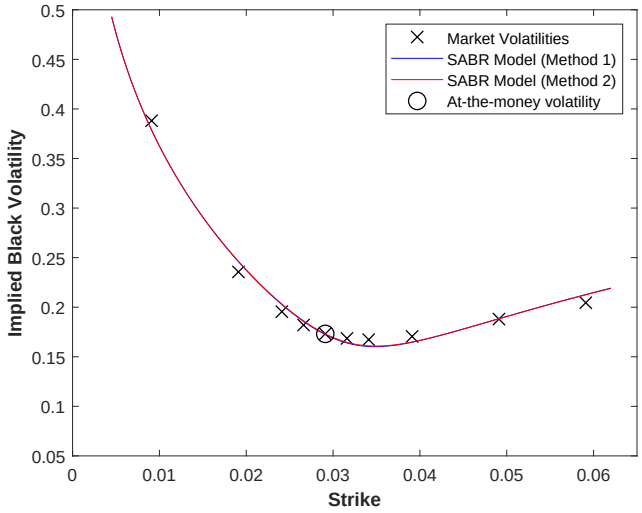
Výsledek kalibrace pro swapci typu 1Y1Y již není ideální, ale hodně podobný tomu, co jsme získali pro typ 1M1Y. Na obrázku 17 vidíme, že způsob 1 selhává při volbě $\beta = 0$. Potvrzuje to i hodnota chyby odhadu (viz tabulka 3). Nicméně nejlepší výsledek znovu patří kalibraci způsobem 2 při volbě $\beta = 0$, chyba odhadu je v tomto případě velmi malá. Kalibrace s parametrem $\beta = 0{,}5$ a $\beta = 1$ mají horší výsledky pro oba způsoby, přitom kalibrace s $\beta = 1$ na obrázku 19 je horší o něco více než s $\beta = 0{,}5$ na obrázku 18.



Obrázek 17: 1Y1Y, $\beta = 0$



Obrázek 18: 1Y1Y, $\beta = 0{,}5$



Obrázek 19: 1Y1Y, $\beta = 1$

Tabulka 4: Parametry SABR modelu pro 10Y1Y swapci

	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,02474	0,0	0,98181	1,597	0,00032
Způsob 2	0,00744	0,0	0,99984	0,08387	0,00005
Způsob 1	0,04277	0,5	-0,39574	0,1725	0,00001
Způsob 2	0,0428	0,5	-0,39758	0,17165	0,00001
Způsob 1	0,28408	1,0	-0,6946	0,34442	0,00006
Způsob 2	0,28326	1,0	-0,69144	0,3456	0,00006

8.1.3 Swapce typu 10Y1Y

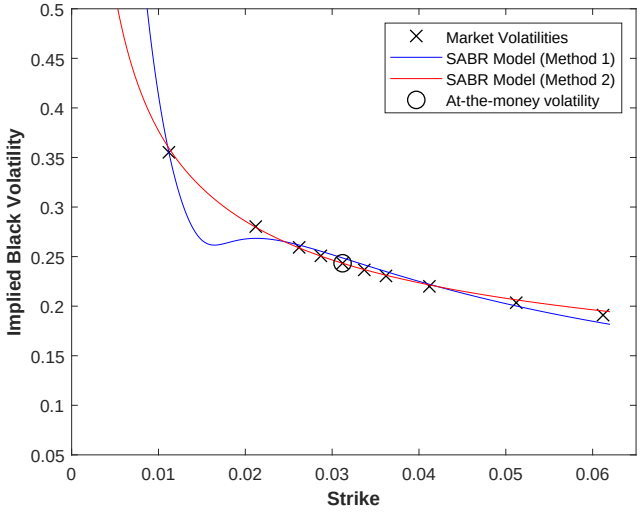
Zobrazíme si výsledky kalibrace modelu pro swapci s délkou expirace 10 let.

Výsledky kalibrace jsou opět velmi podobné předchozímu modelování. Způsob 1 s parametrem $\beta = 0$ není vhodný, což vidíme na obrázku 29. Nejlépe tenkrát dopadla kalibrace s volbou parametru $\beta = 0{,}5$ pro oba způsoby kalibrace (viz obrázek 30), má přitom velmi malou chybu odhadu (viz tabulka 4). Parametr $\beta = 1$ se opět ukázal jako nejhorší, nicméně chyba odhadu pro $\beta = 1$ již není tak kritická, jako v předchozích případech, což vidíme i na obrázku 31.

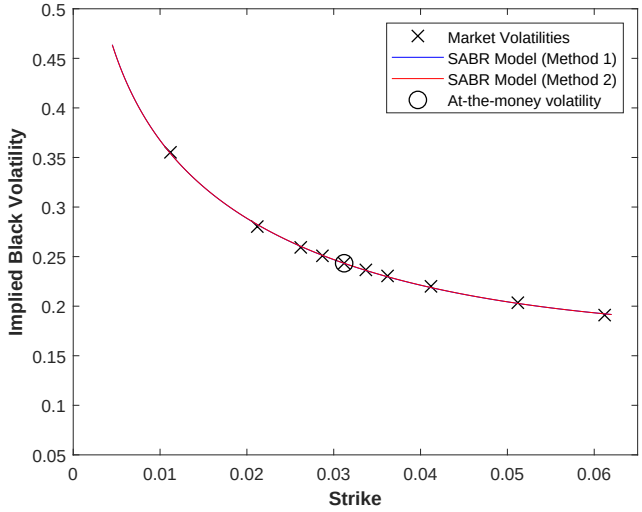
8.1.4 Swapce typu 20Y1Y

Zobrazíme si výsledky kalibrace modelu pro swapci s délkou expirace 20 let.

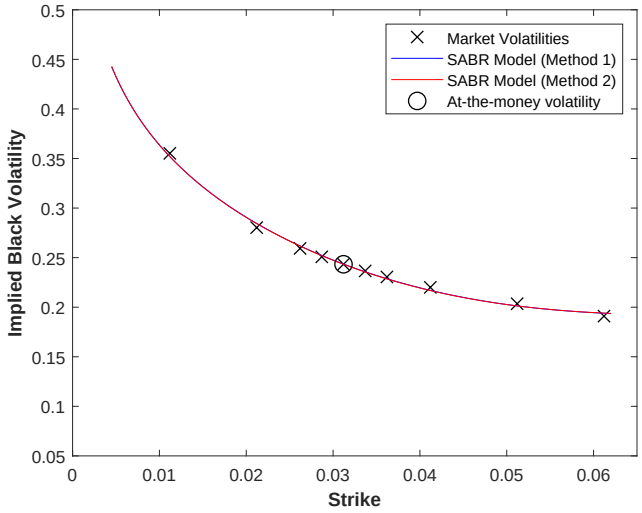
Kalibrace pro tento typ swapce se zdá být již náročnější pro SABR model. Grafické a numerické výsledky poukazují na to, že můžeme docílit úspěšné kalibrace jenom pomocí způsobu 2 při volbě $\beta = 0$ (obrázek 23) nebo $\beta = 0{,}5$ (obrázek 24). Kalibrace s parametrem $\beta = 0{,}5$ má přitom o něco menší chybu odhadu, než s parametrem $\beta = 0$ (viz tabulka 5). Kalibraci s parametrem $\beta = 1$ se nedá také uznat za vhodnou, z obrázku 25 je patrné, že tento výsledek není uspokojivý.



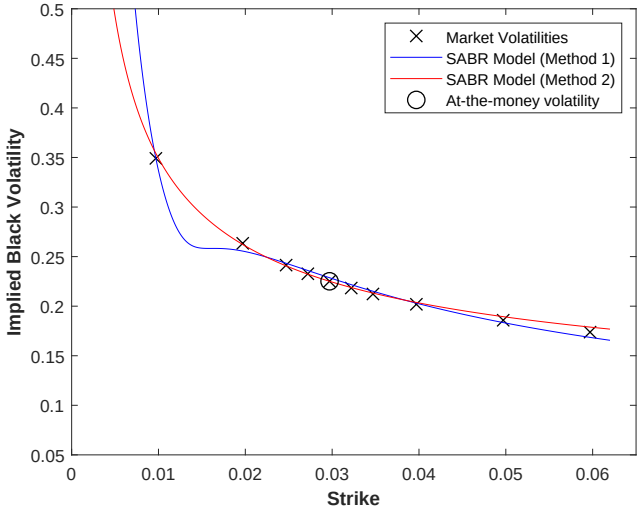
Obrázek 20: 10Y1Y, $\beta = 0$



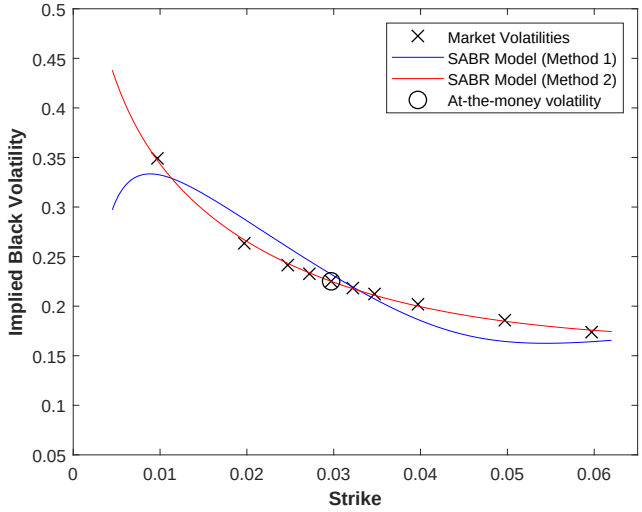
Obrázek 21: 10Y1Y, $\beta = 0{,}5$



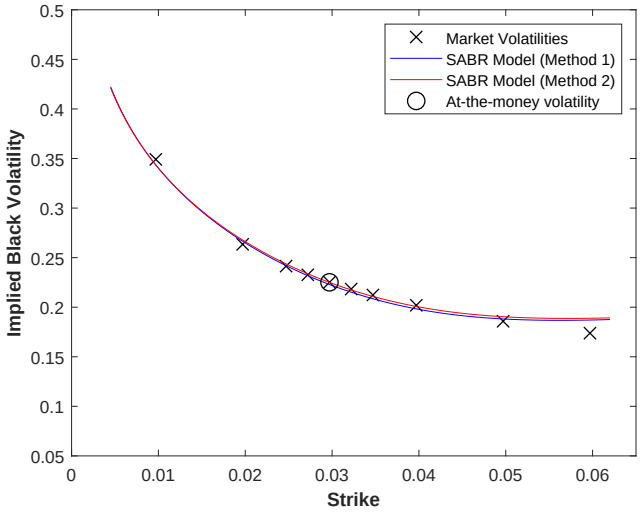
Obrázek 22: 10Y1Y, $\beta = 1$



Obrázek 23: 20Y1Y, $\beta = 0$



Obrázek 24: 20Y1Y, $\beta = 0{,}5$



Obrázek 25: 20Y1Y, $\beta = 1$

Tabulka 5: Parametry SABR modelu pro 20Y1Y swapci

	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,01775	0,0	0,98377	1,1023	0,00014
Způsob 2	0,00646	0,0	0,99921	0,07996	0,00007
Způsob 1	0,07236	0,5	-0,77151	0,70721	0,00222
Způsob 2	0,03844	0,5	-0,42032	0,18589	0,00003
Způsob 1	0,33053	1,0	-0,5476	0,52102	0,00069
Způsob 2	0,33062	1,0	-0,54031	0,48788	0,0009

Tabulka 6: Parametry SABR modelu pro 30Y1Y swapci

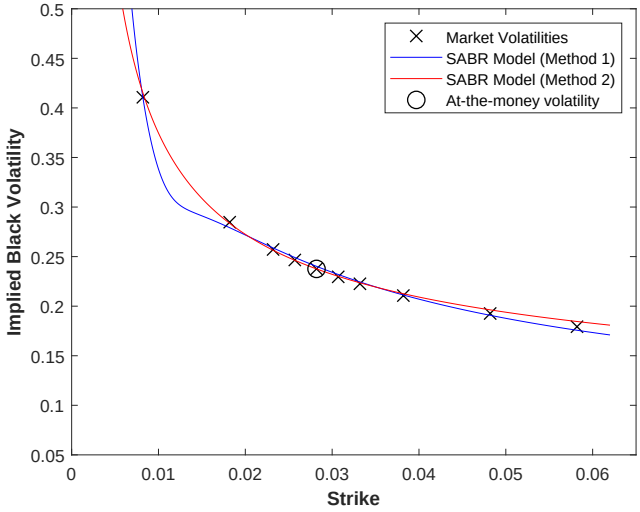
	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,01467	0,0	0,9853	0,8764	0,00007
Způsob 2	0,00635	0,0	0,99994	0,08073	0,00006
Způsob 1	0,24064	0,5	-1,0	0,25981	0,00346
Způsob 2	0,03889	0,5	-0,4671	0,26201	0,00022
Způsob 1	0,34288	1,0	-0,54435	0,63935	0,00163
Způsob 2	0,32335	1,0	-0,52873	0,55284	0,00212

8.1.5 Swapce typu 30Y1Y

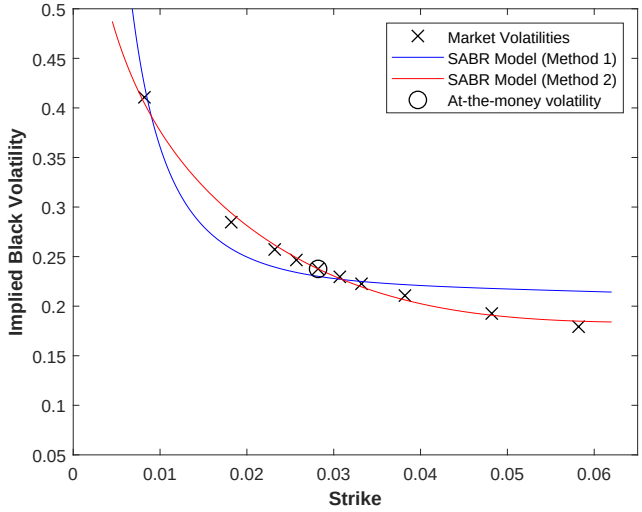
Zobrazíme si výsledky kalibrace modelu pro swapci s délkou expirace 30 let.

Na obrázcích 26, 27 nebo 28 se zdá, že grafické výsledky kalibrace jsou hodně podobné výsledkům předchozího typu swapce 20Y1Y. Když se avšak podíváme na numerické výsledky v tabulce 6, vidíme, že chyby odhadu jsou pro parametry $\beta = 0{,}5$ a $\beta = 1$ výrazně horší pro oba použité způsoby kalibrace. V tomto případě má kvalitní kalibraci jen volba parametru $\beta = 0$, přitom chyba odhadu s použitím způsobu 2 je nižší.

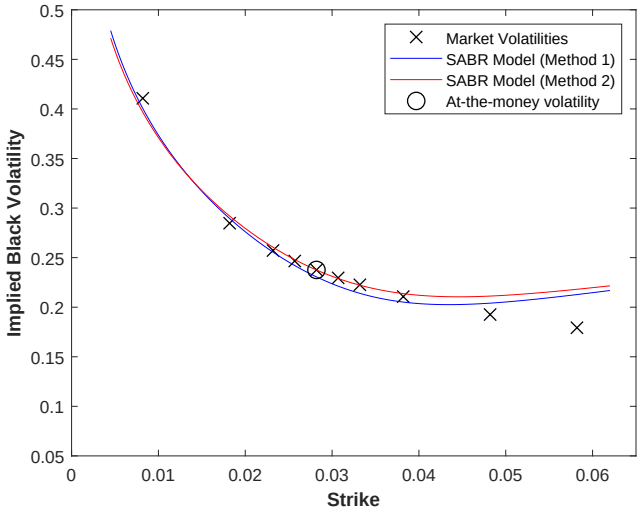
Kalibrace SABR modelu pro swapci typu xx1Y se ukázala jako efektivní způsob odhadování volatililty smilu. Nicméně musíme vzít v potaz, že kvalita odhadu se zhoršuje úměrně délce expirace opce. Pro swapci s nejkratší délkou expirace 1 měsíc funguje model dobře pro všechny varianty



Obrázek 26: 30Y1Y, $\beta = 0$



Obrázek 27: 30Y1Y, $\beta = 0{,}5$



Obrázek 28: 30Y1Y, $\beta = 1$

Tabulka 7: Parametry SABR modelu pro 1Y10Y swapci

	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,00555	0,0	0,03639	1,1041	0,00004
Způsob 2	0,00559	0,0	0,03712	1,0975	0,00004
Způsob 1	0,03202	0,5	-0,15504	1,128	0,00023
Způsob 2	0,03232	0,5	-0,15549	1,1196	0,00024
Způsob 1	0,18569	1,0	-0,33716	1,2019	0,00128
Způsob 2	0,18788	1,0	-0,33897	1,1918	0,00129

parametru β s oběma způsoby kalibrace. Pro swapci s délkou expirace 1 rok a dál není vhodná kalibrace s volbou parametru $\beta = 1$, chyba odhadu je oproti jiným hodnotám parametru příliš vysoká. Stejně tak se ne vždy osvědčila kalibrace způsobem 1: pro délku expirace 1 rok a dál je lepší použít kalibraci způsobem 2.

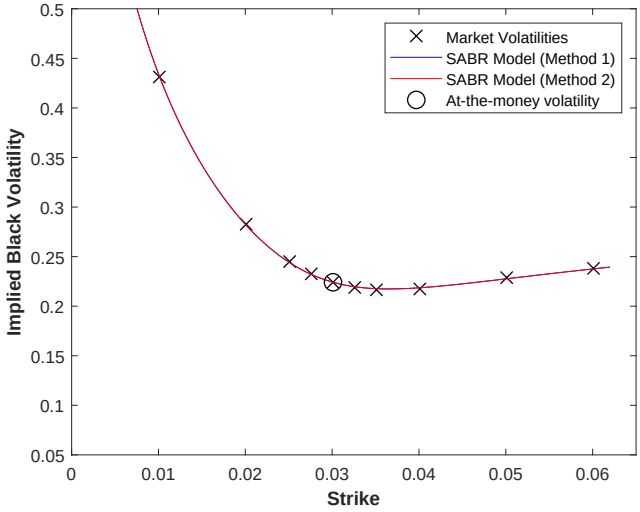
V následujících podkapitolách zkusíme kalibrovat SABR model na swapce typu xx10Y, xx20Y a xx30Y. Zamyslíme se díky tomu nad tím, jestli tenor swapu ovlivní kvalitu modelu stejně jako délka expirace opce. Nebudeme si zobrazovat výsledky pro všechny dostupné délky expirace, ale jenom pro ty, které jsou kritické pro kvalitu modelu.

8.2 Swapce typu xx10Y

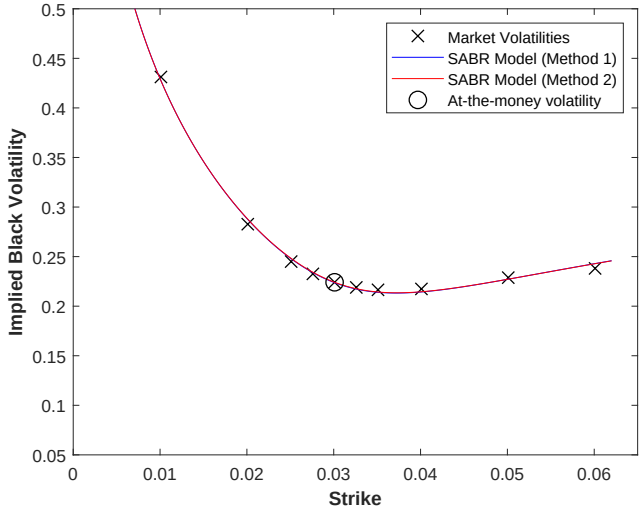
V této podkapitole se zaměříme na výsledky kalibrace SABR modelu pro swapce, jejichž tenor má 10 let. Zvážíme délky expirace 1 rok a 30 let.

8.2.1 Swapce typu 1Y10Y

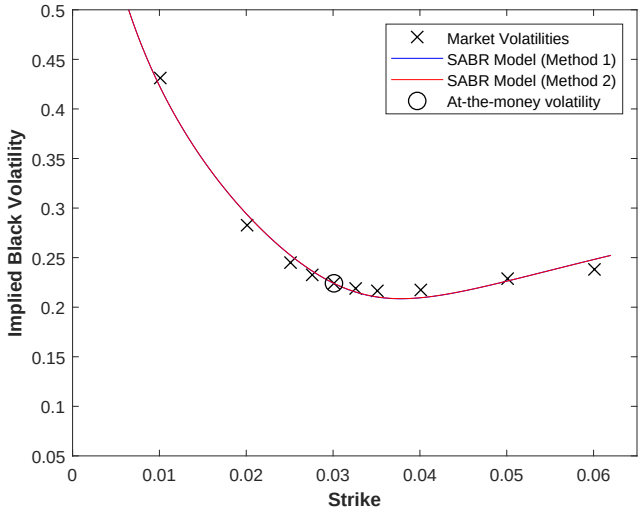
Zobrazíme si výsledky kalibrace pro swapci s délkou expirace 1 rok.
Soubor parametrů, který jsme obdrželi pomocí kalibrace pro typ swapce 1Y10Y, můžeme najít v tabulce 7. Pokud porovnáme tyto výsledky s výsledky pro swapci 1Y1Y v tabulce 3, všimneme si, že jsou si velice podobné. Totéž vidíme i na obrázcích 29, 30, 31, které odráží velice uspokojivou kalibraci SABR modelu oběma způsoby pro všechny parametry β, stejně jako v případě swapce typu 1Y1Y. Můžeme si poznamenat, že chyby odhadu pro



Obrázek 29: 1Y10Y, $\beta = 0$



Obrázek 30: 1Y10Y, $\beta = 0{,}5$



Obrázek 31: 1Y10Y, $\beta = 1$

Tabulka 8: Parametry SABR modelu pro 30Y10Y swapci

	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,02331	0,0	0,94588	1,8694	0,00301
Způsob 2	0,00562	0,0	-0,5707	0,67122	0,01708
Způsob 1	0,28536	0,5	-0,92127	0,29017	0,00007
Způsob 2	0,02828	0,5	-0,58132	0,77706	0,04457
Způsob 1	0,3386	1,0	-0,67747	1,9935	0,04489
Způsob 2	0,22314	1,0	-0,6183	1,075	0,05195

typ swapce 1Y10Y jsou o něco vyšší než pro typ swapce 1Y1Y, ne však zásadně.

8.2.2 Swapce typu 30Y10Y

Zobrazíme si výsledky kalibrace pro swapci s délkou expirace 30 let.
Kalibrace pro typ swapce 30Y10Y je výjimečná tím, že způsob 1 dosáhl lepších výsledků než způsob 2. Platí to pro $\beta = 0$ a $\beta = 0{,}5$, což vidíme na obrázcích 32 a 33. Odhadování s volbou parametru $\beta = 1$ není uspokojivé (viz obrázek 34). Poznamenáme si, že chyby odhadu (viz tabulka 8) jsou výrazně větší oproti chybám odhadu pro swapci typu 30Y1Y (viz tabulka 6) – swapci se stejnou délkou expirace opce, ale nižším tenorem swapu.

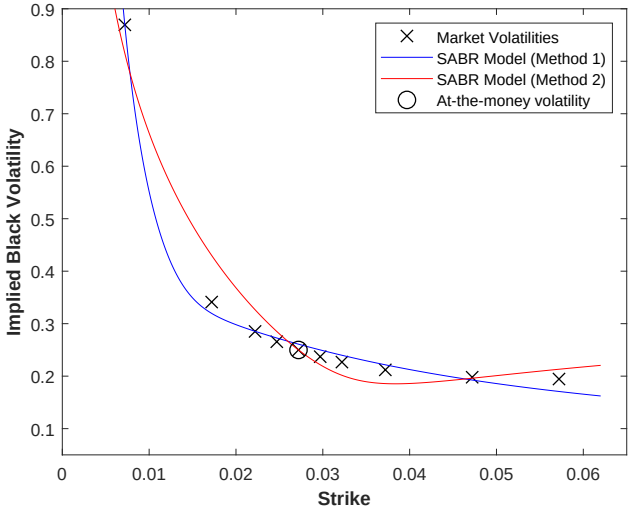
8.3 Swapce typu xx20Y

V této podkapitole se zaměříme na výsledky kalibrace SABR modelu pro swapce, jejichž tenor má 20 let. Zvážíme délky expirace 1 rok a 20 let.

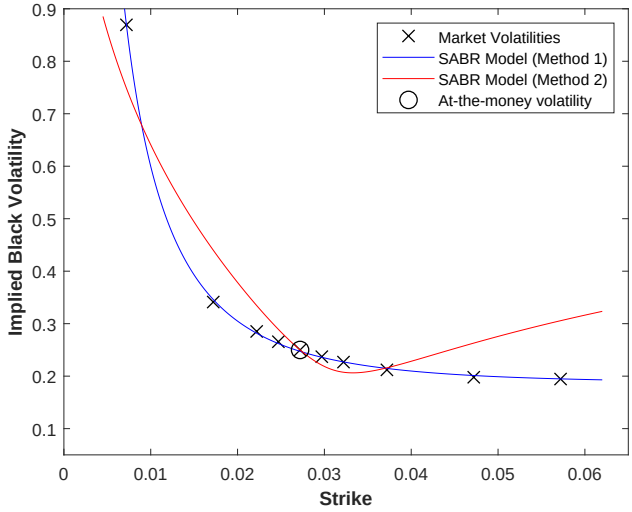
8.3.1 Swapce typu 1Y20Y

Zobrazíme si výsledky kalibrace pro swapci s délkou expirace 1 rok.

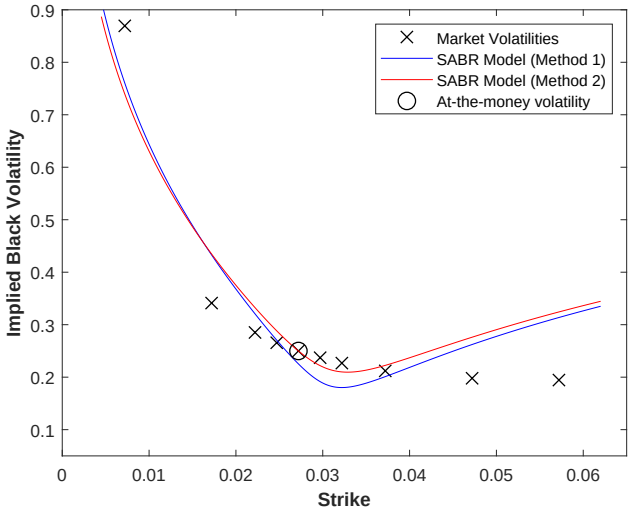
Na obrázcích 35, 36 a 37 můžeme vidět, že kalibrace pro swapci typu 1Y20Y je velice úspěšná. Nezávisle na volbě parametru β a způsobu kalibrace jsou výsledky uspokojivé. V tabulce 9 můžeme najít přehled o chybách odhadu tohoto typu swapce. Tyto hodnoty jsou velice podobné chybám získaným



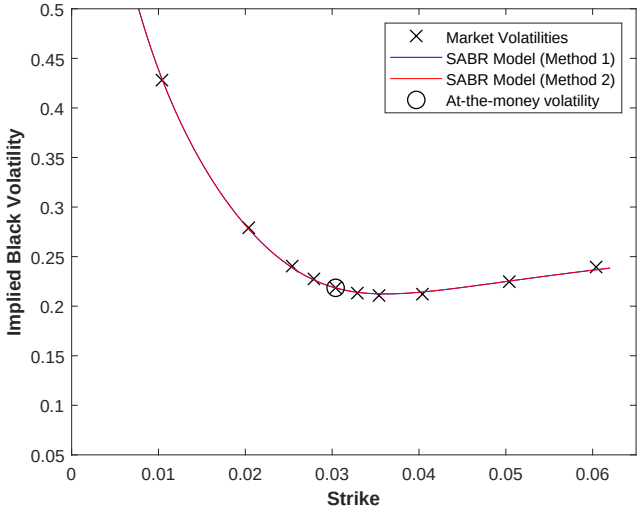
Obrázek 32: 30Y10Y, $\beta = 0$



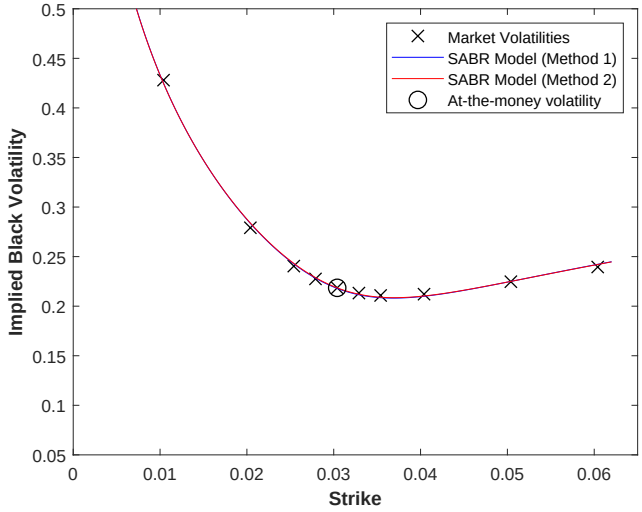
Obrázek 33: 30Y10Y, $\beta = 0{,}5$



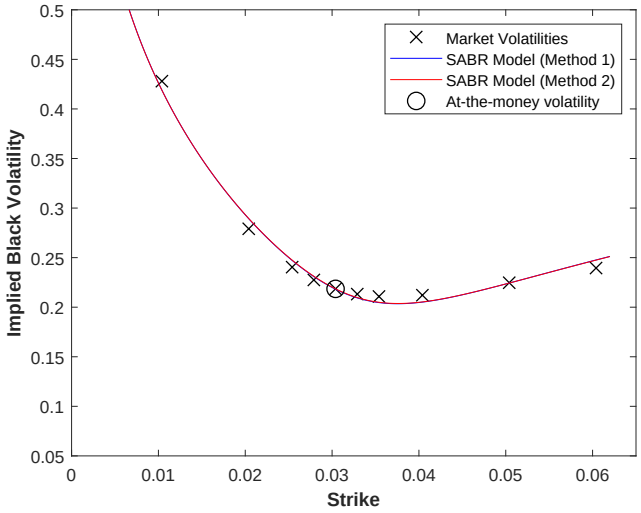
Obrázek 34: 30Y10Y, $\beta = 1$



Obrázek 35: 1Y20Y, $\beta = 0$



Obrázek 36: 1Y20Y, $\beta = 0{,}5$



Obrázek 37: 1Y20Y, $\beta = 1$

Tabulka 9: Parametry SABR modelu pro 1Y20Y swapci

	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,00662	0,0	0,1278	0,53875	0,00002
Způsob 2	0,00663	0,0	0,12813	0,53773	0,00002
Způsob 1	0,03793	0,5	-0,16423	0,56812	0,00005
Způsob 2	0,03802	0,5	-0,16475	0,56522	0,00006
Způsob 1	0,21796	1,0	-0,41337	0,63495	0,00041
Způsob 2	0,21831	1,0	-0,41419	0,63329	0,00041

Tabulka 10: Parametry SABR modelu pro 20Y20Y swapci

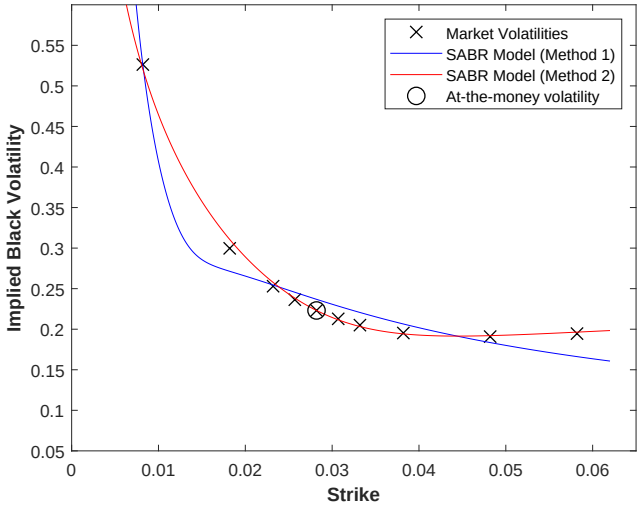
	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,01745	0,0	0,96565	1,1866	0,00255
Způsob 2	0,00512	0,0	-0,1551	0,35438	0,00019
Způsob 1	0,03231	0,5	-0,51479	0,51887	0,00169
Způsob 2	0,03282	0,5	-0,51844	0,5153	0,00171
Způsob 1	0,32885	1,0	-0,62801	1,0516	0,00303
Způsob 2	0,28647	1,0	-0,61632	0,88902	0,00322

při kalibraci typu 1Y1Y (viz tabulka 3) nebo typu 1Y10Y (viz tabulka 7), v některých případech jsou i menší.

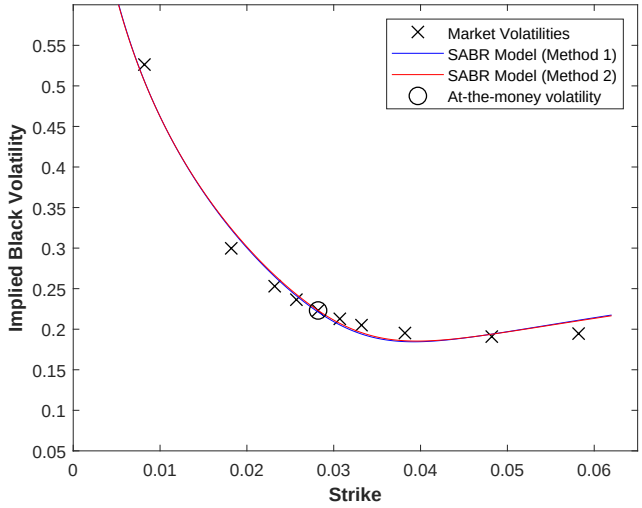
8.3.2 Swapce typu 20Y20Y

Zobrazíme si výsledky kalibrace pro swapci s délkou expirace 20 let.

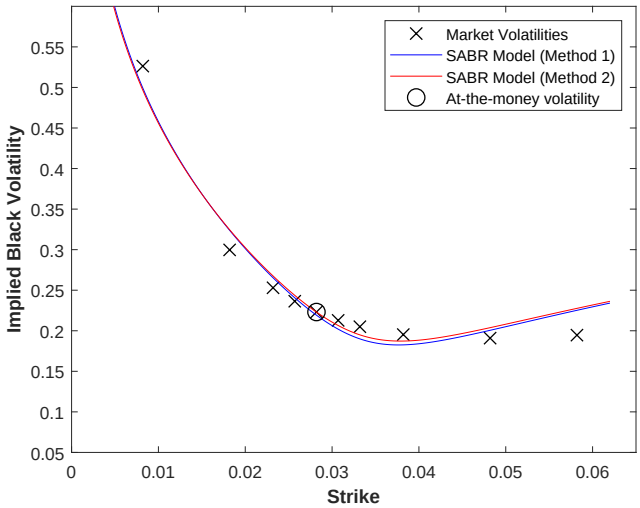
Nedá se říci, že by kalibrace modelu byla pro typ swapce 20Y20Y uspokojivá. Grafické a numerické výsledky poukazují na to, že můžeme docílit úspěšné kalibrace jenom pomocí způsobu 2 při volbě $\beta = 0$ (obrázek 38). Chyba odhadu je v tomto případě dost vysoká (viz tabulka 10), obzvlášť když ji srovnáme s chybou odhadu pro typ 20Y1Y (viz tabulka 5). Výsledek kalibrace s parametry $\beta = 0{,}5$ a $\beta = 1$ se nedá vůbec uznat za vhodný, je to patrné i z obrázků 39 a 40.



Obrázek 38: 20Y20Y, $\beta = 0$



Obrázek 39: 20Y20Y, $\beta = 0{,}5$



Obrázek 40: 20Y20Y, $\beta = 1$

8.4 Swapce typu xx30Y

V této podkapitole se zaměříme na výsledky kalibrace SABR modelu pro swapce, jejichž tenor má 30 let. Zvážíme délky expirace 1 rok a 20 let.

8.4.1 Swapce typu 1Y30Y

Zobrazíme si výsledky kalibrace pro swapci s délkou expirace 1 rok.

Tabulka 11: Parametry SABR modelu pro 1Y30Y swapci

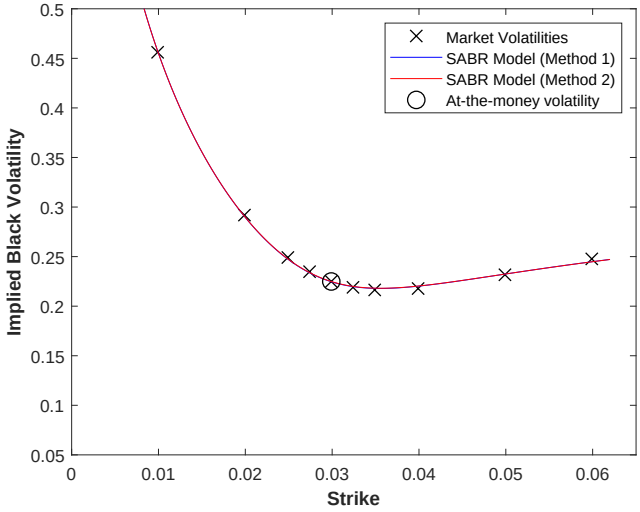
	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,0067	0,0	0,10517	0,5681	0,00002
Způsob 2	0,00671	0,0	0,10566	0,56647	0,00002
Způsob 1	0,03869	0,5	-0,18382	0,60177	0,00007
Způsob 2	0,03881	0,5	-0,18445	0,59832	0,00007
Způsob 1	0,22425	1,0	-0,42837	0,67462	0,00051
Způsob 2	0,22469	1,0	-0,42934	0,67257	0,00051

Situace s kalibrací tohoto typu swapce připomíná modelování předchozích typů swapcí s délkou expirace 1 rok. V případě kalibrace pro swapci typu 1Y30Y opět pozorujeme velice uspokojivé výsledky. Obrázky 41, 42 a 43 znázorňují úspěšnou kalibraci nezávisle na způsobu kalibrace a volbě parametru β. Pokud srovnáme chyby odhadu pro typ 1Y30Y (viz tabulka 11) s chybami odhadu typu 1Y1Y (viz tabulka 3), 1Y10Y (viz tabulka 7) nebo 1Y20Y (viz tabulka 9), uvidíme, že tyto hodnoty si jsou velice podobné.

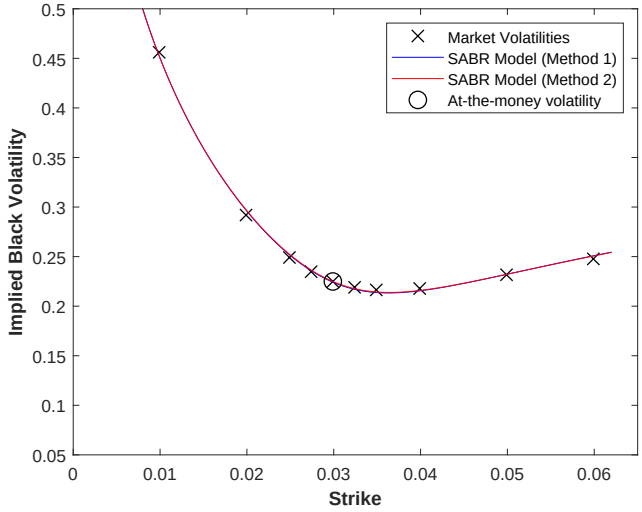
8.4.2 Swapce typu 20Y30Y

Zobrazíme si výsledky kalibrace pro swapci s délkou expirace 20 let.

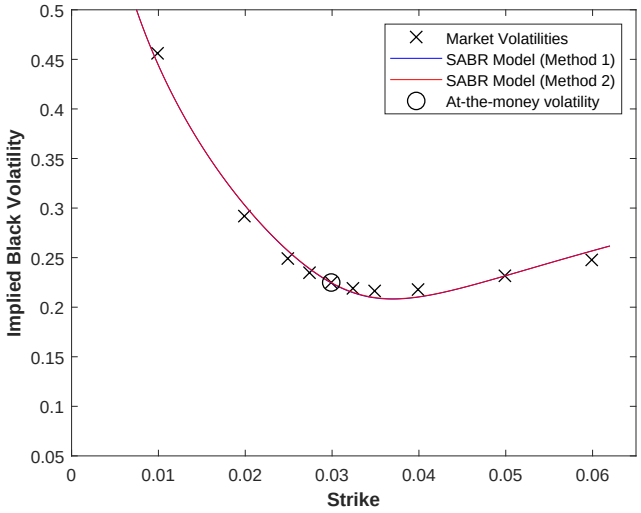
Situace je opět podobná předchozím kalibracím modelu pro délku expirace 20 let. Z obrázků 44, 45 a 46 se rozhodně nedá vyčíst, že je kalibrace úspěšná. Když se navíc podíváme do tabulky 12, uvidíme, že dosáhnout úspěšné kalibrace se dá jenom pomocí způsobu 2 při volbě $\beta = 0$, výsledek kalibrace s parametry $\beta = 0{,}5$ a $\beta = 1$ se tedy nedá vůbec uznat za vhodný.



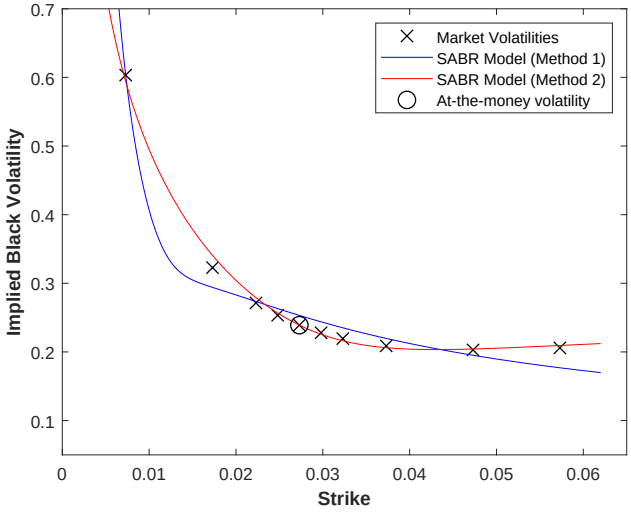
Obrázek 41: 1Y30Y, $\beta = 0$



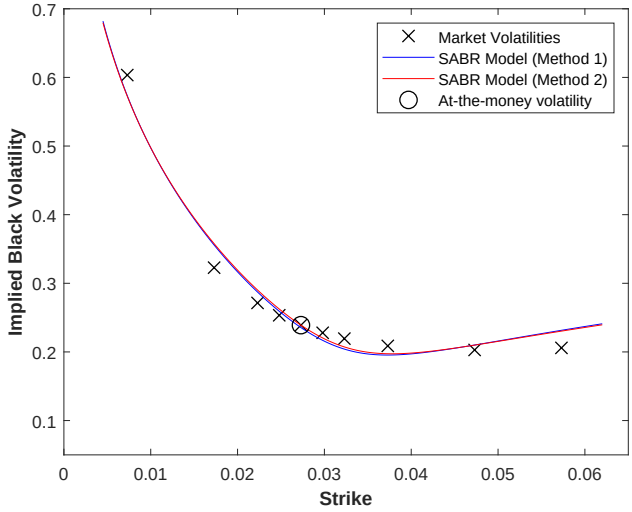
Obrázek 42: 1Y30Y, $\beta = 0{,}5$



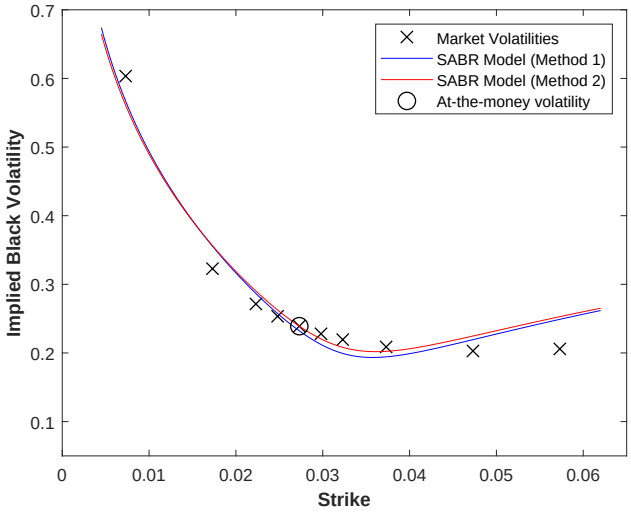
Obrázek 43: 1Y30Y, $\beta = 1$



Obrázek 44: 20Y30Y, $\beta = 0$



Obrázek 45: 20Y30Y, $\beta = 0{,}5$



Obrázek 46: 20Y30Y, $\beta = 1$

Tabulka 12: Parametry SABR modelu pro 20Y30Y swapci

	α	β	ρ	ν	ϵ
Způsob 1	0,01722	0,0	0,96992	1,1668	0,00281
Způsob 2	0,00507	0,0	-0,21115	0,38676	0,00044
Způsob 1	0,03311	0,5	-0,54842	0,5892	0,0035
Způsob 2	0,0334	0,5	-0,55015	0,5877	0,00351
Způsob 1	0,34436	1,0	-0,6308	1,2043	0,00575
Způsob 2	0,28342	1,0	-0,61294	0,94152	0,00621

Co se týče chyb odhadu, jsou také výrazně horší než v případě swapce typu typu 20Y1Y (viz tabulka 5) nebo 20Y20Y (viz tabulka 10).

Již víme, že kvalita SABR modelu se zhoršuje úměrně délce expirace opce, tuto souvislost jsme si otestovali v podkapitole 8.1. Na základě následujícího modelování pro různé tenory swapu jsme si povšimli, že kvalita SABR modelu souvisí s tenorem swapu. Táto závislost se ale projeví jenom u těch typů swapcí, které mají delší tenor swapu v kombinaci s delší délkou expirace opce. Můžeme vidět, že výsledky kalibrace modelu jsou pro swapce typu 1Y1Y, 1Y10Y, 1Y20Y a 1Y30Y stejně efektivní, až na drobné výjimky. Efektivitu modelu nemůže ovlivnit ani způsob kalibrace, ani změna hodnoty parametru β.

Situace se mění, když přichází na řadu swapce typu 30Y1Y, 30Y10Y, 20Y20Y nebo 20Y30Y. Kalibrace pro tyto typy swapce s delším tenorem swapu se ukázala jako nejnáročnější, většinou by se dal použít jenom jeden ze dvou způsobů kalibrace, navíc hraje roli i volba parametru β. Co se týče chyb odhadu, ty největší patřily typům swapcí s nejdelším tenorem swapu a nejdelší délkou expirace. Můžeme tedy říci, že kvalita SABR modelu se zhoršuje úměrně tenoru swapu, ale jenom v tom případě, pokud se jedná o delší délku expirace.

Obecně se v této diplomové práci ukázalo, že náročnost kalibrace SABR modelu je nízká, když jde o modelování swapce s malou délkou expirace

opce a krátkým tenorem swapu. Kalibrace je o něco náročnější, pokud se jedná o větší délku expirace opce. Nejnáročnější na modelování je pák typ swapce s větší délkou expirace a delším tenoru swapu. V těchto případech je dobře věnovat nastavení parametrů SABR modelu zvláštní pozornost, protože změna jakéhokoli parametru nebo způsobu kalibrace může vést k selhání modelu a neuspokojivé kalibraci volatility smilu.

Závěr

V této diplomové práci jsme posoudili, zda SABR model je účinným nástrojem při modelování volatility. Ukázalo se, že SABR model dokáže nejen vystihnout tvar volatility smilu, ale i správně předpovědět dynamiku smilu na rozdíl od modelu lokální volatility.

SABR model jsme kalibrovali na tržní implikované volatility pro swapce různých typů. Otestovali jsme přitom kalibraci pro různé délky expirace opce (1M, 1Y, 10Y, 20Y, 30Y) a různé tenory swapu (1Y, 10Y, 20Y, 30Y). Uvažovali jsme také různá nastavení parametru β a dva způsoby kalibrace.

Při zkoumání kalibrace SABR modelu pro swapce typu xx1Y jsme zjistili, že se kvalita odhadu zhoršuje úměrně délce expirace opce. Pro swapci s nejkratší délkou expirace 1M funguje model dobře pro všechny varianty parametru β s oběma způsoby kalibrace. Pro swapci s délkou expirace 1Y a dál není vhodná kalibrace s volbou parametru $\beta = 1$, chyba odhadu je oproti jiným hodnotám parametru příliš vysoká. Stejně tak pro větší délku expirace dosahuje dobrých výsledků jen jeden z uvažovaných způsobů kalibrace.

Následující kalibrace SABR modelu na tržní implikované volatility pro swapce typu xx10Y, xx20Y a xx30Y odhalila, jak souvisí kvalita odhadu s tenorem swapu. Pro swapce typu 1Y1Y, 1Y10Y, 1Y20Y a 1Y30Y byla kalibrace skoro stejně efektivní, tedy tenor swapu neovlivnil kvalitu odhadu zásadně. Situace je jiná u swapcí typu 30Y1Y, 30Y10Y, 20Y20Y nebo 20Y30Y. Kalibrace pro swapce s delším tenorem swapu se ukázala jako náročnější, většinou by se dal použít jenom jeden ze dvou způsobů kalibrace, navíc hraje roli i volba parametru β. Svědčí o tom i chyby odhadu.

Můžeme tedy říci, že náročnost kalibrace SABR modelu je nízká, když jde o modelování swapce s malou délkou expirace opce a krátkým tenorem swapu. Kvalita kalibrace se přitom zhoršuje úměrně délce expirace opce, kde se musí klást větší důraz na volbu parametru β a způsob kalibrace. Nejnáročnější na modelování je pak typ swapce s větší délkou expirace a

delším tenorem swapu. V tomto případě může vést změna parametru β nebo způsobu kalibrace k selhání modelu a neuspokojivé kalibraci volatility smilu.

Tato studie ukazuje, že SABR model je efektivní nástroj pro modelování volatility, je důležité si přitom zvolit správný způsob kalibrace a správné nastavení všech parametrů.

Reference

[Brigo and Mercurio, 2006] Brigo, D. and Mercurio, D. (2006). *Interest Rate Models – Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*. Springer Finance.

[Derman and Kani, 1994] Derman, E. and Kani, I. (1994). *The Volatility Smile and Its Implied Tree*. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.

[Dupire, 1994] Dupire, B. (1994). Pricing with a smile. *Risk Magazine*, Jan:18–20.

[Hagan et al., 2002] Hagan, P., Kumar, D., Lesniewski, A. S., and Woodward, D. E. (2002). Managing smile risk. *Wilmott magazine*, pages 84–108.

[Hagan and Woodward, 1999] Hagan, P. and Woodward, D. E. (1999). Equivalent black volatilities. *App. Math. Finance*, 6:147–157.

[Hull, 2012] Hull, J. (2012). *Options, Futures and Other Derivatives 8th Edition*. Prentice Hall.

[MathWorks, 2018] MathWorks (2018). Calibrate the sabr model. https://www.mathworks.com/help/fininst/calibrating-the-sabr-model.html. Last checked on May 28, 2018.

[West, 2004] West, G. (2004). Calibration of the sabr model in illiquid markets. *Applied Mathematical Finance*, 12(4):371–385.

Appendices

99) Analyze Cube | 90) Market Data

Swap Curve (23) US Dollar | Index Tenor 3M | Show Vol Black

View Tenor (Relative) 1YR | Discounting IBOR | Show Strikes

Table | Charts

Expiry	-300bps		-200bps	-100bps	-50bps	-25bps	ATM	25bps	50bps	100bps	200bps	300bps
1Mo		Vol	41.97	20.13	14.58	12.82	12.14	12.52	13.45	15.56	19.16	21.88
	-0.43	Strike	0.57	1.57	2.07	2.32	2.57	2.82	3.07	3.57	4.57	5.57
3Mo		Vol	43.24	21.75	16.21	14.48	13.74	13.98	14.77	16.76	20.32	23.07
	-0.36	Strike	0.64	1.64	2.14	2.39	2.64	2.89	3.14	3.64	4.64	5.64
6Mo		Vol	37.18	20.75	16.68	15.46	14.85	14.79	15.09	16.18	18.55	20.54
	-0.25	Strike	0.75	1.75	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.75	4.75	5.75
9Mo		Vol	37.81	22.13	18.12	16.84	16.08	15.80	15.88	16.63	18.64	20.47
	-0.16	Strike	0.84	1.84	2.34	2.59	2.84	3.09	3.34	3.84	4.84	5.84
1Yr		Vol	38.81	23.56	19.55	18.20	17.31	16.85	16.73	17.15	18.80	20.45
	-0.09	Strike	0.91	1.91	2.41	2.66	2.91	3.16	3.41	3.91	4.91	5.91
2Yr		Vol	31.40	24.66	22.79	22.04	21.37	20.78	20.24	19.31	17.85	16.75
	0.00	Strike	1.00	2.00	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	4.00	5.00	6.00
3Yr		Vol	35.94	28.11	25.97	25.10	24.33	23.65	23.04	21.97	20.30	19.04
	-0.01	Strike	0.99	1.99	2.49	2.74	2.99	3.24	3.49	3.99	4.99	5.99
4Yr		Vol	38.34	29.84	27.52	26.59	25.77	25.04	24.38	23.25	21.47	20.13
	-0.02	Strike	0.98	1.98	2.48	2.73	2.98	3.23	3.48	3.98	4.98	5.98
5Yr		Vol	39.17	30.44	28.07	27.11	26.27	25.53	24.85	23.69	21.87	20.50
	-0.01	Strike	0.99	1.99	2.49	2.74	2.99	3.24	3.49	3.99	4.99	5.99
6Yr		Vol	38.78	30.10	27.75	26.81	25.98	25.24	24.57	23.42	21.62	20.27
	-0.01	Strike	0.99	1.99	2.49	2.74	2.99	3.24	3.49	3.99	4.99	5.99
7Yr		Vol	38.25	29.79	27.48	26.55	25.73	25.00	24.35	23.21	21.44	20.10
	0.02	Strike	1.02	2.02	2.52	2.77	3.02	3.27	3.52	4.02	5.02	6.02
8Yr	119.65	Vol	37.28	29.17	26.94	26.04	25.24	24.53	23.89	22.79	21.06	19.75
	0.05	Strike	1.05	2.05	2.55	2.80	3.05	3.30	3.55	4.05	5.05	6.05
9Yr	94.92	Vol	36.39	28.62	26.46	25.58	24.81	24.12	23.50	22.42	20.73	19.45
	0.09	Strike	1.09	2.09	2.59	2.84	3.09	3.34	3.59	4.09	5.09	6.09
10Yr	85.55	Vol	35.52	28.03	25.93	25.08	24.33	23.66	23.05	22.00	20.35	19.10
	0.12	Strike	1.12	2.12	2.62	2.87	3.12	3.37	3.62	4.12	5.12	6.12
12Yr	96.37	Vol	35.08	27.52	25.43	24.58	23.84	23.17	22.57	21.53	19.90	18.67
	0.10	Strike	1.10	2.10	2.60	2.85	3.10	3.35	3.60	4.10	5.10	6.10
15Yr	133.17	Vol	34.08	26.57	24.52	23.69	22.96	22.31	21.73	20.71	19.13	17.94
	0.09	Strike	1.09	2.09	2.59	2.84	3.09	3.34	3.59	4.09	5.09	6.09
20Yr		Vol	34.91	26.34	24.14	23.27	22.51	21.83	21.23	20.19	18.58	17.38

Obrázek 47: XX1Y Swaption Volatility
Bloomberg Terminal

Swap Curve (23) US Dollar
View Tenor (Relative) 10YR
Table Charts
Index Tenor 3M
Discounting IBOR
Show Vol Black
Show Strikes

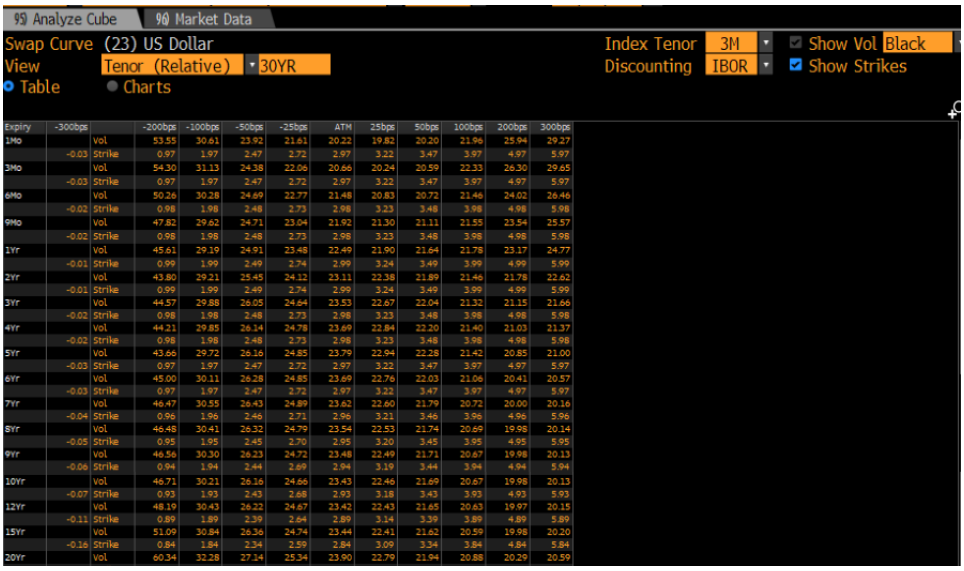
Expiry	-300bps		-200bps	-100bps	-50bps	-25bps	ATM	25bps	50bps	100bps	200bps	300bps
1Mo		Vol	58.38	31.89	23.90	21.09	19.53	19.45	20.38	23.16	28.45	32.65
	-0.05	Strike	0.95	1.95	2.45	2.70	2.95	3.20	3.45	3.95	4.95	5.95
3Mo		Vol	59.32	32.60	24.57	21.75	20.19	20.07	20.95	23.68	28.97	33.20
	-0.03	Strike	0.97	1.97	2.47	2.72	2.97	3.22	3.47	3.97	4.97	5.97
6Mo		Vol	48.20	29.14	23.97	22.29	21.26	20.85	20.93	21.89	24.58	27.05
	-0.02	Strike	0.98	1.98	2.48	2.73	2.98	3.23	3.48	3.98	4.98	5.98
9Mo		Vol	45.64	28.67	24.22	22.78	21.85	21.38	21.29	21.80	23.73	25.68
	0.00	Strike	1.00	2.00	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	4.00	5.00	6.00
1Yr	193.50	Vol	43.12	28.27	24.50	23.26	22.41	21.89	21.65	21.74	22.88	24.27
	0.01	Strike	1.01	2.01	2.51	2.76	3.01	3.26	3.51	4.01	5.01	6.01
2Yr	154.84	Vol	42.86	28.97	25.47	24.28	23.42	22.83	22.47	22.25	22.83	23.81
	0.03	Strike	1.03	2.03	2.53	2.78	3.03	3.28	3.53	4.03	5.03	6.03
3Yr	152.28	Vol	43.02	29.68	26.18	24.90	23.88	23.09	22.50	21.77	21.47	21.84
	0.04	Strike	1.04	2.04	2.54	2.79	3.04	3.29	3.54	4.04	5.04	6.04
4Yr	151.34	Vol	42.87	29.83	26.39	25.11	24.07	23.24	22.60	21.74	21.16	21.31
	0.05	Strike	1.05	2.05	2.55	2.80	3.05	3.30	3.55	4.05	5.05	6.05
5Yr	147.68	Vol	42.32	29.70	26.35	25.09	24.04	23.19	22.50	21.53	20.68	20.59
	0.06	Strike	1.06	2.06	2.56	2.81	3.06	3.31	3.56	4.06	5.06	6.06
6Yr	161.81	Vol	42.55	29.59	26.14	24.84	23.76	22.88	22.18	21.20	20.39	20.36
	0.08	Strike	1.08	2.08	2.58	2.83	3.08	3.33	3.58	4.08	5.08	6.08
7Yr	235.60	Vol	42.86	29.53	25.97	24.63	23.52	22.62	21.90	20.91	20.13	20.17
	0.09	Strike	1.09	2.09	2.59	2.84	3.09	3.34	3.59	4.09	5.09	6.09
8Yr		Vol	42.48	29.23	25.71	24.38	23.28	22.39	21.68	20.70	19.94	19.97
	0.09	Strike	1.09	2.09	2.59	2.84	3.09	3.34	3.59	4.09	5.09	6.09
9Yr		Vol	42.24	28.99	25.49	24.17	23.09	22.20	21.50	20.53	19.78	19.81
	0.09	Strike	1.09	2.09	2.59	2.84	3.09	3.34	3.59	4.09	5.09	6.09
10Yr		Vol	42.16	28.83	25.33	24.02	22.94	22.06	21.36	20.40	19.64	19.67
	0.09	Strike	1.09	2.09	2.59	2.84	3.09	3.34	3.59	4.09	5.09	6.09
12Yr		Vol	42.72	28.69	25.10	23.76	22.66	21.77	21.07	20.11	19.40	19.47
	0.06	Strike	1.06	2.06	2.56	2.81	3.06	3.31	3.56	4.06	5.06	6.06
15Yr		Vol	44.02	28.62	24.84	23.44	22.30	21.39	20.67	19.71	19.05	19.17
	0.01	Strike	1.01	2.01	2.51	2.76	3.01	3.26	3.51	4.01	5.01	6.01
20Yr		Vol	48.64	29.16	24.90	23.35	22.11	21.12	20.36	19.37	18.76	18.96
	-0.11	Strike	0.89	1.89	2.39	2.64	2.89	3.14	3.39	3.89	4.89	5.89
25Yr		Vol	57.64	31.38	26.57	24.85	23.46	22.34	21.46	20.24	19.26	19.22
	-0.20	Strike	0.80	1.80	2.30	2.55	2.80	3.05	3.30	3.80	4.80	5.80
30Yr		Vol	86.94	34.12	28.52	26.56	24.99	23.71	22.68	21.20	19.79	19.45
	-0.28	Strike	0.72	1.72	2.22	2.47	2.72	2.97	3.22	3.72	4.72	5.72

Obrázek 48: XX10Y Swaption Volatility
Bloomberg Terminal

95) Analyze Cube 96) Market Data
Swap Curve (23) US Dollar
View Tenor (Relative) 20YR
Table Charts
Index Tenor 3M
Discounting IBOR
Show Vol Black
Show Strikes

Expiry	-300bps		-200bps	-100bps	-50bps	-25bps	ATM	25bps	50bps	100bps	200bps	300bps
1Mo	205.06	Vol	49.03	28.53	22.51	20.48	19.30	19.01	19.38	21.03	24.72	27.82
	0.01	Strike	1.01	2.01	2.51	2.76	3.01	3.26	3.51	4.01	5.01	6.01
3Mo	196.00	Vol	50.32	29.33	23.25	21.20	20.00	19.67	20.00	21.60	25.27	28.39
	0.02	Strike	1.02	2.02	2.52	2.77	3.02	3.27	3.52	4.02	5.02	6.02
6Mo	183.75	Vol	50.29	29.97	24.12	22.10	20.79	20.21	20.25	21.33	24.39	27.15
	0.03	Strike	1.03	2.03	2.53	2.78	3.03	3.28	3.53	4.03	5.03	6.03
9Mo	160.34	Vol	46.48	28.83	23.99	22.36	21.28	20.74	20.63	21.21	23.39	25.54
	0.03	Strike	1.03	2.03	2.53	2.78	3.03	3.28	3.53	4.03	5.03	6.03
1Yr	139.60	Vol	42.80	27.91	24.04	22.75	21.85	21.32	21.08	21.21	22.47	23.95
	0.04	Strike	1.04	2.04	2.54	2.79	3.04	3.29	3.54	4.04	5.04	6.04
2Yr	139.77	Vol	42.39	28.29	24.63	23.36	22.43	21.80	21.42	21.20	21.87	22.94
	0.04	Strike	1.04	2.04	2.54	2.79	3.04	3.29	3.54	4.04	5.04	6.04
3Yr	88.35	Vol	33.50	26.33	24.32	23.51	22.78	22.14	21.55	20.54	18.95	17.75
	0.04	Strike	1.04	2.04	2.54	2.79	3.04	3.29	3.54	4.04	5.04	6.04
4Yr	92.79	Vol	33.84	26.53	24.48	23.65	22.92	22.26	21.67	20.65	19.04	17.82
	0.04	Strike	1.04	2.04	2.54	2.79	3.04	3.29	3.54	4.04	5.04	6.04
5Yr	234.43	Vol	42.25	28.81	25.27	23.96	22.91	22.08	21.45	20.66	20.27	20.58
	0.04	Strike	1.04	2.04	2.54	2.79	3.04	3.29	3.54	4.04	5.04	6.04
6Yr	99.40	Vol	33.39	26.23	24.25	23.44	22.73	22.10	21.53	20.54	18.99	17.82
	0.04	Strike	1.04	2.04	2.54	2.79	3.04	3.29	3.54	4.04	5.04	6.04
7Yr	107.24	Vol	33.27	26.08	24.09	23.29	22.58	21.95	21.38	20.39	18.85	17.68
	0.03	Strike	1.03	2.03	2.53	2.78	3.03	3.28	3.53	4.03	5.03	6.03
8Yr	125.16	Vol	33.21	25.96	23.97	23.16	22.46	21.82	21.26	20.27	18.73	17.56
	0.03	Strike	1.03	2.03	2.53	2.78	3.03	3.28	3.53	4.03	5.03	6.03
9Yr		Vol	33.22	25.87	23.87	23.06	22.35	21.72	21.15	20.16	18.62	17.46
	0.02	Strike	1.02	2.02	2.52	2.77	3.02	3.27	3.52	4.02	5.02	6.02
10Yr		Vol	42.92	28.50	24.80	23.41	22.27	21.36	20.63	19.65	18.95	19.06
	0.00	Strike	1.00	2.00	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	4.00	5.00	6.00
12Yr		Vol	43.83	28.50	24.68	23.26	22.10	21.17	20.45	19.48	18.85	19.01
	-0.03	Strike	0.97	1.97	2.47	2.72	2.97	3.22	3.47	3.97	4.97	5.97
15Yr		Vol	45.64	28.59	24.55	23.07	21.87	20.92	20.19	19.25	18.71	18.96
	-0.08	Strike	0.92	1.92	2.42	2.67	2.92	3.17	3.42	3.92	4.92	5.92
20Yr		Vol	52.63	29.97	25.30	23.64	22.31	21.28	20.50	19.53	19.09	19.46

Obrázek 49: XX20Y Swaption Volatility
Bloomberg Terminal



Analyze Cube | Market Data

Swap Curve (23) US Dollar
View Tenor (Relative) 30YR
Table Charts
Index Tenor 3M
Discounting IBOR
Show Vol Black
Show Strikes

Expiry	-300bps		-200bps	-100bps	-50bps	-25bps	ATM	25bps	50bps	100bps	200bps	300bps
1Mo		Vol	53.55	30.61	23.92	21.61	20.22	19.82	20.20	21.96	25.94	29.27
	-0.03	Strike	0.97	1.97	2.47	2.72	2.97	3.22	3.47	3.97	4.97	5.97
3Mo		Vol	54.30	31.13	24.38	22.06	20.66	20.24	20.59	22.33	26.30	29.65
	-0.03	Strike	0.97	1.97	2.47	2.72	2.97	3.22	3.47	3.97	4.97	5.97
6Mo		Vol	50.26	30.28	24.69	22.77	21.48	20.83	20.72	21.46	24.02	26.46
	-0.02	Strike	0.98	1.98	2.48	2.73	2.98	3.23	3.48	3.98	4.98	5.98
9Mo		Vol	47.82	29.62	24.71	23.04	21.92	21.30	21.11	21.55	23.54	25.57
	-0.02	Strike	0.98	1.98	2.48	2.73	2.98	3.23	3.48	3.98	4.98	5.98
1Yr		Vol	45.61	29.19	24.91	23.48	22.49	21.90	21.64	21.78	23.17	24.77
	-0.01	Strike	0.99	1.99	2.49	2.74	2.99	3.24	3.49	3.99	4.99	5.99
2Yr		Vol	43.80	29.21	25.45	24.12	23.11	22.38	21.89	21.46	21.78	22.62
	-0.01	Strike	0.99	1.99	2.49	2.74	2.99	3.24	3.49	3.99	4.99	5.99
3Yr		Vol	44.57	29.88	26.05	24.64	23.53	22.67	22.04	21.32	21.15	21.66
	-0.02	Strike	0.98	1.98	2.48	2.73	2.98	3.23	3.48	3.98	4.98	5.98
4Yr		Vol	44.21	29.85	26.14	24.78	23.69	22.84	22.20	21.40	21.03	21.37
	-0.02	Strike	0.98	1.98	2.48	2.73	2.98	3.23	3.48	3.98	4.98	5.98
5Yr		Vol	43.66	29.72	26.16	24.85	23.79	22.94	22.28	21.42	20.85	21.00
	-0.03	Strike	0.97	1.97	2.47	2.72	2.97	3.22	3.47	3.97	4.97	5.97
6Yr		Vol	45.00	30.11	26.28	24.85	23.69	22.76	22.03	21.06	20.41	20.57
	-0.03	Strike	0.97	1.97	2.47	2.72	2.97	3.22	3.47	3.97	4.97	5.97
7Yr		Vol	46.47	30.55	26.43	24.89	23.62	22.60	21.79	20.72	20.00	20.16
	-0.04	Strike	0.96	1.96	2.46	2.71	2.96	3.21	3.46	3.96	4.96	5.96
8Yr		Vol	46.48	30.41	26.32	24.79	23.54	22.53	21.74	20.69	19.98	20.14
	-0.05	Strike	0.95	1.95	2.45	2.70	2.95	3.20	3.45	3.95	4.95	5.95
9Yr		Vol	46.56	30.30	26.23	24.72	23.48	22.49	21.71	20.67	19.98	20.13
	-0.06	Strike	0.94	1.94	2.44	2.69	2.94	3.19	3.44	3.94	4.94	5.94
10Yr		Vol	46.71	30.21	26.16	24.66	23.43	22.46	21.69	20.67	19.98	20.13
	-0.07	Strike	0.93	1.93	2.43	2.68	2.93	3.18	3.43	3.93	4.93	5.93
12Yr		Vol	48.19	30.43	26.22	24.67	23.42	22.43	21.65	20.63	19.97	20.15
	-0.11	Strike	0.89	1.89	2.39	2.64	2.89	3.14	3.39	3.89	4.89	5.89
15Yr		Vol	51.09	30.84	26.36	24.74	23.44	22.41	21.62	20.59	19.98	20.20
	-0.16	Strike	0.84	1.84	2.34	2.59	2.84	3.09	3.34	3.84	4.84	5.84
20Yr		Vol	60.34	32.28	27.14	25.34	23.90	22.79	21.94	20.88	20.29	20.59

Obrázek 50: XX30Y Swaption Volatility
Bloomberg Terminal