

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE

Fakulta financí a účetnictví

Katedra bankovníctví a pojišťovnictví

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

2018

Jan Velcer

**VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ V PRAZE**

**Fakulta financí a účetnictví**

Katedra bankovníctví a pojišťovnictví

Studijní obor: Finanční inženýrství



## **Oceňování dluhopisů s vnořenými opcemi**

Autor diplomové práce: Jan Velcer

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Bohumil Stádník, Ph.D.

Rok obhajoby: 2018

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Oceňování dluhopisů s vnořenými opcemi“ vypracoval samostatně a veškerou použitou literaturu a další prameny jsem řádně označil a uvedl v příloženém seznamu.

V Praze dne .....

Jan Velcer .....

Poděkování:

Tímto bych chtěl poděkovat doc. Ing. Bohumilu Stádníkovi, Ph.D. za jeho vstřícnost a rady, které mi pomohly k vypracování této práce.

## **Abstrakt**

Cílem této práce je představit praktický přístup k ocenění dluhopisů s vnořenými opcemi. Pro demonstraci byly zvoleny dva korporátní dluhopisy, přičemž jeden z dluhopisů může být předčasně ukončen na základě vývoje podkladového akciového indexu, druhý dluhopis svolatelný není, vyplácí fixní kupón k datu splatnosti, ale závěrečná výše výplaty nominální hodnoty závisí na vývoji podkladového koše akcií. Práce je rozdělena na tři části. První kapitola se zaměřuje na vymezení dluhopisů a základní přístupy jejich oceňování. Ve druhé kapitole jsou vysvětleny metody oceňování opcí a odhadu parametrů nutných k určení jejich hodnoty. Poslední kapitola obsahuje ocenění dvou zmíněných dluhopisů, analýzu vlivu parametrů na jejich cenu a porovnání výsledné ceny s tržními hodnotami.

**Klíčová slova:** dluhopisy, vnořená opce, simulace Monte Carlo, volatilita, EWMA model

## **Abstract**

This thesis aims to demonstrate the practical approach towards valuation of bonds with embedded options. Two corporate bonds are chosen one of which is callable, and the call depends on performance of underlying stock index. The second bond is not callable, pays fixed coupon at maturity, and the notional value which will be paid at maturity depends on the underlying stock basket performance. The thesis is divided into three chapters. The first chapter focuses on bond definition and basic valuation approaches, the second chapter explains methods for option valuation and the process of estimating variables necessary for option pricing, and the last chapter is focused on valuation of mentioned bonds, variables estimation and the comparison of results with market values.

Key words: bonds, embedded option, Monte Carlo simulation, volatility, EWMA model

# Obsah

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| Úvod .....                                         | 9  |
| 1. Dluhopisy .....                                 | 11 |
| 1.1 Obecná charakteristika dluhopisů.....          | 11 |
| 1.2 Základní parametry dluhopisů .....             | 12 |
| 1.3 Oceňování dluhopisů .....                      | 14 |
| 1.3.1 Hlavní principy oceňování.....               | 15 |
| 1.3.1.1 Odhad budoucích peněžních toků.....        | 15 |
| 1.3.1.2 Diskontování budoucích peněžních toků..... | 16 |
| 1.3.2 Výnosová křivka.....                         | 21 |
| 1.3.2.1 Spotové úrokové sazby .....                | 21 |
| 2. Dluhopisy s vnořenými opcemi .....              | 25 |
| 2.1 Vymezení dluhopisů s vnořenými opcemi .....    | 25 |
| 2.2 Principy oceňování .....                       | 26 |
| 2.2.1 Cena dluhopisu .....                         | 26 |
| 2.2.2 Cena opce .....                              | 28 |
| 2.2.2.1 Wienerův proces .....                      | 28 |
| 2.2.2.2 Itôva formule .....                        | 31 |
| 2.2.2.3 Black-Scholes model .....                  | 32 |
| 2.3 Modelování a odhad parametrů .....             | 35 |
| 2.3.1 Simulace Monte Carlo .....                   | 35 |
| 2.3.2 Volatilita .....                             | 38 |
| 2.3.2.1 Historická volatilita .....                | 38 |
| 2.3.2.2 EWMA model .....                           | 40 |
| 2.3.2.3 Implikovaná volatilita.....                | 42 |
| 3. Praktická část.....                             | 44 |
| 3.1 Ocenění svolatelného dluhopisu.....            | 44 |

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 3.2 Ocenění dluhopisu navázaného na akciový koš ..... | 56 |
| Závěr .....                                           | 65 |
| Seznam zdrojů .....                                   | 67 |
| Seznam tabulek.....                                   | 69 |
| Seznam grafů .....                                    | 70 |

## Úvod

Diplomová práce na téma Oceňování dluhopisů s vnořenými opcemi pojednává o jednom z nejvýznamnějších instrumentů finančních trhů. Dluhopis neboli dluhový cenný papír představuje finanční instrument, díky kterému může vystavovatel tohoto instrumentu získat peněžní prostředky od investora, který si tento finanční instrument koupí. Naopak investorovi plyne z držení dluhopisu právo na získání jmenovité hodnoty zpět a navíc například možnost obdržet bonus ve formě úroku. Trh s dluhopisy je rozsáhlý a s rozvojem finančních derivátů v minulém století vznikly i dluhopisy s vnořenými opcemi, na které se v této práci zaměříme.

Dluhopisy s vnořenými opcemi se na první pohled nemusí odlišovat od standardních dluhopisů. Je zde opět definovaná hodnota, která bude majiteli vyplacena při splatnosti tohoto instrumentu a může být definován i případný úrok, který bude vyplacen spolu s nominální hodnotou jako bonus. Rozdíl oproti klasickým dluhopisům spočívá v tom, že například dopředu nevíme, jaká část nominální hodnoty bude na konci splacena, případně jak velký úrok můžeme na konci obdržet nebo zda nedojde k předčasnému ukončení dluhopisu. Jak už název napovídá, všechny výše popsané neznámé budou záviset právě na vnořené opci. Hodnota této opce se často odvíjí od nějakého podkladového aktiva, čímž může být například akcie nebo úroková míra. Jinými slovy můžeme říci, že to, jestli na konci života dluhopisu získáme celou jmenovitou hodnotu dluhopisu zpět nebo jaký úrok na konci dostaneme, závisí právě třeba na vývoji jiné akcie nebo na vývoji stanovené úrokové míry.

Čím dál častěji se setkáváme s informacemi, že se v České republice pomalu začíná rozvíjet kapitálový trh, lidé mají čím dál větší znalosti z finančního světa a začínají se více zajímat o investování. S tím se rozšiřuje i škála produktů, které jsou na finančním trhu nabízeny. Mezi takové produkty patří i dluhopisy s vnořenými opcí. Tyto dluhopisy mají většinou větší možnost výnosu než například státní kupónové dluhopisy, ale jak je obecně známo, s větším potenciálním výnosem roste i riziko. Konečný výnos těchto dluhopisů může záviset na jedné akci, případně koši akcií z určitého odvětví, například sportovního, automobilového, či pivovarnického průmyslu. Může se jednat i o jakousi formu marketingu, kdy se emitent snaží nalákat investora tím, že se takový dluhopis snaží prezentovat formou nějakého příběhu, se kterým se případný investor ztotožní a bude ochotný si takový instrument pořídit. Zjistě se najde někdo, kdo si může položit otázku,

jakou cenu by měl takový dluhopis mít, aby se mi vyplatilo do něj zainvestovat. Odpověď na tuto otázku je jedním z hlavních cílů této práce.

V první kapitole této práce se zaměříme na vymezení pojmu co je to vlastně dluhopisu a jaké má parametry. V další části této kapitoly se seznámíme se základními principy, jakými se určuje hodnota dluhopisu. Poslední část v této kapitole bude zaměřena na výnosovou křivku, její definici, k čemu slouží a ukážeme si základní principy jejího sestrojování.

Druhá kapitola bude zaměřená na dluhopisy s vnořenými opcemi. Uvedeme si zde charakteristiku těchto dluhopisů a velká část této kapitoly bude věnována vymezení teoretického základu způsobů, jakými se určuje hodnota vnořené opce, kde se především zaměříme na parametry potřebné pro určení hodnoty opce a posléze na samotné základní metodiky ocenění.

V závěrečné části této diplomové práce bude praktická ukázka ocenění dvou dluhopisů s vnořenými opcemi, přičemž jeden z dluhopisů může být předčasně ukončený na základě vývoje podkladového akciového indexu a u druhého dluhopisu finální výplata nominální hodnoty závisí na vývoji podkladového koše akcií. Tato kapitola slouží především jako ukázka aplikace poznatků získaných ve druhé kapitole a aby čtenář získal ilustrativní návod, jakým způsobem se dá postupovat při oceňování takových finančních produktů.

# 1. Dluhopisy

V první kapitole si vysvětlíme, co jsou to dluhopisy, jak se dále dělí, k čemu slouží, jaké mají parametry a jakým způsobem se určuje jejich hodnota. Definice těchto základních pojmů je důležitá pro následné pochopení způsobu, jakým se určuje hodnota těchto instrumentů.

## 1.1 Obecná charakteristika dluhopisů

Dluhový cenný papír neboli dluhopis je základním finančním instrumentem, který dává emitentovi<sup>1</sup> dlužnický závazek vůči vlastníkově tohoto cenného papíru. Jedná se o dlouhodobější úvěrové cenné papíry s pevně stanovenou dobou splatnosti. Emitent vystavuje dluhopis zpravidla kvůli získání dočasných peněžních prostředků jakožto zdroje financování.

Z pohledu časového horizontu se dají dluhové cenné papíry rozdělit následovně:

- a) Krátkodobé: takové cenné papíry jsou obchodovány na peněžních trzích, kde se kromě dluhových cenných papírů obchoduje i s peněžními zdroji centrální banky. Do krátkodobých dluhových cenných papírů můžeme zařadit státní pokladniční poukázky, komerční papíry a depozitní certifikáty.
  - Státní pokladniční poukázky se emitují z důvodu pokrytí pokladního schodku státního rozpočtu. Ve většině zemí se tyto instrumenty považují za bezrizikové, protože nebezpečí, že by nebyly státem splaceny, je téměř eliminováno a díky velmi nízké době splatnosti mají nízké kursové riziko. Doba splatnosti státních pokladničních poukázek je do 12 měsíců, ale běžně bývá tato doba v řádech několika týdnů.
  - Komerční papíry se řadí mezi vlastní směnky, které jsou nejčastěji emitovány velkými korporacemi. Splatnost těchto instrumentů bývá od 1 dne do 270 dnů. Trh s komerčními papíry je výrazně menší než trh se státními pokladničními poukázkami.
  - Depozitní certifikáty jsou emitovány jednotlivými bankami za účelem získání krátkodobých zdrojů. Jejich splatnost bývá většinou do 12 měsíců.

---

<sup>1</sup> Vystavovatel dluhopisu

b) Dlouhodobé: tyto cenné papíry jsou emitovány za účelem získání peněžních prostředků na delší časové období. Z pohledu emitentů se dluhopisy rozdělují na:

- Dluhopisy veřejného sektoru – jsou emitovány vládou, jejími institucemi, obcemi nebo městy. Prodejem těchto dluhopisů si stát zajišťuje dlouhodobé finanční prostředky pro financování státního rozpočtu a státních investic. Majitelé těchto dluhopisů (věřitelé) mají nárok na úrok, který je vyplácen ze státního rozpočtu nebo rozpočtu daného emitenta.
- Bankovní dluhopisy – emitují je banky, aby získaly dlouhodobější prostředky. Majiteli bankovního dluhopisu banka vyplácí úrok.
- Dluhopisy korporací – tzv. korporátní dluhopisy, jsou emitovány podnikovým sektorem. (Revenda 2012)

## 1.2 Základní parametry dluhopisů

Každý dluhopis má řadu základních parametrů, které dávají případnému zájemci informaci o daném finančním instrumentu. Nyní si tyto parametry blíže vysvětlíme.

*Označení dluhopisu* – dluhopisy mohou mít označení např. CZGB 0.75 02/21, které nám na první pohled říká, že se jedná o český státní dluhopis s pevnou kupónovou sazbou 0.75 a se splatností v únoru 2021. Další identifikací takového dluhopisu může být tzv. ISIN, což je jednoznačný identifikační kód každého dluhopisu. V našem případě by to bylo například: CZ0001005367. Dále bychom například mohli uvést T-bills, T-bonds, T-notes (americké dluhopisy označené podle splatnosti) nebo TIPS, což jsou americké dluhopisy zajištěné proti inflaci.

*Konvence pro počítání časových intervalů* – při matematických výpočtech potřebujeme brát v úvahu délky různých časových intervalů, například pro výpočet naběhlého úroku z kupónu uprostřed měsíce<sup>2</sup>. Z tohoto důvodu je potřeba zavést pravidlo, jak se délka takového období určí. Protože každý měsíc může mít jiný počet dní a stejně tak každý rok může mít různý počet dní, existuje několik konvencí, podle kterých se dané časové intervaly určují.

---

<sup>2</sup> tzv. AÚV

Mezi nejčastěji používané konvence patří:

- 30/360 – každý celý měsíc má uvnitř intervalu 30 dní a každý rok má 360 dní
- ACT/360 – uvnitř každého intervalu se počítá skutečný počet dní, počet dní v roce se uvažuje 360
- ACT/365 – uvnitř každého intervalu se počítá skutečný počet dní, počet dní v roce se uvažuje 365
- ACT/ACT – uvnitř každého intervalu se počítá skutečný počet dní, uvažuje se skutečný počet dní v daném roce

*Charakter úrokového výnosu* – kupónová sazba vyjadřující výši roční výplaty kupónu, která se udává jako procentuální hodnota z nominální hodnoty dluhopisu. Například, pokud máme hodnotu roční sazby kupónu rovnu 2 % a nominální hodnotu dluhopisu 10 000 CZK, můžeme očekávat, že ročně dostaneme kupón v hodnotě 200 CZK. U dluhopisu je také stanovena frekvence výplaty kupónu. Tato frekvence může být například jednou ročně, pro srovnání, u amerických dluhopisů je častá pololetní frekvence výplaty kupónu. To by v našem příkladu znamenalo, že jednou za pololetí obdržíme kupón v hodnotě 100 CZK.

Dle charakteru úrokového výnosu můžeme rozdělit dluhopisy:

- S pevnou úrokovou sazbou – dluhopis má pevně danou úrokovou sazbu, která se v průběhu života dluhopisu nemění.
- S pohyblivou úrokovou sazbou – dluhopis má pohyblivou úrokovou sazbu, jejíž výše se odvíjí od specifikovaného podkladového instrumentu, většinou od sazby PRIBOR, LIBOR.
- Bez úrokové sazby – dluhopis, který nemá určenou úrokovou sazbu, prodává se ovšem za nižší (diskontovanou) cenu, než je nominální hodnota dluhopisu.
- Svlečené dluhopisy – dluhopisy, u kterých je oddělen kupón od jmenovité hodnoty a jsou obchodovány zvlášť v podobě bezkupónových dluhopisů.

*Vyjádření ceny dluhopisu* – v Evropě se používá decimální systém, tedy cena se vyjadřuje v podobě 102,16. V Americe se cena vyjadřuje v násobcích  $1/32$  a půlbodů v násobcích  $1/64$ . Tedy cena 102-16 je z amerického pohledu znamená  $102 + 16/32 = 102,5$ . A cena vyjádřená jako 102-16+ znamená  $102 + 16/32 + 1/64 = 102,515625$ .

*Doba do splatnosti* – důležitý parametr dluhopisu, od kterého se odvíjí jeho rizikovost, výnos do splatnosti. Obecně se dá říci, že čím delší doba do splatnosti, tím větší rizikovost dluhopisu. Podle tohoto parametru lze dluhopisy rozdělit na:

- Krátkodobé – do 2 let
- Střednědobé – do 5-10 let
- Dlouhodobé – nad 10 let

Můžeme se setkat i s dluhopisy, které nemají určenou dobu splatnosti – tzv. dluhopisy bez splatnosti. Označují se jako perpetuity a mají několik charakteristik - například obvykle patří mezi podřízené dluhopisy, takže v případě, že se emitent nedokáže splácet své závazky, tyto dluhopisy mají nižší prioritu. Perpetuitní dluhopisy také obvykle obsahují opci, díky které může emitent za určitých podmínek předčasně splatit celou emisi.

*Denominace dluhopisu* – denominace dluhopisu určuje, v jaké měně bude držitel dluhopisu dostávat pravidelné platby v podobě kupónů a konečnou jmenovitou hodnotu. Odsud také může plynout určité měnové riziko. V praxi se můžeme setkat s různě označenými emisemi, můžeme jmenovat například Eurobonds, tak se označují mezinárodní dluhopisy, které mají denominaci v jiné měně, než je měna státu, ve kterém jsou emitovány. Ve svém názvu nesou měnu, ve které jsou vystaveny – například Eurodollar, jehož denominace je v USD a emitentem může být společnost se sídlem v České republice. Dalším takovým případem mohou být Yankee bonds (mezinárodní dluhopisy denominované v USD, vydávané na území USA zahraniční společností) nebo Kangaroo bonds (mezinárodní dluhopisy denominované v Australských dolarech na území Austrálie zahraniční společností). (Stádník 2013)

### **1.3 Oceňování dluhopisů**

V této podkapitole se seznámíme s hlavními principy oceňování dluhopisů. Ocenění prozatím vztáhneme na základní kupónové a bezkupónové dluhopisy, které v sobě nemají vnořenou žádnou opci. Oceňování dluhopisů s opcemi bude rozebráno v následujících kapitolách.

### 1.3.1 Hlavní principy oceňování

Základním principem oceňování finančních instrumentů je předpoklad, že hodnota každého instrumentu je rovna současné hodnotě jeho očekávaných peněžních toků. Tento přístup platí napříč všemi druhy finančních instrumentů. Z tohoto pohledu můžeme proces oceňování rozdělit do několika kroků:

- Odhadnutí budoucích peněžních toků
- Určení vhodné úrokové sazby pro diskontování budoucích peněžních toků
- Konečný výpočet hodnoty instrumentu za použití odhadu peněžních toků z prvního bodu a křivek z bodu druhého

#### 1.3.1.1 Odhad budoucích peněžních toků

Peněžní tok neboli tzv. cash flow je soubor výplat peněžních prostředků očekávaných v budoucnu v určitých časových okamžicích. V případě dluhopisů se mezi peněžní toky zahrnují jak platby plynoucí z kupónu, tak platba plynoucí ze závěrečné výplaty nominální hodnoty. Ne vždy je jednoduché strukturu peněžních toků určit. Pokud je dluhopis rizikový, nikdy nemáme jistotu, že předpokládaná struktura peněžních toků bude dodržena. Existují ale dluhopisy, které můžeme považovat za bezrizikové. Mezi takové se řadí státní dluhopisy, kde je téměř vyloučeno, že by nedodržely předem danou strukturu peněžních toků. Pokud například vezmeme v úvahu pětiletý státní dluhopis s kupónovou sazbou 3 %, roční výplatou kupónu a nominálem 10 000 CZK, můžeme v takovém případě téměř s jistotou očekávat, že každý rok obdržíme 300 CZK v podobě kupónu a poslední – pátý rok bude vyplacen poslední kupón společně s nominální hodnotou, tedy 10 300 CZK.

U dluhopisů, které mají fixní úročení, je poměrně snadné odhadnout podobu budoucích peněžních toků, jak jsme si ukázali výše, ovšem za předpokladu, že emitent daného dluhopisu dostojí svým závazkům. Složitější situace nastává u dluhopisů, které nemají jasně definovanou strukturu peněžních toků, nebo se tato struktura může v průběhu času měnit. Takovým příkladem může být dluhopis, který obsahuje vnořenou opci, díky které má právo emitent nebo držitel dluhopisu změnit datum výplaty kupónů, případně nominální hodnoty. Dalším příkladem může být dluhopis s plovoucí úrokovou sazbou. Tato sazba se může měnit například každý měsíc podle předem definovaného přepočtu v závislosti na vývoji předem definované úrokové sazby (PRIBOR, LIBOR atd.).

Jako poslední příklad můžeme uvést dluhopis, u kterého se emitent nebo majitel může rozhodnout, zda daný dluhopis vymění za akcii. Takové dluhopisy se nazývají konvertibilní.

U prvního dluhopis z výše uvedeného příkladu se emitent rozhodne, zda dluhopis předčasně splatí na základě pohybu úrokových sazeb. Pokud by se sazby výrazně snížily, vystaví emitent nový dluhopis s nižší úrokovou sazbou a získané prostředky použije na předčasné splacení staršího dluhopisu. Stejně tak pokud by měl investor opci, že může dluhopis uplatnit dříve, udělá tak na základě vývoje úrokových sazeb. Pokud by sazby výrazně vzrostly, klesla by tržní cena dluhopisu. V případě, že by cena klesla na nižší hodnotu, než za kterou může investor dluhopis uplatnit, využije držitel dluhopisu svého práva a dluhopis předčasně uplatní.

Z toho plyne, že abychom správně odhadli sktrukturu budoucích peněžních toků, je nezbytné brát v úvahu, jak může vývoj úrokových sazeb a dalších tržních faktorů ovlivnit případné uplatnění vnořených opcí a tím i budoucí peněžní toky.

### 1.3.1.2 Diskontování budoucích peněžních toků

Současná hodnota jednoho budoucího peněžního toku vyjadřuje, jakou částku musíme dnes uložit, abychom v budoucnu získali zmíněnou hodnotu peněžního toku. Současná hodnota<sup>3</sup> budoucího peněžního toku závisí na dvou faktorech. Prvním faktorem je časový okamžik, kdy bude částka vyplacena, druhým faktorem je úroková sazba použitá pro výpočet současné hodnoty, tzv. diskontní sazba. Současná hodnota očekávaného budoucího peněžního toku se tedy dá vyjádřit jako:

$$SH_t = \frac{BH_t}{(1+i)^t} \quad (1)$$

kde

*SH* označuje současnou hodnotu peněžního toku očekávaného v čase *t*

*BH* označuje budoucí očekávanou hodnotu peněžního toku v čase *t*

*i* označuje diskontní sazbu

*t* označuje počet let, která zbývají do výplaty očekávaného peněžního toku

---

<sup>3</sup> Někdy označována také jako diskontovaná hodnota

Celkovou hodnotu finančního instrumentu získáme jako součet současných hodnot dílčích peněžních toků, tedy

$$SH = SH_1 + SH_2 + SH_3 + \dots + SH_N \quad (2)$$

což můžeme zapsat jako

$$SH = \sum_{t=1}^T SH_t \quad (3)$$

Pro ilustraci si můžeme uvést kupónový dluhopis, který má splatnost za 3 roky, kupónovou sazbu 4 %, a diskontní sazbu budeme uvažovat 2 % pro všechna období. Nominální hodnota dluhopisu je 10 000 CZK a výplata kupónu probíhá jednou za rok.

Peněžní toky takového dluhopisu jsou následující:

| Rok | Peněžní tok |
|-----|-------------|
| 1   | 400 CZK     |
| 2   | 400 CZK     |
| 3   | 10 400 CZK  |

Současná hodnota každého z peněžních toků je následující:

$$\text{Rok 1: } SH_1 = \frac{400 \text{ CZK}}{(1 + 0,02)^1} = 392,157 \text{ CZK}$$

$$\text{Rok 2: } SH_2 = \frac{400 \text{ CZK}}{(1 + 0,02)^2} = 384,468 \text{ CZK}$$

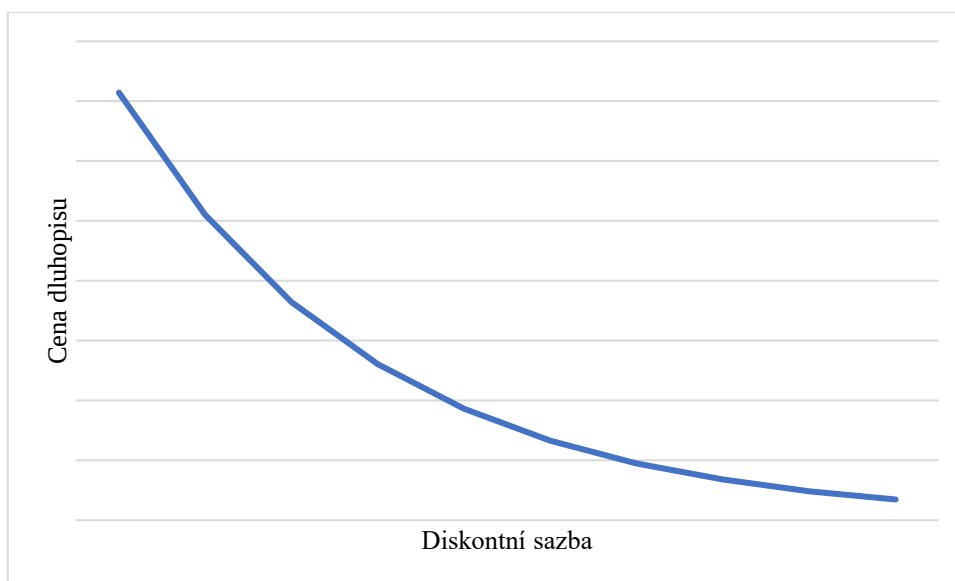
$$\text{Rok 3: } SH_3 = \frac{10\,400 \text{ CZK}}{(1 + 0,02)^3} = 9\,800,152 \text{ CZK}$$

Současnou hodnotu dluhopisu získáme jako součet dílčích peněžních toků, tedy  $392,157 + 384,468 + 9\,800,152 = 10\,576,78 \text{ CZK}$ .

Z výše uvedeného příkladu můžeme vidět, jak mají oba faktory (doba do splatnosti očekávaného peněžního toku a diskontní sazba) vliv na výslednou cenu dluhopisu.

Čím vzdálenější je doba splatností peněžního toku, tím nižší současnou hodnotu má. Na grafu č. 1 také můžeme pozorovat, že při zvýšení diskontní sazby se sníží hodnota každého z peněžních toků a tím i hodnota dluhopisu. Pokud by se diskontní sazba snížila, současná hodnota peněžních toků vzroste.

Graf 1: Závislost ceny dluhopisu na diskontní sazbě



Zdroj: vlastní zpracování

Doposud jsme předpokládali, že se vždy nacházíme na začátku výplatního období kupónu. Často ale nastává případ, že chceme spočítat cenu dluhopisu v okamžiku mezi výplatními obdobími kupónů. I zde platí, že kupující zaplatí prodávajícímu cenu, která je součtem diskontovaných budoucích peněžních toků dluhopisu. Bude zde ale jedna změna, musíme brát v potaz, že první následující peněžní tok je složen ze dvou částí. Jedna část představuje tzv. naběhnutý úrok, který přísluší současnému držiteli dluhopisu, druhá část je zbývající úrok do výplaty kupónu, který získá kupující. Pro lepší představu můžeme vzít v úvahu dluhopis, který vyplácí kupón jednou ročně. Pokud by se držitel takového dluhopisu rozhodl daný instrument prodat jeden den před výplatou kupónu, přišel by o tuto výplatu, jež je jakousi odměnou za to, že měl dluhopis celý rok ve vlastnictví. Naopak člověk, který by takový dluhopis koupil, by druhý den rovnou získal platbu z ročního

kupónu. Je zřejmé, že by takový postup nebyl zcela spravedlivý. Proto se při určování ceny uvažuje výše zmíněná logika.

Při výpočtu hodnoty dluhopisu pomocí diskontovaných peněžních toků se do ceny zahrnuje také naběhnutý úrok. Taková cena se často označuje jako „dirty price“. Jedná se o celkovou cenu, kterou kupující zaplatí prodávajícímu. Abychom získali cenu samotného dluhopisu, musíme naběhnutý úrok od dirty price odečíst. Taková cena se potom označuje jako „clean price“.

Toto můžeme demonstrovat na dluhopisu, který jednou ročně vyplácí kupón 5 %, jeho splatnost je za 4 roky, nominální hodnota je 10 000 CZK, diskontní sazba je 6 % a do výplaty kupónu zbývá 231 dní. Délka kupónového období je 360 dní.

Nejdříve je potřeba spočítat po jakou část výplatního období jsme dluhopis drželi ve vlastnictví.

$$n = \frac{d}{P} \quad (4)$$

kde

$n$  označuje část kupónového období mezi dnem valuace a dnem výplaty kupónu

$d$  označuje počet dní zbývajících do výplaty kupónu

$P$  označuje počet dní v kupónovém období

V našem případě se tedy  $n$  vypočítá jako  $231/360$ ,  $n = 0,642$

Současnou hodnotu peněžního toku vypočítáme jako:

$$SH_t = \frac{BH_t}{(1+i)^{t-1+n}} \quad (5)$$

V našem případě tedy bude současná hodnota peněžních toků vypočítána jako:

$$\text{Doba 1: } SH_1 = \frac{500 \text{ CZK}}{(1+0,06)^{0,642}} = 481,6412 \text{ CZK}$$

$$\text{Doba 2: } SH_2 = \frac{500 \text{ CZK}}{(1+0,06)^{1,642}} = 454,3785 \text{ CZK}$$

$$\text{Doba 3: } SH_3 = \frac{500 \text{ CZK}}{(1 + 0,06)^{2,642}} = 428,659 \text{ CZK}$$

$$\text{Doba 4: } SH_4 = \frac{10\,500 \text{ CZK}}{(1 + 0,06)^{3,642}} = 8\,492,3 \text{ CZK}$$

Celková cena dluhopisu je tedy rovna součtu diskontovaných peněžních toků, který se rovná 9 856,979 CZK. Je nutné si uvědomit, že v této ceně je započítána hodnota naběhnutého úroku, který kupující platí prodávajícímu.

Abychom získali clean price, neboli čistou cenu dluhopisu, je potřeba od námi vypočtené dirty price (DP) odečíst hodnotu naběhnutého úroku (AUV). Tuto hodnotu spočítáme jako součin kupónové platby a poměrné části délky kupónového období, za které jsme dluhopis drželi.

$$AUV = (1 - n) * BH \quad (6)$$

V našem případě je tedy hodnota AUV rovna  $(1 - 0,642) * 500 = 179 \text{ CZK}$ .

Čistou cenu dluhopisu tedy získáme jako  $DP - AUV = 9\,856,979 - 179 = 9\,677,979 \text{ CZK}$ .

Doposud jsme brali v úvahu tzv. tradiční přístup oceňování, který se dívá na každý instrument jako na celek. V tomto případě bereme v úvahu jednu úrokovou sazbu a tu použijeme pro diskontování všech peněžních toků. Tuto diskontní sazbu získáme jako výnos ze státního dluhopisu se shodnou dobou splatnosti jako má instrument. Pokud máme například dluhopis se splatností pět let, který vyplácí jednou ročně kupón, vezmeme výnosovou sazbu pětiletého státního dluhopisu a použijeme ji pro diskontování všech peněžních toků našeho dluhopisu.

Správnější přístup je ale takový, že se na každý instrument můžeme dívat jako na soubor dílčích instrumentů. Tedy výše zmíněný 5letý státní dluhopis s roční periodou platby kupónu můžeme považovat za 5 bezkupónových dluhopisů, jejichž doby splatnosti odpovídají termínům výplaty kupónů a očekávaná hodnota dluhopisů je v době jejich splatnosti rovna peněžním tokům plynoucím z kupónových plateb.

Důvodem, proč se tento přístup považuje za lepší, je to, že zde není možnost arbitrážního zisku<sup>4</sup>, kdy by investor mohl realizovat bezrizikový zisk tím, že by instrument rozdělil na dílčí části a ty potom na trhu prodal za vyšší celkovou cenu, než jaké by byly náklady na pořízení takového instrumentu na trhu. Nadále tedy můžeme tento přístup označovat jako bezarbitrážní ocenění dluhopisu.

### **1.3.2 Výnosová křivka**

Abychom mohli výše uvedený přístup aplikovat, je nutné získat časovou strukturu bezrizikových úrokových sazeb k daným okamžikům splatnosti shodnými s maturitami našeho rozloženého 5letého dluhopisu. Tyto sazby se dají vypočítat jako výnosnosti státních dluhopisů k požadovaným maturitám a budeme je dále nazývat jako spotové úrokové sazby. Grafické znázornění vztahu spotových úrokových sazeb na čase se potom označuje jako výnosová křivka.

#### **1.3.2.1 Spotové úrokové sazby**

Při konstrukci výnosové křivky státních dluhopisů se vychází z bezkupónových státních dluhopisů. Zde ale nastává komplikace, protože bezkupónové státní dluhopisy jsou pouze s krátkou splatností (většinou do jednoho roku). Dluhopisy s delší dobou splatností bývají zpravidla kupónové. Je nutné tedy vytvořit spotové sazby na základě hypotetických státních bezkupónových dluhopisů s delší splatností než jeden rok. V následující části práce si vysvětlíme metodu bootstrapping, která se v praxi pro tyto účely běžně používá.

Pro vysvětlení metody bootstrapping budeme uvažovat emisi 10 státních dluhopisů uvedených v tabulce č. 1. Cílem bootstrappingu je odvození spotové sazby, která je uvedena v pátém sloupci tabulky.

---

<sup>4</sup> Arbitráž znamená nákup a okamžitý prodej za různé ceny na různých trzích. Jinými slovy se dá říct, že investor dosáhne zisku bez jakéhokoliv rizika, protože může na jednom trhu nakoupit instrument za nižší cenu, který následně prodá za vyšší cenu na trhu druhém. V praxi se takové situace objevují jen velmi zřídka, jakmile však taková situace nastane, okamžitě ji někdo využije a ceny se poté zase srovnají.

Tabulka 1: Přehled ilustrativních státních dluhopisů

| Splatnost<br>v letech | Kupónová<br>sazba | Nominální<br>hodnota | Cena   | Spotová<br>sazba | Výnos<br>do splatnosti |
|-----------------------|-------------------|----------------------|--------|------------------|------------------------|
| 1                     | 0 %               | 10 000               | 9 875  | 1,27 %           | 1,27 %                 |
| 2                     | 1,40 %            | 10 000               | 9 912  | 1,86 %           | 1,85 %                 |
| 3                     | 1,50 %            | 10 000               | 9 891  | 1,88 %           | 1,88 %                 |
| 4                     | 1,80 %            | 10 000               | 9 956  | 1,92 %           | 1,92 %                 |
| 5                     | 2,10 %            | 10 000               | 10 045 | 2,01 %           | 2,00 %                 |
| 6                     | 2,30 %            | 10 000               | 10 112 | 2,11 %           | 2,10 %                 |
| 7                     | 2,40 %            | 10 000               | 9 925  | 2,56 %           | 2,52 %                 |
| 8                     | 2,80 %            | 10 000               | 9 895  | 3,04 %           | 2,95 %                 |
| 9                     | 3,50 %            | 10 000               | 9 944  | 3,78 %           | 3,57 %                 |
| 10                    | 3,80 %            | 10 000               | 10 019 | 4,02 %           | 3,78 %                 |

Zdroj: vlastní zpracování

Jak můžeme z tabulky vidět, první dluhopis se splatností jeden rok je bezkupónový, očekáváme tedy u něj jeden peněžní tok na konci života tohoto dluhopisu. Z toho můžeme tedy rovnou odvodit jednoroční spotovou úrokovou sazbu pomocí následujícího vztahu:

$$SH = \frac{BH}{(1 + i)} \quad (7)$$

kde  $i$  označuje spotovou sazbu

V našem případě tedy:

$$9875 = \frac{10\,000}{(1 + i)}$$

kde po úpravě získáme  $i = 1,27 \%$ . Můžeme pozorovat, že u bezkupónového dluhopisu se spotová sazba rovná zároveň výnosu do splatnosti.

U dvouletého dluhopisu můžeme očekávat následující peněžní toky:

- 1. rok výplata kupónu v hodnotě 140
- 2. rok výplata druhého kupónu spolu s nominálem dluhopisu

Pro vyjádření dvouleté spotové sazby budeme postupovat podobně jako u jednoleté sazby s tím, že nyní využijeme již spočtenou jednoletou sazbu pro diskontování prvního peněžního toku.

Pro odvození dvouleté spotové sazby použijeme následující rovnici

$$SH = \frac{BH_1}{(1 + i_1)} + \frac{BH_2}{(1 + i_2)^2} \quad (8)$$

kde

$SH$  označuje současnou hodnotu peněžních toků

$BH_1$  označuje hodnotu peněžního toku v prvním roce

$BH_2$  označuje hodnotu peněžního toku ve druhém roce

$i_1$  označuje jednoletou spotovou sazbu

$i_2$  označuje dvouletou spotovou sazbu

V našem případě tedy

$$9\,912 = \frac{140}{(1 + 0,0127)} + \frac{10\,140}{(1 + i_2)^2}$$

Vidíme, že po zápisu dvouletého dluhopisu do rovnice nám jako jediná neznámá zbývá dvouletá spotová sazba. Po úpravě rovnice dostaneme  $i_2 = 1,86 \%$ . Tato dvouletá spotová sazba vyjadřuje, jaký výnos by investor požadoval po dvouletém bezkupónovém státním dluhopisu v případě, že by takový dluhopis na trhu existoval.

Jelikož máme jednoletou a dvouletou spotovou sazbu, můžeme obdobně odvodit tříletou spotovou sazbu. Očekávané peněžní toky tříletého dluhopisu jsou:

- 1. rok výplata kupónu v hodnotě 150
- 2. rok výplata kupónu v hodnotě 150
- 3. rok výplata kupónu 150 spolu s nominálem dluhopisu 10 000

Pro výpočet tříleté spotové sazby použijeme následující rovnici:

$$SH = \frac{BH_1}{(1 + i_1)} + \frac{BH_2}{(1 + i_2)^2} + \frac{BH_3}{(1 + i_3)^3} \quad (9)$$

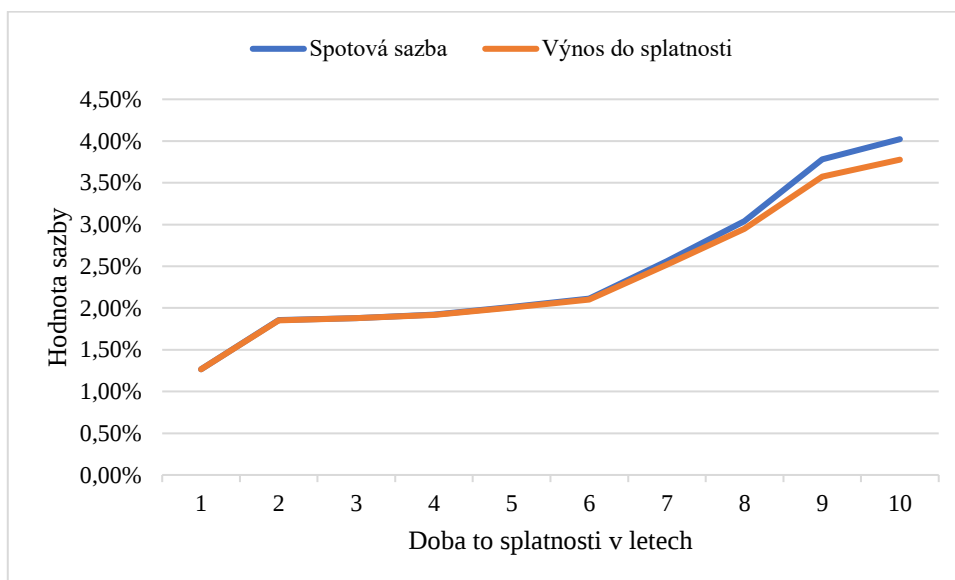
Po dosazení do rovnice dostáváme

$$9\,891 = \frac{150}{(1 + 0,0127)} + \frac{150}{(1 + 0,0186)^2} + \frac{10\,150}{(1 + i_3)^3}$$

kde  $i_3$  označuje tříletou spotovou sazbu. Po úpravě rovnice dostaneme  $i_3 = 1,88 \%$ .

Tímto jsme odvodili časovou strukturu spotových úrokových sazeb uvedených v pátém sloupci tabulky č. 1. V šestém sloupci této tabulky je uveden výnos do splatnosti státních dluhopisů. Ten se označuje jako vnitřní výnosové procento a uvádí požadovanou výnosnost, při které se tržní hodnota instrumentu rovná součtu diskontovaných peněžních toků. Při pohledu na graf č. 2 vidíme, že při delších splatnostech je spotová sazba vyšší než výnos do splatnosti. To je dáno tím, že je křivka výnosu do splatnosti rostoucí. V případě, že by byla klesající, spotová křivka bude ležet pod křivkou výnosu do splatnosti.

Graf 2: Spotová a výnosová křivka



Zdroj: vlastní zpracování

## 2. Dluhopisy s vnořenými opcemi

V této kapitole se zaměříme na obecnou charakteristiku dluhopisů s vnořenými opcemi, dále si vysvětlíme, jakým způsobem se takové dluhopisy oceňují. Další část této kapitoly bude věnována odhadu parametrů, které jsou nezbytné pro určení hodnoty takových dluhopisů.

### 2.1 Vymezení dluhopisů s vnořenými opcemi

Obecně se mohou dluhopisy s vnořenými opcemi zařadit mezi tzv. strukturované produkty. Strukturovaný finanční produkt je v podstatě kombinace několika finančních instrumentů, jako jsou například dluhopisy a finanční deriváty<sup>5</sup>. Na první pohled se jedná o standardní dluhopisy. Strukturované produkty také mohou vyplácet jednou za období svého života periodické platby (kupóny) a na konci svého života spolu s kupónem vyplátí nominální hodnotu. Zásadním rozdíle mezi strukturovanými produkty a standardními dluhopisy je skutečnost, že jak pravidelné platby, tak závěrečná výplata nominální hodnoty závisí na pohybu podkladového aktiva, na které jsou tyto produkty navázány. Podkladovým aktivem může být akcie, akciový index, úroková míra nebo měnový kurz.

Strukturované produkty se mohou dělit na dvě skupiny. První skupina produktů má garantovanou minimální výplatu vložených prostředků (nominálu). U těchto produktů se investor může spolehnout na to, že buď část, nebo celá investice mu bude na konci života produktu navracena. Často se ale zároveň investor podílí na růstu podkladového aktiva jen určitou částí. Jeho potenciální výnos je tedy částečně omezen. Druhá skupina produktů nemá žádnou ochranu vložených prostředků. Může se tedy stát, že na konci života takového produktu při nepříznivém vývoji podkladového aktiva investor přijde o veškeré vložené peníze. Pokud ale vývoj podkladového aktiva bude příznivý, investor může získat vyšší výnos, než pokud by vlastnil pouze podkladové aktivum.

---

<sup>5</sup> Finanční derivát je instrument, jehož hodnota je odvozena od podkladového aktiva, na které je tento instrument navázán. Mezi finanční deriváty patří například opce.

## 2.2 Principy oceňování

V předchozí části této práce jsme vymezili strukturované produkty jako kombinaci několika finančních instrumentů v jednom produktu. Při oceňování tedy můžeme tento produkt rozdělit na dílčí části a ty ocenit zvlášť. V případě dluhopisu s vnořenou opcí můžeme hodnotu tohoto instrumentu spočítat jako součet hodnoty dluhopisu a hodnoty vnořené opce.

$$\text{Strukturovaný produkt} = \text{cena dluhopisu} + \text{cena opce}$$

### 2.2.1 Cena dluhopisu

Cena dluhopisu se spočítá jako součet diskontovaných očekávaných peněžních toků, jak jsme bylo uvedeno již v přechozí kapitole.

$$\text{Cena dluhopisu} = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{1 + r_t} + \frac{N}{1 + r_n}$$

kde

$C_t$  označuje výplatu kupónu v čase  $t$

$N$  označuje nominální hodnotu

$r_t$  označuje diskontní sazbu, která v sobě zahrnuje riziko defaultu<sup>6</sup> emitenta

Jelikož jsou strukturované produkty často emitovány různými finančními společnostmi, je potřeba brát v potaz i riziko plynoucí ze situace, že emitent nedokáže dostát svým závazkům<sup>7</sup>. Toto riziko se do výpočtu zahrnuje v podobě kreditního spreadu, který je obsažen v diskontní sazbě. V tabulce č. 2 můžeme vidět přehled ratingových stupňů, které ratingové agentury přiřazují většině velkých institucí, které se pohybují na finančních trzích. Ratingový stupeň můžeme najít u států nebo finančních institucí. Na základě tohoto stupně může potom investor orientačně určit, jakému potencionálnímu riziku se z hlediska kreditního rizika vystavuje.

---

<sup>6</sup> Jako default se označuje stav, kdy emitent není schopen splatit své závazky plynoucí z dluhopisu.

<sup>7</sup> Takové riziko se označuje jako kreditní riziko.

Tabulka 2: Přehled ratingových stupňů podle ratingových agentur

| Fitch | S&P  | Moody's | Rating grade description (Moody's)         |                                                  |
|-------|------|---------|--------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| AAA   | AAA  | Aaa     | Investment grade                           | Minimal credit risk                              |
| AA+   | AA+  | Aa1     |                                            | Very low credit risk                             |
| AA    | AA   | Aa2     |                                            |                                                  |
| AA-   | AA-  | Aa3     |                                            |                                                  |
| A+    | A+   | A1      |                                            | Low credit risk                                  |
| A     | A    | A2      |                                            |                                                  |
| A-    | A-   | A3      |                                            | Moderate credit risk                             |
| BBB+  | BBB+ | Baa1    |                                            |                                                  |
| BBB   | BBB  | Baa2    |                                            |                                                  |
| BBB-  | BBB- | Baa3    | Speculative grade                          | Substantial credit risk                          |
| BB+   | BB+  | Ba1     |                                            | High credit risk                                 |
| BB    | BB   | Ba2     |                                            |                                                  |
| BB-   | BB-  | Ba3     |                                            |                                                  |
| B+    | B+   | B1      |                                            | Very high credit risk                            |
| B     | B    | B2      |                                            |                                                  |
| B-    | B-   | B3      |                                            |                                                  |
| CCC+  | CCC+ | Caa1    |                                            | In or near default, with possibility of recovery |
| CCC   | CCC  | Caa2    |                                            |                                                  |
| CCC-  | CCC- | Caa3    |                                            |                                                  |
| CC    | CC   | Ca      | In default, with little chance of recovery |                                                  |
| C     | C    |         |                                            |                                                  |
| DDD   | SD   | C       |                                            |                                                  |
| DD    | D    |         |                                            |                                                  |
| D     |      |         |                                            |                                                  |

Zdroj: (Česká národní banka 2018)

Na základě ratingu potom můžeme upravit i diskontní sazby, kterými diskontujeme náš dluhopis (například s ratingem BBB+) tím, že k této sazbě přičteme výše zmíněný kreditní spread. Ten se dá například odvodit z jiných dluhopisů se stejným ratingem (BBB+) tím, že porovnáme výnosovou míru rizikovějšího dluhopisu s bezrizikovým. Jak je již zmíněno výše, za bezrizikové instrumenty můžeme považovat státní dluhopisy. Pokud tedy odvodíme výnosovou sazbu státního dluhopisu a výnosovou sazbu dluhopisu s horším ratingem, rozdíl mezi těmito sazbami bude spread<sup>8</sup>, který následně přičteme k naší bezrizikové diskontní sazbě. Jak je známo, za vyšší riziko požaduje investor vyšší výnos, tudíž tím, že navýšíme diskontní sazbu, snížíme cenu dluhopisu (viz. Graf č. 1). Lze tvrdit, že platí pravidlo, čím rizikovější instrument je, tím nižší je jeho cena<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> V praxi tento spread nevyjadřuje pouze kreditní riziko. Může v něm být zahrnuta například přírážka závisající na požadované likviditě, tedy jak náročné je dluhopis zpeněžit. Pro účely této práce ale budeme tento spread uvažovat jako čistě kreditní.

<sup>9</sup> Platí, že porovnáváme instrumenty se stejnými parametry, které se například liší pouze rizikovostí emitentů.

## 2.2.2 Cena opce

Opce je finanční instrument, který se obchoduje jak na burze, tak na mimoburzovních trzích<sup>10</sup>. Rozlišují se dva druhy opcí – nákupní opce, tzv. call opce a prodejní opce, tzv. put opce. Call opce dává držiteli právo koupit podkladové aktivum opce<sup>11</sup> v určitý čas za určitou cenu. Put opce naopak dává držiteli právo prodat podkladové aktivum opce v určitý čas a za určitou cenu. Tato cena se označuje jako realizační cena nebo tzv. strike price. Investor, který chce získat opci, za ni musí zaplatit určitou cenu, respektive vydavatel opce obdrží od investora částku, která odpovídá hodnotě opce. Tato cena se nazývá opční prémie. Opce můžeme ještě rozlišit na evropského a amerického typu. Opci evropského typu je možné uplatnit pouze v jeden určitý okamžik, který je u opce sjednán. Opce amerického typu mohou být uplatněny kdykoliv během doby života opce<sup>12</sup>. (Witzany 2011)

Existuje řada oceňovacích modelů, kterými se dá určit hodnota opce. Nejznámějším a nejpoužívanějším v dnešní době je Black-Scholes oceňovací model. Výhodou použití tohoto modelu je fakt, že je poměrně jednoduchý, snadný na implementaci díky tomu, že má analytickou formu řešení a také díky skutečnosti, že dokáže poměrně dobře odhadnout hodnotu opce za běžných okolností. Mezi další metody určení hodnoty opce můžeme zařadit binomické stromy nebo můžeme cenu určit pomocí simulace Monte Carlo.

### 2.2.2.1 Wienerův proces

Pro modelování vývoje podkladového aktiva derivátu akcie se využívá stochastický proces. Základním stochastickým procesem je Wienerův proces<sup>13</sup>. Začátek tohoto procesu je v bodě 0 a každý následující krok je nezávislý na předchozím vývoji. Jeho střední hodnota je tedy 0 a rozptyl je roven délce časového intervalu tohoto procesu, který se za každý rok rovná hodnotě 1. Tedy rozptyl na dvouletém intervalu je roven 2, rozptyl na šesti měsíčním intervalu je roven 0,5.

---

<sup>10</sup> tzv. over-the-counter trhy (OTC).

<sup>11</sup> Například akcii.

<sup>12</sup> Označení opcí jako evropského nebo amerického typu nijak nesouvisí s geografickou pozicí, kde se opce realizuje nebo obchoduje.

<sup>13</sup> Také označovaný jako Brownův pohyb.

Za předpokladu, že je pravděpodobnost vzestupu nebo poklesu v dalším kroku stejná, tedy rovna 0,5, můžeme vyjádřit změnu proměnné  $x$  za časový úsek  $t$  rovnicí (10).

$$\Delta x = \pm\sqrt{\Delta t} \quad (10)$$

Obecně můžeme říci, že se proměnná  $z$  řídí Wienerovým procesem, pokud splňuje následující dvě podmínky:

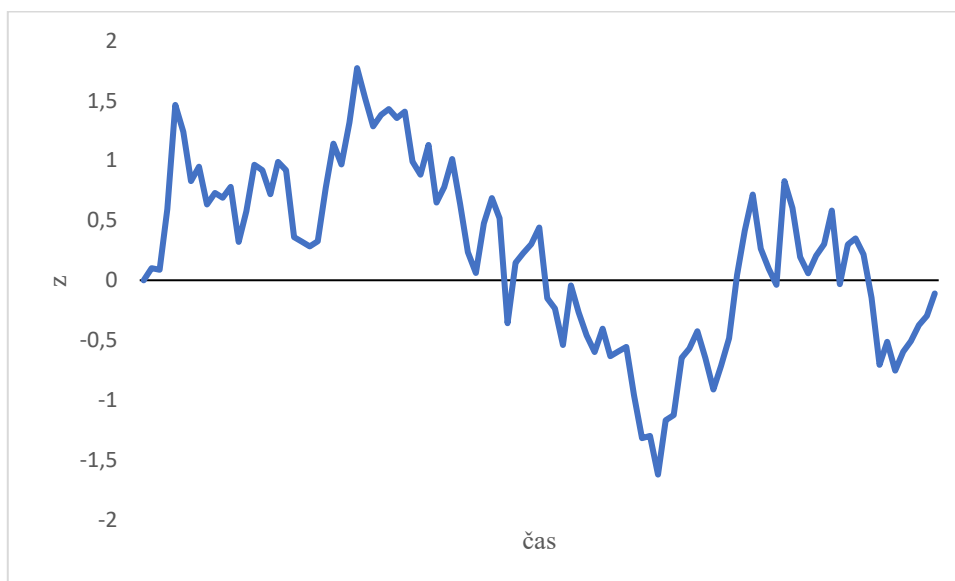
- 1) Změna  $\Delta z$  za krátký časový interval  $\Delta t$  je rovna

$$\Delta z = \alpha\sqrt{\Delta t} \quad (11)$$

kde  $\alpha$  je výběr ze standardizovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ .

- 2) Hodnoty  $\Delta z$  pro jakékoliv dva krátké časové intervaly  $\Delta t$  jsou na sobě nezávislé.

Graf 3: Realizace Wienerova procesu



Zdroj: vlastní zpracování

U Wienerova procesu se střední hodnota očekávané změny hodnoty procesu za jednotku času označuje jako drift. Základní verze Wienerova procesu  $dz$  má drift roven nule. Z toho můžeme usuzovat, že očekávaná hodnota procesu  $z$  v jakémkoliv budoucím okamžiku je rovna současné hodnotě.

Tzv. generalizovaný Wienerův proces můžeme popsat následující rovnicí jako

$$dy = a dt + b dz \quad (12)$$

kde  $a, b$  jsou konstanty.

Člen  $a dt$  nám říká, že  $y$  má očekávaný drift o velikosti  $a$  za jednotku času. Druhý člen  $b dz$  zase zvyšuje variabilitu samotného Wienerova procesu. Změnu  $\Delta y$  za malý časový úsek  $\Delta t$  můžeme zapsat ve tvaru:

$$\Delta y = a\Delta t + b\alpha\sqrt{\Delta t} \quad (13)$$

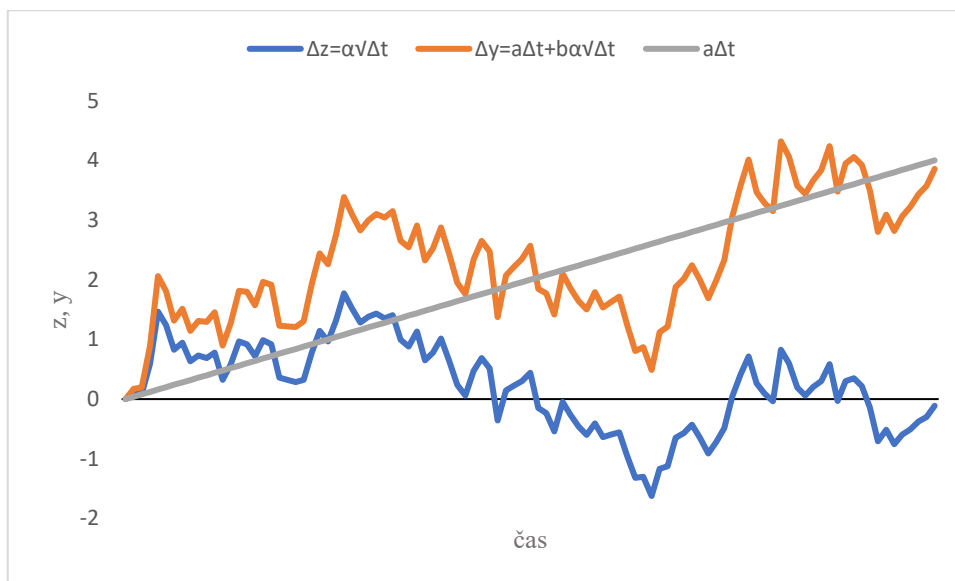
kde jako v předchozím případě má  $\alpha$  standardizované normální rozdělení.  $\Delta y$  má tedy normální rozdělení, kde

střední hodnota  $\Delta y = a\Delta t$

směrodatná odchylka  $\Delta y = b\sqrt{\Delta t}$

rozptyl  $\Delta y = b^2\Delta t$  (Hull 2012)

Graf 4: Realizace Wienerova procesu s driftem



Zdroj: vlastní zpracování

Na Grafu č. 4 můžeme vidět vliv parametrů  $a = 0,4$  a  $b = 1,3$ . Parametr  $a$  nám udává trend, který je vyznačen šedou čarou, parametr  $b$  zajišťuje větší variabilitu procesu. Můžeme pozorovat porovnání se základním Wienerovým procesem, který je stejný jako v Grafu č. 3. V porovnání je vidět jak trend, tak i větší variabilita.

### 2.2.2.2 Itôva formule

Fischer Black, Myron Scholes a Robert Merton se zasloužili o vytvoření modelu pro oceňování opcí v roce 1973. Tento model vychází z předpokladu, že cena opce na nákup akcie je funkcí ceny podkladového aktiva a času. Obecně můžeme říci, že cena jakéhokoliv finančního derivátu je funkcí náhodných proměnných, které jsou podkladem pro daný derivát, a času. K významnému posunu v této oblasti přispěl matematik K. Itô, který uvedl formuli, jež dává základ oceňovacímu modelu.

Předpokládejme, že hodnota proměnné  $x$  se řídí náhodným procesem

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (14)$$

kde  $dz$  je Wienerův proces a konstanty  $a, b$  jsou funkcí proměnných  $x$  a  $t$ . Proměnná  $x$  má drift o velikosti  $a$  a rozptyl o velikosti  $b^2$ . Itôva formule říká, že funkce  $G(x, t)$  se řídí procesem

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (15)$$

kde  $dz$  je Wienerův proces stejně jako v rovnici (12). Můžeme tedy říct, že  $G$  se řídí Itôvým procesem, kde drift  $a$  je roven

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

a rozptyl  $b$  je

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$$

Předpokládejme, že vývoj ceny akcie se řídí procesem

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (16)$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  jsou konstanty.

Dle Itôvy formule můžeme říci, že funkce  $G(S, t)$  se řídí následujícím procesem

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \quad (17)$$

Zde je důležité připomenout, že jak  $S$ , tak  $G$  mají stejnou náhodnou složku  $dz$  (Hull 2012).

### 2.2.2.3 Black-Scholes model

Pro odvození Black-Scholesovy diferenciální rovnice budeme vycházet z Itôvy formule, kterou jsme si přiblížili v předchozí části práce. Dále předpokládejme, že cena podkladového aktiva se řídí následujícím procesem:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (18)$$

Dále uvažujme, že  $f$  je cena derivátu, například call opce, která závisí na ceně podkladového aktiva  $S$ . Proměnná  $f$  tedy musí být funkcí ceny  $S$  a času  $t$ . Vyjdeme tedy z rovnice (17).

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (19)$$

Jak již bylo zmíněno výše, Wienerovy procesy, které jsou přítomny v rovnici ceny podkladového aktiva (18) i v rovnici ceny derivátu (19), jsou shodné. Je tedy zřejmé, že můžeme sestavit rizikově neutrální portfolio z derivátu a podkladového aktiva tak, že se Wienerova procesu zbavíme. Portfolio se bude skládat z  $-1$  derivátu a z  $\partial f / \partial S$  akcií.

$$P = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (20)$$

Změna hodnoty portfolia tedy bude dána rovnicí

$$dP = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \quad (21)$$

Po dosazení rovnic (18) a (19) do rovnice (21) dostaneme:

$$dP = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) dt \quad (22)$$

Jak můžeme vidět výše, rovnice (22) již neobsahuje člen  $dz$ . Můžeme tedy konstatovat, že takové portfolio musí být bezrizikové. Z tohoto důvodu musí být i výnos takového portfolia bezrizikový. Můžeme tedy říci, že:

$$dP = Pr_f dt \quad (23)$$

kde  $r_f$  je bezriziková úroková sazba. Po dosazení rovnic (20) a (21) do rovnice (22) získáme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) dt = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S\right) dt \quad (24)$$

Po úpravě rovnice (24) můžeme rovnici přepsat do tvaru:

$$rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} - rf = 0 \quad (25)$$

Rovnice (25) je Black-Scholesova diferenciální rovnice. Tato rovnice má spoustu řešení daných různými finančními deriváty, které mohou být definovány podkladovým aktivem  $S$ . Abychom získali řešení konkrétního finančního derivátu, musíme definovat okrajové podmínky.

Pro evropskou call opci můžeme okrajové podmínky definovat jako

$$f(T, S) = \max(S - K, 0)$$

kde  $S$  je spotová cena podkladového aktiva a  $K$  je realizační cena opce.

V případě evropské put opce by okrajové podmínky byly

$$f(T, S) = \max(K - S, 0)$$

Nejrozšířenějším řešením Black-Scholesovy diferenciální rovnice (25) jsou Black-Scholes-Mertonovy rovnice pro oceňování evropských call a put opcí

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (26)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (27)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (28)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (29)$$

$c$  označuje cenu evropské call opce

$p$  označuje cenu evropské put opce

$S_0$  označuje cenu akcie v čase nula

$K$  označuje realizační cenu opce

$r$  označuje bezrizikovou úrokovou sazbu

$\sigma$  označuje volatilitu<sup>14</sup> ceny akcie

$T$  označuje čas do maturity opce

$N(x)$  označuje kumulativní distribuční funkci standardizovaného normálního rozdělení

Při odvozování Black-Scholesovy rovnice byly brány v potaz následující předpoklady (Wilmott 2006):

- 1) Cena podkladového aktiva se řídí náhodným procesem – geometrickým Brownovým pohybem s konstantním driftem  $\mu$  a volatilitou  $\sigma$ .
- 2) Bezriziková úroková sazba je konstantní a předem známá.
- 3) Podkladové aktivum nevyplácí žádnou dividendu po dobu života derivátu.
- 4) Neexistují transakční náklady a daně
- 5) Neexistují bezrizikové arbitrážní příležitosti
- 6) Jsou povoleny krátké prodeje<sup>15</sup> podkladového aktiva

---

<sup>14</sup> Volatilita určuje variabilitu vývoje ceny podkladového aktiva. Tomuto pojmu se budeme věnovat v následující kapitole této práce.

## 2.3 Modelování a odhad parametrů

V předchozí části jsme si uvedly nejznámější a nejpoužívanější model pro oceňování opcí. Můžeme si všimnout, že do modelu vstupuje několik proměnných, které jsme zatím více nerozebírali, jako například volatilita. Proto si volatilitu přiblížíme v následující části práce. Dále existuje několik předpokladů, za kterých Black-Scholesův model platí. Tyto předpoklady ale často nejsou v reálném světě splněny, proto mohou být pro tento model určitou slabinou. Největší nedostatek tohoto modelu z praktického hlediska ale spočívá v tom, že dokáže ocenit pouze jednoduché opce. V praxi se můžeme setkat s opcemi, jejichž výplatní funkce je značně složitější. Může záviset na vývoji podkladového aktiva, například na průměrné ceně za určité období nebo výplata může být několikrát za období. Z tohoto důvodu je nutné použít simulaci podkladového aktiva. Nejčastěji se používá simulace Monte Carlo, která bude popsána rovněž v této podkapitole. V případě, že je podkladovým aktivem finančního derivátu úroková míra, uvedeme si i některé modely úrokových měr, které se používají pro simulaci.

### 2.3.1 Simulace Monte Carlo

Jak jsme zmínili v předchozí části práce, při určování hodnoty finančních derivátů vycházíme z předpokladu, že se pohyb podkladového aktiva řídí náhodnou procházkou a hodnota derivátu je následně určena na základě rizikové neutrality. To znamená, že současná hodnota derivátu je rovna diskontované výplatní funkci daného derivátu, což můžeme zapsat jako

$$\text{cena opce} = e^{-r(T-t)} E(\text{výplatní funkce derivátu}) \quad (30)$$

U simulace Monte Carlo se snažíme vytvořit možné cesty vývoje podkladového aktiva, abychom získali očekávaný vývoj podkladového aktiva a na základě toho potom mohli vyhodnotit výplatní funkci derivátu. Tuto výplatní funkci následně diskontujeme, z čehož dostaneme současnou hodnotu finančního derivátu. Při simulaci postupujeme v několika krocích:

---

<sup>15</sup> tzv. short selling. Jedná se o operaci, kdy investor na krátký čas prodá určité aktivum, které nevlastní s tím, že doufá v pokles ceny aktiva, aby ho mohl levněji koupit zpět a realizovat tak zisk.

- 1) Nejdříve pomocí náhodné procházky nasimulujeme jednu cestu možného vývoje podkladového aktiva  $S$ . Simulaci začínáme v bodě nula, tedy v současnosti a pokračujeme až do požadovaného časového horizontu. Vycházíme přitom z ceny podkladového aktiva, kterou právě pozorujeme.
- 2) Pro tuto jednu cestu spočítáme očekávanou výplatu z derivátu na základě jeho výplatní funkce.
- 3) Stejným způsobem potom vytvoříme další realizace možného vývoje podkladového aktiva, tedy opakujeme body 1 a 2.
- 4) Ze všech nasimulovaných realizací spočítáme průměrnou hodnotu z výplatní funkce, díky čemuž získáme na základě rizikové neutrality očekávanou hodnotu výplaty derivátu.
- 5) Tuto očekávanou výplatu následně diskontujeme a dostaneme požadovanou současnou hodnotu.

Předpokládejme, že se cena podkladového aktiva řídí procesem

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (31)$$

kde  $\mu$  je drift a  $\sigma$  označuje volatilitu. Při simulaci můžeme časový interval života derivátu rozdělit na několik menších částí o délce  $\Delta t$ . Rovnici (31) můžeme přepsat na

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \mu S(t) \Delta t + \sigma S(t) \alpha \sqrt{\Delta t} \quad (32)$$

kde  $S(t)$  označuje hodnotu podkladového aktiva  $S$  v čase  $t$ ,  $\alpha$  označuje náhodný výběr ze standardizovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ . Tímto způsobem můžeme vypočítat hodnotu podkladového aktiva v čase  $\Delta t$  z výchozí hodnoty  $S$ , v čase  $2\Delta t$  z hodnoty spočtené v čase  $\Delta t$  atd.

V praxi se ale častěji simuluje logaritmická změna  $S$ . Z Itôvy formule můžeme ukázat, že proces, kterým se řídí podkladové aktivum  $S$  je

$$d \ln S = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (33)$$

V našem případě tedy

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \alpha \sqrt{\Delta t} \quad (34)$$

což můžeme přepsat jako

$$\ln S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \alpha \sqrt{\Delta t} \right] \quad (35)$$

Rovnice (35) se v praxi běžně používá pro simulaci podkladového aktiva  $S$ . Díky tomu, že jsme rovnici převedli do logaritmického tvaru, jsme získali vyšší přesnost výsledných simulací. Zároveň pokud drift  $\mu$  a volatilita  $\sigma$  jsou konstanty, potom pro všechna  $T$  platí rovnice

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \alpha \sqrt{T} \quad (36)$$

V případě rovnice (34) je její správnost zaručena pouze v případě, kdy se  $\Delta t$  blíží k nule, jinými slovy, že časový interval života derivátu se snažíme rozdělit na nekonečně mnoho částí. Rovnici (36) ještě můžeme přepsat do tvaru

$$S(T) = S(0) \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \alpha \sqrt{T} \right] \quad (37)$$

Tuto rovnici lze použít také pro určení hodnoty finančního derivátu, který má nestandardní výplatní funkci v čase  $T$ .

Výhodou simulace Monte Carlo je to, že se může použít jak pro určení hodnoty finančního derivátu, jehož výplatní funkce závisí na vývoji podkladového aktiva, tak pro výplatní funkce, které závisí pouze na konečné hodnotě podkladového aktiva. Pomocí simulace Monte Carlo můžeme například oceňovat finanční derivát, jehož výplatní funkce závisí na průměrné hodnotě podkladového aktiva za určité období, nebo pro deriváty, jejichž výplatní funkce závisí na vývoji několika podkladových aktiv najednou, jak bude ukázáno v třetí kapitole této práce.

### 2.3.2 Volatilita

Volatilita podkladového aktiva je jedním z parametrů, který určuje výslednou cenu finančního derivátu. ze všech parametrů určujících výslednou cenu je odhad volatility většinou nejobtížnější. Tento parametr nám udává míru nejistoty výnosu podkladového aktiva. Hodnota volatility se pohybuje na intervalu od nuly do jedné, nemůže být záporná.

Uvažujme například akcii, jejíž cena je 100 CZK a jednorocní volatilita 20 %. V případě, že bychom chtěli určit měsíční volatilitu  $\sigma_m$ , budeme vycházet z rovnice

$$\sigma_i = \sigma_y \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (38)$$

kde

$\sigma_i$  označuje volatilitu na určité období, například týden, měsíc

$\sigma_y$  označuje roční volatilitu

$n$  označuje délku časového intervalu

po dosazení dostaneme

$$\sigma_{\text{měsíční}} = 20 \frac{1}{\sqrt{12}} = 5,77 \%$$

#### 2.3.2.1 Historická volatilita

Historická volatilita, jak již plyne z názvu, se odvozuje na základě historického vývoje podkladového aktiva. V případě, že chceme získat denní volatilitu určité akcie, postupujeme tak, že spočítáme směrodatnou odchylku historických denních výnosů dané akcie.

Směrodatná odchylka je definována jako

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (39)$$

kde

$N$  označuje počet pozorování

$x_i$  označuje pozorované hodnoty

$\bar{x}$  označuje aritmetický průměr pozorovaných hodnot

V případě výpočtu historické volatility akcie budeme počítat směrodatnou odchylku z logaritmických výnosů, tedy

$$x_i = \ln \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} \right) \quad (40)$$

kde

$i = 1, 2, \dots, n$

$S_i$  označuje cenu akcie

Pro následné odvození roční volatility použijeme obdobu rovnice (38),

Tedy

$$\sigma_{roční} = \sigma_{denní} \sqrt{252} \quad (41)$$

přičemž uvažujeme, že rok má 252 pracovních dní.

Při výpočtu historické volatility je otázkou, kolik historických pozorování zvolit. Pokud zvolíme příliš malý počet pozorování, vystavujeme se vysoké nepřesnosti výpočtu. Pokud zase naopak zvolíme příliš dlouhou historii, čelíme riziku, že velký výkyv denního výnosu nám ovlivní celkovou volatilitu, i když tento výkyv nastal daleko v minulosti. Existují proto sofistikovanější metody, kterými odhadnout volatilitu. Jednou z nich je metoda, v rámci které budeme přikládat větší váhu pozorování, která nastala v nedávné době. Tím můžeme použít dostatečně dlouhou historii a částečně eliminujeme riziko, že nám příliš vzdálené pozorování významně ovlivní výsledek. Zmíněnou metodou se budeme zabývat v následující části.

### 2.3.2.2 EWMA model

EWMA model, neboli exponentially weighted moving average, je model, který při odhadu volatility na základě historických hodnot upřednostňuje nedávnou historii před historií vzdálenou tím, že ve výpočtu mají vzdálenější hodnoty exponenciálně menší váhu.

Vycházíme z toho, že proměnná  $x_i$  je výnos v průběhu dne  $i$ , tedy

$$x_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Rovnici pro odhad denního rozptylu  $\sigma_n^2$ , který je založen na posledních  $m$  pozorováních můžeme zapsat jako

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{n-i} - \bar{x})^2 \quad (42)$$

kde  $\bar{x}$  je průměr pozorovaných hodnot

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{n-i} \quad (43)$$

Rovnici (42) pro účely dalších výpočtů upravíme na základě několika předpokladů:

- 1) Proměnnou  $x_i$  budeme definovat jako procentuální mezidenní změnu, tedy jako

$$x_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

- 2) Průměr pozorovaných hodnot  $\bar{x}$  se rovná nule

$$\bar{x} = 0$$

- 3)  $N - 1$  nahradíme  $N$

Díky této úpravě získáme tvar rovnice, kterou má podobu

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{n-i}^2 \quad (44)$$

Při pohledu na rovnici (44) vidíme, že všechna pozorování mají stejnou váhu. Pokud chceme získat volatilitu, která bude co nejvíce odpovídat současnému chování podkladového aktiva, je vhodné přiřadit těm pozorováním, které jsou v blízké minulosti větší váhu. Použijeme proto následující model

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{n-i}^2 \quad (45)$$

kde parametr  $\alpha_i$  označuje váhu přiřazenou pozorování, které nastalo před  $i$  dny. V případě, že bude  $\alpha_i > \alpha_k$  a zároveň  $i < k$ , dosáhneme toho, že starší pozorování budou mít menší váhu. Součet všech vah  $\alpha_i$  se musí rovnat jedné.

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (46)$$

EWMA model je zvláštním případem rovnice (45), kde se váha  $\alpha_i$  exponenciálně snižuje, čím dál jdeme do historie, což můžeme zapsat jako

$$\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i \quad (47)$$

kde  $\lambda$  je konstanta nabývající hodnot od nuly do jedné. Rovnice pro určení volatility na základě exponenciálně se snižujících vah je poměrně jednoduchá a má následující podobu

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) x_{n-1}^2 \quad (48)$$

Odhad volatility  $\sigma_n$  na konci dne  $n - 1$  je na základě hodnot volatility  $\sigma_{n-1}$  spočtené v den  $n - 2$  atd. Při takovém postupu vidíme, že  $\lambda$  bude skutečně exponenciálně klesat, čím více do historie půjdeme, což bude mít za následek to, že v daleké historii bude hodnota členu  $\lambda$  tak malá, že hodnota výsledku spočteného na základě této proměnné bude zanedbatelná. Z tohoto důvodu není potřeba udržovat dlouhou historii pozorování denních hodnot, protože bychom vzdálená data stejně nevyužili.

Po snadné úpravě můžeme rovnici (48) přepsat do tvaru

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^N \lambda^{i-1} x_{n-i}^2 + \lambda^N \sigma_{n-N}^2 \quad (49)$$

Pro velké hodnoty  $N$  bude hodnota členu  $\lambda^N \sigma_{n-N}^2$  příliš malá, tudíž se tento člen stane zanedbatelným. Vidíme potom, že rovnice (49) bude opět shodná s rovnicí (45), kde hodnota členu  $\alpha_i$  se bude rovnat

$$\alpha_i = (1 - \lambda)\lambda^{i-1} \quad (50)$$

Váha každého pozorování se tedy bude v každém kroku snižovat exponenciálně hodnotou  $\lambda$ .

Modelování volatility pomocí EWMA přístupu je v praxi poměrně oblíbené a časté. Výhodou tohoto modelu je fakt, že nám stačí uchovávat poměrně malé množství dat. Takto spočtená volatilita se může každým dnem měnit. V případě, že následující den dojde například k velkému výkyvu ceny akcie, jelikož se bude jednat o pozorování v nejbližší historii, bude mít největší váhu, a tudíž nám významně ovlivní celkový výsledek odhadované volatility. Z toho plyne i další výhoda tohoto modelu. Poměrně dobře odpovídá aktuální situaci na trhu a aktuálnímu vývoji podkladového aktiva. Pokud bychom počítali volatilitu čistě na historických datech bez nějakého vážení, skok, který nastal před jedním dnem by byl výrazně redukován zbytkem historické řady a neměl by tedy takový dopad na výslednou hodnotu odhadované volatility. V praxi bylo ukázáno, že nejvhodnější je zvolit  $\lambda = 0,94$ . Při takové hodnotě parametru  $\lambda$  odhadnuté hodnoty volatility nejvíce odpovídaly skutečné realizované volatility. (J.P.Morgan 1996)

### 2.3.2.3 Implikovaná volatilita

Při pohledu na Black-Scholesovu oceňovací formuli, kterou jsme uvedli v předchozí části této práce, vidíme, že je pro výpočet hodnoty opce použito několik parametrů. Konkrétně do výpočtu vstupuje doba maturity opce, realizační cena, úroková míra a volatilita. Všechny parametry kromě volatility jsou snadno pozorovatelné ať už z parametru dané opce (doba do maturity, realizační cena) nebo na trhu (úroková míra). Jedinou neznámou je tedy volatilita. Jak jsme si také ukázali v předchozí části této práce, volatilitu dokážeme odhadnout několika způsoby. Takto získanou volatilitu bychom potom mohli dosadit do Black-Scholesovy oceňovací formule a následně bychom odvodili například cenu call opce (Rebonato 2004).

Pokud bychom ale neměli model pro odhad volatility, můžeme postupovat i jiným způsobem. Řekněme tedy, že vidíme na trhu obchodovanou call opci na nákup akcie, jejíž realizační doba je za dva měsíce, realizační cena, neboli strike price, je rovna 50, aktuální

cena akcie je 51 a úroková sazba je 3 %. Cena této opce je aktuálně 2,34. Při pohledu na Black-Scholesovu oceňovací formuli vidíme, že známe veškeré hodnoty kromě volatility. Po vyjádření této volatility z oceňovací formule získáme volatilitu, která odpovídá tržním podmínkám. Tato volatilita se nazývá implikovaná. Jelikož neexistuje přímo rovnice, která by vyjadřovala implikovanou volatilitu, je potřeba použít například metodu Newton-Raphson (Wilmott 2006) nebo iterační metody.

V praxi se počítají implikované volatility pro různé realizační hodnoty a různé maturity, protože se při různé realizační hodnoty a maturity může hodnota implikované volatility měnit. Často můžeme pozorovat, že call opce, které jsou tzv. „in the money“<sup>16</sup>, mají vyšší volatilitu a čím více se blíží jejich realizační cena spotové ceně, volatilita klesá. Jakmile je call opce tzv. „out of the money“<sup>17</sup> volatilita opět roste. Tomuto jevu se říká tzv. „volatility smile“.

Zatímco u historické volatility jsme se dívali do minulosti, na základě které jsme odhadli, jakou variabilitu by podkladové aktivum mohlo mít v budoucnosti, implikovaná volatilita se naopak dívá do budoucnosti, vyjadřuje totiž, jakou variabilitu v jaký časový okamžik trh očekává.

Graf 5: Volatility smile



Zdroj: Vlastní zpracování

<sup>16</sup> Realizační cena call opce je nižší než spotová cena podkladového aktiva.

<sup>17</sup> Realizační cena call opce je vyšší než spotová cena podkladového aktiva.

### 3. Praktická část

V poslední části této práce se zaměříme na ocenění dvou konkrétních dluhopisů s vnořenými opcemi. Jedná se o korporátní dluhopisy emitované rakouskou bankou Erste Group. První z dluhopisů je svolatelný v předem stanovená data, přičemž fakt, jestli bude svolatelný nebo nikoliv, závisí na vývoji podkladového indexu. Druhý z dluhopisů není svolatelný před svou maturitou, vyplácí fixní kupón 5 %, ale závěrečná výplata nominální hodnoty závisí na vývoji podkladového koše akcií. V obou případech se budeme výsledky snažit porovnat s tržním oceněním. (Poslední část této kapitoly bude zaměřena na porovnání oceňovacího modelu Monte Carlo a Black-Shoclesova modelu.)

Všechna použitá data pro výpočty byla stažena z terminálu Bloomberg a Thomson Reuters Eikon. Pro úpravu dat byl použit program Microsoft Excel. Výpočet samotný je následně realizován ve statistickém programu R, kde některé informace byly čerpány z (Kleiber a Zeileis 2008).

#### 3.1 Ocenění svolatelného dluhopisu

Jako první se zaměříme na ocenění svolatelného dluhopisu, jehož výnos závisí na pohybu podkladového indexu EURO STOXX 50® Express. Tento index reprezentuje výkonnost 50 největších společností z 11 evropských zemí<sup>18</sup> napříč 19 různými sektory. Jedná o jeden z nejlukvidnějších indexů Eurozóny (SOTXX, Ltd. 2018).

Chování tohoto dluhopisu je takové, že je na začátku života dluhopisu určena strike price. Dále jsou definována data, kdy může dojít automaticky k jeho svolání. V tato data se porovnává podíl aktuální ceny indexu a strike price s definovanou bariérou. Pokud tento podíl překročí stanovenou bariéru, dojde automaticky ke svolání dluhopisu a bude vyplacena nominální hodnota spolu s úroky. V případě, že nedojde k předčasnému svolání, pokračuje dluhopis dále ve svém životě, než nastane datum dalšího pozorování. V případě, že za celou dobu pozorování dluhopisu nedošlo k předčasnému svolání, porovnává se na konci života tohoto dluhopisu opět podíl pozorované hodnoty podkladového indexu a strike price s bariérou. Pokud bude tento podíl vyšší než bariéra, dojde k vyplacení nominální hodnoty a příslušných úroků. Naopak pokud bude tento podíl nižší než

---

<sup>18</sup> Rakousko, Belgie, Finsko, Francie, Německo, Irsko, Itálie, Lucembursko, Nizozemí, Portugalsko a Španělsko

stanovená bariéra, nebude vyplacena nominální hodnota ani žádný úrok, dojde k výplatě pouze poměrné části plynoucí z podílu strike price a závěrečné hodnoty indexu v poslední den pozorování. Pro investora tedy plyne značné riziko, že ztratí značnou část investice v případě nepříznivého vývoje podkladového indexu. Parametry tohoto dluhopisu můžeme vidět níže v Tabulce č. 3.

Tabulka 3: Parametry svolatelného dluhopisu

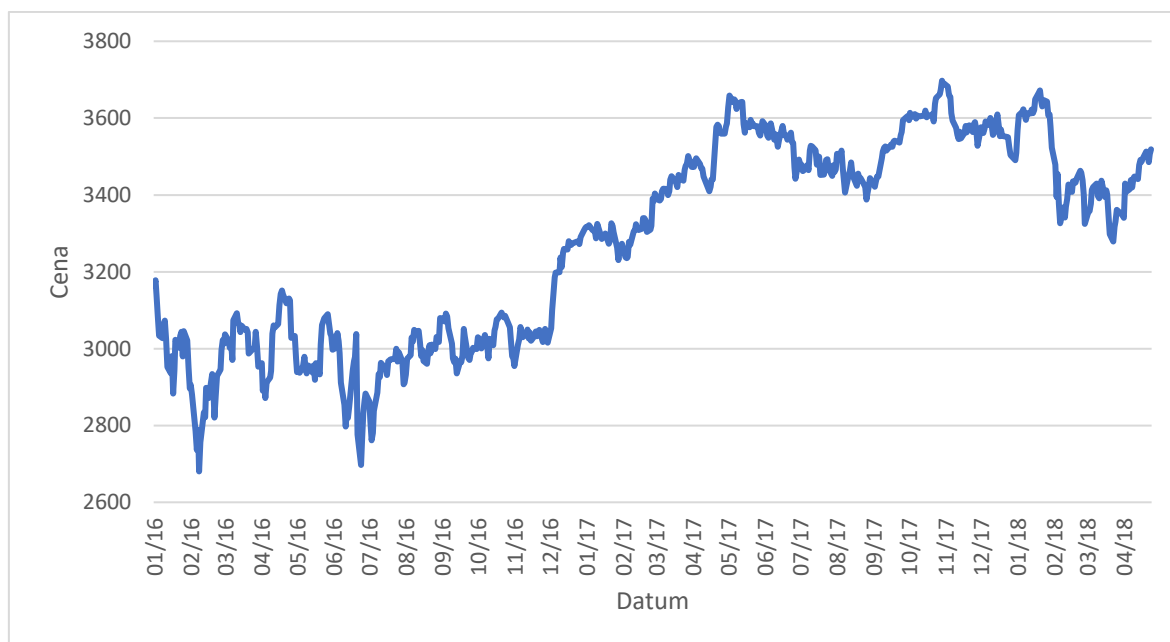
| <b>Erste Group EURO STOXX 50® Express</b> |                                                                                      |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Emitent</b>                            | Erste Group Bank AG                                                                  |
| <b>Rating emitenta</b>                    | A- (S&P), A3 (Moody's), A- (Fitch)                                                   |
| <b>ISIN</b>                               | AT0000A1XFY9                                                                         |
| <b>Datum emise</b>                        | 29.09.2017                                                                           |
| <b>Datum splatnosti</b>                   | 29.09.2022                                                                           |
| <b>Měna</b>                               | Euro (EUR)                                                                           |
| <b>Celkový objem emise</b>                | 50 000 000 EUR                                                                       |
| <b>Jmenovitá hodnota</b>                  | 1 000 EUR                                                                            |
| <b>Emisní cena</b>                        | 100 %                                                                                |
| <b>Úroková sazba</b>                      | nevyplácí fixní úrok po dobu života                                                  |
| <b>Podkladové aktivum</b>                 | EURO STOXX 50® Index (Reuters .STOXX50E)                                             |
| <b>Strike price</b>                       | 100 % závěrečné ceny 28.9.2017                                                       |
| <b>Bariéra</b>                            | 100 % stike price                                                                    |
| <b>Finální bariéra</b>                    | 60 % strike price                                                                    |
| <b>Data předčasného svolání</b>           | vždy jednou ročně 29.9., kdy první pozorování je 29.9.2018 a poslední 29.9.2021      |
| <b>Pozorování</b>                         | 5 pracovních dní před datem předčasného svolání                                      |
| <b>Předčasné svolání</b>                  | v případě, že závěrečná cena v den pozorování je vyšší než bariéra                   |
| <b>Hodnota předčasného svolání</b>        | <b>Jmenovitá hodnota * [(4 % * počet pozorování) + 100 %]</b>                        |
| <b>Výsledná hodnota</b>                   | v případě, že nedošlo k předčasnému svolání:                                         |
|                                           | - pokud je závěrečná cena v poslední pozorování větší nebo rovna finální bariéře     |
|                                           | <b>Jmenovitá hodnota * [(4 % * počet pozorování) + 100 %]</b>                        |
|                                           | - jinak                                                                              |
|                                           | <b>Jmenovitá hodnota * (závěrečná cena v poslední den pozorování / strike price)</b> |

Zdroj: (Erste Group 2018), vlastní zpracování

Při určení ceny tohoto dluhopisu budeme postupovat tak, že dluhopis rozdělíme na dvě části – bezkupónový dluhopis a opci. Tyto dvě části budeme oceňovat zvlášť. Cena bezkupónového dluhopisu bude určena standardně, jak je popsáno v první kapitole práce. Cena opce bude určena pomocí simulace Monte Carlo. Do simulace vstupuje několik parametrů, viz předchozí kapitola, které nám určí průběh této simulace. Než se k samotné simulaci dostaneme, zaměříme se na tyto parametry blíže.

Ze všeho nejdříve je nutné si připravit vstupní data – historické denní ceny podkladového indexu, diskontní křivky a křivky určující drift při simulaci. Výpočet budeme provádět na datech dostupných k 27.4.2018. Nejprve se podíváme na historické ceny podkladového indexu. Graf č. 6 ukazuje vývoj cen podkladového indexu EUROSTOXX 50 od začátku roku 2016 do současnosti. Vidíme, že vývoj byl v určitých časových okamžicích poměrně významný, obzvláště začátkem roku 2017, kdy hodnota indexu začala značně růst.

Graf 6: Historický vývoj indexu Eurostoxx 50



Zdroj: Bloomberg, vlastní zpracování

Nyní se zaměříme na volatilitu, jakožto další vstupní parametr pro finální určení hodnoty dluhopisu. V našem výpočtu budeme používat tři druhy volatility, které byly zmíněny ve druhé kapitole této práce. Jedná se o historickou volatilitu, implikovanou a volatilitu odhadnutou na základě modelu EWMA. Zde nastává otázka, jak dlouhou historii

vývoje cen použit pro výpočet historické volatility. Tabulka č. 4 ukazuje hodnoty spočtené anualizované volatility na základě délky použité historické časové řady.

Tabulka 4: Hodnoty historické volatility indexu Eurostoxx 50

| 720 dní   | 360 dní   | 180 dní   | 90 dní    | 30 dní    |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0,1845946 | 0,1140365 | 0,1154626 | 0,1411636 | 0,1378955 |

Z tabulky je patrné, že pokud do výpočtu volatility zahrneme 720 posledních pozorování, tedy i období před začátkem roku 2017, výrazný růst, který můžeme pozorovat na grafu vývoje indexu nám významně ovlivní i výsledek celkové historické volatility. Po zkrácení intervalu na 360 nebo 180 dní, dojde k poklesu volatility. Naopak z grafu vývoje můžeme vidět, že za poslední tři měsíce byl vývoj opět variabilnější, což se nám projeví také ve výsledku spočtené volatility těchto období.

Nyní srovnáme volatilitu odhadnutou na základě modelu EWMA na různých časových intervalech a při různých hodnotách parametru  $\lambda$ .

Tabulka 5: Hodnoty EWMA volatility indexu Eurostoxx 50

|                  | 720 dní   | 360 dní   | 180 dní   | 90 dní    | 30 dní    |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lambda = 0,98$ | 0,1316559 | 0,1315798 | 0,1319778 | 0,1382266 | 0,1294008 |
| $\lambda = 0,96$ | 0,1303445 | 0,1298889 | 0,1302422 | 0,1318028 | 0,1228689 |
| $\lambda = 0,94$ | 0,1228396 | 0,1220191 | 0,1226595 | 0,1238945 | 0,1161524 |

V Tabulce č. 5 můžeme pozorovat, že čím nižší je hodnota  $\lambda$ , tím stabilnější je výsledná volatilita, protože vzdálenější pozorování mají menší váhu, což je zřejmé právě na horizontu 720 dní. Zde s klesající hodnotou parametru  $\lambda$  klesá hodnota volatility, což můžeme vysvětlit tím, že právě velký výkyv na začátku roku 2017 má přiřazenou menší váhu, tudíž tolik neovlivní výslednou hodnotu volatility.

Při porovnání historické volatility s volatilitou odhadnutou na základě modelu EWMA vidíme, že se výsledky poměrně odlišují. Nejblíže jsou si hodnoty historické a EWMA volatility při výpočtu na horizontu 90 dní a v případě hodnoty parametru  $\lambda = 0,98$ .

Dále při ocenění dluhopisu použijeme implikovanou volatilitu odvozenou na základě at the money opcí se splatností tři měsíce na podkladový index Eurostoxx 50.

Porovnání této implikované volatility s hodnotami výše dvou uvedených druhů volatility najdeme v Tabulce č. 6.

Tabulka 6: Srovnání historické, implikované a EWMA volatility

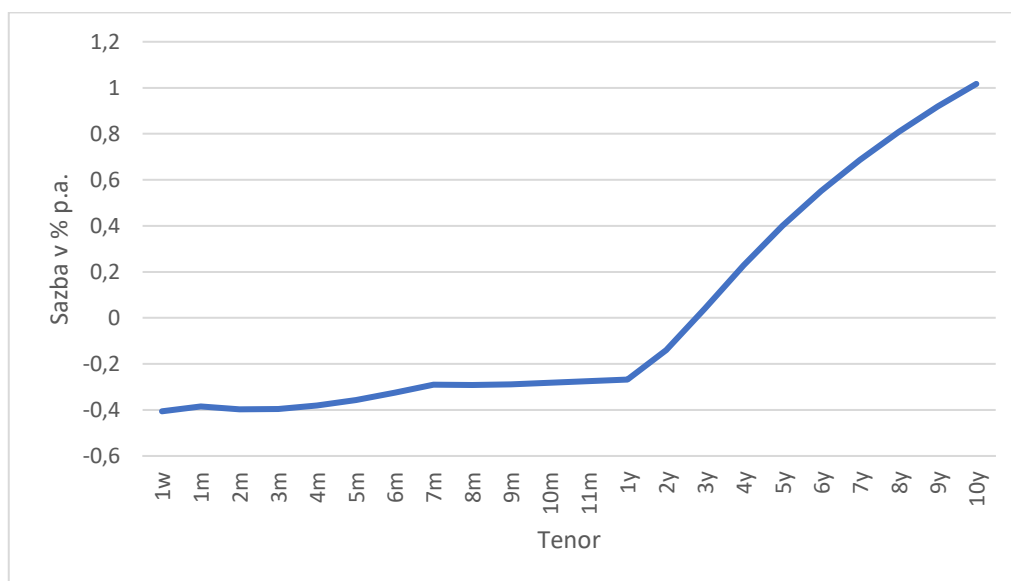
|                        |           |
|------------------------|-----------|
| Historická             | 0,1378955 |
| EWMA, $\lambda = 0,98$ | 0,1294008 |
| EWMA, $\lambda = 0,96$ | 0,1228689 |
| EWMA, $\lambda = 0,94$ | 0,1161524 |
| Implikovaná            | 0,1148    |

Ze srovnání všech volatilit v tabulce č. 6 vidíme, že hodnota implikované volatility je ze všech naměřených hodnot nejnižší. U implikované hodnoty můžeme říci, že udává jakou volatilitu trh očekává v budoucnu. Všechny druhy zmíněné volatility budou použity ve výsledném ohodnocení dluhopisu, kde zřetelně uvidíme, jaký vliv má daná volatilita na cenu dluhopisu.

Jako další vstupní parametr pro simulace je drift, neboli očekávaný růst. Ten do simulace nevstoupí jako konstanta, ale v podobě bezrizikové výnosové křivky. Jelikož simulaci provádíme na určitém časovém období a za toto období se úroková sazba může měnit, nebylo by správné uvažovat, že je drift konstantní. Měna podkladového akciového indexu je EUR, proto bude výnosová křivka také eurová. Tato křivka je sestrojena obdobným způsobem, který jsme si popsali v první kapitole této práce. Místo státních dluhopisů byly použity do jednoho roku sazby EURIBOR a pro hodnoty křivky nad jeden rok byly použity eurové swapové sazby. Podobu křivky můžeme vidět na Grafu č. 7.

Na této křivce si můžeme všimnout jedné zajímavé věci, a sice, že sazby do dvou let jsou záporné. Ještě donedávna se předpokládalo, že úroková sazba nemůže klesnout pod nulu. od finanční krize se ale ukázalo, že tento předpoklad neplatí a sazby klesly do záporných hodnot. To můžeme přeložit tak, že současná hodnota finančních prostředků je vyšší, než očekávaná hodnota těchto prostředků v budoucnu. Je tedy zřejmé, že jeden z důvodů, proč se sazby dostaly do záporu, je ten, aby se lidé „zbavovali“ svých finančních prostředků co nejdříve a neodkládali své investice do budoucna, případně, aby si instituce mohly půjčovat finanční prostředky za nižší náklady, což by mohlo mít za důsledek rychlejší zotavení se ekonomiky z finanční krize.

Graf 7: EUR bezriziková výnosová křivka



Pro simulaci nám zbývá ještě určení spotové ceny a zafixování strike price. Tyto veličiny můžeme snadno vypočítat z historických hodnot. Dále bychom do simulace ještě měli zahrnout dividendu, kterou podkladový akciový index vyplácí. Dividenda obecně snižuje cenu akcie při jejím vyplacení. V našem případě budeme předpokládat, že je dividendy vyplácena kontinuálně, proto při sestavování simulací dividendový výnos odečteme od očekávaného driftu.

Nyní již máme všechny potřebné parametry pro sestavení simulací možného vývoje podkladového indexu v čase. Simulace budeme sestavovat pro definovaná data pozorování, abychom mohli posléze vyhodnotit, zda bude dluhopis předčasně ukončen či nikoliv. Je otázkou, jaký zvolit počet simulací. Při příliš malém počtu simulací se vystavíme vysoké nepřesnosti, naopak při vysokém počtu simulací může výpočet zabrat poměrně dlouhý čas, aniž bychom dosáhli přesnějšího výsledku. Pro náš výpočet zvolíme několik různých počtů simulací a porovnáme, jak se za jinak nezměněných hodnot vstupních parametrů bude výsledná cena dluhopisu odlišovat. Níže můžeme vidět Tabulku č. 7, kde je uveden seznam výchozích vstupních parametrů pro simulaci a jejich hodnoty.

Tabulka 7: Vstupní parametry pro simulaci

|                                            |                                                                     |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Spotová cena                               | 3518,78                                                             |
| Strike price                               | 3563,64                                                             |
| Současná výkonnost podkladového indexu     | 0,9874117                                                           |
| Dividenda                                  | 3,5114 %                                                            |
| Časové úseky, ke kterým provádíme simulaci | 24.9.2018, 23.9.2019, 22.9.2020,<br>22.9.2021, 22.9.2022, 22.9.2022 |
| Volatilita                                 | 0,1220191                                                           |
| Drift                                      | EUR křivka                                                          |
| Počet simulací                             | 10 000                                                              |

Po sestrojení simulace následně každou cestu vyhodnotíme. Podíváme se na první cestu a budeme pozorovat, zda je výkonnost indexu v prvním časovém úseku vyšší nebo nižší než definovaná bariéra, v našem případě 100 %. V případě, že je výkonnost nižší, pokračujeme k druhému časovému úseku. V případě, že výkonnost bude vyšší, dluhopis bude předčasně svolán a tím pádem ukončen, další časové úseky v této jedné cestě už tedy vyhodnocovat nebudeme. Pokud se ve vyhodnocování cesty dostaneme až k poslednímu časovému úseku, budeme výkonnost porovnávat s bariérou 60 %. Tímto způsobem postupujeme pro každou z nasimulovaných cest. Následně spočítáme, kolik cest skončí v prvním časovém úseku. Když podělíme toto číslo počtem simulací, dostaneme pravděpodobnost, že bude dluhopis svolán v první datum pozorování. Stejně tak sečteme počet cest, které budou ukončeny v druhý časový úsek. Opět, při podělení tohoto součtu počtem simulací dostaneme pravděpodobnost, že bude dluhopis svolán v druhém datu pozorování, atd. Takovým způsobem zjistíme pravděpodobnosti, s jakými bude dluhopis v daný časový úsek ukončen a vyplacen kupón spolu s nominální hodnotou. Zbývá nám ještě určit pravděpodobnost, že při pozorování v poslední časový úsek bude výkonnost podkladového indexu pod 60% bariérou. Tuto pravděpodobnost získáme tak, že odečteme sumu pravděpodobností úspěšného splacení od hodnoty jedna. Naměřené pravděpodobnosti při počtu simulací 10 000 můžeme vidět níže v Tabulce č. 8.

Tabulka 8: Pravděpodobnosti svolání dluhopisu

|                 |           |           |           |           |           |           |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Datum           | 24.9.2018 | 23.9.2019 | 22.9.2020 | 22.9.2021 | 22.9.2022 | 22.9.2022 |
| Pravděpodobnost | 33,62 %   | 15,51 %   | 5,68 %    | 3,16 %    | 34,78 %   | 7,25 %    |

V tabulce můžeme vidět, že největší pravděpodobnosti zastávají scénáře, ve kterých bude dluhopis svolán hned po prvním pozorování, tedy v září 2018 nebo bude dluhopis splacen ve své maturitě. V posledním sloupci tabulky je vyjádřena pravděpodobnost, že bude výkonnost podkladového indexu v poslední den pozorování pod bariérou 60 %.

Na základě těchto získaných pravděpodobností můžeme určit hodnotu očekávaného kupónu. Tuto hodnotu získáme tak, že vynásobíme spočtenými pravděpodobnostmi hodnotu kupónu určeného v příslušném datu pozorování. Tento kupón je definovaný v zadání dluhopisu. Definováno ovšem není, jaká hodnota bude vyplacena v případě, že bude výkonnost podkladového indexu v poslední den pod bariérou 60 %. Tuto hodnotu získáme ze simulací, když spočítáme průměrnou výkonnost v poslední simulovaný časový úsek ze všech cest, které nebyly ani v poslední časový úsek vyhodnoceny, že budou splaceny. V Tabulce č. 9 vidíme očekávané kupóny.

Tabulka 9: Očekávané kupóny

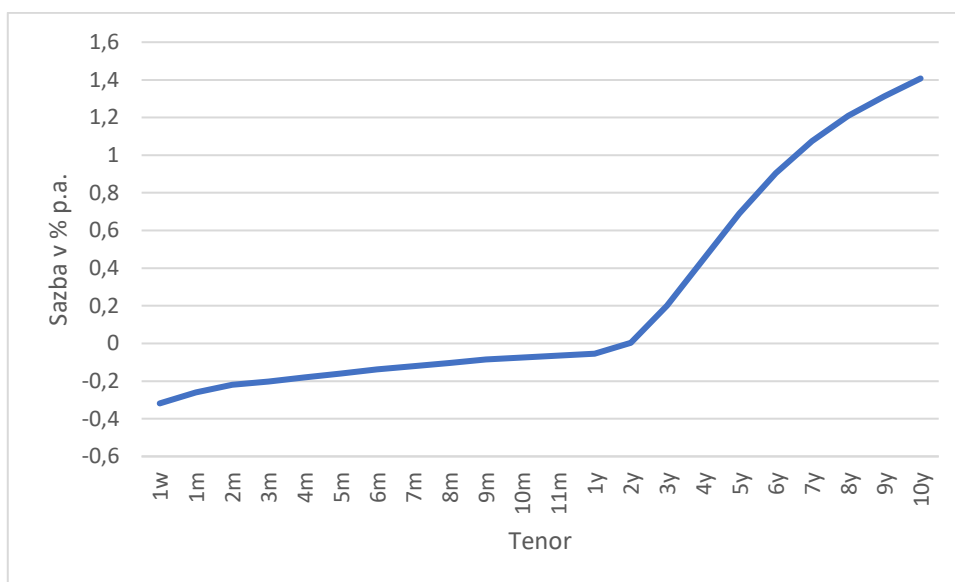
| Datum                       | 24.9.2018 | 23.9.2019 | 22.9.2020 | 22.9.2021 | 22.9.2022 | 22.9.2022 |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Pravděpodobnost             | 33,62 %   | 15,51 %   | 5,68 %    | 3,16 %    | 34,78 %   | 7,25 %    |
| Očekávaný kupón             | 4 %       | 8 %       | 12 %      | 16 %      | 20 %      | -46,77 %  |
| Očekávaný realizovaný kupón | 1,34 %    | 1,24 %    | 0,68 %    | 0,5 %     | 6,96 %    | -3,39 %   |

Nyní musíme určit současnou hodnotu těchto jednotlivých kupónů. Tuto hodnotu získáme tak, že jejich hodnoty zdiskontujeme na základě diskontní křivky. Ta byla sestrojena podobně jako výnosová křivka použitá pro drift. Je zde ale jeden rozdíl, a sice v kredibilitě emitenta oceňovaného dluhopisu. Při ocenění dluhopisu musíme uvažovat riziko, že nám emitent nevyplatí finanční prostředky, které by nám teoreticky mohly z dluhopisu plynout. Za podstoupení tohoto rizika můžeme vyžadovat větší výnos. Jelikož potenciální výnos je stanovený v parametrech dluhopisu, bude investor požadovat za podstoupení tohoto rizika nižší cenu dluhopisu. Jak jsme si ukázali v první kapitole této práce, hodnotu dluhopisu ovlivňuje, mimo jiné, diskontní faktor. Čím vyšší je diskontní faktor, tím nižší je výsledná hodnota dluhopisu.

Při konstrukci diskontní křivky tedy musíme brát v úvahu, jakému kreditnímu riziku čelíme plynoucího z držení daného dluhopisu. Ratingové agentury přiřazují emitentovi, tedy Erste Group Bank, ratingový stupeň „A“. V našem případě se bude

diskontní křivka skládat ze dvou částí. Část křivky do jednoho roku bude sestrojena na základě sazeb EURIBOR, kdy k těmto sazbám bude přičtena hodnota kreditního spreadu odpovídající riziku plynoucímu z ratingu „A“<sup>19</sup>. Část diskontní křivky nad jeden rok tvoří sazby odpovídající výnosu eurových dluhopisů s ratingem „A“. Podobu diskontní křivky můžeme vidět na Grafu č. 8.

Graf 8: EUR diskontní křivka pro rating "A"



Při pohledu na diskontní křivku můžeme vidět, že sazby jsou v porovnání s bezrizikovou křivkou (Graf č. 7) vyšší. Tyto vyšší sazby nám ve výsledku sníží cenu dluhopisu více než kdybychom diskontovali dluhopis bezrizikovou křivkou. Rozdíl mezi cenami dluhopisu diskontovanými bezrizikovou křivkou a naší diskontní křivkou je hodnota, kterou investor požaduje za podstoupení rizika plynoucího z kredibility emitenta.

Jelikož teoretická splatnost tohoto dluhopisu je za několik let, můžeme uvažovat i fakt, že ratingová agentura změní emitentovi rating. Pravděpodobnost přechodu mezi jednotlivými ratingovými skupinami v horizontu jednoho roku je uvedena v Tabulce č. 10. V našem případě má Erste Group Bank přiřazený rating „A“. Z tabulky můžeme usuzovat, že pravděpodobnost, že bude mít Erste banka v horizontu jednoho rok přiřazený lepší rating „AA“ je 0,78 %. Naopak pravděpodobnost, že bude hodnocena horším

<sup>19</sup> Abychom se vyhnuli modelování kreditního rizika, což tvoří samostatnou velkou kapitolu, použili jsme kreditní spready získané z Thomson Reuters Eikon.

ratingem „BBB“ je 3,91 %. Pravděpodobnost, že se rating nezmění a bude mít přiřazený stále stupeň „A“ je potom 91.41 %.

Tabulka 10: Korporátní roční tranzitní sazby pro region Evropa

|       | AAA   | AA    | A     | BBB   | BB    | B     | CCC/C | D     | NR    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AAA   | 66,67 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 33,33 |
| AA    | 0     | 92,38 | 7,62  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| A     | 0     | 0,78  | 91,41 | 3,91  | 0     | 0     | 0     | 0     | 3,91  |
| BBB   | 0     | 0     | 2,27  | 88,13 | 1,52  | 0     | 0     | 0     | 8,08  |
| BB    | 0     | 0     | 0     | 3,17  | 80,09 | 4,52  | 0     | 0     | 12,22 |
| B     | 0     | 0     | 0     | 0     | 3,16  | 74,21 | 5,26  | 2,11  | 15,26 |
| CCC/C | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 10    | 63,33 | 13,33 | 13,33 |

Zdroj: (S&P Global Ratings nedatováno), vlastní zpracování

Při znalosti těchto pravděpodobností můžeme sestavit takovou diskontní křivku, která v sobě bude zahrnovat i možnou změnu ratingového stupně emitenta. Budeme postupovat tak, že si sestojíme další dvě diskontní křivky podobné jako v předchozím případě, rozdíl bude v tom, že v jedné z nově vytvořených diskontních křivek bude zahrnutý spread odpovídající ratingové skupině „AA“ a ve druhé nové diskontní křivce bude zahrnut spread odpovídající ratingové skupině „BBB“. Pravděpodobnosti zmíněné výše vynásobíme časovými úseky diskontních křivek a tím dostaneme váhy pro každou dílčí diskontní křivku. Tyto dílčí části sečteme a výsledkem bude taková diskontní křivka, která v sobě zahrnuje kreditní riziko emitenta i případnou změnu emitentova přiřazeného ratingu v průběhu času. Hodnoty diskontních faktorů k pozorovaným datům jsou uvedeny v Tabulce č. 11. Touto křivkou diskontujeme spočtené kupóny a tím dostaneme jejich současnou hodnotu. Tyto kupóny následně sečteme, čímž dostaneme současnou hodnotu opce celého dluhopisu.

Tabulka 11: Diskontní faktory

| Datum            | 24.9.2018 | 23.9.2019 | 22.9.2020 | 22.9.2021 | 22.9.2022 |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Diskontní faktor | 1,000372  | 1,000425  | 0,999456  | 0,992158  | 0,979336  |

Na začátku jsme si dluhopis rozdělili na dvě části. První z nich máme oceněnou, tedy známe hodnotu opce, chybí nám ještě určit hodnotu bezkupónového dluhopisu. Jinými slovy potřebujeme zjistit, jakou hodnotu má dnes dluhopis, jehož hodnota bude v době maturity rovna 100 %. Tuto hodnotu určíme na základě pravděpodobností

předčasného ukončení dluhopisu, které jsme získali ze simulací. Součet těchto pravděpodobností nám dá hodnotu jedna, jde tedy jenom o to diskontovat dílčí části tohoto bezkupónového dluhopisu podle spočtených pravděpodobností. Spočtené pravděpodobnosti tedy vynásobíme diskontními faktory k nim přiřazenými. Výslednou hodnotou bezkupónového dluhopisu bude součet navážených diskontních faktorů. Následně dáme všechny dílčí části z předchozí části dohromady, čímž dostaneme hledanou hodnotu našeho dluhopisu s vnořenou opcí. V Tabulce č. 12 můžeme vidět hodnotu dílčích částí a celkový výsledek.

Tabulka 12: Výsledná hodnota dluhopisu

| Bezkupónový dluhopis | Opce   | Celkový výsledek |
|----------------------|--------|------------------|
| 99,12 %              | 7,26 % | 106,38 %         |

Nyní budeme porovnávat, jak se liší výsledek v závislosti na změně vstupních parametrů do simulace. Konkrétně budeme měnit volatilitu a počet simulací. Nejdříve se zaměříme na to, jaký vliv na výsledek má počet simulací za jinak nezměněných parametrů. Kromě počtu simulací budeme měnit také hodnotu tzv. „seed“. Náhodná čísla, která generujeme, nejsou zcela náhodná, ale tzv. pseudonáhodná. Abychom nezacházeli příliš do detailu, tak můžeme říci, že seed ovlivňuje jakou náhodnou řadu čísel počítač vygeneruje. V případě, že bude seed = 1, počítač pokaždé vygeneruje stejnou řadu náhodných čísel. Abychom mohli skutečně porovnat vliv počtu simulací na výslednou hodnotu dluhopisu, je potřeba, abychom vygenerovali pokaždé jinou řadu náhodných čísel. Přehled najdeme v Tabulce č. 13.

Tabulka 13: Počet simulací a jejich dopad do výsledné ceny dluhopisu

| Počet simulací | 10       | 100      | 1 000    | 10 000   | 100 000  |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| seed = 1       | 108,73 % | 104,78 % | 106,53 % | 106,38 % | 106,54 % |
| seed = 2       | 105,68 % | 106,99 % | 106,45 % | 106,62 % | 106,54 % |
| seed = 3       | 106,92 % | 106,69 % | 106,80 % | 106,32 % | 106,55 % |
| seed = 4       | 106,59 % | 107,82 % | 106,47 % | 106,43 % | 106,53 % |
| seed = 5       | 104,12 % | 108,74 % | 105,80 % | 106,20 % | 106,46 % |

Z tabulky můžeme pozorovat, že výsledné hodnoty se liší v závislosti na počtu simulací poměrně významně. V případě 10 simulací vidíme, že při různé hodnotě seedu je

výsledná hodnota značně jiná. Při počtu simulací 1 000 se výsledná hodnota dluhopisu při různých seedech liší výrazně méně. Pokud uděláme simulací 100 000 vidíme, že hodnota dluhopisu se již téměř nemění. Hodnota se výrazně nemění ani v případě, že uděláme simulací 10 000. Vzhledem k tomu, že 10 000 simulací je výpočetně méně náročně, můžeme konstatovat, že 10 000 simulací je optimální počet pro určení hodnoty dluhopisu.

Dále se podíváme na to, jak volatilita ovlivňuje výslednou hodnotu dluhopisu. Budeme provádět 10 000 simulací, přičemž hodnota seed bude stále stejná. Volatilitu budeme měnit na základě časového horizontu, na kterém byla spočtená a porovnáme i různé druhy volatility. Výsledek můžeme vidět v Tabulce č. 14.

Tabulka 14: Cena dluhopisu v závislosti na volatilitě

|                    |          |          |          |          |          |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Hodnota volatility | 11,48 %  | 12,20 %  | 13,18 %  | 14,12 %  | 18,46 %  |
| Hodnota dluhopisu  | 107,23 % | 106,38 % | 105,30 % | 104,33 % | 100,38 % |

Z tabulky můžeme vypočítat, že s rostoucí hodnotou volatility se snižuje celková hodnota dluhopisu. To může být dáno tím, že úrokové sazby driftu jsou záporné, snižené ještě o hodnotu dividendy a díky vyšší volatilitě mají simulace větší tendenci jít do záporu, což snižuje hodnotu opce a tím pádem hodnotu celého dluhopisu.

V závěru ocenění porovnáme naše hodnoty s cenou, kterou uvádí emitent dluhopisu. Oficiální cena k 27.4.2018 byla 100,8 % (Erste Group 2018). Podle výsledků z Tabulky č. 14 vidíme, že se k této ceně blížíme s vysokou hodnotou volatility. Tato hodnota volatility odpovídá historické volatilitě spočtené na horizontu 2 let. Můžeme se tedy domnívat, že v případě tržního ocenění tohoto dluhopisu můžeme vycházet z historické volatility podkladového indexu.

### 3.2 Ocenění dluhopisu navázaného na akciový koš

Hodnota druhého dluhopisu, který budeme oceňovat, závisí na vývoji podkladového akciového koše. V tomto případě dluhopis vyplatí na konci svého života úrok ve výši 5 % p.a., výše výplaty nominální hodnoty ale není jistá. Na začátku života dluhopisu je opět stanovena strike price ke každé podkladové akci. Následuje roční období, kdy každý den porovnáváme závěrečné hodnoty akcií s jejich strike price. Při závěrečném určení, jestli bude vyplacena celá nominální hodnota nebo jen jeho poměrná část, budeme vycházet právě z těchto jednodenních porovnávání závěrečných cen akcií s jejich strike price. V případě, že výkonnost ani jedné akcie neklesla pod definovanou bariéru, bude na konci vyplaceno 100 % nominální hodnoty dluhopisu. Pokud výkonnost alespoň jedné akcie byla nižší než definovaná bariéra, bude na konci vyplacena nominální hodnota vynásobená výkonností nejslabší akcie, přičemž může být vyplaceno maximálně 100 % nominální hodnoty.

Tabulka 15: Parametry dluhopisu navázaného na akciový koš

| <b>5,00 % Erste Group Protect Multi Austria (II) 2017-2018</b> |                                        |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| <b>Emitent</b>                                                 | Erste Group Bank AG                    |
| <b>Rating emitenta</b>                                         | A- (S&P), A3 (Moody's), A- (Fitch)     |
| <b>ISIN</b>                                                    | AT0000A1YT86                           |
| <b>Datum emise</b>                                             | 31.10.2017                             |
| <b>Datum splatnosti</b>                                        | 31.10.2018                             |
| <b>Měna</b>                                                    | Česká koruna (CZK)                     |
| <b>Celkový objem emise</b>                                     | 3 000 000 000 CZK                      |
| <b>Jmenovitá hodnota</b>                                       | 10 000 CZK                             |
| <b>Emisní cena</b>                                             | 100 %                                  |
| <b>Úroková sazba</b>                                           | 5 % p.a.                               |
| <b>Podkladové akcie</b>                                        | Andritz AG Index (Reuters ANDR.VI)     |
|                                                                | OMV AG Index (Reuters OMVV.VI)         |
|                                                                | voestalpine AG Index (Reuters VOES.VI) |
| <b>Strike price</b>                                            | 100 % závěrečných cen 22.11.2017       |
| <b>Bariéra</b>                                                 | 60 % strike price                      |
| <b>Pozorování</b>                                              | od 22.11.2017 do 23.10.2018            |

|                         |                                                                                      |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Výsledná hodnota</b> | V případě, že hodnota ani jedné z akcií nebyla za dobu pozorování nižší než bariéra: |
|                         | <b>100 % Jmenovité hodnoty</b>                                                       |
|                         | - jinak                                                                              |
|                         | <b>Jmenovitá hodnota * max(výkonnost nejhorší akcie oproti strike price ; 100 %)</b> |

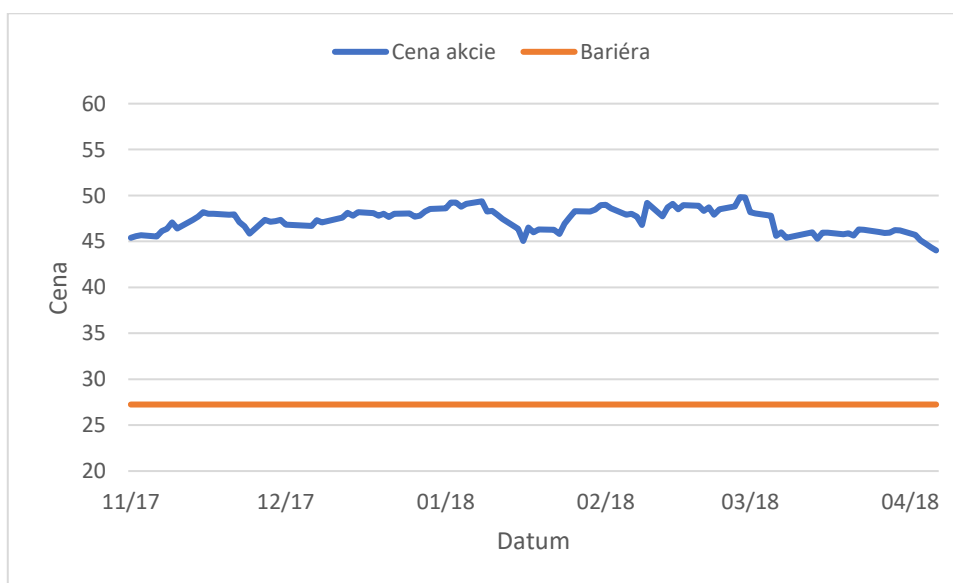
Zdroj: (Erste Group 2018), vlastní zpracování

Při oceňování tohoto dluhopisu budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu.

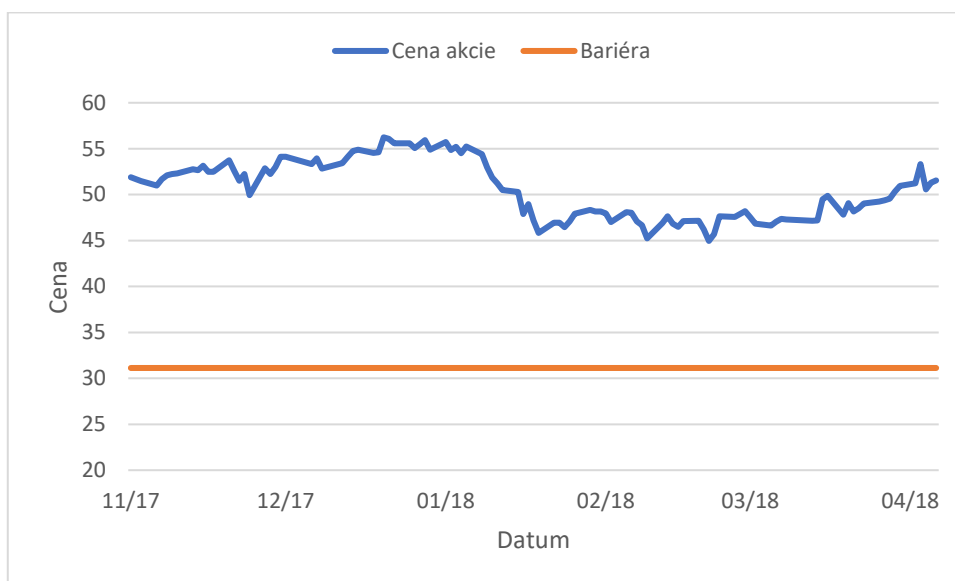
Nejprve se podíváme, od jakého akciového koše se bude odvíjet výsledná hodnota dluhopisu. V podkladovém koši jsou obsaženy akcie tří společností reprezentujících rakouský průmysl. Společnost Andritz AG je jedním z předních dodavatelů služeb a zařízení pro vodní elektrárny, papírenský a ocelářský průmysl. Společnost OMV AG je rakouským koncernem sídlícím ve Vídni, který je zaměřený především na zpracování ropy a výrobu paliv. Společnost voestalpine AG se zaměřuje na výrobní a systémová řešení, která jsou založena na oceli a jiných kovech. (Česká spořitelna 2018).

Jelikož jsme zhruba v polovině života tohoto dluhopisu, ukážeme si dosavadní vývoj podkladových akcií v porovnání s bariérou.

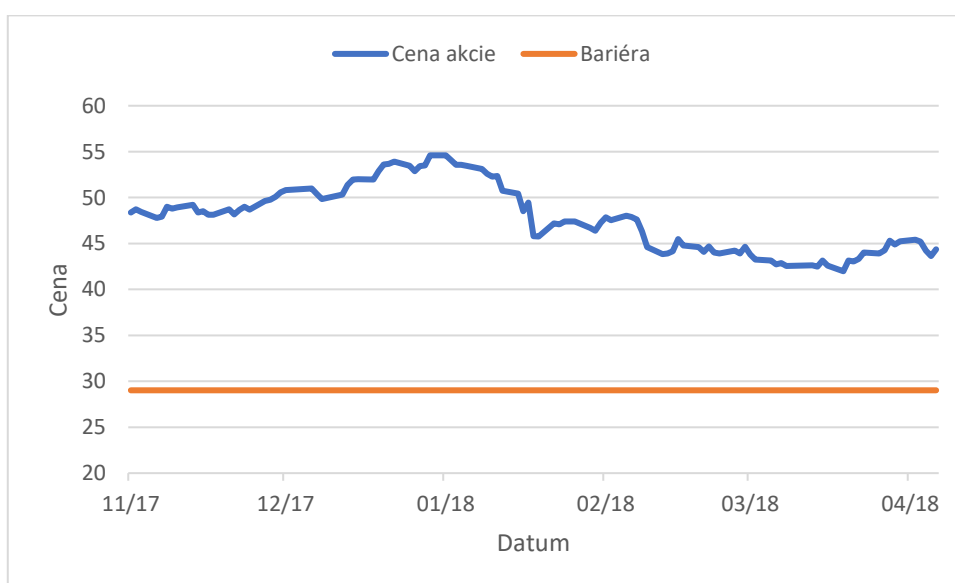
Graf 9: Porovnání vývoje akcie Andritz AG s bariérou



Graf 10: Porovnání vývoje akcie OMV AG s bariérou



Graf 11: Porovnání vývoje akcie voestalpine AG s bariérou



Z výše uvedených grafů můžeme vidět, že k prolomení bariéry doposud nedošlo, takže zatím nenastala situace, že na konci života dluhopisu bude vyplacena jenom poměrná část nominální hodnoty.

Stejně jako v přechodím příkladu se podíváme trochu blíže na parametry nezbytné pro určení hodnoty dluhopisu. První parametr, na který se zaměříme, bude volatilita.

Tabulka níže uvádí hodnoty historické volatility pro všechny tři podkladové akcie, odvozené na několika časových horizontech.

Tabulka 16: Přehled historické volatility akciového koše

| Horizont       | 720 dní | 360 dní | 180 dní | 90 dní | 30 dní |
|----------------|---------|---------|---------|--------|--------|
| Andritz AG     | 0,2475  | 0,21    | 0,2132  | 0,218  | 0,2187 |
| OMV AG         | 0,2865  | 0,2766  | 0,2863  | 0,2991 | 0,3333 |
| Voestalpine AG | 0,3029  | 0,2087  | 0,2139  | 0,2504 | 0,2    |

Z Tabulky č. 16 můžeme vidět, že se hodnoty historické volatility v závislosti na zvoleném časovém intervalu moc dramaticky neliší, narozdíl od podkladového indexu Eurostoxx 50 z předchozího příkladu. Navíc si můžeme všimnout, že hodnotu historické volatility mají všechny tři podkladové akcie podobnou.

Nyní se podíváme na hodnoty volatility odhadnuté pomocí modelu EWMA.

Tabulka 17: Přehled EWMA volatility akciového koše,  $\lambda = 0,98$

| Horizont       | 720 dní | 360 dní | 180 dní | 90 dní | 30 dní |
|----------------|---------|---------|---------|--------|--------|
| Andritz AG     | 0,2201  | 0,221   | 0,2206  | 0,2197 | 0,2016 |
| OMV AG         | 0,3137  | 0,3139  | 0,3148  | 0,3179 | 0,3352 |
| voestalpine AG | 0,2339  | 0,2343  | 0,2348  | 0,2427 | 0,2009 |

Tabulka 18: Přehled EWMA volatility akciového koše,  $\lambda = 0,96$

| Horizont       | 720 dní | 360 dní | 180 dní | 90 dní | 30 dní |
|----------------|---------|---------|---------|--------|--------|
| Andritz AG     | 0,2119  | 0,2119  | 0,2120  | 0,2101 | 0,1878 |
| OMV AG         | 0,3334  | 0,3331  | 0,3339  | 0,3352 | 0,3435 |
| voestalpine AG | 0,2308  | 0,2312  | 0,2309  | 0,2321 | 0,2046 |

Tabulka 19: Přehled EWMA volatility akciového koše,  $\lambda = 0,94$

| Horizont       | 720 dní | 360 dní | 180 dní | 90 dní | 30 dní |
|----------------|---------|---------|---------|--------|--------|
| Andritz AG     | 0,1964  | 0,1964  | 0,1967  | 0,1943 | 0,1740 |
| OMV AG         | 0,3471  | 0,3466  | 0,3479  | 0,3495 | 0,3520 |
| voestalpine AG | 0,2230  | 0,2232  | 0,2230  | 0,2240 | 0,2082 |

Z tabulek uvedených výše můžeme vypořizovat, že hodnoty odhadnutých volatilit na horizontech 90 – 720 dní jsou velmi podobné, významněji se odlišují pouze hodnoty založené na 30denním horizontu.

Odhadnuté hodnoty volatility poměrně dobře vyjadřují očekávání, která bychom mohli mít při pohledu na graf vývoje jednotlivých akcií.

U akcie Andritz AG vidíme, že při hodnotě  $\lambda = 0,98$  je volatilita poměrně stabilní na všech časových horizontech. Při hodnotě parametru  $\lambda = 0,96$  je zřejmé, že se na horizontu 30 dní začíná projevovat delší období malých cenových výkyvů, které odhad volatility snižují. Je to způsobeno tím, že má toto klidné období větší váhu. Na delších horizontech je toto klidné období vyrovnáno předchozím vývojem akcie v historii. Při parametru  $\lambda = 0,94$  se toto klidné období projeví ještě razantněji, přičemž ovlivňuje i celkový odhad volatility na delších časových horizontech. Je to dáno tím, že historické hodnoty, které hodnotu volatility navýšily v předchozím případě, mají nyní menší váhu, proto nedojde ke stejnému vyrovnání jako došlo v případě  $\lambda = 0,96$ .

Při pohledu na graf vývoje akcie OMV AG můžeme sledovat skok ceny, který nastal v nedávné době. Tento skok se promítnul i do odhadu volatility, kdy v tabulkách můžeme názorně vidět, že odhad volatility na 30denním horizontu je ve všech případech vyšší než odhady na delších obdobích. S klesající hodnotou  $\lambda$  vidíme vliv tohoto výkyvu na odhady založené na delších časových horizontech.

Vývoj akcie voestalpine AG nebyl v poslední době velmi dramatický. Odhad volatilit ukazuje, že na horizontu 30 dní je hodnota odhadu nižší než na delších horizontech. Při snižujících se hodnotách parametru  $\lambda$  tedy vidíme, jak toto klidnější období ovlivňuje hodnoty odhadnutých volatilit na delších časových horizontech.

Jako další vstupní paramter pro ocenění jsme v předchozím příkladě zmiňovali driftovou křivku, která udává očekávaný bezrizikový růst. V tomto případě bude použita stejná křivka, protože jak měna podkladového index Eurostoxx 50 z předchozího příkladu, tak měna akcií obsažených v koši tohoto dluhopisu, je stejná, tedy euro.

Spotovou cenu a strike price vypořizujeme z časové řady historických cen podkladových akcií. Akcie obecně mohou, ale nemusí vyplácet dividendu. V našem případě všechny akcie obsažené v koši dividendu vyplácejí, proto je zahrneme do výpočtu. V praxi akcie vyplácí dividendu v konkrétní časové okamžiky, což vede k poklesu ceny

dané akci v daném časovém okamžiku. V našem příkladu ale budeme uvažovat, že je dividenda vyplácena kontinuálně, stejně jako v případě podkladového indexu z předchozího příkladu.

Abychom mohli simulace sestrojit co nejpresněji, musíme vzít v úvahu, jestli podkladové akcie nejsou korelované, tedy zjednodušeně řečeno, jestli není ve vývoji podkladových akcií nějaká závislost. U sestrojení náhodné procházky pomocí Wienerova procesu jsou všechny části rovnice deterministické kromě jedné – výběru ze standardizovaného normálního rozdělení. Abychom při vytvoření simulace zahrnuli korelace podkladových aktiv, je potřeba, aby i tyto výběry z normálního rozdělení odpovídaly korelaci podkladových akcií. Výběr tedy bude prováděn z tzv. multivarietního normálního rozdělení. Korelační matice podkladových akcií je znázorněna v Tabulce č. 20.

Tabulka 20: Korelační matice podkladových akcií

|                | Andritz AG | OMV AG | voestalpine AG |
|----------------|------------|--------|----------------|
| Andritz AG     | 1          | 0,35   | 0,41           |
| OMV AG         | 0,35       | 1      | 0,52           |
| voestalpine AG | 0,41       | 0,52   | 1              |

Nyní máme všechny potřebné parametry pro simulaci. V Tabulce č. 21 jsou tyto parametry shrnuty. Můžeme ještě pro představu uvést jak vlastně výsledek simulace vypadá. V předchozím příkladě, kde jsme simulovali vývoj jednoho podkladového indexu, je výsledek simulace matice, ve které jednu osu tvoří časové horizonty a druhou osu potom simulované ceny podkladového indexu. V případě tohoto dluhopisu ale simulujeme tři podkladové akcie. Výsledkem tedy bude trojrozměrná matice, nebo můžeme říci kostka, jejíž jednu osu budou tvořit dny, ke kterým jsme simulaci prováděli, druhá osa sestává z nasimulovaných cen a třetí osu budou tvořit jednotlivé podkladové akcie.

Tabulka 21: Vstupní parametry pro simulaci

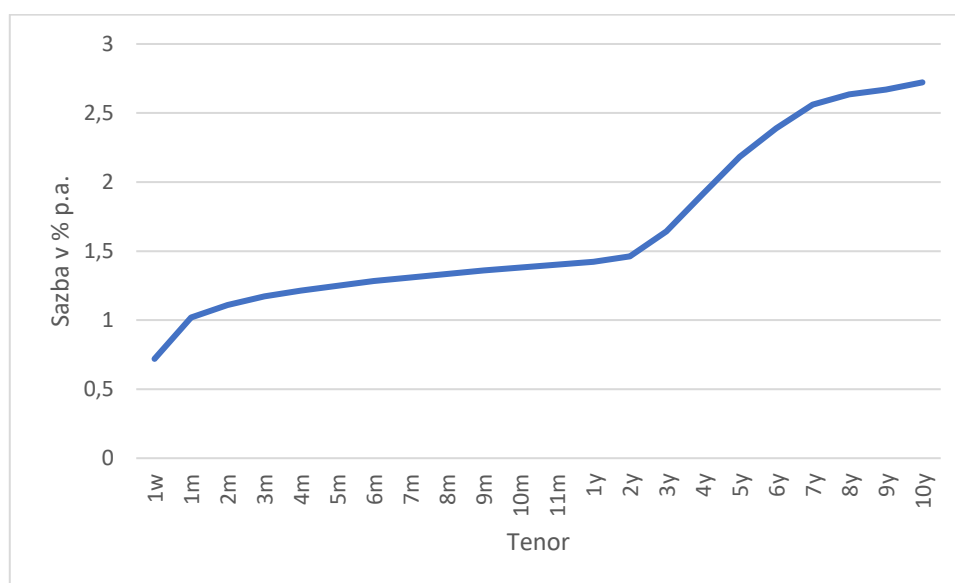
|                                            |                            |
|--------------------------------------------|----------------------------|
| Spotové cena akcií                         | 44,02; 51,56; 44,37        |
| Strike price                               | 45,41; 51,88; 48,365       |
| Současná výkonnost podkladových akcií      | 0,97; 0,99; 0,92           |
| Dividenda                                  | 0,0359; 0,03014; 0,02395   |
| Časové úseky, ke kterým provádíme simulaci | Každý den až do 23.10.2018 |
| Volatilita                                 | 0,221; 0,3139; 0,2343      |
| Drift                                      | EUR křivka                 |
| Počet simulací                             | 10 000                     |

Po sestrojení simulací je budeme vyhodnocovat, stejně jako v předchozím příkladu. Vyhodnocení každé ze simulací vychází z výplatní funkce daného dluhopisu. V případě tohoto konkrétního dluhopisu budeme postupovat tak, že se podíváme na první nasimulovanou cestu všech tří akcií a zjistíme, zda je v některém z budoucích dnů simulovaná hodnota některé akcie nižší než bariéra. Pokud ano, přičteme k simulované výkonnosti k poslednímu dni bonus ve výši 5 % s tím, že tato hodnota nemůže být vyšší než 105 %. V případě, že simulovaná cesta tuto bariéru nepřekročila, nastavíme výkonnost v poslední simulovaný den na hodnotu 105 %, protože to je přesně hodnota, kterou držitel dluhopisu dostane v případě, že vývoj podkladových akcií neprolomí v průběhu pozorovacího období bariéru. Jakmile vyhodnotíme všechny simulace, uděláme průměr hodnot všech 10 000 simulací k poslednímu dni, s tím, že za každou simulaci budeme vždy započítávat pouze hodnotu té akcie, která je nejnižší. Tím získáme očekávanou hodnotu dluhopisu v době splatnosti.

Abychom zjistili současnou hodnotu, je potřeba výslednou hodnotu ze simulací diskontovat. Jelikož je tento dluhopis denominovaný v CZK, budeme potřebovat korunovou diskontní křivku. Tu sestrojíme podobně jako v předchozím příkladě, jenom místo sazby EURIBOR bude použita česká sazba PRIBOR. K této následně přičteme kreditní spread odpovídající ratingu „A“, jelikož emitent je u obou oceňovaných dluhopisu stejný. Také v tomhle případě bychom mohli uvažovat změnu ratingu emitenta do splatnosti dluhopisu. Jelikož je ale splatnost tohoto dluhopisu v poměrně krátké době, získali bychom velmi malé pravděpodobnosti toho, že se za období rating emitenta změní. Po zahrnutí těchto pravděpodobností by se nám výsledná diskontní křivka téměř nezměnila, proto případnou změnu ratingu emitenta při splatnosti dluhopisu nebudeme

pro získání současné hodnoty uvažovat. Na Grafu č. 12 je zobrazena podoba CZK diskontní křivky doplněné o kreditní spready. Můžeme vidět, že vypadá poměrně odlišně od eurové diskontní křivky. Jednak má jiný tvar, sazby rostou plynuleji než v případě eurové křivky, a také si můžeme všimnout, že samotné sazby jsou vyšší než u eurové diskontní křivky. Také se zde nesetkáme se zápornými hodnotami sazeb, které byly přítomny u eurové křivky až do dvouletého horizontu.

Graf 12: CZK diskontní křivka pro rating "A"



Nyní se podíváme, jaká výsledná hodnota nám ze simulací vychází. Tabulka č. 22 ukazuje očekávanou hodnotu dluhopisu v sobě splatnosti, diskontní faktor a současnou hodnotu dluhopisu, tedy jeho cenu.

Tabulka 22: Výsledné hodnoty ocenění dluhopisu

| Očekávaná hodnota | Diskontní faktor | Cena dluhopisu |
|-------------------|------------------|----------------|
| 94,65078 %        | 0,9934746        | 94,03315 %     |

Stejně jako v předchozím příkladě se pokusíme porovnat, jak moc se bude lišit výsledná cena dluhopisu při změně parametrů. Počet simulací ověřovat nebudeme, protože by neměl mít jiný dopad než v případě prvního dluhopisu, zaměříme se tedy na volatilitu. Výše uvedený výsledek byl spočten na základě odhadu EWMA volatilitu s parametrem

$\lambda = 0,98$  a časovým horizontem 360 dní. Výsledek budeme postupně počítat s historickou volatilitou spočítanou na historii 360 dní a dále ještě s EWMA volatilitou na stejném časovém horizontu, ale s jinými hodnotami parametru  $\lambda$ . V Tabulce č. 23 vidíme srovnání výsledků.

Tabulka 23: Dopad změny volatility na cenu dluhopisu

| Volatilita     | Historická | $\lambda = 0,98$ | $\lambda = 0,96$ | $\lambda = 0,94$ |
|----------------|------------|------------------|------------------|------------------|
| Cena dluhopisu | 94,66 %    | 94,03 %          | 93,96 %          | 94,03 %          |

Z tabulky uvedené výše vyplývá, že dopad změny volatility do výsledné hodnoty ceny dluhopisu je velmi malý i v porovnání s výslednými hodnotami předchozího dluhopisu.

Na závěr ještě porovnáme naši výslednou cenu s cenou, kterou uvádí emitent dluhopisu. Oficiální cena k 27.4.2018 byla 94,375 % (Česká spořitelna 2018). Při porovnání oficiální ceny s výsledky z Tabulky č. 23 vidíme, že jsme se k této ceně přiblížili velmi blízko.

## Závěr

V první kapitole této práce jsme se seznámili se základní charakteristikou dluhopisů, na jakých principech dluhopisy fungují a jaké jsou jejich parametry. Dále jsme si vysvětlili metodu diskontování budoucích peněžních toků jakožto základní přístup k určení hodnoty dluhopisu. V poslední části jsme se věnovali výnosové křivce, její definici a způsobu jak se pomocí metody bootstrapping taková křivka sestrojuje na základě státních emitovaných dluhopisů.

Ve druhé kapitole jsme si vymezili základy potřebné pro oceňování opcí. Konkrétně jsme se věnovali Wienerovu procesu náhodné procházky vývoje podkladového aktiva, dále odvození Black-Scholesovy diferenciální rovnice, která dává základ nejznámějšímu modelu pro oceňování evropských put a call opcí – Black-Scholesovu oceňovacímu modelu. Další část této kapitoly byla zaměřená na odhad a modelování parametrů. Seznámili jsme se s metodou modelování Monte Carlo, pomocí které se mohou oceňovat opce se složitější strukturou výplatní funkce nebo na které nestačí Black-Scholesův oceňovací model. V poslední části této kapitoly jsme se věnovali volatilitě, jakožto významnému parametru, který ovlivňuje hodnotu opcí. Vymezili jsme si tři typy volatility. Prvním je historická volatilita, která je spočtená čistě na historických datech. Druhým typem volatility je volatilita implikovaná, která je odvozena z rovnice Black-Scholesova oceňovacího modelu a jako třetí typ volatility jsme si uvedli volatilitou odhadnutou na základě modelu EWMA.

První dvě kapitoly byly pojaté spíše teoreticky. Bylo to proto, aby čtenář pochopil, na jakých principech oceňování dluhopisů a opcí stojí. V praxi se totiž vychází právě z těchto teoretických základů, na kterých se potom staví veškeré další postupy. Vymezení těchto teoretických základů bylo také nezbytné pro poslední část této práce.

Cílem poslední kapitoly bylo uvést poznatky z prvních dvou kapitol do praxe tím, že jsme se zaměřili na ocenění dvou konkrétních dluhopisů s vnořenými opcemi emitovaných rakouskou bankou Erste Group. Pro výpočet byla použita data z terminálů Bloomberg a Thomson Reuters Eikon. Ocenění dluhopisů potom bylo implementováno ve výpočetním statistickém programu R. Na úvod jsme se seznámili s každým z dluhopisů a vysvětlili si principy, na jakých fungují. Pochopení principů jejich fungování, jinými slovy pochopení jejich výplatní funkce, je klíčové pro určení správného postupu při určování hodnoty takových dluhopisů. Dále jsme si určili hodnoty parametrů

nezbytných pro oceňování a porovnali výsledky různé způsobů odhadu těchto parametrů. Následně jsme určili výslednou cenu každého z dluhopisů s tím, že jsme také analyzovali, jaký dopad mají případné změny parametrů na výslednou cenu. V obou případech jsme výsledné ceny porovnali na oficiální ceny zveřejněné emitentem a diskutovali případné rozdíly.

## Seznam zdrojů

**Česká národní banka** [Online]. - 2018. -

[https://www.cnb.cz/en/monetary\\_policy/inflation\\_reports/2011/2011\\_IV/boxes\\_and\\_annexes/zoi\\_2011\\_IV\\_box\\_2.html](https://www.cnb.cz/en/monetary_policy/inflation_reports/2011/2011_IV/boxes_and_annexes/zoi_2011_IV_box_2.html).

**Česká spořitelna** Prémiový dluhový cenný papír FOCUS AUSTRIA 10/2018 [Online]. - 2018. -

[https://cz.products.erstegroup.com/modules/res/FileDownload.php?file\\_type=&hash=b735b5e78f8d63a5e942e79ca165a6c02b8204caa6acfc34438c8953ac13ae54&idfile=5721&stat=ebg.cz%2FRetail%2Fcs%2FFiles%2FBonds%2FAT0000A1YT86%2FLetAik&stath=f56069b487771b9a7&time=152](https://cz.products.erstegroup.com/modules/res/FileDownload.php?file_type=&hash=b735b5e78f8d63a5e942e79ca165a6c02b8204caa6acfc34438c8953ac13ae54&idfile=5721&stat=ebg.cz%2FRetail%2Fcs%2FFiles%2FBonds%2FAT0000A1YT86%2FLetAik&stath=f56069b487771b9a7&time=152).

**Česká spořitelna** Přehled dluhopisu AT0000A1YT86 [Online]. - 2018. -

[https://cz.products.erstegroup.com/Retail/cs/Produkty/Dluhopisy/Factsheets/Bonds\\_genera1/index.phtml?ID\\_NOTATION=201448221&ISIN=AT0000A1YT86](https://cz.products.erstegroup.com/Retail/cs/Produkty/Dluhopisy/Factsheets/Bonds_genera1/index.phtml?ID_NOTATION=201448221&ISIN=AT0000A1YT86).

**Erste Group** AT0000A1XFY9 - Final terms [Online]. - 2018. -

[https://www.erstegroup.com/content/dam/at/eh/www\\_erstegroup\\_com/de/Erste%20Group%20Emissionen/prospekte/anleihen/equity-linked-notes-prog/20170210/20170822-FT-EQU464.pdf](https://www.erstegroup.com/content/dam/at/eh/www_erstegroup_com/de/Erste%20Group%20Emissionen/prospekte/anleihen/equity-linked-notes-prog/20170210/20170822-FT-EQU464.pdf).

**Erste Group** AT0000A1YT86 - Final terms [Online]. - 2018. -

[https://www.erstegroup.com/content/dam/at/eh/www\\_erstegroup\\_com/de/Erste%20Group%20Emissionen/prospekte/anleihen/equity-linked-notes-prog/20170210/20171019-FT-EQU494.pdf](https://www.erstegroup.com/content/dam/at/eh/www_erstegroup_com/de/Erste%20Group%20Emissionen/prospekte/anleihen/equity-linked-notes-prog/20170210/20171019-FT-EQU494.pdf).

**Erste Group** Přehled dluhopisu AT0000A1XFY9 [Online]. - 2018. -

[https://produkte.erstegroup.com/Retail/de/Products/Structured\\_Products/Express\\_Bonds/Factsheets/Express\\_Bond/index.phtml?ID\\_NOTATION=196652636&ISIN=AT0000A1XFY9](https://produkte.erstegroup.com/Retail/de/Products/Structured_Products/Express_Bonds/Factsheets/Express_Bond/index.phtml?ID_NOTATION=196652636&ISIN=AT0000A1XFY9).

**Fabiozzi Frank J.** Fixed income analysis [Kniha]. - New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2007. - ISBN 978-0-470-05221-1.

**Hull John C.** Options, Futures, and Other Derivatives. 8th edition [Kniha]. - Boston : Pearson, 2012. - ISBN 978-0-13-216494-8.

- J.P.Morgan** RiskMetrics™—Technical Document [Online]. - 1996. -  
<https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ae2-3449d5c7e95a>.
- Kleiber Christian a Zeileis Achim** Applied Econometrics with R [Kniha]. - New York : Springer Science+Business Media, LLC, 2008. - ISBN 978-0-387-77316-2.
- Rebonato Riccardo** Volatility and Correlation [Kniha]. - West Sussex : John Wiley & Sons Ltd., 2004. - ISBN 0-470-09139-8.
- Revenda Z. a kol.** Peněžní ekonomie a bankovníctví [Kniha]. - Praha : Management Press, 2012. - ISBN 978-80-7261-240-6.
- S&P Global Ratings** 2016 Annual Global Corporate Default [Online]. -  
<https://www.spratings.com/documents/20184/774196/2016+Annual+Global+Corporate+Default+Study+And+Rating+Transitions.pdf/2ddcf9dd-3b82-4151-9dab-8e3fc70a7035>.
- SOTXX, Ltd.** EURO STOXX 50® INDEX [Online]. - 2018. -  
<https://www.stoxx.com/document/Indices/Factsheets/2018/April/SX5GT.pdf>.
- Stádník Bohumil** Teorie a praxe dluhopisů [Kniha]. - Praha : Oeconomica, 2013. - ISBN 978-80-245-1919-7.
- Wilmott Paul** Paul Wilmott on quantitative finance [Kniha]. - West Sussex : John Wiley & Sons Ltd, 2006. - ISBN 978-0-470-01870-5.
- Witzany Jiří** Financial derivatives and market risk management [Kniha]. - Praha : Oeconomica, 2011. - ISBN 978-80-245-1811-4.

## Seznam tabulek

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabulka 1: Přehled ilustrativních státních dluhopisů .....                 | 22 |
| Tabulka 2: Přehled ratingových stupňů podle ratingových agentur .....      | 27 |
| Tabulka 3: Parametry svolatelného dluhopisu.....                           | 45 |
| Tabulka 4: Hodnoty historické volatility indexu Eurostoxx 50 .....         | 47 |
| Tabulka 5: Hodnoty EWMA volatility indexu Eurostoxx 50 .....               | 47 |
| Tabulka 6: Srovnání historické, implikované a EWMA volatility .....        | 48 |
| Tabulka 7: Vstupní parametry pro simulaci .....                            | 50 |
| Tabulka 8: Pravděpodobnosti svolání dluhopisu.....                         | 50 |
| Tabulka 9: Očekávané kupóny .....                                          | 51 |
| Tabulka 10: Korporátní roční tranzitní sazby pro region Evropa.....        | 53 |
| Tabulka 11: Diskontní faktory.....                                         | 53 |
| Tabulka 12: Výsledná hodnota dluhopisu .....                               | 54 |
| Tabulka 13: Počet simulací a jejich dopad do výsledné ceny dluhopisu.....  | 54 |
| Tabulka 14: Cena dluhopisu v závislosti na volatilítě.....                 | 55 |
| Tabulka 15: Parametry dluhopisu navázaného na akciový koš.....             | 56 |
| Tabulka 16: Přehled historické volatility akciového koše.....              | 59 |
| Tabulka 17: Přehled EWMA volatility akciového koše, $\lambda = 0,98$ ..... | 59 |
| Tabulka 18: Přehled EWMA volatility akciového koše, $\lambda = 0,96$ ..... | 59 |
| Tabulka 19: Přehled EWMA volatility akciového koše, $\lambda = 0,94$ ..... | 59 |
| Tabulka 20: Korelační matice podkladových akcií .....                      | 61 |
| Tabulka 21: Vstupní parametry pro simulaci .....                           | 62 |
| Tabulka 22: Výsledné hodnoty ocenění dluhopisu.....                        | 63 |
| Tabulka 23: Dopad změny volatility na cenu dluhopisu .....                 | 64 |

## Seznam grafů

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Graf 1: Závislost ceny dluhopisu na diskontní sazbě .....       | 18 |
| Graf 2: Spotová a výnosová křivka .....                         | 24 |
| Graf 3: Realizace Wienerova procesu .....                       | 29 |
| Graf 4: Realizace Wienerova procesu s driftem .....             | 30 |
| Graf 5: Volatility smile .....                                  | 43 |
| Graf 6: Historický vývoj indexu Eurostoxx 50 .....              | 46 |
| Graf 7: EUR bezriziková výnosová křivka .....                   | 49 |
| Graf 8: EUR diskontní křivka pro rating "A" .....               | 52 |
| Graf 9: Porovnání vývoje akcie Andritz AG s bariérou .....      | 57 |
| Graf 10: Porovnání vývoje akcie OMV AG s bariérou .....         | 58 |
| Graf 11: Porovnání vývoje akcie voestalpine AG s bariérou ..... | 58 |
| Graf 12: CZK diskontní křivka pro rating "A" .....              | 63 |