

Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta informatiky a statistiky



**Citlivost kompromisní varianty na vybrané
změny ve váhovém vektoru při použití
metody ELECTRE III**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Studijní program: Kvantitativní metody v ekonomice

Studijní obor: Matematické metody v ekonomii

Autor: Alena Vacková

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jana Sekničková, Ph.D.

Praha, květen 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Citlivost kompromisní varianty na vybrané změny ve váhovém vektoru při použití metody ELECTRE III vypracovala samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury.

V Praze dne 1. května 2019

.....

Alena Vacková

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí bakalářské práce Mgr. Janě Sekničkové, Ph.D. za cenné rady a připomínky, které tuto práci obohatily. Dále bych ráda poděkovala Ing. Janu Macháčovi, Ph.D. za poskytnutí analyzovaných dat.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou vícekriteriální analýzy obnovitelných zdrojů energie. Práce se zaměřila na 9 fotovoltaiických a 12 větrných elektráren, které jsou ohodnoceny dle ekonomických, environmentálních, sociálních a inovačních kritérií. Hlavním cílem této práce je provedení analýzy citlivosti kompromisní varianty na změnu váhového vektoru, tj. určit intervaly vah, v rámci kterých se získané řešení nemění. Práce stanovený problém řešila pomocí metody vícekriteriálního rozhodování ELECTRE III se zaměřením se na chování první indifferenční třídy.

Práce uvažuje dvě, tři a čtyři kritéria, přičemž v případě tří kritérií rozebírá dva způsoby změn vah. Ve všech případech předpokládá, že změny všech vah jsou přímo závislé na změně jedné váhy. Analýza citlivosti se zabývá jak konkrétními příklady, tak i speciálními případy na obecné rovině. Práce srovnává numerický přístup s využitím matematického modelu, jejichž výsledky jsou v souladu.

Klíčová slova

Vícekriteriální hodnocení variant, ELECTRE III, citlivostní analýza, obnovitelné zdroje energie.

JEL klasifikace

C44, C61, Q20.

Abstract

This bachelor thesis is focused on a multicriteria analysis of renewable energy sources. The thesis analyzes 9 photovoltaic and 12 wind power plants, which are evaluated based on economic, environmental, social and innovative criteria. The main objective of the thesis is conducting a sensitivity analysis of an efficient solution based on changes in the weight vector. In other words, determine intervals of weights within which the solution is stable. The thesis uses a multiple criteria decision aiding method called ELECTRE III with the focus on the first indifference class.

This thesis considers two, three and four criteria. In the case of three criteria, two ways of describing a change in the weight vector are considered. The thesis assumes that changes in all weights are directly based on a change in one key weight in all mentioned cases. A numeric approach is compared to a method using mathematical models. Results of both approaches are consistent.

Keywords

Multiple criteria decision aiding, ELECTRE III, sensitivity analysis, renewable energy sources.

JEL Classification

C44, C61, Q20.

Obsah

Úvod	9
1 Problematika výběru OZE.....	11
2 Teoretický základ	13
2.1 Vícekriteriální hodnocení variant	15
2.2 Třída metod ELECTRE	16
2.2.1 ELECTRE III.....	16
2.2.2 Aplikace ELECTRE III	18
3 Analýza citlivosti.....	20
3.1 Dvě kritéria.....	20
3.1.1 Numerická analýza citlivosti	22
3.1.2 Obecný případ.....	23
3.2 Tři kritéria (fixace jedné váhy).....	23
3.2.1 Numerická analýza citlivosti.....	25
3.2.2 Obecný případ	29
3.3 Tři kritéria (změny v jedné váze a rovnoměrné rozdělení zbývajících rozdílů)	32
3.3.1 Numerická analýza citlivosti.....	33
3.3.2 Obecný případ	37
3.4 Čtyři kritéria (fixace dvou vah)	38
4 Matematický model	44
4.1 Základní matematický model.....	44
4.2 Dvě kritéria	46
4.3 Tři kritéria (fixace jedné váhy)	47
4.4 Tři kritéria (změny v jedné váze a rovnoměrné rozdělení zbývajících rozdílů)	48
4.5 Čtyři kritéria (fixace dvou vah)	49
5 Analýza citlivosti při zahrnutí dominovaných variant	51
5.1 Dvě kritéria.....	52
5.2 Tři kritéria.....	52
5.3 Čtyři kritéria.....	53
6 Výsledky a diskuze.....	54
Závěr	56
Použitá literatura.....	57
Přílohy	60

Seznam tabulek

Tabulka 1: Výchozí datový soubor pro příklad aplikace ELECTRE III	18
Tabulka 2: Indexní množiny pro případ čtyř kritérií	18
Tabulka 3: Hodnoty p_i^1 , q_i^1 a d_i^1 (krok 1).....	19
Tabulka 4: Řešení ukázkového problému	19
Tabulka 5: Výchozí datový soubor pro případ dvou uvažovaných kritérií.....	21
Tabulka 6: Indexní množiny pro případ dvou kritérií při nezahrnutí dominovaných variant.....	21
Tabulka 7: Řešení problému s dvěma kritérii při vypuštění dominovaných variant při různých hodnotách vah v_1 a v_2	22
Tabulka 8: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ dvou kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,286$ a $v_2 = 0,714$	23
Tabulka 9: Řešení v případě analýzy dvou kritérií při zahrnutí dominovaných variant.....	23
Tabulka 10: Výchozí datový soubor pro případ tří uvažovaných kritérií	24
Tabulka 11: Indexní množiny pro případ tří kritérií při nezahrnutí dominovaných variant.....	24
Tabulka 12: Řešení problému se třemi kritérii při vypuštění dominovaných variant při $v_1 = 0,2$ a různých hodnotách vah v_2 a v_3	25
Tabulka 13: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,6$ a $v_3 = 0,2$	26
Tabulka 14: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,1$ a $v_3 = 0,7$	27
Tabulka 15: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,2$ a $v_3 = 0,6$	28
Tabulka 16: Řešení problému se třemi kritérii při vypuštění dominovaných variant při různých hodnotách váhy v_1 a rovnoměrném rozdělení zbývajících rozdílů mezi v_2 a v_3 , tj. $v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$	33
Tabulka 17: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,2$, $v_2 = v_3 = 0,4$	33
Tabulka 18: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{3}$	35
Tabulka 19: Řešení v případě analýzy tří kritérií v případě změny ve váze v_1 a rovnoměrné rozdělení mezi zbývajících dvě, tj. $v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$ při nezahrnutí dominovaných variant.....	36
Tabulka 20: Výchozí datový soubor pro případ čtyř uvažovaných kritérií	38
Tabulka 21: Indexní množiny pro případ čtyř kritérií.....	39
Tabulka 22: Řešení problému se čtyřmi vahami při vypuštění dominovaných variant při $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$ a různých hodnotách vah v_3 a v_4	39
Tabulka 23: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ čtyř kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,34$ a $v_4 = 0,13$	40
Tabulka 24: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ čtyř kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,035$ a $v_4 = 0,435$	42

Tabulka 25: Kompletní řešení pro případ čtyř kritérií, kdy jsou zafixované první dvě váhy $v_1 = 0,13$ a $v_2 = 0,4$ (hodnoty v_2 a v_3 jsou uvedeny v tabulce)	43
Tabulka 26: Příklad implementace matematického modelu do softwaru R.....	46
Tabulka 27: Řešení úloh LP v případě dvou uvažovaných kritérií.....	47
Tabulka 28: Řešení úloh LP v případě tří uvažovaných kritérií a zafixování váhy v_1	48
Tabulka 29: Řešení úloh LP v případě tří uvažovaných kritérií, postupné změny váhy v_1 a rovnoměrné rozdělení rozdílu $1 - v_1$ mezi v_2 a v_3	49
Tabulka 30: Řešení úloh LP v případě čtyř uvažovaných kritérií a zafixování vah v_1 a v_2	50
Tabulka 31: Výchozí řešení pro analýzu kompletního souboru	84
Tabulka 32: Set vah $P_1, \pm 25 \%$	85
Tabulka 33: Set vah $P_2, \pm 35 \%$	85
Tabulka 34: Set vah $P_3, \pm 50 \%$	85
Tabulka 35: Výchozí řešení pro 4 kritéria	88
Tabulka 36: Set vah $P_1, \pm 25 \%$	88
Tabulka 37: Set vah $P_2, \pm 35 \%$	89
Tabulka 38: Set vah $P_3, \pm 50 \%$	89

Úvod

Tato práce je zaměřena na vícekritériální analýzu v oblasti obnovitelných zdrojů energie (dále jen OZE), konkrétně na analýzu 9 fotovoltaických a 12 větrných elektráren. Hodnocení OZE zahrnuje široké spektrum kritérií, mezi které se řadí např. ekonomické nebo environmentální dopady (více v kapitole 1). Hlavním cílem této práce je provedení analýzy citlivosti kompromisní varianty na změnu váhového vektoru, tj. určit intervaly vah, v rámci kterých se získané řešení nemění.

Evropská unie stanovila za cíl 20% podíl OZE na konečnou spotřebu do roku 2020, přičemž jednotlivé státy se zavázaly dosáhnout mezi 10% a 49% podílem OZE [1]. Česká republika se zavázala dosáhnout 13% podílu OZE na konečné spotřebě do roku 2020 [2]. Dle [3] byl tento cíl již splněn: „Podíl obnovitelných zdrojů energie na konečné spotřebě v roce 2017 podle mezinárodní metodiky výpočtu EUROSTAT – SHARES činil 14,8%“. Do roku 2030 stanovila Evropská unie za cíl 32% podíl OZE [1], přičemž Česká republika se plánuje zavázat¹ k 20,8% podílu [4]. Výstavba nových OZE je tedy stále aktuální otázkou, kterou se zabývají starostové obcí (nejen) České republiky. Rozhodovatel musí zodpovědět základní otázky: Má výstavba daného OZE pozitivní dopad na obec? Jaký z navrhovaných projektů zvolit? Jak navrhované projekty seřadit (příp. roztrždit) od nejvhodnějšího po nejméně vhodný? A podobně. Tato práce se bude zabývat především druhou otázkou, tedy jaký z navrhovaných projektů zvolit. Proces seřazení (příp. roztrždění) navrhovaných projektů, resp. určení nejlepší možné varianty, bude simulován ohodnocením existujících elektráren a několika navrhovaných projektů.

Rozhodnutí o výstavbě nového obnovitelného zdroje energie zahrnuje celou řadu aspektů. Tato práce bude uvažovat hodnocení elektráren podle kritérií navržených v [5]. Tato metodika hodnotí OZE z ekonomického, sociálního, environmentálního a inovačního pohledu. Konkrétní výčet hodnocených kritérií je v kapitole 1. Metodika je zaměřena na hodnocení fotovoltaických elektráren, větrných elektráren, malých vodních elektráren, bioplynových stanic a zařízení na energetické využití odpadu. Metodiku vyvinul tým IEEP (Institut pro ekonomickou a ekologickou politiku), jehož jsem členkou a podílela jsem se na korektuře metodiky, a tým ECO trend s.r.o.

Seřazení (příp. roztrždění) navrhovaných projektů může být významně ovlivněno změnami v datovém souboru (chybné ohodnocení projektů), změnou vah, nebo i změnou metody využití k seřazení (příp. roztrždění). Při změně rozhodovatele či jeho postojů může dojít ke změnám ve váhovém vektoru, což může vést k různým řešením problému. Výsledek analýzy může být změnou váhového vektoru zmanipulován tak, aby byl výsledek pro subjektivně preferovanou variantu pozitivní. Z tohoto důvodu se tato práce zaměří na změny v kompromisním řešení vlivem změny váhového vektoru. K řešení problému bude využita

¹ Konkrétní hodnota závisí na jednání s Evropskou komisí, které v době psaní této práce stále probíhá.

metoda vícekritériálního rozhodování variant ELECTRE III, která je vhodná pro hodnocení projektů výstavby elektráren [6].

K citlivosti řešení na změnu váhového vektoru v souvislosti s metodou ELECTRE III v literatuře existuje mnoho různorodých úhlů pohledu. Jedním z možných přístupů je rozdělení kritérií do menšího počtu skupin a následné změny vah v rámci celé skupiny (např. $\pm 25\%$, $\pm 50\%$) [7]. Tento přístup je demonstrován na analyzovaném souboru v příloze T. Pro metodu ELECTRE I byl odvozen algoritmus pro derivaci intervalů vah, v rámci kterých se získané řešení nemění [8]. Metoda ELECTRE III je specifická využitím indexních množin, jejichž podoba má významný vliv na výsledné řešení. Tato práce přistupuje k analýze citlivosti kompromisní varianty na změnu váhového vektoru rozбором právě těchto indexních množin, pomocí něhož je získán interval, v rámci kterého se stávající řešení, resp. podoba první indifferenční třídy, nemění. Analýza citlivosti založená na rozboru indexních množin bude provedena pro dvě, tři a čtyři kritéria. Analýza bude zaměřena jak na případ vypuštění dominovaných variant, tak na zahrnutí dominovaných variant v analyzovaném souboru variant. Intervaly vah, v rámci kterých se získané řešení nemění, budou odvozeny numericky i pomocí aplikace matematického modelu.

1 Problematika výběru OZE

Data o OZE, která jsou v této práci analyzována, byla zpracována v rámci průzkumu provedeného společností IEEP. V rámci průzkumu bylo ohodnoceno 26 obnovitelných zdrojů energie, konkrétně se jednalo o 9 fotovoltaických elektráren, 12 větrných elektráren, 3 malé vodní elektrárny, 1 bioplynovou stanici a 1 zařízení na energetické využití odpadu. Jedná se o primární data, která mi poskytla společnost IEEP. Na ohodnocení jednotlivých elektráren jsem se osobně podílela.

Obnovitelné zdroje energie byly hodnoceny na základě *Metodiky zjišťování vlivu obnovitelných zdrojů energie na hospodářství a životní prostředí mikroregionu / MAS* (dále jen metodika) [5], která představuje komplexní nástroj hodnocení dopadů na výstavbu a provoz obnovitelných zdrojů energie na místní úrovni. Tento nástroj je vhodný pro prvotní ohodnocení nového záměru. Může předcházet procesu hodnocení dopadů regulace (RIA), který se zabývá dopady legislativních změn [9], a procesu hodnocení vlivů na životní prostředí (EIA), který hodnotí dopady na životní prostředí zejména v kontextu výstavby [5, 10].

Metodika identifikuje čtyři pilíře, do kterých jsou roztrženy jednotlivé dopady:

- (i) **ekonomický pilíř:** regionální HDP, náklady pro obec, příjmy pro obec, zemědělství, lesnictví, vodní hospodářství, potenciální využití produkovaného tepla a využití dotací;
- (ii) **sociální pilíř:** krátkodobá zaměstnanost, dlouhodobá zaměstnanost, vzdělání a lidský kapitál, ceny energií a dopady na vzhled obce/krajiny;
- (iii) **environmentální pilíř:** eroze a kvalita půdy, biodiverzita, kvalita a spotřeba vody, kvalita ovzduší, emise CO₂, hluk, zabor zemědělské půdy a odpady;
- (iv) **inovační pilíř:** úroveň infrastruktury a podnikatelské prostředí.

Pro každý dopad metodika navrhuje způsob ohodnocení. Je-li např. vlastníkem a provozovatelem OZE podnikatel se sídlem v obci, ale na provozu a budování se nepodílejí místní firmy, pak je dopad *Regionální HDP* ohodnocen dvěma body. Podrobný popis jednotlivých dopadů a jejich hodnocení je v metodice.

Tato práce se zaměří na analýzu větrných a fotovoltaických elektráren. Jedná se o nejčteněji zastoupené typy obnovitelných zdrojů energie z původního průzkumu. Zároveň jsou tyto elektrárny v několika dopadech hodnoceny obdobně, někdy dokonce stejně. Dopady jako *Vodní hospodářství*, *Potencionální využití produkovaného tepla*, *Kvalita vody*, *Emise CO₂* a *Odpady* byly pro všechny analyzované elektrárny ohodnoceny nulovou mírou vlivu, proto nebudou uvažovány. Dopad *Podnikatelské prostředí* byl pro všechny analyzované elektrárny ohodnocen mírou vlivu 1. Vzhledem k tomu, že tento dopad neumožní rozlišení v celkovém dopadu OZE, nebude ani tento dopad uvažován. Relevantní kritéria jsou tedy *Regionální HDP*, *Náklady pro obec*, *Příjmy pro obec*, *Zemědělství*, *Lesnictví*, *Využití dotací*, *Krátkodobá zaměstnanost*, *Dlouhodobá zaměstnanost*, *Ceny energií*, *Vzdělání*

a lidský kapitál, Dopady na vzhled obce/krajiny, Eroze a kvalita půdy, Biodiverzita, Kvalita ovzduší, Hluk, Zábor zemědělské půdy a Úroveň infrastruktury.

Všechna kritéria mají maximalizační povahu, ale některá nabývají záporných hodnot (např. kritérium náklady pro obec dle metodiky může mít hodnotu -3, -2, -1, 0). Hodnoty kritérií nabývajících nekladných hodnot byly převedeny tak, aby byly nezáporné, tj. hodnota -3 byla nahrazena hodnotou 0, hodnota -2 byla nahrazena hodnotou 1, hodnota -1 byla nahrazena hodnotou 2 a hodnota 0 byla nahrazena hodnotou 3. Tato úprava nemá vliv na získané řešení, jedná se pouze o změnu umožňující snazší interpretaci. Finální datový soubor je v příloze B.

Metodika na základě rešerše literatury stanovila váhy pro relevantní kritéria jako $\mathbf{v} = (4, 12, 12, 10, 7, 7, 4, 12, 10, 4, 10, 7, 7, 10, 10, 7, 7)$ po normalizaci tedy $\mathbf{v} = (0,029; 0,086; 0,086; 0,071; 0,05; 0,05; 0,029; 0,086; 0,071; 0,029; 0,071; 0,05; 0,05; 0,071; 0,071; 0,05; 0,05)$.

Tato práce bude analyzovat 9 fotovoltaických a 12 větrných elektráren. Mezi elektrárnami je 19 již realizovaných projektů a 2 projekty ve stavu návrhu. S cílem této práce tento rozdíl není konfliktní. Základní údaje o analyzovaných elektrárnách jsou v příloze A.

Analyzované varianty budou značeny jako $a_i, i = 1, \dots, 21$. Kompletní přehled značení je v příloze C.

2 Teoretický základ

V následující kapitole jsou představeny základní pojmy z teorie vícekritériálního rozhodování s důrazem na vícekritériální hodnocení variant a metodu ELECTRE III. Definice jsou převzaty z [11], pokud není uvedeno jinak.

Definice 1 (Úloha lineárního programování). Úloha lineárního programování je definována jako

$$\begin{aligned} &\text{Maximalizovat} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{za podmíněk} && \mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, i = 1, \dots, m, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

kde n je počet proměnných modelu, m je počet omezujících podmínek a $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $\forall i$ jsou reálné funkce n proměnných [12].

Na rozdíl od lineárního programování, kde je jasně stanoveno jedno optimalizační kritérium, je problém ve vícekritériálním rozhodování řešen z pohledu více optimalizačních kritérií. Kritéria mohou být buď maximalizačního, nebo minimalizačního typu.

Definice 2 (Model vícekritériálního hodnocení variant). Model vícekritériálního hodnocení variant je definován množinou variant $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ a množinou kritérií $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$, kde p je počet variant, k je počet kritérií.

Ohodnocení jednotlivých variant podle daných kritérií zapisujeme do matice, kterou nazýváme **kritériální matice**, a ta má podobu

$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_k \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p1} & y_{p2} & \cdots & y_{pk} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

kde p je počet variant, k je počet kritérií a prvek y_{ij} vyjadřuje ohodnocení i -té varianty a_i podle j -tého kritéria f_j .

Nadále budou uvažována jen maximalizační kritéria, neboť minimalizační kritéria je možné převést na kritéria maximalizační podle vztahu

$$\max_i (y_{ij}) - y_{ij}, \quad j = 1, \dots, k,$$

kde f_j je kritérium minimalizačního typu.

Definice 3 **(Model vícekritériálního programování).**
„Maximalizujeme“

$$\begin{bmatrix} z_1 = f_1(\mathbf{x}) \\ z_2 = f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ z_k = f_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &\leq b_1, \\ g_2(\mathbf{x}) &\leq b_2, \\ &\vdots \\ g_m(\mathbf{x}) &\leq b_m, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

kde n je počet proměnných, m je počet vlastních omezení a k je počet kritérií. Současnou maximalizaci několika účelových funkcí není možné jednoznačně definovat, proto je zde maximalizace symbolicky uvedena v uvozovkách.

Vícekritériální modely je možné rozdělit na modely vícekritériálního hodnocení variant (diskrétní modely) a modely vícekritériálního programování (spojité modely). V modelech vícekritériálního hodnocení variant je množina přípustných řešení konečná, naopak v modelech vícekritériálního programování je množina přípustných řešení zpravidla nekonečná [13].

Definice 4 **(Ideální, resp. bazální varianta).** Řekneme, že varianta je ideální, resp. bazální, jestliže má nejlepší, resp. nejhorší možné hodnoty podle všech kritérií.

Definice 5 **(Dominovaná varianta v modelu vícekritériálního hodnocení variant).** Řekneme, že varianta a_i dominuje variantě a_j právě tehdy, když $(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik}) \geq (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jk}) \wedge (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik}) \neq (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jk})$, přičemž nerovnosti a rovnosti vektorů rozumíme po složkách. Řekneme, že varianta a_j je dominovaná varianta, pokud na množině variant existuje alespoň jedna varianta a_i , která dominuje variantě a_j [14].

Definice 6 **(Nedominovaná varianta v modelu vícekritériálního hodnocení variant).** Řekneme, že varianta je nedominovaná, pokud neexistuje jiná varianta na množině variant, která by ji dominovala [14].

Definice 7 **(Kompromisní varianta).** Řekneme, že varianta je kompromisní, jestliže má od ideální varianty nejmenší vzdálenost podle vhodné metriky a zároveň je nedominovanou variantou [13].

Cílem vícekritériálního programování je nalezení kompromisního řešení splňující podmínku nedominovanosti modelu vícekritériálního programování (definice např. v [11], str. 124), které bude kompromisem mezi definovanými účelovými funkcemi. K řešení se používá např. princip agregace účelových funkcí, princip minimaxu, princip minimalizace od ideálních hodnot nebo cílové programování, o kterých je pojednáno v [12].

Modely se dále dělí na modely s informací a priori a na modely s informací a posteriori. V případě modelů a priori je rozhodovatel schopen předem uvést takovou informaci, která umožňuje řešit problém jako jednokriteriální. Pro modely a posteriori lze určit množinu nedominovaných rozhodnutí. Nalezení kompromisního řešení je možné až po získání dodatečné preferenční informace od rozhodovatele. Třetí typ modelů jsou modely s průběžnými informacemi, které vyžadují aktivní komunikaci mezi rozhodovatelem a analytikem v průběhu řešení. Dodatečná informace od rozhodovatele (důležitost kritérií) může mít formu stanovení aspiračních úrovní kritérií, stanovení pořadí důležitosti kritérií, nebo určení vektoru vah kritérií $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, pro které musí platit, že $\sum_{j=1}^k v_j = 1$, $v_j \geq 0$ $j = 1, 2, \dots, k$. Pokud není uvedena podmínka splněna, je třeba váhy prvně normalizovat tak, aby podmínka splněna byla.

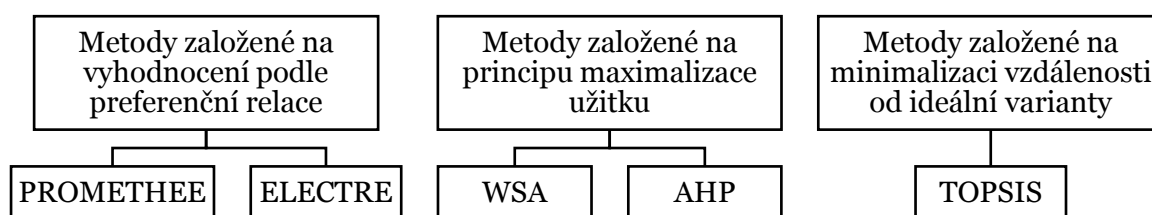
Tato práce je zaměřena na práci s modely vícekriteriálního hodnocení variant s informací a priori, předpokladem rozhodování při jistotě a stanovení preference rozhodovatele pomocí vah kritérií.

2.1 Vícekriteriální hodnocení variant

Mezi základní cíle vícekriteriálního hodnocení variant (dále také jako VHV) se řadí nalezení jedné nejlepší (kompromisní) varianty, seřazení variant a klasifikace variant do několika tříd [14].

Základní rozdělení typů metod podle různých principů pro nalezení kompromisní varianty je znázorněno v diagramu 1. Metody založené na konstrukci preferenční relace vycházejí z relací mezi dvojicemi variant vzhledem k daným kritériím. Blíže je o této problematice pojednáno v ([11], str. 57).

Diagram 1. Základní principy pro nalezení kompromisní varianty a příklady metod využívající dané principy. (Vlastní zpracování.)



Zkratky v diagramu 1 představují jednotlivé metody, kde PROMETHEE je zkratka pro *Preference Ranking Organization Method for Enrichment of Evaluations*, ELECTRE je zkratka pro *Elimination Et Choix Traduisant la Réalité*, WSA je zkratka pro *Weighted Sum Approach*, AHP je zkratka pro *Analytic hierarchy process* a TOPSIS je zkratka pro *The Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution*.

2.2 Třída metod ELECTRE

V této práci bude použita metoda ze třídy metod ELECTRE. Metoda ELECTRE byla prvně představena v roce 1966 [15], ale podrobně byla popsána až o dva roky později v článku od Bernarda Roye [16]. Jednalo se o metodu ELECTRE I. V dalších desetiletích bylo vyvinuto mnoho dalších metod a jejich variací, jako jsou např. metody ELECTRE II, ELECTRE III, ELECTRE IV, ELECTRE TRI, ELECTRE IS a další, přičemž Bernard Roy je spoluautorem všech zmíněných. Metody ze skupiny ELECTRE mají dva základní cíle: ELECTRE I umožňuje určení nejmenší možné skupiny efektivních variant (viz např. [11], str. 102) a např. ELECTRE II nebo ELECTRE III umožní setřídění množiny variant od nejlepší po nejhorší variantu.

Třída metod ELECTRE, konkrétně metody ELECTRE III a ELECTRE TRI, je často využívána v oblasti energetiky, zejména pro ohodnocení navrhovaných projektů či určení nejvhodnější lokality pro plánovaný projekt. Metody ELECTRE jsou hojně využívány i v jiných oblastech, jako je např. vodní hospodářství, informační technologie nebo finanční management. Napříč všemi oblastmi je nejvíce používána metoda ELECTRE III a ELECTRE I a jejich použití stále stoupá i přes to, že jsou přes 50 let staré. Téměř polovina aplikačních článků využívající metodu ELECTRE III se týká energetiky, přírodních zdrojů a managementu životního prostředí [6].

2.2.1 ELECTRE III

Definice 8 (Množina indexů I_{ij}). Indexy kritérií, pro které platí vztah $y_{ih} > y_{jh}$, $h = 1, \dots, k$, kde y_{ih}, y_{jh} jsou prvky kritériální matice $\mathbf{Y}$, nazveme množinou indexů I_{ij} .

Definice 9 (Stupeň preference s_{ij} , matice stupňů preference $\mathbf{S}$). Stupeň preference varianty a_i před variantou a_j definujeme jako $s_{ij} = \sum_{h \in I_{ij}} v_h$, kde v_h jsou váhy příslušných kritérií. Matice stupňů preference se značí $\mathbf{S} = (s_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, p$, přičemž $s_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Definice 10 (Největší stupeň preference c^0). Největší stupeň preference c^0 je definován jako $c^0 = \max(s_{ij}; a_i, a_j \in A)$. Jedná se tedy o hodnotu maximálního prvku v matici $\mathbf{S}$.

Definice 11 (První práh preference c^1). První práh preference c^1 je definován jako $c^1 = \max(s_{ij}; a_i, a_j \in A, s_{ij} < c^0)$. Jedná se tedy o druhou nejvyšší hodnotu prvku v matici $\mathbf{S}$.

Definice 12 (Ukazatel d_i^s). Ukazatel d_i^s je definován jako $d_i^s = p_i^s - q_i^s$, kde p_i^s označuje počet variant, pro které platí, že $s_{ij} > c^s$ a q_i^s označuje počet variant, pro které platí $s_{ji} > c^s$, přičemž s značí číslo (index) kroku výpočtu.

Algoritmus metody ELECTRE III lze popsat následovně.

- (i) Stanovení matice stupňů preference $\mathbf{S}$ (definice 9) na základě indexních množin (definice 8).
- (ii) Určení největšího stupně preference c^0 (definice 10), prvního prahu preference c^1 (definice 11) a stanovení hodnot ukazatelů $d_i^1, i = 1, 2, \dots, p$ podle definice 12.
- (iii) Stanovení podmnožiny variant $A^1 = \{a_i; \max_i d_i^1\}$.
- (iv) Je-li množina A^1 jednoprvková, pak tvoří první indifferenční třídu. Tato varianta je oddělena od původního souboru variant a postup se opakuje od stanovení nové hodnoty c^0 (krok 2) pro zbývající množinu.
Obsahuje-li množina A^1 více než jeden prvek, je vhodné zjistit, zda je možné tyto prvky dále uspořádat. Určíme $c^2 = \max(s_{ij}; a_i, a_j \in A^1, s_{ij} < c^1)$ a dále analogicky hodnoty p_i^2, q_i^2 a d_i^2 . Opět je získána podmnožina $A^2 = \{a_i; \max_i d_i^2\}$. Tento postup se opakuje (např. do kroku r), dokud není množina A^r jednoprvková, nebo $c^r = 0$. V druhém případě je indifferenční třída víceprvková. Varianty indifferenční třídy jsou odděleny od původního souboru variant a postup se opakuje od stanovení hodnoty c^0 (krok 2).

Pro analýzu citlivosti kompromisní varianty na změnu váhového vektoru (v kapitolách 3, 4 a 5) bude užitečné definovat pojem indexní množiny stejného typu, symbol I_{max} a matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Definice 13 (Indexní množiny stejného typu). Řekneme, že indexní množiny I_{ij} a I_{lk} jsou stejného typu, jestliže platí, že $I_{ij} = I_{lk}$, tj. obsahují indexy stejných kritérií.

Definice 14 (Indexní množina typu I_{max}). Řekneme, že indexní množina je typu I_{max} , jestliže největší stupeň preference c^0 v prvním kroku je určen prvkem $s_{ij} = \sum_{h \in I_{max}} v_h$, tj. $c^0 = \max(s_{ij}; a_i, a_j \in A) = s_{ij} = \sum_{h \in I_{ij}} v_h = \sum_{h \in I_{max}} v_h$. I_{max} je indexní množina pro maximální prvek matice $\mathbf{S}$.

Definice 15 (Matice $\mathbf{A}$). Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $I_p \times k$, kde I_p je počet typů indexních množin v daném problému a k je počet kritérií. Sloupce matice $\mathbf{A}$ odpovídají jednotlivým kritériím a řádky matice odpovídají jednotlivým typům indexních množin. Prvky matice $\mathbf{A}$ nabývají hodnot

$$(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{Index kritéria } j \text{ náleží do } i\text{-tého typu indexní množiny;} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 16 (Matice $\mathbf{B}$). Nechť $\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b})^T$ je matice typu $(I_p - 1) \times k$, kde I_p je počet typů indexních množin v daném problému, k je počet kritérií a $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)^T$ je vektor řádu k , pro jehož složky platí

$$(b_j) = \begin{cases} 1 & j \in I_{max}; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2.2.2 Aplikace ELECTRE III

Výše uvedený postup metody ELECTRE III bude demonstrován na datech se čtyřmi uvažovanými kritérii, konkrétně se jedná o kritéria *Regionální HDP* (dále jen f_1), *Příjmy pro obec* (dále jen f_2), *Dopady na vzhled obce/krajiny* (dále jen f_3) a *Krátkodobá zaměstnanost* (dále jen f_4), s odpovídajícími vahami $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,34$ a $v_4 = 0,13$ (zaokrouhlené výchozí váhy dle [5]). Na tomto příkladu bude představena hlavní motivace analýzy citlivosti představené v kapitole 3.

Z výchozí množiny variant (příloha B) byly vyřazeny varianty a_5 , a_{10} , a_{16} a a_{21} , jelikož jsou při uvažování všech 17 kritérií dominované. V dalších analýzách bude tedy uvažována jen množina nedominovaných variant $A_N = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}\}$. Tabulka 1 zachycuje výchozí datový soubor, který obsahuje pouze nedominované varianty (podle daných čtyř kritérií). Analyzovaná množina variant je tedy $A = \{a_1, a_2, a_4, a_6, a_7, a_8, a_{13}, a_{17}\}$. Indexní množiny pro tento případ jsou v tabulce 2.

Tabulka 1: Výchozí datový soubor pro příklad aplikace ELECTRE III

Varianta	f_1	f_2	f_3	f_4
a_1	3	3	3	0
a_2	2	1	1	3
a_4	1	2	1	3
a_6	3	3	1	1
a_7	3	1	0	3
a_8	2	3	2	1
a_{13}	1	2	1	3
a_{17}	1	2	1	3

Tabulka 2: Indexní množiny pro případ čtyř kritérií

	a_1	a_2	a_4	a_6	a_7	a_8	a_{13}	a_{17}
a_1	-	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{3}	{2, 3}	{1, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}
a_2	{4}	-	{1}	{4}	{3}	{4}	{1}	{1}
a_4	{4}	{2}	-	{4}	{2, 3}	{4}	-	-
a_6	{4}	{1, 2}	{1, 2}	-	{2, 3}	{1}	{1, 2}	{1, 2}
a_7	{4}	{1}	{1}	{4}	-	{1, 4}	{1}	{1}
a_8	{4}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{3}	{2, 3}	-	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}
a_{13}	{4}	{2}	-	{4}	{2, 3}	{4}	-	-
a_{17}	{4}	{2}	-	{4}	{2, 3}	{4}	-	-

Např. prvek $I_{12} = \{1, 2, 3\}$ obsahuje indexy kritérií, podle kterých je a_1 lépe ohodnocená, než a_2 . Pomlčky v tabulce 2 představují prázdné množiny. Pro nalezení indexních množin byla vytvořena vlastní funkce v softwaru R. Výpis programového kódu je v příloze O.

Z indexních množin v tabulce 2 je snadno vidět, že matice stupňů preference má podobu

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0,87 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0,47 & 0,87 & 0,87 \\ 0,13 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0,34 & 0,13 & 0,13 & 0,13 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,13 & 0,53 & 0,53 & 0 & 0,74 & 0,13 & 0,53 & 0,53 \\ 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,26 & 0,13 & 0,13 \\ 0,13 & 0,74 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0 & 0,87 & 0,87 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V matici $\mathbf{S}$ je např. prvek $s_{12} = \sum_{h \in I_{12}} v_h = v_1 + v_2 + v_3 = 0,87$. Největší stupeň preference v matici $\mathbf{S}$ je $c^0 = 0,87$ a první stupeň preference je $c^1 = 0,74$. Dle vztahů uvedených v kapitole 2.2.1 vypočteme ukazatele p_i^1 , q_i^1 a d_i^1 , které jsou uvedeny v tabulce 3. Z tabulky 3 je zřejmé, že $\max_i d_i^1 = 4$, a proto do podmnožiny A^1 spadá varianta a_1 . Další kroky jsou provedeny v příloze D.

Tabulka 3: Hodnoty p_i^1 , q_i^1 a d_i^1 (krok 1)

	a_1	a_2	a_4	a_6	a_7	a_8	a_{13}	a_{17}
p_i^1	4	0	0	0	0	3	0	0
q_i^1	0	1	2	0	0	0	2	2
d_i^1	4	-1	-2	0	0	3	-2	-2

Tabulka 4: Řešení ukázkového problému

Indiferenční třída	Varianta
1.	a_1
2.	a_8
3.	a_6
	a_4
4.	a_{13}
	a_{17}
5.	a_2
6.	a_7

V tabulce 4 je zachyceno celkové uspořádání jednotlivých variant do šesti indiferenčních tříd. V první indiferenční třídě se umístila varianta a_1 . Při pohledu na výchozí datový soubor (viz tabulku 1) je možné si všimnout, že tato varianta má nejlepší možné hodnoty podle prvních tří kritérií, ale podle čtvrtého kritéria má nejhorší možnou hodnotu. Pokud tyto skutečnosti porovnáme s indexními množinami v tomto problému (viz tabulku 2), zjistíme, že varianta a_1 převyšuje všechny ostatní varianty alespoň podle jednoho z prvních tří kritérií. Na druhou stranu vidíme, že všechny varianty převyšují variantu a_1 podle čtvrtého kritéria. Jak by se první indiferenční třída měnila, pokud by se zvýšila hodnota váhy čtvrtého kritéria? Za jakých podmínek se v první indiferenční třídě umístí varianta a_1 ? Tyto otázky se pokusíme zodpovědět v kapitolách 3, 4 a 5.

3 Analýza citlivosti

V rámci této kapitoly bude provedena analýza citlivosti kompromisní varianty získané metodou ELECTRE III na změnu váhového vektoru na základě rozboru indexních množin. Vzhledem k tomu, že tato práce se především zabývá analýzou citlivosti kompromisního řešení na změnu vah, analýza citlivosti bude zaměřena na první indifferenční třídu. V této části bude analýza citlivosti zaměřena pouze na nedominované varianty, neboť dominované varianty jako kompromisní řešení nemohou být zvoleny (definice 7). Analýza citlivosti zaměřená na problém zahrnující dominované varianty je provedena v kapitole 5.

Z výchozí množiny variant (příloha B) byly vyřazeny varianty a_5 , a_{10} , a_{16} a a_{21} , jelikož jsou při uvažování všech 17 kritérií dominované. V dalších analýzách bude tedy uvažována jen množina nedominovaných variant $A_N = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}\}$. Uvažovaný váhový vektor je založen na návrhu v [5], tedy $\mathbf{v} = (0,029; 0,086; 0,086; 0,071; 0,05; 0,05; 0,029; 0,086; 0,071; 0,029; 0,071; 0,05; 0,05; 0,071; 0,071; 0,071; 0,05; 0,05)$.

Pro analýzu citlivosti pro dvě, tři i čtyři kritéria (počet uvažovaných kritérií označme k) budou uvažovány dva základní předpoklady:

$$v_j > 0, j = 1, \dots, k, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^k v_j = 1. \quad (2)$$

Dále předpokládáme, že se v průběhu citlivostní analýzy nemění datový soubor, a tedy ani indexní množiny v daném problému.

Pro analýzu byl využit doplněk MS Excel SANNA 2014, jehož autorem je prof. Ing. Josef Jablonský, CSc. Více informací na [17].

3.1 Dvě kritéria

V rámci analýzy citlivosti pro dvě kritéria při vypuštění dominovaných variant byla vybrána kritéria *Krátkodobá zaměstnanost* (dále jen f_1) a *Dopady na vzhled obce/krajiny* (dále jen f_2) s odpovídajícími vahami v_1 a v_2 .

Z výchozího datového souboru zobrazeném v tabulce 5 byly vypuštěny dominované varianty. Analyzovaná množina variant obsahuje varianty $A_N = \{a_1, a_2, a_4, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{17}\}$. Indexní množiny pro daný problém jsou znázorněny v tabulce 6.

Problém bude vyřešen s vahami

$$(i) \quad v_1 = \frac{2}{7} \doteq 0,286 \text{ a } v_2 = \frac{5}{7} \doteq 0,714 \text{ (zaokrouhlené váhy dle [5])}, \text{ získané řešení označme } R_1^{(1)};$$

- (ii) $v_1 = 0,4$ a $v_2 = 0,6$, získané řešení označme $R_2^{(1)}$;
 (iii) $v_1 = 0,7$ a $v_2 = 0,3$, získané řešení označme $R_3^{(1)}$.

Pro změny vah zřejmě platí, že pokud se v_1 změní o konstantu $+t$, pak se v_2 musí změnit o $-t$. Kompletní podoba všech tří řešení $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$ a $R_3^{(1)}$ je v tabulce 7. Jak můžeme vidět, řešení $R_1^{(1)}$ a $R_2^{(1)}$ jsou zcela totožná, přičemž v první indifferenční třídě se umístily varianty a_1 a a_9 . Ukazuje se, že umístění variant a_1 a a_9 je poměrně stabilní a malá změna vah řešení neovlivní. V případě významnější změny vah, jako např. v (iii), se již řešení změní. Např. v řešení $R_3^{(1)}$ se v první indifferenční třídě umístily varianty $a_2, a_4, a_{11}, a_{12}, a_{13}$ a a_{17} .

Tabulka 5: Výchozí datový soubor pro případ dvou uvažovaných kritérií

Varianta	f_1	f_2	Dominovaná / nedominovaná varianta
a_1	0	3	Nedominovaná
a_2	3	1	Nedominovaná
a_3	1	1	Dominovaná
a_4	3	1	Nedominovaná
a_6	1	1	Dominovaná
a_7	3	0	Dominovaná
a_8	1	2	Nedominovaná
a_9	0	3	Nedominovaná
a_{11}	3	1	Nedominovaná
a_{12}	3	1	Nedominovaná
a_{13}	3	1	Nedominovaná
a_{14}	1	1	Dominovaná
a_{15}	1	1	Dominovaná
a_{17}	3	1	Nedominovaná
a_{18}	0	1	Dominovaná
a_{19}	0	1	Dominovaná
a_{20}	2	0	Dominovaná

Tabulka 6: Indexní množiny pro případ dvou kritérií při nezahrnutí dominovaných variant

	a_1	a_2	a_4	a_8	a_9	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{17}
a_1	-	{2}	{2}	{2}	-	{2}	{2}	{2}	{2}
a_2	{1}	-	-	{1}	{1}	-	-	-	-
a_4	{1}	-	-	{1}	{1}	-	-	-	-
a_8	{1}	{2}	{2}	-	{1}	{2}	{2}	{2}	{2}
a_9	-	{2}	{2}	{2}	-	{2}	{2}	{2}	{2}
a_{11}	{1}	-	-	{1}	{1}	-	-	-	-
a_{12}	{1}	-	-	{1}	{1}	-	-	-	-
a_{13}	{1}	-	-	{1}	{1}	-	-	-	-
a_{17}	{1}	-	-	{1}	{1}	-	-	-	-

Můžeme si všimnout, že v řešeném problému existují jen jednoprvkové indexní množiny (tabulka 6). V problému se dvěma kritérii by mohla vzniknout dvouprvková indexní

množina pouze v případě, kdyby určitá varianta byla hůře ohodnocena podle obou kritérií, než jiná varianta (tj. byla by dominovanou variantou). Tímto případem se zabývá kapitola 5, v této kapitole uvažujeme pouze nedominované varianty.

Tabulka 7: Řešení problému s dvěma kritérii při vypuštění dominovaných variant při různých hodnotách vah v_1 a v_2

Řešení $R_1^{(1)}$		Řešení $R_2^{(1)}$		Řešení $R_3^{(1)}$	
$v_1 \doteq 0,286, v_2 \doteq 0,714$		$v_1 = 0,4, v_2 = 0,6$		$v_1 = 0,7, v_2 = 0,3$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_1	1.	a_1	1.	a_2
	a_9		a_9		a_4
2.	a_8	2.	a_8		a_{11}
	a_2		a_2		a_{12}
3.	a_4	3.	a_4		a_{13}
	a_{11}		a_{11}		a_{17}
	a_{12}		a_{12}	2.	a_8
	a_{13}		a_{13}		a_1
	a_{17}		a_{17}	3.	a_9

Můžeme vidět, že do určité hodnoty dané váhy se řešení nemění. Cílem této kapitoly je získat intervaly vah, v rámci kterých se získané řešení, resp. obsah první indifferenční třídy, nemění.

3.1.1 Numerická analýza citlivosti

Jedním ze způsobů, jak zajistit stejnou první indifferenční třídu po změně vah, je zaručení, aby I_{max} (definice 14) a tedy i hodnoty d_i^1 zůstaly neměnné. Matice stupňů preference pro problém s řešením $R_1^{(1)}$ je

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0,714 & 0,714 & 0,714 & 0 & 0,714 & 0,714 & 0,714 & 0,714 \\ 0,286 & 0 & 0 & 0,286 & 0,286 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,286 & 0 & 0 & 0,286 & 0,286 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,286 & 0,714 & 0,714 & 0 & 0,286 & 0,714 & 0,714 & 0,714 & 0,714 \\ 0 & 0,714 & 0,714 & 0,714 & 0 & 0,714 & 0,714 & 0,714 & 0,714 \\ 0,286 & 0 & 0 & 0,286 & 0,286 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,286 & 0 & 0 & 0,286 & 0,286 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,286 & 0 & 0 & 0,286 & 0,286 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,286 & 0 & 0 & 0,286 & 0,286 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference je roven $c^0 = 0,714$ a první práh preference je roven $c^1 = 0,286$. Největší stupeň preference c^0 je určen např. prvkem $s_{12} = v_2$ (viz indexní množiny v tabulce 6). Varianty a_1 a a_9 se umístí v první indifferenční třídě v případě, že se hodnoty ukazatele d_i^1 (tabulka 8) nezmění. Tento předpoklad bude splněn, pokud I_{max} zůstane typu $\{2\}$, tedy pokud $v_2 > v_1$.

Tabulka 8: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ dvou kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,286$ a $v_2 = 0,714$

	a_1	a_2	a_4	a_8	a_9	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{17}
p_i^1	7	0	0	6	7	0	0	0	0
q_i^1	0	3	3	2	0	3	3	3	3
d_i^1	7	-3	-3	4	7	-3	-3	-3	-3

V analyzovaném problému mohou nastat tři situace:

- (i) $v_1 > v_2$, potom $I_{max} = \{1\}$ a první indifferenční třída je tvořena variantami $a_2, a_4, a_{11}, a_{12}, a_{13}$ a a_{17} ;
- (ii) $v_2 > v_1$, potom $I_{max} = \{2\}$ a první indifferenční třídu tvoří varianty a_1 a a_9 ;
- (iii) $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$, potom je I_{max} typu $\{1\}$ i $\{2\}$, všechny varianty spadají do jedné indifferenční třídy.

Přehled kompletního řešení je v tabulce 9.

Tabulka 9: Řešení v případě analýzy dvou kritérií při zahrnutí dominovaných variant

$v_1 \in (0,5; 1), v_2 \in (0; 0,5)$		$v_1 \in (0; 0,5), v_2 \in (0,5; 1)$		$v_1 = v_2 = 0,5$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_2	1.	a_1	1.	a_1
	a_4		a_9		a_2
	a_{11}	2.	a_8		a_4
	a_{12}		a_2		a_8
	a_{13}	3.	a_4		a_9
	a_{17}		a_{11}		a_{11}
2.	a_8		a_{12}		a_{12}
3.	a_1		a_{13}		a_{13}
	a_9		a_{17}		a_{17}

3.1.2 Obecný případ

V obecném problému se dvěma kritérii při vypuštění dominovaných variant existují dva typy indexních množin, a to $\{1\}$ a $\{2\}$. Jedním ze způsobů, jak zajistit stejnou první indifferenční třídu v případě, že největší stupeň preference je určen např. vahou v_1 ($c^0 = v_1$), je zachovat vztah $v_1 > v_2$ a předpoklady (1), (2) (analogie platí pro v_2). V případě, že $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$ mezi variantami nelze určit více indifferenčních tříd než jednu.

3.2 Tři kritéria (fixace jedné váhy)

Pro analýzu citlivosti pro tři kritéria byla vybrána kritéria *Krátkodobá zaměstnanost* (dále jen f_1), *Dopady na vzhled obce/krajiny* (dále jen f_2) a *Regionální HDP* (dále jen f_3) s odpovídajícími vahami v_1, v_2 a v_3 .

Tato kapitola se zaměří na speciální případ modifikace vah, kdy hodnota váhy v_1 je pevně fixována na $v_1 = 0,2$ a váhy v_2 a v_3 jsou postupně měněny. Pro změny vah zřejmě platí, že pokud se v_2 změní o konstantu $+t$, pak se v_3 musí změnit o $-t$. Tento způsob modifikace odpovídá situaci, kdy si je rozhodovatel jistý vahou kritéria f_1 , ale není si jistý důležitostí kritérií f_2 a f_3 .

Tabulka 10: Výchozí datový soubor pro případ tří uvažovaných kritérií

Varianta	f_1	f_2	f_3	Dominovaná / nedominovaná varianta
a_1	0	3	3	Nedominovaná
a_2	3	1	2	Nedominovaná
a_3	1	1	0	Dominovaná
a_4	3	1	1	Dominovaná
a_6	1	1	3	Nedominovaná
a_7	3	0	3	Nedominovaná
a_8	1	2	2	Nedominovaná
a_9	0	3	0	Dominovaná
a_{11}	3	1	0	Dominovaná
a_{12}	3	1	0	Dominovaná
a_{13}	3	1	1	Dominovaná
a_{14}	1	1	1	Dominovaná
a_{15}	1	1	1	Dominovaná
a_{17}	3	1	1	Dominovaná
a_{18}	0	1	1	Dominovaná
a_{19}	0	1	1	Dominovaná
a_{20}	2	0	1	Dominovaná

Z výchozího datového souboru v tabulce 10 byly vypuštěny dominované varianty. Uvažovaný soubor variant je tedy $A_n = \{a_1, a_2, a_6, a_7, a_8\}$. Indexní množiny pro daný problém jsou znázorněny v tabulce 11.

Tabulka 11: Indexní množiny pro případ tří kritérií při nezahrnutí dominovaných variant

	a_1	a_2	a_6	a_7	a_8
a_1	-	$\{2, 3\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2, 3\}$
a_2	$\{1\}$	-	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
a_6	$\{1\}$	$\{3\}$	-	$\{2\}$	$\{3\}$
a_7	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1\}$	-	$\{1, 3\}$
a_8	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	-

Problém bude vyřešen s vahami

- (i) $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,6$ a $v_3 = 0,2$ (zaokrouhlené výchozí váhy dle [5]), získané řešení označme $R_1^{(2)}$;
- (ii) $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,5$ a $v_3 = 0,3$, získané řešení označme $R_2^{(2)}$;
- (iii) $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,1$ a $v_3 = 0,7$, získané řešení označme $R_3^{(2)}$.

Řešení všech tří variant problému zobrazuje tabulka 12. Můžeme vidět, že v řešení $R_1^{(2)}$ i $R_2^{(2)}$ se v první indifferenční třídě umístila varianta a_1 . Naopak řešení $R_3^{(2)}$ je zcela odlišné od předešlých dvou řešení. V první indifferenční třídě se umístila varianta a_7 . Je tedy evidentní, že když se v_2 změní o $-0,1$ (a v_3 o $+0,1$), řešení v první indifferenční třídě se nezmění. Pokud je ale změna významnější, např. v_2 o $-0,5$ a v_3 o $+0,5$, pak se již první indifferenční třída změní. Cílem této kapitoly je stanovit intervaly vah, v rámci kterých se získané řešení nemění.

Tabulka 12: Řešení problému se třemi kritérii při vypuštění dominovaných variant při $v_1 = 0,2$ a různých hodnotách vah v_2 a v_3

Řešení $R_1^{(2)}$		Řešení $R_2^{(2)}$		Řešení $R_3^{(2)}$	
$v_1 = 0,2, v_2 = 0,6, v_3 = 0,2$		$v_1 = 0,2, v_2 = 0,5, v_3 = 0,3$		$v_1 = 0,2, v_2 = 0,1, v_3 = 0,7$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_1	1.	a_1	1.	a_7
2.	a_8	2.	a_8	2.	a_1
3.	a_6	3.	a_6	3.	a_6
	a_2	4.	a_2	4.	a_2
4.	a_7		a_7	5.	a_8

3.2.1 Numerická analýza citlivosti

Citlivost kompromisní varianty a_1 . Jedním ze způsobů, jak zajistit stejnou první indifferenční třídu po změně vah, je zaručení neměnných hodnot ukazatele d_i^1 , potažmo zachování stejného typu I_{max} . Matice stupňů preference pro problém s řešením $R_1^{(2)}$ je

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,6 & 0,6 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference je roven $c^0 = 0,8$ a první práh preference je roven $c^1 = 0,6$. Největší stupeň preference c^0 je určen prvkem $s_{12} = 0,8$, příp. $s_{15} = 0,8$, pro které platí, že $s_{12} = s_{15} = v_2 + v_3$ (viz indexní množiny zobrazené v tabulce 11).

Na základě hodnot d_i^1 (zobrazeny v tabulce 13) je zřetelné, že první indifferenční třídu tvoří varianta a_1 . Pokud zůstanou neměnné hodnoty ukazatelů d_i^1 , pak po modifikaci vah tvoří první indifferenční třídu opět varianta a_1 . Tento předpoklad je možné zajistit tak, že největší stupeň preference c^0 bude určen stejnými prvky matice stupňů preference S , tedy prvky $s_{12} = v_2 + v_3$, příp. $s_{15} = v_2 + v_3$ (příčemž konkrétní hodnota se může lišit). Předpoklad je možno formulovat jako

$$v_2 + v_3 > \max(v_1, v_2, v_3, v_1 + v_3), \quad (3)$$

tj. součet vah s indexy určenými indexní množinou typu $\{2, 3\}$ musí být větší, než součty vah určené ostatními typy indexních množin v daném problému, tedy $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ a $\{1, 3\}$.

Tabulka 13: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,6$ a $v_3 = 0,2$

	a_1	a_2	a_6	a_7	a_8
p_i^1	2	0	0	0	0
q_i^1	0	1	0	0	1
d_i^1	2	-1	0	0	-1

Aby byl splněn vztah (3) a základní předpoklady této analýzy citlivosti, je třeba, aby platily podmínky (i) až (v).

- (i) $v_1 = 0,2$
- (ii) $v_2 + v_3 > v_1$

Z podmínky (i) a z předpokladu (2) plyne, že $v_2 + v_3 = 0,8$. Podmínku (ii) tedy můžeme psát jako $0,8 > 0,2$. Tato podmínka je tedy splněna vždy.

- (iii) $v_2 + v_3 > v_2$

Nerovnost je možné přepsat jako $v_3 > 0$ a při platnosti předpokladu (1) platí vždy.

- (iv) $v_2 + v_3 > v_3$

Nerovnost je možné přepsat jako $v_2 > 0$ a při platnosti předpokladu (1) platí vždy.

- (v) $v_2 + v_3 > v_1 + v_3$

Víme, že z podmínky (i) a z předpokladu (2) plyne, že $v_2 + v_3 = 0,8$. Dále z podmínky (i) můžeme psát $0,8 > 0,2 + v_3$, tj. $v_3 < 0,6$. Také můžeme psát $v_2 > v_1$ a z (i) tedy $v_2 > 0,2$.

Jestliže budou platit základní předpoklady modelu (tedy podmínka (i) a předpoklady (1), (2)) a $v_3 < 0,6$, pak první indifferenční třída zůstává tvořena variantou a_1 .

Citlivost kompromisní varianty a_7 . V problému, jehož řešení bylo označeno $R_3^{(2)}$ jsme uvažovali váhy $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,1$ a $v_3 = 0,7$. Hodnota třetí váhy je tedy $v_3 > 0,6$ a v první indifferenční třídě se tedy neumístila varianta a_1 , ale varianta a_7 . Odvození podmínek, za kterých se v první indifferenční třídě umístí varianta a_7 je analogické s předešlým případem.

Matice stupňů preference je

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,7 & 0 & 0,1 & 0,7 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 & 0 & 0,9 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference je roven $c^0 = 0,9$ a první práh preference je roven $c^1 = 0,8$. Největší stupeň preference c^0 je určen prvkem $s_{45} = 0,9$, pro který platí, že $s_{45} = v_1 + v_3$ (viz indexní množiny zobrazené v tabulce 11).

Tabulka 14: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,1$ a $v_3 = 0,7$

	a_1	a_2	a_6	a_7	a_8
p_i^1	0	0	0	1	0
q_i^1	0	0	0	0	1
d_i^1	0	0	0	1	-1

Z tabulky 14 je zřejmé, že první indifferenční třída je tvořena variantou a_7 . Pokud zůstanou neměnné hodnoty ukazatelů d_i^1 , pak zůstává první indifferenční třída neměnná. Musí tedy platit vztah

$$v_1 + v_3 > \max(v_1, v_2, v_3, v_2 + v_3). \quad (4)$$

Aby byl splněn vztah (4) a základní předpoklady této analýzy citlivosti, je třeba, aby platily následující podmínky (i) až (v).

- (i) $v_1 = 0,2$
- (ii) $v_1 + v_3 > v_1$

Z podmínky (i) musí být $v_1 = 0,2$. Můžeme psát $v_3 > 0$ a při platnosti předpokladu (1) platí vždy.

- (iii) $v_1 + v_3 > v_2$

Z podmínky (i) a z předpokladu (2) musí platit, že $v_3 = 1 - v_1 - v_2 = 0,8 - v_2$. Můžeme psát $1 > 2 \cdot v_2$, tedy $v_2 < \frac{1}{2}$.

- (iv) $v_1 + v_3 > v_3$

Nerovnost je možné přepsat jako $v_1 > 0$, vzhledem k tomu, že $v_1 = 0,2$ je tato podmínka splněna vždy za platnosti (i).

- (v) $v_1 + v_3 > v_2 + v_3$

Víme, že z podmínky (i) a z předpokladu (2) plyne, že $v_2 + v_3 = 0,8$. Můžeme psát $0,2 + v_3 > 0,8$, tj. $v_3 > 0,6$.

První indifferenční třída je tvořena variantou a_7 v případě, že platí základní předpoklady modelu (podmínka (i) a předpoklady (1), (2)) a platí, že $v_3 > 0,6$ a $v_2 < \frac{1}{2}$. Vzhledem k tomu, že musí platit, že $v_3 > 0,6$, pak nemůže nastat případ $v_2 > \frac{1}{2}$, neboť by součet vah byl větší než jedna. Stačí se tedy omezit na podmínku $v_3 > 0,6$.

Citlivost kompromisní varianty v krajním případě. Numerickou analýzou citlivosti bylo zjištěno, že pokud je $v_3 < 0,6$, pak první indifferenční třídu tvoří varianta a_1 a pokud je $v_3 > 0,6$, pak první indifferenční třídu tvoří varianta a_7 . Dalším krokem je odvození chování

v krajním případě, kdy $v_3 = 0,6$. Pokud je $v_1 = 0,2$ a $v_3 = 0,6$, pak $v_2 = 0,2$. V tomto případě je matice stupňů preference

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference c^0 je zřejmě $c^0 = 0,8$ a první práh preference $c^1 = 0,6$. Největší stupeň preference c^0 je určen prvky s_{12} , případně s_{15} a s_{45} , pro které platí, že $s_{12} = s_{15} = v_2 + v_3$ a $s_{45} = v_1 + v_3$. Vzhledem k tomu, že i pro tento případ má varianta a_1 maximální hodnotu ukazatele d_i^1 (viz tabulku 15), umístí se varianta a_1 v první indifferenční třídě i v krajním případě, kdy $v_3 = 0,6$.

Tabulka 15: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,2$ a $v_3 = 0,6$

	a_1	a_2	a_6	a_7	a_8
p_i^1	2	0	0	1	0
q_i^1	0	1	0	0	2
d_i^1	2	-1	0	1	-2

Jiné varianty první indifferenční třídy tvořit nemohou, jelikož indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$ a $\{3\}$ nikdy nemohou určovat maximální prvek matice stupňů preference $\mathbf{S}$, neboť zjevně nikdy nemohou nastat situace:

$$v_1 > \max(v_2, v_3, v_1 + v_3, v_2 + v_3), \quad (5)$$

neboť $v_1 \leq v_1 + v_3$, přičemž rovnost za platnosti předpokladu (1) nemůže za žádných okolností platit;

$$v_2 > \max(v_1, v_3, v_1 + v_3, v_2 + v_3), \quad (6)$$

neboť $v_2 \leq v_2 + v_3$, přičemž rovnost za platnosti předpokladu (1) nemůže za žádných okolností platit;

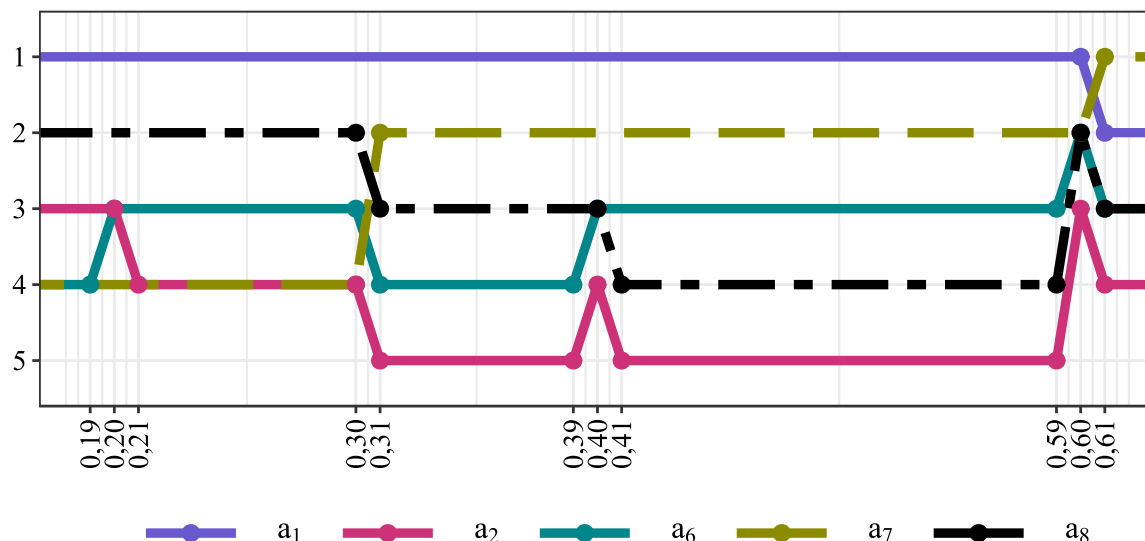
$$v_3 > \max(v_1, v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3), \quad (7)$$

neboť $v_3 \leq v_1 + v_3$ a $v_3 \leq v_2 + v_3$, přičemž rovnosti za platnosti předpokladu (1) nemůžou za žádných okolností platit.

Chování všech indifferenčních tříd v závislosti na velikosti váhy v_3 (hodnota $v_1 = 0,2$ je fixována a pro váhu v_2 platí, že $v_2 = 1 - v_1 - v_3$) znázorňuje graf 1 a kompletní řešení problému je v příloze E. Pro přehlednost je nejnížší možná změna váhy v_3 , kterou graf 1 bere

v úvahu, 0,01. Z tohoto důvodu jsou změny v indiferenčních třídách znázorněny jako úhlopříčky, uvažováno je ale samozřejmě jen pět indiferenčních tříd.

Z grafu je jasně zřetelné, že varianta a_1 obsazuje první, nebo druhou indiferenční třídu, přičemž do druhé indiferenční třídy spadá pouze v případě, když $v_3 > 0,6$. Dále například pozorujeme, že varianta a_7 obsazuje až do $v_3 = 0,3$ čtvrtou indiferenční třídu, ale při zvyšující se důležitosti kritéria f_3 obsazuje místo v prvních dvou indiferenčních třídách.



Graf 1: Znárodnění podoby indiferenčních tříd (vertikální osa) v závislosti na hodnotě váhy v_3 (horizontální osa). Graf zachycuje podobu indiferenčních tříd pro $v_3 \in [0,19; 0,61]$. V krajních případech, které tento graf nezachycuje, je podoba indiferenčních tříd shodná s body $v_3 = 0,19$ a $v_3 = 0,61$.

3.2.2 Obecný případ

V předešlých úvahách v analýze citlivosti pro tři kritéria byla uvažována speciální situace, kdy $v_1 = 0,2$ a existovaly pouze některé typy indexních množin. V následující části budou odvozeny podmínky, za kterých je zachována první indiferenční třída v případě, že $v_1 = c$, kde $c \in (0, 1)$.

Rozlišeny budou tři případy:

- v daném problému existují jen jednoprvkové indexní množiny, tedy existují pouze indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$ a $\{3\}$;
- v daném problému existují všechny typy indexních množin, tedy existují indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ a $\{2, 3\}$, nebo existují jen dvouprvkové indexní množiny $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ a $\{2, 3\}$;
- jiné, tedy kombinace některých jednoprvkových a dvouprvkových množin.

Zároveň předpokládáme, že se v průběhu citlivostní analýzy nemění datový soubor, a tedy ani indexní množiny v daném problému.

Případ (i). Pokud v daném problému neexistují dvouprvkové indexní množiny a existují jen jednoprvkové indexní množiny a v původním problému je $c^0 = v_1$, pak podoba první indifferenční třídy zůstává neměnná v případě, že platí vztah $v_1 > \max(v_2, v_3)$. Analogie by platila v případě, kdy by $c^0 = v_2$ nebo $c^0 = v_3$.

Případ (ii). Jsou-li v daném problému všechny typy indifferenčních tříd, pak je největší stupeň preference c^0 určen maximálním součtem dvou vah.

Jestliže je tedy $v_i + v_j, i, j = 1, 2, 3$ největším součtem a při změně vah v_1, v_2 a v_3 je stále $v_i + v_j$ největší, pak se první indifferenční třída nemění.

Pokud je např. v původním problému největší stupeň preference c^0 určen součtem vah $v_1 + v_2$, pak zachování stejné první indifferenční třídy je možné zajistit neměnnými hodnotami ukazatele d_i^1 , tj. musí platit, že $v_1 + v_2 > \max(v_1, v_2, v_3, v_1 + v_3, v_2 + v_3)$. Tento požadavek je zajištěn splněním základních předpokladů (1), (2) a podmínek (ii.i) až (ii.v).

$$(ii.i) \quad v_1 + v_2 > v_1$$

Je možné psát, že $v_2 > 0$ a při platnosti předpokladu (1) platí vždy.

$$(ii.ii) \quad v_1 + v_2 > v_2$$

Můžeme psát $v_1 > 0$. Vzhledem k tomu, že $v_1 = c$, se tato podmínka shoduje s předpokladem, že $c \in (0, 1)$.

$$(ii.iii) \quad v_1 + v_2 > v_3$$

Z předpokladu, že $v_1 = c$ a z předpokladu (2) je $v_2 = 1 - c - v_3$. Můžeme psát $c + 1 - c - v_3 > v_3$, tj. $v_3 < \frac{1}{2}$.

$$(ii.iv) \quad v_1 + v_2 > v_1 + v_3$$

Z předpokladu, že $v_1 = c$ a z předpokladu (2) je $v_2 = 1 - c - v_3$. Můžeme psát $c + 1 - c - v_3 > c + v_3$, tj. $v_3 < \frac{1-c}{2}$ nebo také $v_3 < v_2$.

$$(ii.v) \quad v_1 + v_2 > v_2 + v_3$$

Z předpokladu, že $v_1 = c$ a z předpokladu (2) je $v_2 = 1 - c - v_3$. Můžeme psát $c + 1 - c - v_3 > 1 - c - v_3 + v_3$, tj. $c > v_3 \Leftrightarrow v_1 > v_3$.

Podmínky (ii.iii) až (ii.v) je možné sumarizovat jako $v_3 < \min\left(c, \frac{1-c}{2}\right)$.

V případě, že $v_3 = \min\left(c, \frac{1-c}{2}\right) = c$ musí platit, že $c < \frac{1-c}{2}$, tj. $c < \frac{1}{3}$. Pro v_1, v_2 zjevně platí $v_1 = c$ a $v_2 = 1 - 2c$. Za těchto okolností je první indifferenční třída určena nejen součtem vah $v_1 + v_2$, ale i $v_2 + v_3$ (odvození je založeno na konstrukci podmínek obdobných podmínkám výše).

V případě, že $v_3 = \min\left(c, \frac{1-c}{2}\right) = \frac{1-c}{2}$ musí platit, že $\frac{1-c}{2} < c$, tj. $c > \frac{1}{3}$. Stejně jako v předešlém případě je možné odvodit, že v tomto případě je první indifferenční třída určena nejen součtem vah $v_1 + v_2$, ale i $v_1 + v_3$.

Pokud platí, že $c = \frac{1-c}{2}$, pak $c = \frac{1}{3}$. V tomto případě je tedy $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{3}$ a první indifferenční třída je určena všemi součty vah, tedy $v_1 + v_2$, $v_1 + v_3$ i $v_2 + v_3$.

Analogicky by bylo možné odvodit podmínky pro zachování symetrického vztahu (v_1 je opět fixována a v_3 není)

$$v_1 + v_3 > \max(v_1, v_2, v_3, v_1 + v_2, v_2 + v_3).$$

Vzhledem k asymetrii (v_2 i v_3 nejsou fixované váhy) dojdeme při zkoumání podmínek pro zachování vztahu

$$v_2 + v_3 > \max(v_1, v_2, v_3, v_1 + v_2, v_1 + v_3)$$

k jiným výsledkům, a sice $v_1 = c < \frac{1}{2}$, $v_2 > c$ a $v_3 > c$.

Největší stupeň preference c^0 nemůže být určen hodnotou jedné váhy $v_i, i = 1, 2, 3$, neboť zřejmě nemůže nastat situace, kdy $v_i > \max(v_j, v_l, v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3), i, j, l = 1, 2, 3, i \neq j, i \neq l$.

Případ (iii). Ze speciálních případů, kdy se v daném problému vyskytují jen určité typy indexních množin jsou zejména zajímavé situace, kdy jsou v problému přítomny všechny (nebo jen některé) typy jednoprvkových indexních množin a jen jedna dvouprvková indexní množina.

Pokud se v uvažovaném problému vyskytují indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ a $\{2, 3\}$, pak největší stupeň preference c^0 v prvním kroku může být určen buď indexní množinou $\{1\}$ nebo $\{2, 3\}$, neboť vždy platí $v_2 < v_2 + v_3$ a $v_3 < v_2 + v_3$.

$$(iii.i) \quad c^0 = v_1 = c \text{ a tedy musí platit } v_2 + v_3 < c, \text{ tj. } 1 - c < c, \text{ z čehož plyne, že } c > \frac{1}{2}.$$

V případě, že $c > \frac{1}{2}$, je první indifferenční třída určena konstantou c a není ovlivněna změnou vah v_2 a v_3 , neboť předpokládáme, že hodnota váhy v_1 je zafixována na konstantě c .

$$(iii.ii) \quad c^0 = v_2 + v_3 \text{ a tedy musí platit } v_2 + v_3 > c, \text{ tj. } 1 - c > c, \text{ z čehož plyne, že } c < \frac{1}{2}.$$

Stejně jako v předchozím případě zde není první indifferenční třída ovlivněna změnou vah v_2 a v_3 , jelikož první indifferenční třída je určena jejich součtem $v_2 + v_3 = 1 - c$, který přímo závisí na pevně fixované konstantě $c < \frac{1}{2}$. V krajním případě, kdy $c = \frac{1}{2}$, je c^0 určen oběma typy indexních množin.

Pokud se v uvažovaném problému vyskytují indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ a $\{1, 3\}$, pak největší stupeň preference c^0 v prvním kroku může být určen buď indexní množinou $\{2\}$ nebo $\{1, 3\}$.

- (iii.i) $c^0 = v_2$ a tedy musí platit $v_2 > v_1 + v_3$, tj. $v_2 > c + (1 - c - v_2)$, z čehož plyne, že $v_2 > \frac{1}{2}$.
- (iii.ii) $c^0 = v_1 + v_3$ a tedy musí platit $v_1 + v_3 > v_2$ tj. $c + (1 - c - v_2) > v_2$, z čehož plyne, že $v_2 < \frac{1}{2}$.

Největší stupeň preference je tedy určen indexní množinou $\{2\}$ v případě, že $v_2 > \frac{1}{2}$ a indexní množinou $\{1, 3\}$ v případě, že $v_2 < \frac{1}{2}$. V krajním případě, kdy $v_2 = \frac{1}{2}$ je c^0 určen oběma typy indexních množin. Analogie by platila pro problémy s indexními množinami typu $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ a $\{1, 2\}$.

3.3 Tři kritéria (změny v jedné váze a rovnoměrné rozdělení zbývajících rozdílů)

Pro analýzu citlivosti pro tři kritéria byla vybrána stejná kritéria jako v kapitole 3.2, tedy *Krátkodobá zaměstnanost* (dále jen f_1), *Dopady na vzhled obce/krajiny* (dále jen f_2) a *Regionální HDP* (dále jen f_3) s odpovídajícími vahami v_1 , v_2 a v_3 .

Tato kapitola se zaměří na speciální případ modifikace vah, kdy hodnota váhy v_1 je postupně modifikována a zbývajících rozdíl $1 - v_1$ je rovnoměrně rozdělen mezi váhy v_2 a v_3 , tj. platí, že $v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$. Pro změny vah zřejmě platí, že pokud se v_1 změní o konstantu $+t$, pak se v_2 i v_3 musí změnit o $-\frac{t}{2}$. Z výchozího datového souboru v tabulce 10 (str. 24) byly vypuštěny dominované varianty, uvažovaný soubor variant je tedy $A_n = \{a_1, a_2, a_6, a_7, a_8\}$. Indexní množiny pro daný problém jsou znázorněny v tabulce 11 (str. 24).

Problém bude nejprve řešen s vahami

- (i) $v_1 = 0,2, v_2 = v_3 = 0,4$, získané řešení označme $R_1^{(3)}$;
- (ii) $v_1 = 0,1, v_2 = v_3 = 0,45$, získané řešení označme $R_2^{(3)}$;
- (iii) $v_1 = 0,4, v_2 = v_3 = 0,3$, získané řešení označme $R_3^{(3)}$.

Řešení všech tří variant problému zobrazuje tabulka 16. Můžeme vidět, že řešení $R_1^{(3)}$ a $R_2^{(3)}$ jsou totožná, přičemž v první indifferenční třídě se umístila varianta a_1 . Naopak řešení $R_3^{(3)}$ je zcela odlišné od předešlých dvou řešení, v první indifferenční třídě se umístila varianta a_7 . Cílem této kapitoly je stanovit intervaly vah, v rámci kterých se získané řešení nemění.

Tabulka 16: Řešení problému se třemi kritérii při vypuštění dominovaných variant při různých hodnotách váhy v_1 a rovnoměrném rozdělení zbývajících rozdílů mezi v_2 a v_3 , tj. $v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$

Řešení $R_1^{(3)}$		Řešení $R_2^{(3)}$		Řešení $R_3^{(3)}$	
$v_1 = 0,2, v_2 = v_3 = 0,4$		$v_1 = 0,1, v_2 = v_3 = 0,45$		$v_1 = 0,4, v_2 = v_3 = 0,3$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_1	1.	a_1	1.	a_7
2.	a_7	2.	a_7	2.	a_1
3.	a_6	3.	a_6	3.	a_2
	a_8		a_8	4.	a_6
4.	a_2	4.	a_2		a_8

3.3.1 Numerická analýza citlivosti

Citlivost kompromisní varianty a_1 . První indifferenční třída zůstává neměnná v případě, že se nemění hodnoty ukazatele d_i^1 , potažmo pokud se nemění typ I_{max} . Matice stupňů preference pro problém s řešením $R_1^{(3)}$ je

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,4 & 0,4 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference je roven $c^0 = 0,8$ a první práh preference je roven $c^1 = 0,6$. Největší stupeň preference c^0 je určen prvkem $s_{12} = 0,8$, příp. $s_{15} = 0,8$, pro které platí, že $s_{12} = s_{15} = v_2 + v_3$ (viz indexní množiny zobrazené v tabulce 11).

Na základě hodnot d_i^1 (zobrazeny v tabulce 17) je zřejmé, že první indifferenční třídu tvoří varianta a_1 .

Tabulka 17: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,2, v_2 = v_3 = 0,4$

	a_1	a_2	a_6	a_7	a_8
p_i^1	2	0	0	0	0
q_i^1	0	1	0	0	1
d_i^1	2	-1	0	0	-1

První indifferenční třída zůstává neměnná, pokud jsou neměnné i hodnoty ukazatelů d_i^1 . Tento předpoklad je možné zajistit tak, že největší stupeň preference c^0 bude určen stejnými prvky matice stupňů preference S , tedy prvky $s_{12} = v_2 + v_3$, příp. $s_{15} = v_2 + v_3$, přičemž konkrétní hodnota se může lišit. Předpoklad je tedy opět možno formulovat jako (3) (viz str. 25), tj. součet vah s indexy určenými indexní množinou typu $\{2, 3\}$ musí být větší, než součty vah určené ostatními typy indexních množin v daném problému, tedy $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ a $\{1, 3\}$.

Aby byl splněn vztah (3) a základní předpoklady této analýzy citlivosti, musí platit podmínky (i) až (vi).

$$(i) \quad v_1 \in (0, 1)$$

$$(ii) \quad v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$$

$$(iii) \quad v_2 + v_3 > v_1$$

Z podmínky (ii) můžeme psát $2 \cdot \frac{1-v_1}{2} > v_1$, tj. $v_1 < \frac{1}{2}$.

$$(iv) \quad v_2 + v_3 > v_2$$

Tuto podmínku můžeme také vyjádřit jako $v_3 > 0$ a z podmínky (ii) můžeme psát $\frac{1-v_1}{2} > 0$, tj. $v_1 < 1$. Tato podmínka se tedy shoduje s podmínkou (i).

$$(v) \quad v_2 + v_3 > v_3$$

Tuto podmínku můžeme také vyjádřit jako $v_2 > 0$ a z podmínky (ii) můžeme psát $\frac{1-v_1}{2} > 0$, tj. $v_1 < 1$. Tato podmínka se tedy shoduje s podmínkou (i).

$$(vi) \quad v_2 + v_3 > v_1 + v_3$$

Z podmínky (ii) můžeme psát $2 \cdot \frac{1-v_1}{2} > v_1 + \frac{1-v_1}{2}$, tj. $v_1 < \frac{1}{3}$.

První indifferenční třída je tvořena variantou a_1 v případě, že platí podmínky (i), (ii), předpoklady (1), (2) a $v_1 < \frac{1}{3}$.

Citlivost kompromisní varianty a_7 . V problému, jehož řešení bylo označeno jako $R_3^{(3)}$ byly uvažovány váhy $v_1 = 0,4$ a $v_2 = v_3 = 0,3$. Neplatil zde tedy vztah $v_1 < \frac{1}{3}$ a v první indifferenční třídě se neumístila varianta a_1 , ale varianta a_7 . Matice stupňů preference pro tento případ je

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0,3 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,4 & 0 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference $c^0 = 0,7$ a první práh preference je $c^1 = 0,6$. Největší stupeň preference c^0 je určen prvkem $s_{45} = 0,7 = v_1 + v_3$ (viz indexní množiny zobrazené v tabulce 11 na str. 24).

Aby byla první indifferenční třída stále tvořena variantou a_7 , je třeba, aby platil vztah (4), tj. aby součet vah určených indexy v indexní množině typu $\{1, 3\}$ byl maximální ze součtů vah určených ostatními typy indexních množin. Aby platil vztah (4), musí platit podmínky (i) až (vi).

$$(i) \quad v_1 \in (0, 1)$$

$$(ii) \quad v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$$

$$(iii) \quad v_1 + v_3 > v_1$$

Tuto podmínku můžeme také vyjádřit jako $v_3 > 0$ a z podmínky (ii) můžeme psát $\frac{1-v_1}{2} > 0$, tj. $v_1 < 1$. Tato podmínka se tedy shoduje s předpokladem (i).

$$(iv) \quad v_1 + v_3 > v_2$$

Z podmínky (ii) můžeme psát $v_1 + \frac{1-v_1}{2} > \frac{1-v_1}{2}$, tj. $v_1 > 0$. Tato podmínka se tedy shoduje s předpokladem (i).

$$(v) \quad v_1 + v_3 > v_3$$

Tuto podmínku můžeme také vyjádřit jako $v_1 > 0$. Tato podmínka se tedy shoduje s předpokladem (i).

$$(vi) \quad v_1 + v_3 > v_2 + v_3$$

Tuto podmínku můžeme také vyjádřit jako $v_1 > v_2$ a z podmínky (ii) můžeme psát $v_1 > \frac{1-v_1}{2}$, tj. $v_1 > \frac{1}{3}$.

První indifferenční třída je tvořena variantou a_7 v případě, že platí podmínky (i), (ii), předpoklady (1), (2) a $v_1 > \frac{1}{3}$.

Citlivost kompromisní varianty v krajním případě. V krajním případě, kdy $v_1 = \frac{1}{3} = v_2 = v_3$ má matice stupňů preference podobu

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference $c^0 = \frac{2}{3}$ a první práh preference je $c^1 = \frac{1}{3}$. Největší stupeň preference c^0 je určen prvky $s_{12} = v_2 + v_3$, $s_{15} = v_2 + v_3$ a $s_{45} = v_1 + v_3$ (viz indexní množiny zobrazené v tabulce 11 na str. 24).

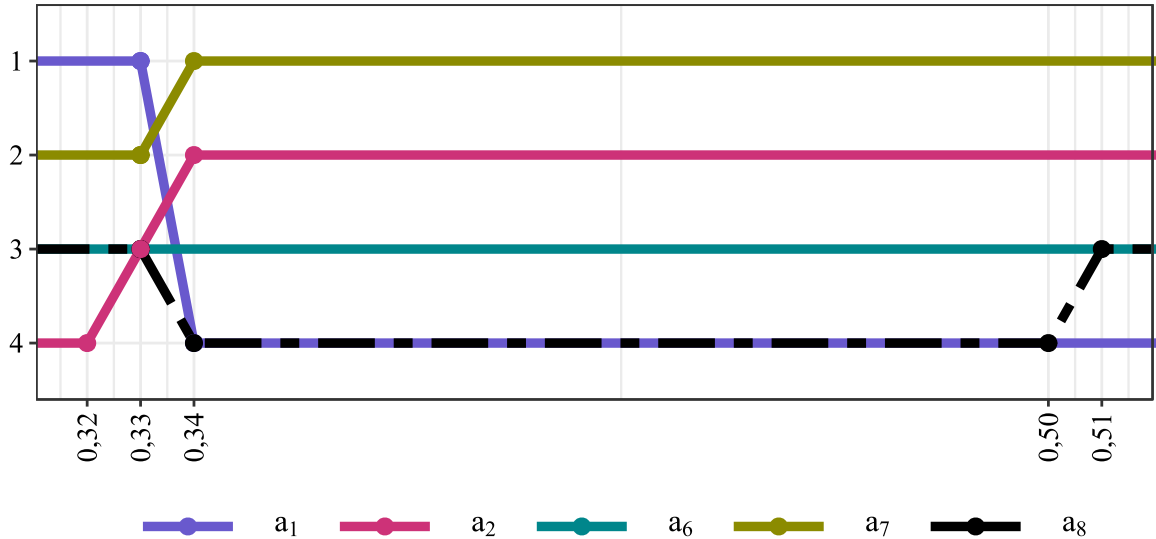
Tabulka 18: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ tří kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{3}$

	a_1	a_2	a_6	a_7	a_8
p_i^1	2	0	0	1	0
q_i^1	0	1	0	0	2
d_i^1	2	-1	0	1	-2

Vzhledem k tomu, že i pro tento případ má varianta a_1 maximální hodnotu ukazatele d_i^1 (viz tabulku 18), umístí se varianta a_1 v první indifferenční třídě i v krajním případě, kdy $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{3}$.

Jiné varianty první indifferenční třídu tvořit nemohou, jelikož indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$ a $\{3\}$ nikdy nemohou určovat maximální prvek matice stupňů preference $\mathbf{S}$, neboť zjevně nikdy nemohou nastat situace (5), (6) a (7), jak bylo ukázáno na str. 28.

Chování všech indifferenčních tříd v závislosti na velikosti v_1 ($v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$) znázorňuje graf 2 a kompletní řešení problému je v tabulce 19. Z důvodu přehlednosti je opět nejnižší možná změna váhy v_1 , kterou graf 2 bere v úvahu, 0,01. Můžeme sledovat, že varianta a_1 tvoří první indifferenční třídu v případě, že $v_1 \leq 0,33$. Pokud ale hodnota váhy v_1 dále stoupá, poklesne tato varianta až na poslední indifferenční třídu. Naopak například varianta a_7 obsazuje buď první, nebo druhou indifferenční třídu. Další zajímavostí je např. fakt, že varianta a_6 se vždy umístí ve třetí indifferenční třídě.



Graf 2: Znázornění podoby indifferenčních tříd (vertikální osa) v závislosti na hodnotě váhy v_1 (horizontální osa). Graf zachycuje podobu indifferenčních tříd pro $v_1 \in [0,32; 0,51]$. V krajních případech, které tento graf nezachycuje, je podoba indifferenčních tříd shodná s body $v_1 = 0,32$ a $v_1 = 0,52$.

Tabulka 19: Řešení v případě analýzy tří kritérií v případě změny ve váze v_1 a rovnoměrné rozdělení mezi zbývajících dvě, tj. $v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$ při nezahrnutí dominovaných variant

$v_1 \in (0; 0,3\bar{3})$		$v_1 = 0,3\bar{3}$		$v_1 \in (0,3\bar{3}; 0,5]$		$v_1 \in (0,5; 1)$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_1	1.	a_1	1.	a_7	1.	a_7
2.	a_7	2.	a_7	2.	a_2	2.	a_2
3.	a_6	3.	a_2	3.	a_6	3.	a_6
	a_8		a_6	4.	a_1		a_8
4.	a_2		a_8		a_8	4.	a_1

3.3.2 Obecný případ

V řešeném problému v kapitole 3.3.1 neexistovala indexní množina typu $\{1, 2\}$. V této části bude odvozena analýza citlivosti pro obecné případy, kdy

- (i) v daném problému existují jen jednoprvkové indexní množiny, tedy existují indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$ a $\{3\}$;
- (ii) v daném problému existují všechny typy indexních množin, tedy existují indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ a $\{2, 3\}$, nebo existují jen dvouprvkové indexní množiny $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ a $\{2, 3\}$;
- (iii) jiné, tedy kombinace některých jednoprvkových a dvouprvkových množin.

Zároveň předpokládáme, že se v průběhu citlivostní analýzy nemění datový soubor, a tedy ani indexní množiny v daném problému.

Případ (i). Pokud v daném problému neexistují dvouprvkové indexní množiny a existují jen jednoprvkové indexní množiny a jestliže je c^0 v prvním kroku ve výchozím řešení určen maximální vahou v_i ($c^0 = v_i > \max(v_j, v_l)$, $i, j, l = 1, 2, 3, i \neq j, i \neq l$), pak je první indifferenční skupina neměnná v případě, že největší stupeň preference $c^0 = v_i > \max(v_j, v_l)$, $i, j, l = 1, 2, 3, i \neq j, i \neq l$. Pokud platí, že $\max(v_1, v_2, v_3) = v_2 = v_3$, pak je první indifferenční skupina určena jak vahou v_2 , tak i v_3 .

Případ (ii). Pokud v daném problému existují všechny typy indexních množin, pak platí, že $v_1 + v_2 = v_1 + v_3$, neboť $v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$. Odvození kritických hodnot je tedy stejné, jako v praktické aplikaci v kapitole 3.3.1 s tím rozdílem, že závěr ohledně indexní množiny typu $\{1, 2\}$ bude spojený se závěrem ohledně indexní množiny typu $\{1, 3\}$, tj.

největší stupeň preference c^0 je určen součty $v_1 + v_2$ a $v_1 + v_3$ ($v_1 + v_2 = v_1 + v_3$) právě tehdy, když $v_1 > \frac{1}{3}$;

největší stupeň preference c^0 je určen součtem $v_2 + v_3$ právě tehdy, když $v_1 < \frac{1}{3}$;

největší stupeň preference c^0 je určen součty $v_1 + v_2$, $v_1 + v_3$ a $v_2 + v_3$ právě tehdy, když $v_1 = \frac{1}{3}$.

Případ (iii). V určitých případech je možné, že největší stupeň preference c^0 je určen hodnotou váhy v_1 . Největší stupeň preference c^0 je určen hodnotou váhy v_1 právě tehdy, když $v_1 > \frac{1}{2}$ a existuje pouze jedna dvouprvková indexní množina typu $\{2, 3\}$.

Největší stupeň preference c^0 může být určen hodnotou váhy v_2 nebo v_3 pouze v případě existence pouze jednoprvkových indexových množin, neboť není možné, aby nastal případ, kdy $v_i > \frac{1}{2}, i = 1, 2$, neboť $v_2 = v_3$ a musí platit předpoklad (2).

V krajním případě, kdy $v_1 = \frac{1}{3} = v_2 = v_3$ a v problému existují jen dvouprvkové, případně jen jednoprvkové indexní množiny, mezi variantami není možno rozlišit více než jednu indifferenční třídu.

3.4 Čtyři kritéria (fixace dvou vah)

Pro analýzu citlivosti kompromisní varianty na změnu vah pro případ čtyř kritérií byla zvolena kritéria *Regionální HDP* (dále jen f_1), *Příjmy pro obec* (dále jen f_2), *Dopady na vzhled obce/krajiny* (dále jen f_3) a *Krátkodobá zaměstnanost* (dále jen f_4), s odpovídajícími vahami v_1, v_2, v_3 a v_4 .

Tabulka 20: Výchozí datový soubor pro případ čtyř uvažovaných kritérií

Varianta	f_1	f_2	f_3	f_4	Dominovaná / nedominovaná varianta
a_1	3	3	3	0	Nedominovaná
a_2	2	1	1	3	Nedominovaná
a_3	0	2	1	1	Dominovaná
a_4	1	2	1	3	Nedominovaná
a_6	3	3	1	1	Nedominovaná
a_7	3	1	0	3	Nedominovaná
a_8	2	3	2	1	Nedominovaná
a_9	0	2	3	0	Dominovaná
a_{11}	0	2	1	3	Dominovaná
a_{12}	0	2	1	3	Dominovaná
a_{13}	1	2	1	3	Nedominovaná
a_{14}	1	2	1	1	Dominovaná
a_{15}	1	3	1	1	Dominovaná
a_{17}	1	2	1	3	Nedominovaná
a_{18}	1	0	1	0	Dominovaná
a_{19}	1	3	1	0	Dominovaná
a_{20}	1	2	0	2	Dominovaná

Z výchozího datového souboru v tabulce 20 budou uvažovány jen nedominované varianty, tedy $A_n = \{a_1, a_2, a_4, a_6, a_7, a_8, a_{13}, a_{17}\}$. Indexní množiny pro tento případ jsou v tabulce 21.

Stejně jako u analýzy citlivosti pro tři kritéria není zdaleka zřejmé, co obsahuje pojem modifikace vah. V této analýze citlivosti budou uvažovány dvě fixované váhy $v_1 = 0,13$ a $v_2 = 0,4$ a dvě váhy v_3 a v_4 , jejichž hodnoty budou postupně měněny, čili změna ve váze v_3 (+t) přímo zapříčiní změnu ve váze v_4 (-t).

Tabulka 21: Indexní množiny pro případ čtyř kritérií

	a_1	a_2	a_4	a_6	a_7	a_8	a_{13}	a_{17}
a_1	-	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{3}	{2, 3}	{1, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}
a_2	{4}	-	{1}	{4}	{3}	{4}	{1}	{1}
a_4	{4}	{2}	-	{4}	{2, 3}	{4}	-	-
a_6	{4}	{1, 2}	{1, 2}	-	{2, 3}	{1}	{1, 2}	{1, 2}
a_7	{4}	{1}	{1}	{4}	-	{1, 4}	{1}	{1}
a_8	{4}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{3}	{2, 3}	-	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}
a_{13}	{4}	{2}	-	{4}	{2, 3}	{4}	-	-
a_{17}	{4}	{2}	-	{4}	{2, 3}	{4}	-	-

Problém bude vyřešen s vahami

- (i) $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,34$ a $v_4 = 0,13$ (zaokrouhlené výchozí váhy dle [5]), získané řešení označme $R_1^{(4)}$;
- (ii) $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,25$ a $v_4 = 0,22$, získané řešení označme $R_2^{(4)}$;
- (iii) $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,02$ a $v_4 = 0,45$, získané řešení označme $R_3^{(4)}$.

Řešení $R_1^{(4)}$, $R_2^{(4)}$ a $R_3^{(4)}$ jsou zobrazena v tabulce 22. První dvě řešení jsou zcela totožná, přičemž v první indifferenční třídě se umístila varianta a_1 . Váhy v problému s řešením $R_3^{(4)}$ byly modifikovány poměrně významně a řešení se skutečně liší od předešlých dvou. V první indifferenční třídě se v $R_3^{(4)}$ umístila varianta a_7 . Cílem této kapitoly je stanovit intervaly vah, v rámci kterých se získané řešení nemění.

Tabulka 22: Řešení problému se čtyřmi vahami při vypuštění dominovaných variant při $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$ a různých hodnotách vah v_3 a v_4

Řešení $R_1^{(4)}$		Řešení $R_2^{(4)}$		Řešení $R_3^{(4)}$	
$v_1 = 0,13, v_2 = 0,4,$ $v_3 = 0,34, v_4 = 0,13$		$v_1 = 0,13, v_2 = 0,4,$ $v_3 = 0,25, v_4 = 0,22$		$v_1 = 0,13, v_2 = 0,4,$ $v_3 = 0,02, v_4 = 0,45$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_1	1.	a_1	1.	a_7
2.	a_8	2.	a_8	2.	a_1
3.	a_6	3.	a_6	3.	a_8
4.	a_4	4.	a_4	4.	a_6
	a_{13}		a_{13}	5.	a_4
	a_{17}		a_{17}		a_{13}
5.	a_2	5.	a_2	a_{17}	
6.	a_7	6.	a_7	6.	a_2

Citlivost kompromisní varianty a_1 . Obdobně jako v předchozích analýzách citlivosti pro dvě a tři kritéria je třeba zjistit, jaký byl původní I_{max} . Matice stupňů preference pro problém s řešením $R_1^{(4)}$ je

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0,87 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0,47 & 0,87 & 0,87 \\ 0,13 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0,34 & 0,13 & 0,13 & 0,13 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,13 & 0,53 & 0,53 & 0 & 0,74 & 0,13 & 0,53 & 0,53 \\ 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,26 & 0,13 & 0,13 \\ 0,13 & 0,74 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0 & 0,87 & 0,87 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference je $c^0 = 0,87$ a první stupeň preference je $c^1 = 0,74$. Největší stupeň preference c^0 je určen prvky s_{12} , případně s_{13} , s_{17} , s_{18} , s_{63} , s_{67} a s_{68} . Pro všechny jmenované prvky platí, že jsou součtem vah $v_1 + v_2 + v_3$ (viz indexní množiny zobrazené v tabulce 21).

Na základě hodnot d_i^1 (zobrazeny v tabulce 23) je zřejmé, že první indifferenční třídu tvoří varianta a_1 . Pokud se nezmění hodnoty ukazatelů d_i^1 , pak zůstane první indifferenční třída neměnná, tj. umístí se v ní varianta a_1 . Tento předpoklad je možné zajistit tak, že největší stupeň preference c^0 bude určen stejnými prvky matice stupňů preference $\mathbf{S}$, tedy prvky $s_{12} = s_{13} = s_{17} = s_{18} = s_{63} = s_{67} = s_{68} = v_1 + v_2 + v_3$ (přičemž konkrétní hodnota se může lišit). Předpoklad je tedy možno formulovat jako (8), tj. součet vah s indexy určenými indexní množinou typu $\{1, 2, 3\}$ musí být větší, než součty vah určené ostatními typy indexních množin v daném problému, tedy $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ a $\{2, 3\}$.

$$v_1 + v_2 + v_3 > \max(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_2 + v_3), \quad (8)$$

Tabulka 23: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ čtyř kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,34$ a $v_4 = 0,13$

	a_1	a_2	a_4	a_6	a_7	a_8	a_{13}	a_{17}
p_i^1	4	0	0	0	0	3	0	0
q_i^1	0	1	2	0	0	0	2	2
d_i^1	4	-1	-2	0	0	3	-2	-2

Aby byl splněn vztah (8) a základní předpoklady této analýzy citlivosti, musí být splněny podmínky (i) až (ix).

- (i) $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$ a tedy $v_1 + v_2 = 0,53$ a $v_3 + v_4 = 0,47$;
- (ii) $v_1 + v_2 + v_3 > v_1$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit také jako $v_2 + v_3 > 0$ a s využitím podmínky (i) píšeme $v_3 > -0,4$ a za platnosti (1) je splněna vždy.

- (iii) $v_1 + v_2 + v_3 > v_2$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit také jako $v_1 + v_3 > 0$ a s využitím podmínky (i) píšeme $v_3 > -0,13$ a za platnosti (1) je splněna vždy.

$$(iv) \quad v_1 + v_2 + v_3 > v_3$$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit také jako $v_1 + v_2 > 0$ a s využitím podmínky (i) píšeme $0,53 > 0$. Tato podmínka je splněna vždy.

$$(v) \quad v_1 + v_2 + v_3 > v_4$$

Z podmínky (i) a předpokladu (2) můžeme psát $0,13 + 0,4 + (1 - 0,13 - 0,4 - v_4) > v_4$, tj. $v_4 < \frac{1}{2}$ (a tedy $1 - 0,13 - 0,4 - v_3 < \frac{1}{2}$, tj. $v_3 > -0,03$). Vzhledem k tomu, že dle (i) $v_3 + v_4 = 0,47$ a platí předpoklad (1), tak je tato podmínka splněna vždy.

$$(vi) \quad v_1 + v_2 + v_3 > v_1 + v_2$$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit také jako $v_3 > 0$ a za platnosti (1) je splněna vždy.

$$(vii) \quad v_1 + v_2 + v_3 > v_1 + v_3$$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit také jako $v_2 > 0$. Vzhledem k tomu, že musí platit (i), je tato podmínka splněna vždy.

$$(viii) \quad v_1 + v_2 + v_3 > v_1 + v_4$$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit také jako $v_2 + v_3 > v_4$ a s využitím (i) a (2) píšeme $0,4 + v_3 > 1 - 0,13 - 0,4 - v_3$, tj. $v_3 > 0,035$ (a tedy $1 - 0,13 - 0,4 - v_4 > 0,035$, tj. $v_4 < 0,435$).

$$(ix) \quad v_1 + v_2 + v_3 > v_2 + v_3$$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit také jako $v_1 > 0$. Vzhledem k tomu, že musí platit (i), je tato podmínka splněna vždy.

Aby byla první indifferenční třída tvořena variantou a_1 , musí být splněna podmínka (i), předpoklady (1), (2) a pro váhy v_3 a v_4 musí platit, že $v_3 > 0,035$ a $v_4 < 0,435$.

Citlivost kompromisní varianty a_7 . V problému s řešením $R_3^{(4)}$ spadala do první indifferenční třídy varianta a_7 . Analogickými úvahami je možné získat podmínky pro tento výsledek (v tomto problému je $c^0 = s_{56} = 0,58 = v_1 + v_4$), přičemž klíčovou podmínkou je v tomto případě podmínka

$$v_1 + v_4 > v_1 + v_2 + v_3,$$

ze které za platnosti (i), (1) a (2) plyne, že aby se v první indifferenční třídě umístila varianta a_7 , pak pro váhy v_3 a v_4 musí platit, že $v_3 < 0,035$ a $v_4 > 0,435$.

Citlivost kompromisní varianty v krajním případě. V krajním případě, kdy $v_3 = 0,035$ a $v_4 = 0,435$, je matice stupňů preference

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0,565 & 0,565 & 0,035 & 0,435 & 0,165 & 0,565 & 0,565 \\ 0,435 & 0 & 0,13 & 0,435 & 0,035 & 0,435 & 0,13 & 0,13 \\ 0,435 & 0,4 & 0 & 0,435 & 0,435 & 0,435 & 0 & 0 \\ 0,435 & 0,53 & 0,53 & 0 & 0,435 & 0,13 & 0,53 & 0,53 \\ 0,435 & 0,13 & 0,13 & 0,435 & 0 & 0,565 & 0,13 & 0,13 \\ 0,435 & 0,435 & 0,565 & 0,035 & 0,435 & 0 & 0,565 & 0,565 \\ 0,435 & 0,4 & 0 & 0,435 & 0,435 & 0,435 & 0 & 0 \\ 0,435 & 0,4 & 0 & 0,435 & 0,435 & 0,435 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde největší stupeň preference je $c^0 = 0,565$ a první práh preference je $c^1 = 0,435$. Největší stupeň preference c^0 je určen např. prvkem $s_{12} = v_1 + v_2 + v_3$ nebo $s_{56} = v_1 + v_4$. Vzhledem k tomu, že i pro tento případ má varianta a_1 maximální hodnotu ukazatele d_i^1 (viz tabulku 24), umístí se varianta a_1 v první indifferenční třídě i v krajním případě, kdy $v_3 = 0,035$ a $v_4 = 0,435$.

Tabulka 24: Hodnoty ukazatele d_i^1 pro případ čtyř kritérií při vypuštění dominovaných variant v případě, že $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,035$ a $v_4 = 0,435$

	a_1	a_2	a_4	a_6	a_7	a_8	a_{13}	a_{17}
p_i^1	4	0	0	0	1	3	0	0
q_i^1	0	1	2	0	0	1	2	2
d_i^1	4	-1	-2	0	1	2	-2	-2

Jiné varianty první indifferenční třídy tvořit nemohou, jelikož indexní množiny typu $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ a $\{4\}$ nikdy nemohou určovat maximální prvek matice stupňů preference S , neboť zjevně nikdy nemohou nastat situace (9), (10), (11), (12), (13), (14) a (15).

$$v_1 > \max(v_2, v_3, v_4, v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3) \quad (9)$$

$$v_2 > \max(v_1, v_3, v_4, v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3) \quad (10)$$

$$v_3 > \max(v_1, v_2, v_4, v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3) \quad (11)$$

$$v_4 > \max(v_1, v_2, v_3, v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3) \quad (12)$$

$$v_1 + v_2 > \max(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3) \quad (13)$$

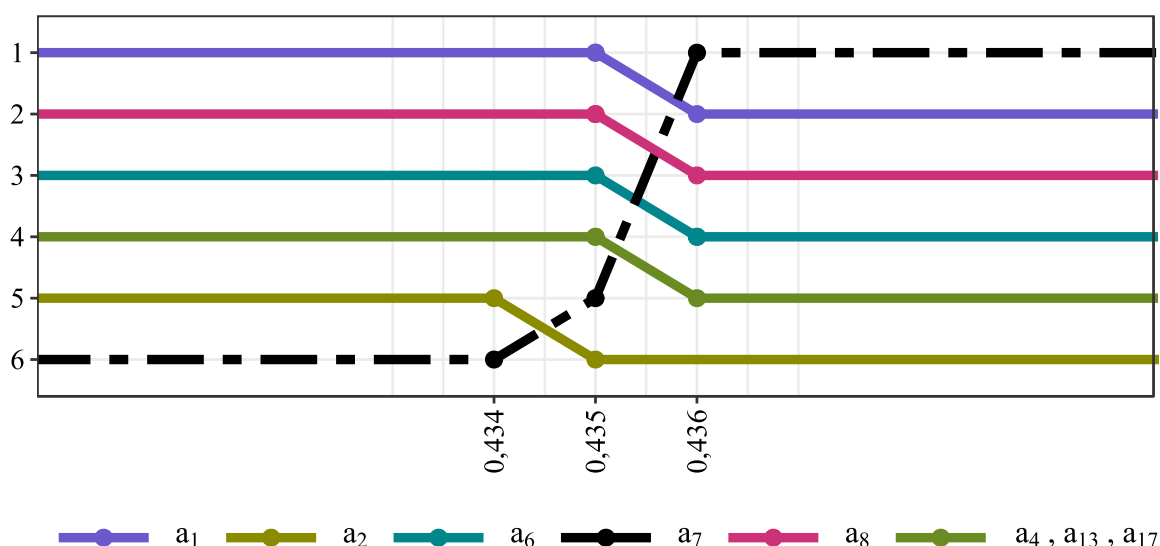
$$v_1 + v_3 > \max(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 + v_2, v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3) \quad (14)$$

$$v_2 + v_3 > \max(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_1 + v_2 + v_3) \quad (15)$$

Chování všech indifferenčních tříd v závislosti na velikosti váhy v_4 (hodnoty $v_1 = 0,13$ a $v_2 = 0,4$ jsou fixovány a pro váhu v_3 platí, že $v_3 = 0,47 - v_4$) znázorňuje graf 3 a kompletní řešení je v tabulce 25. Nejnižší možná změna váhy v_4 , kterou graf 3 bere v úvahu, je 0,001. Můžeme sledovat, že varianta a_1 vždy obsazuje první, nebo druhou indifferenční třídu, naopak varianta a_7 tvoří až do $v_4 = 0,434$ poslední indifferenční třídu, ale od $v_4 = 0,436$ již tvoří první indifferenční třídu. Je zajímavé, že se jedná o přesně opačný jev, než jsme sledovali v grafu 2 (str. 36), kde první a druhou indifferenční třídu tvořila právě varianta a_7 , a přechod z první do poslední indifferenční třídy jsme zaznamenali u varianty a_1 . Dále můžeme sledovat, že pořadí variant a_1, a_8, a_6 , trojice a_4, a_{13}, a_{17} a a_2 zůstává vždy neměnné.

Tabulka 25: Kompletní řešení pro případ čtyř kritérií, kdy jsou zafixované první dvě váhy $v_1 = 0,13$ a $v_2 = 0,4$ (hodnoty v_2 a v_3 jsou uvedeny v tabulce)

$v_3 \in (0; 0,035)$ $v_4 \in (0,435; 0,47)$		$v_3 \in (0,035; 0,47)$ $v_4 \in (0; 0,435)$		$v_3 = 0,035$ $v_4 = 0,435$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_7	1.	a_1	1.	a_1
2.	a_1	2.	a_8	2.	a_8
3.	a_8	3.	a_6	3.	a_6
4.	a_6	4.	a_4	4.	a_4
	a_4		a_{13}		a_{13}
5.	a_{13}		a_{17}		a_{17}
	a_{17}	5.	a_2	5.	a_7
6.	a_2	6.	a_7	6.	a_2



Graf 3: Znárodnění podoby indifferenčních tříd (vertikální osa) v závislosti na hodnotě váhy v_4 (horizontální osa). Graf zachycuje podobu indifferenčních tříd pro $v_4 \in [0,434; 0,436]$. V krajních případech, které tento graf nezachycuje, je podoba indifferenčních tříd shodná s body $v_4 = 0,434$ a $v_4 = 0,436$.

Zcela obecné odvození analýzy citlivosti pro případ čtyř kritérií již přestává být triviální úlohou, jako tomu bylo v případě dvou či tří kritérií. Tento problém by bylo možné řešit obdobně, jako v kapitole 3.2.2, kde jsme uvažovali fixovanou váhu $v_1 = c$. V tomto případě bychom uvažovali dvě fixované váhy $v_1 = c_1$ a $v_2 = c_2$, přičemž $c_1, c_2 \in (0, 1)$.

Pro zkoumání komplexnějších problémů s odlišnými typy indifferenčních tříd je vhodné využití lineárního programování (dále jen LP). V kapitole 4 bude představen základní matematický model a omezující podmínky, které je třeba přidat postupně pro případ tří kritérií s fixací váhy v_1 , pro případ tří kritérií se změnami váhy v_1 a rovnoměrné rozdělení mezi zbývající váhy a konečně pro případ čtyř kritérií při fixaci vah v_1 a v_2 .

4 Matematický model

Numerická analýza citlivosti, jak byla představena v kapitole 3, může být pro komplexnější problémy nepřehledná a časově náročná. Z tohoto důvodu bude v této kapitole představen matematický model, pomocí kterého je možné učinit shodné závěry jako v kapitole 3.

V první části bude odvozen základní matematický model pro k kritérií, v druhé části bude matematický model aplikován na případech dvou kritérií, tří kritérií a čtyř kritérií při vypuštění dominovaných variant. Každá analyzovaná situace vyžaduje doplnění základního matematického modelu specifickými omezujícími podmínkami, vycházejícími ze způsobu definování změn vah.

4.1 Základní matematický model

Základní matematický model vychází z myšlenky, že obsah první indifferenční třídy závisí na hodnotách největšího stupně preference c^0 a prvního prahu preference c^1 , které závisí na podobě matice stupňů preference S plynoucí z indexních množin. Klíčovou otázkou je tedy to, jaké indexy obsahuje indexní množina, na základě které je určena hodnota $c^0 = \max(s_{ij}; a_i, a_j \in A)$. Indexní množina tohoto charakteru je značena jako I_{max} (definice 14). Matice indexních množin A (definice 15) je závislá pouze na vstupních datech, tedy na kritériální matici Y .

V matematickém modelu budeme požadovat, aby se součet všech vah kritérií rovnal jedné a zároveň aby byly všechny váhy ostře větší než nula (požadavek zachování stejného počtu relevantních kritérií). Vzhledem k tomu, že LP pracuje výhradně s neostrými nerovnostmi, bude tato podmínka nahrazena podmínkou, že váhy musí být větší než dostatečně malá konstanta M . Posledním požadavkem bude, aby se I_{max} nezměnila, tj. aby hodnota $c^0 = \max(s_{ij}; a_i, a_j \in A)$ byla určena stejnými indexy i a j (konkrétní hodnota se změnit může).

Postupným hledáním maxima a minima pro jednotlivé váhy nalezneme krajní hodnoty vah, které zachovají danou I_{max} neměnnou. Pro komplexní analýzu dosazujeme za I_{max} postupně všechny existující indexní množiny daného problému. Celkem je tedy třeba vyřešit $2 \cdot k \cdot I_p$ úloh LP, přičemž k je počet kritérií a I_p je počet typů indifferenčních tříd. Základní matematický model pro maximalizaci váhy v_1 pro danou I_{max} lze zapsat následovně.

Maximalizovat

$$v_1$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k a_{ij} v_j + M &\leq \sum_{h \in I_{max}} v_h, \quad i = 1, 2, \dots, I_p, i \neq i_{max}, \\ \sum_{j=1}^k v_j &= 1, \\ v_j &\geq M, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ M &= 10^{-8}, \end{aligned}$$

kde řádky matice $\mathbf{A}_{I_p \times k} = (a_{ij})$ zachycují všechny typy indexních množin v daném problému (dle definice 15) a i_{max} je označení řádku matice $\mathbf{A}$, který zachycuje I_{max} . Pokud by např. v daném problému se čtyřmi kritérii byly tři typy indifferenčních tříd $\{1\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}$ a $I_{max} = \{3, 4\}$, tak by matice $\mathbf{A}$ měla podobu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a $i_{max} = 2$. Podmínku

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} v_j + M \leq \sum_{h \in I_{max}} v_h, \quad i = 1, 2, \dots, I_p, i \neq i_{max}$$

lze tedy také zapsat jako

$$(\mathbf{B} - \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{v} \geq \mathbf{M},$$

kde $\tilde{\mathbf{A}}$ je matice $\mathbf{A}$ bez řádku i_{max} , $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)^T$, $\mathbf{M}$ je vektor typu $(I_p - 1) \times 1$, pro který platí, že $\mathbf{M} = (M, \dots, M)^T$, a řádky matice $\mathbf{B}_{(I_p-1) \times k} = (b_{ij})$ odpovídají příslušné I_{max} (dle definice 16), tedy např. pokud bychom navázali na ukázkový problém výše, kde by $I_{max} = \{3, 4\}$, pak by matice $\tilde{\mathbf{A}}$ a $\mathbf{B}$ měly podobu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Všechny potřebné úlohy LP, tedy celkem $2 * k * I_p$ úloh, bude vyřešeno v softwaru R pomocí balíčku *lpSolve* (verze 5.5), který využívá revidovanou simplexovou metodu [18], která je blíže popsána v ([12], str. 51). Funkce *lp* z balíčku *lpSolve* požaduje po uživateli zadat typ účelové funkce (maximalizace či minimalizace), vektor cenových koeficientů typu $1 \times n$, matici strukturních koeficientů typu $m \times n$, seznam m typů omezení ($=, \leq, \geq$) a vektor pravých stran omezení typu $m \times 1$ [19].

Základní matematický model pro výše uvedený příklad lze tedy do softwaru R implementovat tak, jak je znázorněno v tabulce 26. Pokud bychom např. maximalizovali v_1 , pak je možné zapsat účelovou funkci jako $\sum_{j=1}^k c_j v_j$, kde vektor cenových koeficientů $\mathbf{c}^T$ by

měl podobu $\mathbf{c}^T = (1, 0, 0, 0)$. V tomto případě je $m = I_p - 1 + 1 + k = 3 - 1 + 1 + 4 = 7$ a $n = k = 4$. Složitost problému tak závisí jednak na počtu kritérií k , tak i na počtu typů indexních množin I_p . Pro počet typů indexních množin I_p v případě uvažování pouze nedominovaných variant platí, že $I_p \leq \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i}$. Na počtu uvažovaných variant nezáleží, nicméně I_p se s rostoucím počtem variant může zvětšovat. Pokud se počet kritérií k zvýší o 1, pak se problém rozšíří o jednu proměnnou (a tedy i o jednu přídatnou proměnnou a jednu pomocnou proměnnou) a jednu omezující podmínku. Pokud se I_p zvýší o 1, pak se problém rozšíří o jednu omezující podmínku.

Vzhledem k tomu, že posledních k podmínek se týká stanovení dolní meze pro proměnné, je možné řešit problém pomocí substituce $v_j = w_j + M, j = 1, \dots, k$ podrobně popsané v ([12], str. 68). Díky této substituci má problém o k méně omezujících podmínek (a o k přídatných a k pomocných proměnných). Výpočetní složitost je jednak možné ušetřit použitím zmíněné substituce, nebo vypuštěním těch typů indexních množin, které jsou podmnožinou jiných (např. pokud máme indexní množiny typu $\{1\}$ a $\{1, 3\}$, pak můžete vypustit z matematického modelu indexní množinu typu $\{1\}$, neboť nikdy nemůže určovat největší stupeň preference c^0 , jak bylo ukázáno např. v 3.2.1. Tímto způsobem je problém redukován o daný počet omezujících podmínek.

Tabulka 26: Příklad implementace matematického modelu do softwaru R

Matice strukturních koeficientů				Seznam omezení	Pravé strany omezení
1	0	-1	-1	$\geq$	10^{-8}
1	1	-1	0	$\geq$	10^{-8}
1	1	1	1	$=$	1
1	0	0	0	$\geq$	10^{-8}
0	1	0	0	$\geq$	10^{-8}
0	0	1	0	$\geq$	10^{-8}
0	0	0	1	$\geq$	10^{-8}

Problémy řešené v této práci nejsou výpočetně náročné, proto modifikace uvedené výše nejsou nutné. V přílohách P, Q, R a S jsou uvedeny programové kódy pro řešení všech problémů představených v kapitolách 4.2, 4.3, 4.4 a 4.5.

4.2 Dvě kritéria

Pro řešení problému představeného v kapitole 3.1 není třeba k základnímu matematickému modelu přidat žádnou omezující podmínku. Matice $\mathbf{A}$ má v tomto případě podobu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro řešení problému pomocí LP je nutné vyřešit osm úloh LP. Za I_{max} je nutné postupně dosadit všechny existující typy indexních množin, v rámci kterých je třeba provést čtyři

modely, neboť je nutné maximalizovat a minimalizovat v_1 a v_2 pro získání krajních hodnot, v rámci kterých zůstává I_{max} stejná. Řešení všech osmi úloh je shrnuto v tabulce 27.

Z výsledků uvedených v tabulce 27 je zřejmé, že bylo dosaženo stejného řešení jako při numerické analýze. Za platnosti předpokladu (2) platí, že $I_{max} = \{1\}$ v případě, když $v_1 > 0,5$ a $I_{max} = \{2\}$ v případě, když $v_2 > 0,5$. Vzhledem k tomu, že jsou v těchto úlohách LP pouze dvě proměnné v_1 a v_2 , je samozřejmé, že úloha LP s účelovou funkcí $Max v_i$ a $Min v_j$ pro $i, j = 1, 2, i \neq j$ při dané I_{max} je totožná. V případě dvou proměnných je tedy možné se omezit jen na modely $Max v_i$ a $Min v_i$ při dané I_{max} , tedy např. na modely 1, 2, 5 a 6.

Tabulka 27: Řešení úloh LP v případě dvou uvažovaných kritérií.

Model	I_{max}	Účelová funkce	v_1	v_2
Model 1	{1}	Min v_1	0,5005	0,4995
Model 2	{1}	Max v_1	0,9990	0,0010
Model 3	{1}	Min v_2	0,9990	0,0010
Model 4	{1}	Max v_2	0,5005	0,4995
Model 5	{2}	Min v_1	0,0010	0,9990
Model 6	{2}	Max v_1	0,4995	0,5005
Model 7	{2}	Min v_2	0,4995	0,5005
Model 8	{2}	Max v_2	0,0010	0,9990

Úloha LP standartně neobsahuje ostré nerovnosti. Z tohoto důvodu byla v tomto problému zvolena konstanta $M = 10^{-3}$, která má vliv na nepřesné krajní hodnoty vah v tabulce 27. Konstanta $M = 10^{-3}$ byla zvolena pro lepší znázornění problému, pokud by byla zvolena menší konstanta, např. $M = 10^{-8}$, jako v základním matematickém modelu v kapitole 4.1, nepřesnosti by byly výrazně menší.

4.3 Tři kritéria (fixace jedné váhy)

Pro řešení problému představeného v kapitole 3.2 musí být k základnímu matematickému modelu přidána omezující podmínka

$$v_1 = c,$$

kde c je konstanta představující danou fixovanou hodnotu váhy v_1 . Problém bude řešen pro $c = 0,2$, tedy stejně jako v kapitole 3.2. Matice $\mathbf{A}$ má v tomto případě podobu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro řešení tohoto problému pomocí LP je nutné vyřešit 20 úloh LP. Za I_{max} je nutné postupně dosadit všechny existující typy indexních množin, v rámci kterých je třeba provést 10 modelů, neboť je nutné maximalizovat a minimalizovat v_2 a v_3 pro získání krajních hodnot, v rámci kterých zůstává I_{max} stejná. V této úloze jsou opět dvě proměnné v_2 a v_3 , neboť váha v_1 je konstantní. Z tohoto důvodu je možné omezit se na úlohy minimalizace a maximalizace pouze jedné váhy, např. váhy v_2 .

Tabulka 28 zobrazuje shrnutí 10 uvažovaných lineárních modelů. Modely 1 až 6 nemají přípustné řešení, neboť indexní množiny typu $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ nikdy nemohou být I_{max} (zdůvodnění v kapitole 3.2.1). Indexní množina typu $\{1, 3\}$ je I_{max} právě tehdy, když $v_3 \in (0,6; 0,8)$ a $v_2 \in (0; 0,2)$. Indexní množina typu $\{2, 3\}$ je I_{max} právě tehdy, když $v_3 \in (0; 0,6)$ a $v_2 \in (0,2; 0,8)$. V obou případech zároveň z povahy problému předpokládáme, že $v_2 + v_3 = 0,8$ ($v_1 = 0,2$). Jak pro v_2 , tak i pro v_3 je horní hranicí hodnota 0,8, neboť váha v_1 je fixována na hodnotě 0,2. V krajním případě, kdy $v_3 = 0,6$ a $v_2 = 0,2$ jsou I_{max} dva typy indexních množin, $\{1, 3\}$ a $\{2, 3\}$. Řešení se tedy shoduje s numerickým přístupem.

Tabulka 28: Řešení úloh LP v případě tří uvažovaných kritérií a zafixování váhy v_1

Model	I_{max}	Účelová funkce	v_1	v_2	v_3
Model 1	$\{1\}$	$Min v_2$	Neexistence přípustného řešení		
Model 2	$\{1\}$	$Max v_2$	Neexistence přípustného řešení		
Model 3	$\{2\}$	$Min v_2$	Neexistence přípustného řešení		
Model 4	$\{2\}$	$Max v_2$	Neexistence přípustného řešení		
Model 5	$\{3\}$	$Min v_2$	Neexistence přípustného řešení		
Model 6	$\{3\}$	$Max v_2$	Neexistence přípustného řešení		
Model 7	$\{1, 3\}$	$Min v_2$	0,2	0,001	0,799
Model 8	$\{1, 3\}$	$Max v_2$	0,2	0,199	0,601
Model 9	$\{2, 3\}$	$Min v_2$	0,2	0,201	0,599
Model 10	$\{2, 3\}$	$Max v_2$	0,2	0,799	0,001

4.4 Tři kritéria (změny v jedné váze a rovnoměrné rozdělení zbývajících rozdílů)

Pro řešení problému představeného v kapitole 3.3 musí být k základnímu matematickému modelu přidána omezující podmínka

$$v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}.$$

Matice A je totožná s maticí A v kapitole 4.3, neboť typy indexních množin jsou pro oba problémy totožné (indexní množiny jsou zobrazeny v tabulce 11).

Pro řešení tohoto problému pomocí LP je nutné vyřešit 30 úloh LP. Za I_{max} je nutné postupně dosadit všechny existující typy indexních množin, v rámci kterých je třeba provést

10 modelů, neboť je nutné maximalizovat a minimalizovat v_1 , v_2 a v_3 pro získání krajních hodnot, v rámci kterých zůstává I_{max} stejná.

V této úloze je možné omezit se na úlohy minimalizace a maximalizace pouze jedné váhy, např. váhy v_1 , neboť řešení pro úlohy LP maximalizující a minimalizující v_2 a v_3 jsou totožné (požadujeme, aby $v_2 = v_3$) a tedy úloha maximalizace (minimalizace) v_1 je totožná s úlohou minimalizace (maximalizace) v_2 , resp. v_3 .

Tabulka 29 zobrazuje shrnutí 10 uvažovaných lineárních modelů. Modely 1 až 6 nemají přípustné řešení, neboť indexní množiny typu $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ nikdy nemohou být I_{max} (zdůvodnění v kapitole 3.3.1). Indexní množina typu $\{1, 3\}$ je I_{max} právě tehdy, když $v_1 \in (\frac{1}{3}; 1)$ a $v_2, v_3 \in (0; \frac{1}{3})$. Indexní množina typu $\{2, 3\}$ je I_{max} právě tehdy, když $v_1 \in (0; \frac{1}{3})$ a $v_2, v_3 \in (\frac{1}{3}; 0,5)$. V obou případech zároveň předpokládáme platnost předpokladu (2). V krajním případě, kdy $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{3}$ jsou I_{max} dva typy indexních množin, $\{1, 3\}$ a $\{2, 3\}$. Řešení se tedy shoduje s numerickým přístupem.

Tabulka 29: Řešení úloh LP v případě tří uvažovaných kritérií, postupné změny váhy v_1 a rovnoměrné rozdělení rozdílu $1 - v_1$ mezi v_2 a v_3

Model	I_{max}	Účelová funkce	v_1	v_2	v_3
Model 1	$\{1\}$	$Min v_1$	Neexistence přípustného řešení		
Model 2	$\{1\}$	$Max v_1$	Neexistence přípustného řešení		
Model 3	$\{2\}$	$Min v_1$	Neexistence přípustného řešení		
Model 4	$\{2\}$	$Max v_1$	Neexistence přípustného řešení		
Model 5	$\{3\}$	$Min v_1$	Neexistence přípustného řešení		
Model 6	$\{3\}$	$Max v_1$	Neexistence přípustného řešení		
Model 7	$\{1, 3\}$	$Min v_1$	0,3340	0,3330	0,3330
Model 8	$\{1, 3\}$	$Max v_1$	0,9980	0,0010	0,0010
Model 9	$\{2, 3\}$	$Min v_1$	0,0010	0,4995	0,4995
Model 10	$\{2, 3\}$	$Max v_1$	$\approx 0,3327$	$\approx 0,3337$	$\approx 0,3337$

4.5 Čtyři kritéria (fixace dvou vah)

Pro řešení problému představeného v kapitole 3.4 musí být k základnímu matematickému modelu přidány omezující podmínky

$$v_j = c_j, j = 1, 2,$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty představující dané fixované hodnoty vah v_1 a v_2 . Hodnoty c_1 a c_2 budou zvoleny stejné, jako v kapitole 3.4, tedy $c_1 = 0,13$ a $c_2 = 0,4$. Matice **A** má v tomto případě podobu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro řešení tohoto problému pomocí LP je nutné vyřešit 36 úloh LP. Za I_{max} je nutné postupně dosadit všechny existující typy indexních množin, v rámci kterých je třeba provést čtyři modely, neboť je nutné maximalizovat a minimalizovat v_3 a v_4 pro získání krajních hodnot, v rámci kterých zůstává I_{max} stejná. V této úloze jsou opět dvě proměnné v_3 a v_4 , neboť váhy v_1 a v_2 jsou konstantní. Z tohoto důvodu je možné omezit se na úlohy minimalizace a maximalizace pouze jedné váhy, např. váhy v_3 .

Tabulka 30 zobrazuje shrnutí 18 uvažovaných lineárních modelů. Modely 1 až 12 a 15, 16 nemají přípustné řešení, neboť indexní množiny daných typů nikdy nemohou být I_{max} (zdůvodnění v kapitole 3.4). Indexní množina typu $\{1, 4\}$ je I_{max} právě tehdy, když $v_3 \in (0; 0,035)$ a $v_4 \in (0,435; 0,47)$. Indexní množina typu $\{1, 2, 3\}$ je I_{max} právě tehdy, když $v_3 \in (0,035; 0,47)$ a $v_4 \in (0; 0,435)$. V obou případech zároveň z povahy problému předpokládáme, že $v_3 + v_4 = 0,47$. Řešení se shoduje s numerickým přístupem.

Tabulka 30: Řešení úloh LP v případě čtyř uvažovaných kritérií a zafixování vah v_1 a v_2

Model	I_{max}	Účelová funkce	v_1	v_2	v_3	v_4
Model 1	$\{1\}$	$Min v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 2	$\{1\}$	$Max v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 3	$\{2\}$	$Min v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 4	$\{2\}$	$Max v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 5	$\{3\}$	$Min v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 6	$\{3\}$	$Max v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 7	$\{4\}$	$Min v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 8	$\{4\}$	$Max v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 9	$\{1, 2\}$	$Min v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 10	$\{1, 2\}$	$Max v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 11	$\{1, 3\}$	$Min v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 11	$\{1, 3\}$	$Max v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 13	$\{1, 4\}$	$Min v_3$	0,13	0,4	0,0010	0,4690
Model 14	$\{1, 4\}$	$Max v_3$	0,13	0,4	0,0345	0,4355
Model 15	$\{2, 3\}$	$Min v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 16	$\{2, 3\}$	$Max v_3$	Neexistence přípustného řešení			
Model 17	$\{1, 2, 3\}$	$Min v_3$	0,13	0,4	0,0355	0,4345
Model 18	$\{1, 2, 3\}$	$Max v_3$	0,13	0,4	0,4690	0,0010

5 Analýza citlivosti při zahrnutí dominovaných variant

Analýza citlivosti při zahrnutí dominovaných variant je specifická tím, že se závěr ohledně první indifferenční třídy dá zobecnit na všechny dosud analyzované případy, tedy na analýzu citlivosti pro dvě kritéria, tři kritéria pro fixace váhy v_1 , tři kritéria při změnách váhy v_1 a rozdělení zbývajících rozdílů mezi v_2, v_3 , tj. $v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$ a čtyři kritéria při fixaci vah v_1 a v_2 . Označme tedy počet kritérií v daném problému k , přičemž $k = 2, k = 3$ nebo $k = 4$.

V problému s dominovanými variantami je nutné rozlišit dva případy:

- (i) v souboru variant se vyskytuje dvojice variant a_i a a_j , pro které platí $y_{ih} > y_{jh}$, $h = 1, \dots, k$, tj. dominovaná varianta a_j má horší hodnotu podle všech k kritérií, než dominující varianta a_i ;
- (ii) jinak.

Pokud v daném problému nastane případ (i), pak zde nutně existuje indexní množina obsahující indexy všech kritérií, tedy

$\{1, 2\}$ pro $k = 2$,

$\{1, 2, 3\}$ pro $k = 3$ a

$\{1, 2, 3, 4\}$ pro $k = 4$.

Pro největší stupeň preference c^0 v takovém případě platí, že $c^0 = \max(s_{ij}; a_i, a_j \in A) = \sum_{i=1}^k v_k = 1$. V první indifferenční třídě se umístí ty varianty, které mají maximální hodnotu ukazatele d_i^1 . V případě, když $c^0 = 1$, můžeme psát

$$\max(d_i^1) = \max_{i=1, \dots, p} \left(\left(\sum_{j=1, s_{ij}=1}^p s_{ij} \right) - \left(\sum_{j=1, s_{ji}=1}^p s_{ji} \right) \right), \quad (16)$$

tj. největší hodnota ukazatele d_i^1 je určena maximálním rozdílem mezi součtem prvků matice $\mathbf{S}$ v řádce i , které jsou rovny hodnotě 1, a součtem prvků matice $\mathbf{S}$ ve sloupci i , které jsou rovny hodnotě 1.

Obsah první indifferenční třídy tedy není vůbec závislý na změnách vah $v_j, \forall j$, neboť první indifferenční třída závisí na hodnotách ukazatele d_i^1 , které jsou neměnné v případě, že se nemění indexy prvků matice stupňů preference $\mathbf{S}$ určující hodnotu c^0 . Vzhledem k tomu, že vždy platí vztah $c^0 = \max(s_{ij}; a_i, a_j \in A) = \sum_{j=1}^k v_j = 1$, se indexy prvků matice stupňů preference $\mathbf{S}$ určující hodnotu c^0 nemohou měnit.

V problémech typu (i) není třeba rozlišit způsob modifikace jednotlivých vah, jelikož první indifferenční třída je vždy určena jejich celkovým součtem, který zůstává vždy neměnný.

Pokud by uvažovaný problém byl typu (ii), pak by odvození chování první indifferenční třídy bylo totožné s chováním první indifferenční třídy při vypuštění dominovaných variant (kapitola 3). V tomto případě je již nutné jasně definovat, jakým způsobem budou modifikovány jednotlivé váhy. V části analýzy citlivosti pro tři kritéria při vypuštění dominovaných variant byly zvoleny dva způsoby modifikace vah:

- (i) fixace hodnoty váhy v_1 tak, že $v_1 = 0,2$, a váhy v_2 a v_3 jsou postupně měněny;
- (ii) postupné změny váhy v_1 , přičemž pro váhy v_2 a v_3 platí, že $v_2 = v_3 = \frac{1-v_1}{2}$.

V části analýzy citlivosti pro čtyři kritéria při vypuštění dominovaných variant byly uvažovány váhy v_1, v_2 jako fixované na daných hodnotách $v_1 = 0,13, v_2 = 0,4$ a váhy v_3 a v_4 byly postupně měněny.

5.1 Dvě kritéria

V rámci analýzy citlivosti pro dvě kritéria byla vybrána kritéria *Krátkodobá zaměstnanost* (dále jen f_1) a *Dopady na vzhled obce/krajiny* (dále jen f_2). Datový soubor je zobrazen v tabulce 5 (str. 21). Indexní množiny pro tento případ jsou uvedeny v příloze F.

Problém bude vyřešen s vahami

- (i) $v_1 = \frac{2}{7} \doteq 0,286$ a $v_2 = \frac{5}{7} \doteq 0,714$ (výchozí hodnoty dle [5]), získané řešení označme $R_1^{(5)}$;
- (ii) $v_1 = 0,4$ a $v_2 = 0,6$, získané řešení označme $R_2^{(5)}$;
- (iii) $v_1 = 0,7$ a $v_2 = 0,3$, získané řešení označme $R_3^{(5)}$.

Kompletní řešení $R_1^{(5)}, R_2^{(5)}$ a $R_3^{(5)}$ je v příloze G, ukázka podoby matice $\mathbf{S}$ pro první problém je v příloze H. Můžeme vidět, že změny vah nemají na první indifferenční třídu tvořenou variantou a_8 vliv, neboť největší stupeň preference c^0 je určen součtem všech vah, tedy $c^0 = v_1 + v_2 = 1$. Varianta a_8 je nedominovanou variantou, konkrétně se jedná o dominující variantu, která má lepší hodnoty než varianty a_1 a a_9 podle obou kritérií.

5.2 Tři kritéria

Pro analýzu citlivosti pro tři kritéria byla vybrána kritéria *Krátkodobá zaměstnanost* (dále jen f_1), *Dopady na vzhled obce/krajiny* (dále jen f_2) a *Regionální HDP* (dále jen f_3). Výchozí datový soubor je zobrazen v tabulce 10 (str. 24). Indexní množiny pro tento případ jsou v příloze I.

Problém bude vyřešen s vahami

- (i) $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,6$ a $v_3 = 0,2$ (výchozí hodnoty dle [5]), získané řešení označme $R_1^{(6)}$;
- (ii) $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,3$ a $v_3 = 0,5$, získané řešení označme $R_2^{(6)}$;
- (iii) $v_1 = 0,4$, $v_2 = 0,3$ a $v_3 = 0,3$, získané řešení označme $R_3^{(6)}$.

Kompletní řešení $R_1^{(6)}$, $R_2^{(6)}$ a $R_3^{(6)}$ je v příloze K a ukázka podoby matice **S** pro první problém je v příloze J. Můžeme vidět, že změny vah nemají na první indifferenční třídu tvořenou variantou a_8 vliv, neboť největší stupeň preference c^0 je určen součtem všech vah, tedy $c^0 = v_1 + v_2 + v_3 = 1$. Varianta a_8 je nedominovanou variantou, jedná se o dominující variantu, která má lepší hodnoty než varianty a_{18} a a_{19} podle všech tří kritérií.

5.3 Čtyři kritéria

Pro analýzu citlivosti kompromisní varianty na změnu vah pro případ čtyř kritérií byla zvolena kritéria *Regionální HDP* (dále jen f_1), *Příjmy pro obec* (dále jen f_2), *Dopady na vzhled obce/krajiny* (dále jen f_3) a *Krátkodobá zaměstnanost* (dále jen f_4). Výchozí datový soubor je zobrazen v tabulce 20 (str. 38). Indexní množiny pro tento případ jsou v příloze L.

Problém bude vyřešen s vahami

- (i) $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,34$ a $v_4 = 0,13$ (zaokrouhlené výchozí váhy dle [5]), získané řešení označme $R_1^{(7)}$;
- (ii) $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,25$ a $v_4 = 0,22$, získané řešení označme $R_2^{(7)}$;
- (iii) $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,02$ a $v_4 = 0,45$, získané řešení označme $R_3^{(7)}$.

Kompletní řešení $R_1^{(7)}$, $R_2^{(7)}$ a $R_3^{(7)}$ jsou v příloze N, ukázka podoby matice **S** pro první problém je v příloze M. Stejně jako v předchozích případech můžeme vidět, že neohledě na různé váhy se v první indifferenční třídě umístí jediná varianta a_8 a největší stupeň preference c^0 je určen součtem všech vah, tedy $c^0 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1$. Při pohledu na matici **S**, na podobu indexních množin i na výchozí datový soubor je vidět, že varianta a_8 jako jediná má lepší hodnoty podle všech kritérií než jiná varianta (dominuje variantě a_{18}).

6 Výsledky a diskuze

V praktické části byly stanoveny intervaly vah, v rámci kterých se první indifferenční třída nemění při použití metody ELECTRE III. Tento problém byl zkoumán z pohledu dvou, tří a čtyř uvažovaných kritérií, přičemž ve všech případech se v první indifferenční třídě při použití výchozích vah umístila varianta a_1 (FVE Chomutov).

V případě dvou uvažovaných kritérií bylo zjištěno, že varianta a_1 bude tvořit první indifferenční třídu v případě, že $v_1 \in (0; 0,5)$ a $v_2 \in (0,5; 1)$, tj. platí, že $v_2 > v_1$ a je splněn předpoklad (2), tedy že součet vah je roven jedné. Vzhledem k tomu, že původní hodnoty uvažovaných kritérií byly $v_1 = 0,286$ a $v_2 = 0,714$, získané řešení je poměrně stabilní. Řešení by se změnilo pouze v případě, kdy by důležitost kritérií f_1 a f_2 byla vyhodnocena zcela opačně, tedy pokud by $v_1 > v_2$.

V případě tří uvažovaných kritérií při fixaci váhy v_1 na hodnotě 0,2 bude původní řešení zachováno v případě, že $v_2 \in [0,2; 0,8)$, $v_3 \in (0; 0,6]$ a je splněn předpoklad (2). Výchozí uvažované hodnoty jsou $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,6$ a $v_3 = 0,2$. Aby se v tomto případě řešení změnilo, musela by se váha kritéria f_3 více než třikrát zvětšit (tj. zvýšit o 200 %), což je relativně velká změna v preferencích rozhodovatele. Z tohoto důvodu je i toto řešení stabilní.

Při uvažování tří kritérií při změnách ve váze v_1 a rovnoměrnému rozdělení rozdílu $1 - v_1$ mezi váhy v_2 a v_3 bylo zjištěno, že původní řešení bude zachováno v případě, že $v_1 \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$ a $v_i \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $i = 2, 3$ a je splněn předpoklad (2). Výchozí váhy byly $v_1 = 0,2$ a $v_2 = v_3 = 0,4$. V tomto případě je řešení citlivější na změnu vah než předchozí případ, neboť aby se řešení změnilo, stačilo by zvýšit váhu kritéria f_1 o 50 %.

Poslední uvažovaný případ zahrnoval čtyři kritéria při fixaci vah $v_1 = 0,13$ a $v_2 = 0,4$, přičemž bylo zjištěno, že pokud $v_3 \in [0,035; 0,47)$, $v_4 \in (0; 0,435]$ a je splněn předpoklad (2), pak se prvotní řešení nezmění. Výchozí váhy kritérií f_3 a f_4 byly $v_3 = 0,34$ a $v_4 = 0,13$. Toto řešení je poměrně citlivé zejména na změnu váhy kritéria f_3 . Pokud by se v_3 zvýšila o necelých 30 %, varianta v první indifferenční třídě by byla odlišná od původního řešení.

V rámci praktické části bylo učiněno zajímavé pozorování: pokud do analyzovaného souboru zahrneme dominované varianty a nastane situace, že alespoň jedna dominující varianta má lepší hodnoty podle všech kritérií než varianta, které dominuje, pak obsah první indifferenční třídy vůbec nezávisí na změnách vah. V tomto případě se v první indifferenční třídě umístí právě tato dominující varianta. Pokud je takovýchto variant více, pak se v první indifferenční třídě umístí ta varianta, která má lepší hodnoty podle všech kritérií než nejvíce variant.

Analýza citlivosti byla provedena jak pomocí analytických výpočtů, tak za pomoci matematického modelu. Bylo zjištěno, že výsledky získané z obou přístupů jsou totožné až na „zaokrouhlovací“ chyby. Malé odchylky vznikly z důvodu použití metod LP (konkrétně

revidované simplexové metody), ve kterých není možné uvažovat ostré nerovnosti, proto byla podmínka $v_j > 0 \forall j$ nahrazena podmínkou $v_j \geq M \forall j$, kde M je dostatečně malá konstanta. V případě složitějších problémů je použití matematického modelu úlohy LP nutné.

Analýza citlivosti byla provedena se zaměřením se na indexní množiny. Tento způsob analýzy citlivosti je vhodné zkombinovat s přístupem *ceteris paribus*, neboť pak je možné přesně definovat, jak se mohou měnit váhy tak, aby řešení bylo nezměněné. Pokud je tedy uvažováno více, než dvě kritéria, je vhodné jasně definovat, jakým způsobem se váhy mění. Tímto přístupem bude v problému uvažována jen jedna proměnná (klíčová váha), jelikož hodnoty ostatních vah jsou určeny pomocí jednoduchých algebraických vztahů plynoucích z klíčové váhy. V případě tří uvažovaných kritérií je možné uvažovat následující situace:

- (i) fixace jedné váhy (např. v_1) na konstantě c a změny pouze ve vahách v_2 a v_3 , tj. pokud se v_2 změní o $+t$, pak se v_3 změní o $-t$;
- (ii) rozdělení absolutní změny rozdílu – měníme v_1 a hodnota této váhy je po změně rovna $\tilde{v}_1 = v_1 - \Delta v_1$ přičemž je možné sledovat situace:
 - a. $\tilde{v}_2 = v_2 + \Delta v_1$ a $\tilde{v}_3 = v_3$;
 - b. $\tilde{v}_3 = v_3 + \Delta v_1$ a $\tilde{v}_2 = v_2$;
 - c. $\tilde{v}_2 = v_2 + \frac{\Delta v_1}{2}$ a $\tilde{v}_3 = v_3 + \frac{\Delta v_1}{2}$;
 - d. $\tilde{v}_2 = \frac{1-\tilde{v}_1}{2}$ a $\tilde{v}_3 = \frac{1-\tilde{v}_1}{2}$;
- (iii) uvažujeme relativní změny – měníme v_1 a nové váhy jsou normovány, tj. $\tilde{v}_1 = \frac{v_1 - \Delta v_1}{1 - \Delta v_1}$,
 $\tilde{v}_2 = \frac{v_2}{1 - \Delta v_1}$ a $\tilde{v}_3 = \frac{v_3}{1 - \Delta v_1}$.

Způsobů, jak dodržet podmínky *ceteris paribus* je mnoho. Tato práce uvažuje jen některé z uvedených případů, konkrétně případ (i) v kapitole 3.2 a (ii.d) v kapitole 3.3. Analýza dalších možných vztahů zůstává jako podnět pro další výzkum.

Závěr

Tato práce se zabývala vícekritériální analýzou větrných a fotovoltaických elektráren. Jako metoda VHV byla zvolena ELECTRE III a pomocí citlivostní analýzy byly stanoveny intervaly vah, v rámci kterých se první indifferenční třída nemění.

V literatuře je v případě využití metody ELECTRE III častý simulační přístup, příkladem je citlivostní analýza na motivy článku [7] demonstrována na analyzovaných datech v příloze T. Tato práce navrhuje jiné možné řešení, a to analýzu indexních množin, pomocí které je možné stanovit přesné intervaly vah, ve kterých se první indifferenční třída nemění.

Tato práce vycházela z myšlenky, že první indifferenční třída zůstává neměnná v případě neměnných hodnot ukazatele d_i^1 v prvním kroku výpočtu, čehož je docíleno tak, že po změně vah zachováme stejný typ I_{max} . Práce vychází z implikace

jestliže je typ I_{max} neměnný, pak nedochází ke změnám v první indifferenční třídě.

Obrácená implikace však nemusí obecně platit. V dalším výzkumu by bylo zajímavé odpovědět na otázku, zda v předešlém vztahu platí ekvivalence nebo jakým jiným způsobem je možné zachovat první indifferenční třídu neměnnou.

Analýza citlivosti byla provedena na konkrétních datech pro dvě, tři a čtyři kritéria, přičemž v rámci analýzy citlivosti pro tři kritéria byly uvažovány dvě instance způsobů změn vah. Pro dvě a tři kritéria byly navíc odvozeny i obecné vztahy pro triviální, ale i zajímavé případy podoby indexních množin v libovolném problému.

Numerický přístup byl srovnán s matematickým modelem, se kterým byl v souladu. Za tímto účelem byly naprogramované kódy v softwaru R. Během výzkumu bylo zjištěno, že algoritmus metody ELECTRE III implementovaný v doplňku MS Excel SANNA 2014 se neshoduje s postupem uvedeným v [11]. Ukázalo se, že stanovení matice S a první indifferenční třídy je s [11] konzistentní, ale při určení celkového pořadí byly odhaleny jisté nepřesnosti. Z tohoto důvodu byla výsledná pořadí ověřena ručním výpočtem založeným na [11] a případné nepřesnosti byly opraveny.

Navrhovaný přístup hodnocení projektů OZE je vhodný v případě, že se rozhodujeme mezi více projekty. Pro hodnocení dopadu jednoho určitého projektu je možné použít přístup navržený v [5]. Ohodnocení plánovaného projektu je také možné vnímat jako problém určení vhodné lokality. V tomto případě by alternativou bylo umístění elektrárny [6].

Možné rozšíření dosavadního výzkumu je např. provedení porovnání různých přístupů k citlivostní analýze nebo porovnání citlivosti kompromisního řešení na změnu vah při použití různých metod VHV. Jaké výsledky dává analýza citlivosti na motivy simulačního přístupu např. v [7]? Je řešení významně odlišné od analýzy citlivosti z pohledu indexních množin? Bylo by možné použít přístup z pohledu indexních množin i na jiné metody třídy ELECTRE? Dalším námětem pro budoucí výzkum by mohla být citlivostní analýza nejen první indifferenční třídy, ale i dalších indifferenčních tříd.

Použitá literatura

- [1] Renewable energy. *European Commission* [online]. [vid. 2019-02-17] Dostupné z: <https://ec.europa.eu/energy/en/topics/renewable-energy>
- [2] Obnovitelné zdroje energie. *Ministerstvo životního prostředí* [online]. [vid. 2019-02-17] Dostupné z: https://www.mzp.cz/cz/obnovitelne_zdroje_energie
- [3] Podíl obnovitelných zdrojů energie na hrubé konečné spotřebě energie 2010-2017. *Ministerstvo průmyslu a obchodu* [online]. [vid. 2019-02-17] Dostupné z: <https://www.mpo.cz/cz/energetika/statistika/obnovitelne-zdroje-energie/podil-obnovitelnych-zdroju-energie-na-hrube-konecne-spotrebe-energie-2010-2017--241963/>
- [4] Otázky a odpovědi k rozvoji OZE po roce 2020. *Ministerstvo průmyslu a obchodu* [online]. [vid. 2019-02-17] Dostupné z: <https://www.mpo.cz/cz/energetika/electroenergetika/obnovitelne-zdroje/otazky-a-odpovedi-k-rozvoji-oze-po-roce-2020--243341/>
- [5] MACHÁČ, J., DUBOVÁ, L., ZAŇKOVÁ, L., MATĚJKA, J., NOBILIS, L., MAŇHAL, J. 2018. *Metodika zjišťování vlivu obnovitelných zdrojů energie na hospodářství a životní prostředí mikroregionu / MAS*. [vid. 2019-02-17] Dostupné z: <http://www.ieep.cz/metodika-zjistovani-vlivu-obnovitelnych-zdroju-energie-na-hospodarstvi-a-zivotni-prostredi-mikroregionu-mas/>
- [6] GOVINDAN, K., JEPSEN, M. B. 2016. ELECTRE: A comprehensive literature review on methodologies and applications. *European Journal of Operational Research*. Vol. 250, Issue 1, p. 1-29.
- [7] FANCELLO, G., CARTA, M., PADDA, P. 2014. A decision support system based on Electre III for safety analysis in a suburban road network. *Transportation Research Procedia*. Vol 3, p 175-184. ISSN 2352-1465.
- [8] VETSCHERA, R. 1986. Sensitivity Analysis for the ELECTRE Multicriteria Method. *Zeitschrift Operations Research*. Vol 30, Issue 4, pp B99-B117. ISSN 1432-5217.
- [9] *RIA.vlada.cz – pro lepší a přehlednější regulaci*. [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: <https://ria.vlada.cz/>
- [10] Posuzování vlivů na životní prostředí (EIA). *Ministerstvo životního prostředí*. [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: https://www.mzp.cz/cz/posuzovani_vlivu_z_ameru_zivotni_prostredi_eia
- [11] FIALA, P. 2013. *Modely a metody rozhodování*. 3. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, Oeconomica. ISBN 978-80-245-1981-4.

- [12] JABLONSKÝ, J. 2011. *Programy pro matematické modelování*. 2. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, Oeconomica. ISBN 978-80-245-1810-7.
- [13] KOPA, M. 2014. Vícekriteriální hodnocení variant [online]. [vid. 2019-04-11]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kopa/VRfinal.pdf>
- [14] JABLONSKÝ, J. 2007. *Operační výzkum*. 3. vyd. Praha: Professional publishing. ISBN 978-80-86946-44-3.
- [15] BENAYOUN, R., ROY, B., & SUSSMAN, B. 1966. Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples. Note de travail n°49 de la Direction Scientifique de la SEMA.
- [16] ROY, B. 1968. Classement et choix en presence de points de vue multiples (La methode ELECTRE). *Revue Francaise D Informatique de Recherche Operationnelle*. Tome 2 no. V1, p. 57–75.
- [17] SANNA [online]. [vid. 2019-04-12]. Dostupné z: <https://webhosting.vse.cz/jablon/sanna.htm>
- [18] *Lp_solve reference guide* [online]. [vid. 2019-04-01]. Dostupné z: <http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/>
- [19] BERKELAAR, S. 2015. Package ‚lpSolve‘. Version 5.6.13. Dostupné z: <https://cran.r-project.org/web/packages/lpSolve/lpSolve.pdf>
- [20] *Chomutov – oficiální stránky statutárního města* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: <http://www.chomutov-mesto.cz>
- [21] *Seznam FVE v České republice* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: <http://www.elektrarny.pro>
- [22] *Informační systém EIA* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: https://portal.cenia.cz/eiasea/view/eia100_cr
- [23] *VEHL – Větrné energie HL s.r.o.* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: <http://www.vehl.cz>
- [24] *ČSVE – Větrné elektrárny* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: <http://www.csve.cz/cz/aktualni-instalace>
- [25] 5 největších větrných elektráren v ČR. *Nazeleno.cz* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: https://www.nazeleno.cz/chap_2038/5-nejvetsich-vetrnych-elektraren-v-cr.aspx
- [26] *Větrné elektrárny Strážný Vrch, a.s.* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: <https://www.eru.cz/legacyerustaticdata/RZ2008/rz/subjekty/78.htm>

- [27] Zelená energie budoucnosti právě přichází z Oldřišova. *Ostwind*. [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: <http://web2014-cz.ostwind.de/informace-pro-vas/aktuality/tisk/info/zelena-energie-budoucnosti-prave-prichazi-z-oldrisova.html>
- [28] *REN Power CZ – Wikipedie* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/REN_Power_CZ
- [29] *EP ENERGY, a.s.* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: <https://www.epenergy.cz/>
- [30] Stavba větrných elektráren u Hrádku začala, celkem jich tu vyroste třináct. *iDNES.cz – s námi víte víc.* [online]. [vid. 2019-02-15] Dostupné z: [https://www.idnes.cz/liber ec/zpravy/vetrne-elektrarny-hradek-vaclavice-stavba-zacala.A170614_154344_liber ec-zpravy_jape](https://www.idnes.cz/liber/ec/zpravy/vetrne-elektrarny-hradek-vaclavice-stavba-zacala.A170614_154344_liber ec-zpravy_jape)

Přílohy

Příloha A: Základní informace o analyzovaných elektrárnách.....	61
Příloha B: Kompletní datový soubor	62
Příloha C: Značení a dominovanost jednotlivých variant	63
Příloha D: Stanovení pořadí variant pomocí metody ELECTRE III – příklad výpočtu	64
Příloha E: Kompletní řešení pro případ tří kritérií a fixace váhy v_1 při vypuštění dominovaných variant.....	67
Příloha F: Indexní množiny pro případ dvou kritérií při zahrnutí dominovaných variant.....	68
Příloha G: Řešení problému s dvěma kritérii při zahrnutí dominovaných variant při různých hodnotách vah v_1 a v_2	68
Příloha H: Matice S při zahrnutí dominovaných variant v případě dvou kritérií pokud $v_1 = 27$, $v_2 = 57$	69
Příloha I: Indexní množiny pro případ tří kritérií při zahrnutí dominovaných variant.....	70
Příloha J: Matice S při zahrnutí dominovaných variant v případě tří kritérií pokud $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,6$, $v_3 = 0,2$	71
Příloha K: Řešení v případě tří kritérií při zahrnutí dominovaných variant pro různé hodnoty vah v_1 , v_2 a v_3	71
Příloha L: Indexní množiny pro případ čtyř kritérií při zahrnutí dominovaných variant.....	72
Příloha M: Matice S při zahrnutí dominovaných variant v případě čtyř kritérií pokud $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,34$ a $v_4 = 0,13$	73
Příloha N: Řešení v případě čtyř kritérií při zahrnutí dominovaných variant pro různé hodnoty vah v_1 , v_2 , v_3 a v_4	74
Příloha O: Výpis programového kódu v softwaru R pro nalezení indexních množin.....	75
Příloha P: Výpis programového kódu v softwaru R pro řešení analýzy citlivosti pro dvě kritéria pomocí LP	75
Příloha Q: Výpis programového kódu v softwaru R pro řešení analýzy citlivosti pro tři kritéria při fixaci váhy v_1 pomocí LP.....	77
Příloha R: Výpis programového kódu v softwaru R pro řešení analýzy citlivosti pro tři kritéria při postupných změnách váhy v_1 a rovnoměrnému rozdělení rozdílu $1 - v_1$ mezi váhy v_2 a v_3 pomocí LP	79
Příloha S: Výpis programového kódu v softwaru R pro řešení analýzy citlivosti pro čtyři pomocí LP	82
Příloha T: Analýza citlivosti motivována článkem [7].....	84

Příloha A: Základní informace o analyzovaných elektrárnách

Název elektrárny	Okres	Kraj	Zahájení provozu	Výkon	Vlastník / provozovatel	Zdroj
FVE Město Chomutov	Chomutov	Ústecký	2013	<i>neuvedeno</i>	město Chomutov	[20]
FVE Kobeřice	Opava	Moravskoslezský	<i>neuvedeno</i>	0,018	Schindler, spol. s r.o.	[21]
FVE Ralsko	Česká Lípa	Liberecký	2010	55,8	ČEZ Obnovitelné zdroje, s.r.o.	[21]
FVE Solar Stříbro s.r.o.	Tachov	Plzeňský	2009	13,6	Solar Stříbro s.r.o.	[21]
FVE Ševětín	České Budějovice	Jihočeský	2010	29,9	ČEZ Obnovitelné zdroje, s.r.o.	[21]
FVE Triangle	Louny	Ústecký	2010	6	FVE Triangle a.s.	[21]
FVE Brno – Letiště Tuřany	Brno-město	Jihomoravský	2009	21,2	BS Solar Park a.s.	[21]
FVE Czech Vepřek	Mělník	Středočeský	2010	35,1	FVE Czech Novum s.r.o.	[21]
FVE Vranovská ves	Znojmo	Jihomoravský	2010	16	ČEZ Obnovitelné zdroje s.r.o.	[21]
VE Hora sv. Šebestiana	Chomutov	Ústecký	2008	4,5	Drobil–energo s.r.o.	[22]
VE Horní Loděnice – Lipina	Olomouc	Olomoucký	2009	18	Větrné energie HL s.r.o.	[23]
VE Chyňava	-	-	-	-	<i>Navrhovaný projekt</i>	[24]
VE Klínovec	-	-	-	-	<i>Navrhovaný projekt</i>	[24]
VE Kryštofovy Hamry	Chomutov	Ústecký	2009	42	Ecoenerg Windkraft GmbH	[25]
VE Mníšek – Nová Ves	Most	Ústecký	2007	2	ALTENERG, s.r.o.	[24]
VE Nová Ves v Horách – Strážný Vrch	Most	Ústecký	2008	8	Větrné elektrárny Strážný Vrch, a.s.	[26]
VE Oldřišov	Opava	Moravskoslezský	2014	2	Max Bögl OSTWIND GmbH	[27]
VE Petrovice	Ústí nad Labem	Ústecký	2007	4	REN Power CZ a.s.	[28]
VE Pchery	Kladna	Středočeský	2008	6	EP ENERGY, a.s.	[29]
VE Václavice	Liberec	Liberecký	2017	26,1	Solar city s.r.o.	[30]
VE Vítězná u Dvora Králové	Trutnov	Královéhradecký	2014	3	Eldaco a.s.	[24]

Příloha B: Kompletní datový soubor

Název elektrárny	Označení	Regionální HDP	Náklady pro obec	Příjmy pro obec	Zemědělství	Lesnictví	Využití dotací	Krátkodobá zaměstnanost	Dlouhodobá zaměstnanost	Ceny energií	Vzdělání a lidský kapitál	Dopady na vzhled obce	Eroze a kvalita půdy	Biodiverzita	Kvalita ovzduší	Hluk	Zábor zemědělské půdy	Úroveň infrastruktury
FVE Město Chomutov	a_1	3	3	3	0	0	3	0	0	3	0	3	3	3	2	2	3	0
FVE Koberice	a_2	2	3	1	2	0	0	3	2	0	0	1	2	1	2	2	1	0
FVE Ralsko	a_3	0	3	2	0	0	0	1	3	0	0	1	3	2	2	2	3	1
FVE Solar Stříbro s.r.o.	a_4	1	2	2	0	0	0	3	2	0	0	1	2	2	2	2	0	1
FVE Ševětín	a_5	0	3	2	2	0	0	0	2	0	0	1	2	1	2	2	0	0
FVE Triangle	a_6	3	3	3	0	0	1	1	2	2	0	1	1	1	2	2	1	3
FVE Brno – Letiště Tuřany	a_7	3	3	1	0	0	0	3	2	2	0	0	2	2	2	2	0	1
FVE Czech Vepřek	a_8	2	3	3	2	0	1	1	2	0	0	2	2	2	2	2	0	2
FVE Vranovská ves	a_9	0	3	2	2	0	0	0	2	0	0	3	2	1	2	2	0	2
VE Hora sv. Šebestiana	a_{10}	0	3	0	1	1	0	0	0	2	0	1	3	1	3	2	1	0
VE Horní Loděnice – Lipina	a_{11}	0	2	2	1	1	2	3	0	0	0	1	1	2	2	2	1	3
VE Chyňava	a_{12}	0	3	2	1	0	0	3	0	2	0	1	3	1	2	2	1	2
VE Klínovec	a_{13}	1	3	2	1	1	1	3	0	2	0	1	1	1	2	2	2	3
VE Kryštofovy Hamry	a_{14}	1	2	2	1	1	2	1	0	0	0	1	1	2	2	2	1	3
VE Mníšek – Nová Ves	a_{15}	1	3	3	1	0	0	1	0	0	0	1	3	1	2	2	3	2
VE Nová Ves v Horách – Strážný Vrch	a_{16}	0	3	0	1	1	0	0	0	2	0	1	1	1	3	0	1	0
VE Oldřišov	a_{17}	1	3	2	1	1	0	3	0	0	0	1	3	1	2	0	1	3
VE Petrovice	a_{18}	1	3	0	1	1	0	0	0	2	0	1	3	1	3	2	1	0
VE Pchery	a_{19}	1	3	3	1	1	1	0	0	2	3	1	1	1	2	2	2	2
VE Václavice	a_{20}	1	3	2	1	1	0	2	1	0	1	0	3	2	3	2	2	2
VE Vítězná u Dvora Králové	a_{21}	1	3	2	1	0	0	0	0	0	0	1	3	1	2	2	3	0

Příloha C: Značení a dominovanost jednotlivých variant

Značení	Název elektrárny	Dominovaná / nedominovaná varianta
a_1	FVE Město Chomutov	Nedominovaná
a_2	FVE Kobeřice	Nedominovaná
a_3	FVE Ralsko	Nedominovaná
a_4	FVE Solar Stříbro s.r.o.	Nedominovaná
a_5	FVE Ševětín	Dominovaná
a_6	FVE Triangle	Nedominovaná
a_7	FVE Brno – Letiště Tuřany	Nedominovaná
a_8	FVE Czech Vepřek	Nedominovaná
a_9	FVE Vranovská ves	Nedominovaná
a_{10}	VE Hora sv. Šebestiana	Dominovaná
a_{11}	VE Horní Loděnice – Lipina	Nedominovaná
a_{12}	VE Chyňava	Nedominovaná
a_{13}	VE Klínovec	Nedominovaná
a_{14}	VE Kryštofovy Hamry	Nedominovaná
a_{15}	VE Mníšek – Nová Ves	Nedominovaná
a_{16}	VE Nová Ves v Horách – Strážný Vrch	Dominovaná
a_{17}	VE Oldřišov	Nedominovaná
a_{18}	VE Petrovice	Nedominovaná
a_{19}	VE Pchery	Nedominovaná
a_{20}	VE Václavice	Nedominovaná
a_{21}	VE Vítězná u Dvora Králové	Dominovaná

Příloha D: Stanovení pořadí variant pomocí metody ELECTRE III – příklad výpočtu

Krok 1. Určíme matici stupňů preference na základě indexních množin v daném problému (tabulka 2).

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0,87 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0,47 & 0,87 & 0,87 \\ 0,13 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0,34 & 0,13 & 0,13 & 0,13 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,13 & 0,53 & 0,53 & 0 & 0,74 & 0,13 & 0,53 & 0,53 \\ 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,26 & 0,13 & 0,13 \\ 0,13 & 0,74 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0 & 0,87 & 0,87 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$c^0 = 0,87$$

$$c^1 = 0,74$$

Stanovení hodnot p_i^1 , q_i^1 a d_i^1

	a_1	a_2	a_4	a_6	a_7	a_8	a_{13}	a_{17}
p_i^1	4	0	0	0	0	3	0	0
q_i^1	0	1	2	0	0	0	2	2
d_i^1	4	-1	-2	0	0	3	-2	-2

$$\max_i d_i^1 = 4$$

$$A^1 = \{a_1\}$$

Krok 2. Od původního souboru variant oddělíme variantu a_1 a odstraníme příslušný řádek a sloupec v matici S , novou matici označme S_2 , kde

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,13 & 0,13 & 0,34 & 0,13 & 0,13 & 0,13 \\ 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,53 & 0,53 & 0 & 0,74 & 0,13 & 0,53 & 0,53 \\ 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,26 & 0,13 & 0,13 \\ 0,74 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0 & 0,87 & 0,87 \\ 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$c^0 = 0,87$$

$$c^1 = 0,74$$

Stanovení hodnot p_i^1 , q_i^1 a d_i^1

	a_2	a_4	a_6	a_7	a_8	a_{13}	a_{17}
p_i^1	0	0	0	0	3	0	0
q_i^1	0	1	0	0	0	1	1
d_i^1	0	-1	0	0	3	-1	-1

$$\max_i d_i^1 = 3$$

$$A^1 = \{a_8\}$$

Krok 3. Od předchozího souboru variant oddělíme variantu a_8 a odstraníme příslušný řádek a sloupec v matici $\mathbf{S}_2$, novou matici označme $\mathbf{S}_3$, kde

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0,13 & 0,13 & 0,34 & 0,13 & 0,13 \\ 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0 & 0 \\ 0,53 & 0,53 & 0 & 0,74 & 0,53 & 0,53 \\ 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,13 & 0,13 \\ 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$c^0 = 0,74$$

$$c^1 = 0,53$$

Stanovení hodnot p_i^1 , q_i^1 a d_i^1

	a_2	a_4	a_6	a_7	a_{13}	a_{17}
p_i^1	0	1	1	0	1	1
q_i^1	0	0	0	4	0	0
d_i^1	0	1	1	-4	1	1

$$\max_i d_i^1 = 1$$

$$A^1 = \{a_4, a_6, a_{13}, a_{17}\}$$

Krok 3b. V tomto kroku není množina A^1 jednoprvková, proto se pokusíme určit množinu A^2 . Vytvoříme matici $\mathbf{S}_{3,1}$ tak, že z matice $\mathbf{S}_3$ vybereme pouze řádky a sloupce odpovídající variantách v množině A^1 .

$$\mathbf{S}_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0,53 & 0 & 0,53 & 0,53 \\ 0 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0 & 0,13 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c^2 = 0,13$$

Stanovení hodnot p_i^2 , q_i^2 a d_i^2

	a_4	a_6	a_{13}	a_{17}
p_i^2	0	3	0	0
q_i^2	1	0	1	1
d_i^2	-1	3	-1	-1

$$\max_i d_i^2 = 3$$

$$A^2 = \{a_6\}$$

Varianty a_4 , a_{13} a a_{17} není možné dále uspořádat, neboť po vypuštění řádku a sloupce příslušné variantě a_6 vznikne nulová matice.

Krok 4. Od předchozího souboru variant oddělíme varianty a_4, a_6, a_{13}, a_{17} a odstraníme příslušné řádky a sloupce v matici $\mathbf{S}_3$, novou matici označme $\mathbf{S}_4$, kde

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0,34 \\ 0,13 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$c^0 = 0,34$$

$$c^1 = 0,13$$

Stanovení hodnot p_i^1, q_i^1 a d_i^1

	a_2	a_7
p_i^1	1	0
q_i^1	0	1
d_i^1	1	-1

$$\max_i d_i^1 = 1$$

$$A^1 = \{a_2\}$$

Krok 5. Poslední indifferenční třídu tvoří varianta a_7 . Pomocí metody ELECTRE III jsme stanovili pořadí variant zobrazené v tabulce 4.

Příloha E: Kompletní řešení pro případ tří kritérií a fixace váhy v_1 při vypuštění dominovaných variant

$v_3 \in (0; 0,2)$		$v_3 = 0,2$		$v_3 \in (0,2; 0,3]$		$v_3 \in (0,3; 0,4)$		$v_3 = 0,4$		$v_3 \in (0,4; 0,6)$		$v_3 = 0,6$		$v_3 \in (0,6; 1)$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_1	1.	a_1	1.	a_1	1.	a_1	1.	a_1	1.	a_1	1.	a_1	1.	a_7
2.	a_8	2.	a_8	2.	a_8	2.	a_7	2.	a_7	2.	a_7	2.	a_6	2.	a_1
3.	a_2	3.	a_2	3.	a_6	3.	a_8	3.	a_6	3.	a_6	3.	a_7	3.	a_6
4.	a_6	4.	a_6	4.	a_2	4.	a_6	4.	a_8	4.	a_8	3.	a_2	4.	a_2
	a_7	4.	a_7		a_7	5.	a_2	4.	a_2	5.	a_2		a_8	5.	a_8

Příloha F: Indexní množiny pro případ dvou kritérií při zahrnutí dominovaných variant

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
a_1	-	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	-	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}
a_2	{1}	-	{1}	-	{1}	{2}	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1,2}
a_3	{1}	-	-	-	-	{2}	-	{1}	-	-	-	-	-	-	{1}	{1}	{2}
a_4	{1}	-	{1}	-	{1}	{2}	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1,2}
a_6	{1}	-	-	-	-	{2}	-	{1}	-	-	-	-	-	-	{1}	{1}	{2}
a_7	{1}	-	{1}	-	{1}	-	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1}
a_8	{1}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	-	{1}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{1,2}	{1,2}	{2}
a_9	-	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	-	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}
a_{11}	{1}	-	{1}	-	{1}	{2}	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1,2}
a_{12}	{1}	-	{1}	-	{1}	{2}	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1,2}
a_{13}	{1}	-	{1}	-	{1}	{2}	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1,2}
a_{14}	{1}	-	-	-	-	{2}	-	{1}	-	-	-	-	-	-	{1}	{1}	{2}
a_{15}	{1}	-	-	-	-	{2}	-	{1}	-	-	-	-	-	-	{1}	{1}	{2}
a_{17}	{1}	-	{1}	-	{1}	{2}	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1,2}
a_{18}	-	-	-	-	-	{2}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	{2}
a_{19}	-	-	-	-	-	{2}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	{2}
a_{20}	{1}	-	{1}	-	{1}	-	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	-

Příloha G: Řešení problému s dvěma kritérii při zahrnutí dominovaných variant při různých hodnotách vah v_1 a v_2

Řešení $R_1^{(5)}$		Řešení $R_2^{(5)}$		Řešení $R_3^{(5)}$	
$v_1 = \frac{2}{7}, v_2 = \frac{5}{7}$		$v_1 = 0,4, v_2 = 0,6$		$v_1 = 0,7, v_2 = 0,3$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_8	1.	a_8	1.	a_8
	a_2		a_2		a_2
	a_4		a_4		a_4
2.	a_{11}	2.	a_{11}	2.	a_{11}
	a_{12}		a_{12}		a_{12}
	a_{13}		a_{13}		a_{13}
	a_{17}		a_{17}		a_{17}
3.	a_1	3.	a_1	3.	a_7
	a_9		a_9	4.	a_{20}
	a_3		a_3		a_3
4.	a_6	4.	a_6	5.	a_6
	a_{14}		a_{14}		a_{14}
	a_{15}		a_{15}		a_{15}
5.	a_{18}	5.	a_{18}	6.	a_1
	a_{19}		a_{19}		a_9
6.	a_7	6.	a_7	7.	a_{18}
7.	a_{20}	7.	a_{20}		a_{19}

Příloha H: Matice **S** při zahrnutí dominovaných variant v případě dvou kritérií pokud $v_1 = \frac{2}{7}$, $v_2 = \frac{5}{7}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 \\ 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 5/7 & 2/7 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 1 \\ 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/7 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 5/7 \\ 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 5/7 & 2/7 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 1 \\ 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/7 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 5/7 \\ 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 2/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 0 & 2/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 1 & 1 & 5/7 \\ 0 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 0 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 & 5/7 \\ 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 5/7 & 2/7 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 1 \\ 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 5/7 & 2/7 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 1 \\ 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 5/7 & 2/7 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 1 \\ 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/7 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 5/7 \\ 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/7 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 5/7 \\ 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 5/7 & 2/7 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/7 \\ 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 & 2/7 & 2/7 & 0 \end{pmatrix}$$

Příloha I: Indexní množiny pro případ tří kritérií při zahrnutí dominovaných variant

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
a_1	-	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2}	{2}	{2, 3}	{3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}
a_2	{1}	-	{1, 3}	{3}	{1}	{2}	{1}	{1, 3}	{3}	{3}	{3}	{1, 3}	{1, 3}	{3}	{1, 3}	{1, 3}	{1, 2, 3}
a_3	{1}	-	-	-	-	{2}	-	{1}	-	-	-	-	-	-	{1}	{1}	{2}
a_4	{1}	-	{1, 3}	-	{1}	{2}	{1}	{1, 3}	{3}	{3}	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1, 2}
a_6	{1}	{3}	{3}	{3}	-	{2}	{3}	{1, 3}	{3}	{3}	{3}	{3}	{3}	{3}	{1, 3}	{1, 3}	{2, 3}
a_7	{1}	{3}	{1, 3}	{3}	{1}	-	{1, 3}	{1, 3}	{3}	{3}	{3}	{1, 3}	{1, 3}	{3}	{1, 3}	{1, 3}	{1, 3}
a_8	{1}	{2}	{2, 3}	{2, 3}	{2}	{2}	-	{1, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{2, 3}
a_9	-	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	-	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}	{2}
a_{11}	{1}	-	{1}	-	{1}	{2}	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1, 2}
a_{12}	{1}	-	{1}	-	{1}	{2}	{1}	{1}	-	-	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1, 2}
a_{13}	{1}	-	{1, 3}	-	{1}	{2}	{1}	{1, 3}	{3}	{3}	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1, 2}
a_{14}	{1}	-	{3}	-	-	{2}	-	{1, 3}	{3}	{3}	-	-	-	-	{1}	{1}	{2}
a_{15}	{1}	-	{3}	-	-	{2}	-	{1, 3}	{3}	{3}	-	-	-	-	{1}	{1}	{2}
a_{17}	{1}	-	{1, 3}	-	{1}	{2}	{1}	{1, 3}	{3}	{3}	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	{1, 2}
a_{18}	-	-	{3}	-	-	{2}	-	{3}	{3}	{3}	-	-	-	-	-	-	{2}
a_{19}	-	-	{3}	-	-	{2}	-	{3}	{3}	{3}	-	-	-	-	-	-	{2}
a_{20}	{1}	-	{1, 3}	-	{1}		{1}	{1, 3}	{3}	{3}	-	{1}	{1}	-	{1}	{1}	-

Příloha J: Matice **S** při zahrnutí dominovaných variant v případě tří kritérií pokud $v_1 = 0,2$, $v_2 = 0,6$, $v_3 = 0,2$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,6 & 0,6 & 0,8 & 0,2 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 1 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0 & 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,8 & 0,8 & 0,6 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 1 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0 & 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0 & 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Příloha K: Řešení v případě tří kritérií při zahrnutí dominovaných variant pro různé hodnoty vah v_1 , v_2 a v_3

Řešení $R_1^{(6)}$		Řešení $R_2^{(6)}$		Řešení $R_3^{(6)}$	
$v_1 = 0,2, v_2 = 0,6, v_3 = 0,2$		$v_1 = 0,2, v_2 = 0,3, v_3 = 0,5$		$v_1 = 0,4, v_2 = 0,3, v_3 = 0,3$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_8	1.	a_8	1.	a_8
2.	a_2	2.	a_2	2.	a_2
3.	a_1	3.	a_1	3.	a_7
4.	a_4	4.	a_6	4.	a_4
	a_{13}	5.	a_7		a_{13}
	a_{17}		a_4		a_{17}
5.	a_6	6.	a_{13}	5.	a_6
	a_{11}		a_{17}	6.	a_{11}
	a_{12}	7.	a_{20}		a_{12}
6.	a_9	8.	a_{14}		a_{14}
7.	a_{14}		a_{15}	7.	a_{15}
	a_{15}		a_{18}	8.	a_{20}
8.	a_3	9.	a_{19}	9.	a_1
	a_{18}	10.	a_9	10.	a_3
	a_{19}	11.	a_{11}	11.	a_9
9.	a_7		a_{12}		a_{18}
10.	a_{20}	12.	a_3		a_{19}

Příloha L: Indexní množiny pro případ čtyř kritérií při zahrnutí dominovaných variant

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
a_1	-	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{3}	{2, 3}	{1, 3}	{1, 2}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 3}	{1, 2, 3}
a_2	{4}	-	{1, 4}	{1}	{4}	{3}	{4}	{1, 4}	{1}	{1}	{1}	{1, 4}	{1, 4}	{1}	{1, 2, 4}	{1, 4}	{1, 3, 4}
a_3	{4}	{2}	-	-	-	{2, 3}	-	{4}	-	-	-	-	-	-	{2, 4}	{4}	{3}
a_4	{4}	{2}	{1, 4}	-	{4}	{2, 3}	{4}	{1, 4}	{1}	{1}	-	{4}	{4}	-	{2, 4}	{4}	{3, 4}
a_6	{4}	{1, 2}	{1, 2}	{1, 2}	-	{2, 3}	{1}	{1, 2, 4}	{1, 2}	{1, 2}	{1, 2}	{1, 2}	{1}	{1, 2}	{1, 2, 4}	{1, 4}	{1, 2, 3}
a_7	{4}	{1}	{1, 4}	{1}	{4}	-	{1, 4}	{1, 4}	{1}	{1}	{1}	{1, 4}	{1, 4}	{1}	{1, 2, 4}	{1, 4}	{1, 4}
a_8	{4}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{3}	{2, 3}	-	{1, 2, 4}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{1, 3}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{1, 3, 4}	{1, 2, 3}
a_9	-	{2, 3}	{3}	{3}	{3}	{2, 3}	{3}	-	{3}	{3}	{3}	{3}	{3}	{3}	{2, 3}	{3}	{3}
a_{11}	{4}	{2}	{4}	-	{4}	{2, 3}	{4}	{4}	-	-	-	{4}	{4}	-	{2, 4}	{4}	{3, 4}
a_{12}	{4}	{2}	{4}	-	{4}	{2, 3}	{4}	{4}	-	-	-	{4}	{4}	-	{2, 4}	{4}	{3, 4}
a_{13}	{4}	{2}	{1, 4}	-	{4}	{2, 3}	{4}	{1, 4}	{1}	{1}	-	{4}	{4}	-	{2, 4}	{4}	{3, 4}
a_{14}	{4}	{2}	{1}	-	-	{2, 3}	-	{1, 4}	{1}	{1}	-	-	-	-	{2, 4}	{4}	{3}
a_{15}	{4}	{2}	{1, 2}	{2}	-	{2, 3}	-	{1, 2, 4}	{1, 2}	{1, 2}	{2}	{2}	-	{2}	{2, 4}	{4}	{2, 3}
a_{17}	{4}	{2}	{1, 4}	-	{4}	{2, 3}	{4}	{1, 4}	{1}	{1}	-	{4}	{4}	-	{2, 4}	{4}	{3, 4}
a_{18}	-	-	{1}	-	-	{3}	-	{1}	{1}	{1}	-	-	-	-	-	-	{3}
a_{19}	-	{2}	{1, 2}	{2}	-	{2, 3}	-	{1, 2}	{1, 2}	{1, 2}	{2}	{2}	-	{2}	{2}	-	{2, 3}
a_{20}	{4}	{2}	{1, 4}	-	{4}	{2}	{4}	{1, 4}	{1}	{1}	-	{4}	{4}	-	{2, 4}	{4}	-

Příloha M: Matice **S** při zahrnutí dominovaných variant v případě čtyř kritérií pokud $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 = 0,34$ a $v_4 = 0,13$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0,87 & 0,87 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0,47 & 0,53 & 0,87 & 0,87 & 0,87 & 0,87 & 0,47 & 0,87 & 0,87 & 0,47 & 0,87 \\ 0,13 & 0 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0,34 & 0,13 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0,26 & 0,26 & 0,13 & 0,66 & 0,26 & 0,6 \\ 0,13 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,74 & 0 & 0,13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,53 & 0,13 & 0,34 \\ 0,13 & 0,4 & 0,26 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,53 & 0,13 & 0,47 \\ 0,13 & 0,53 & 0,53 & 0,53 & 0 & 0,74 & 0,13 & 0,66 & 0,53 & 0,53 & 0,53 & 0,53 & 0,13 & 0,53 & 0,66 & 0,26 & 0,87 \\ 0,13 & 0,13 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,26 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0,26 & 0,26 & 0,13 & 0,66 & 0,26 & 0,26 \\ 0,13 & 0,74 & 0,87 & 0,87 & 0,34 & 0,74 & 0 & 0,66 & 0,87 & 0,87 & 0,87 & 0,87 & 0,47 & 0,87 & 1 & 0,6 & 0,87 \\ 0 & 0,74 & 0,34 & 0,34 & 0,34 & 0,74 & 0,34 & 0 & 0,34 & 0,34 & 0,34 & 0,34 & 0,34 & 0,34 & 0,74 & 0,34 & 0,34 \\ 0,13 & 0,4 & 0,13 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,53 & 0,13 & 0,47 \\ 0,13 & 0,4 & 0,13 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,53 & 0,13 & 0,47 \\ 0,13 & 0,4 & 0,26 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,53 & 0,13 & 0,47 \\ 0,13 & 0,4 & 0,13 & 0 & 0 & 0,74 & 0 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,53 & 0,13 & 0,34 \\ 0,13 & 0,4 & 0,53 & 0,4 & 0 & 0,74 & 0 & 0,66 & 0,53 & 0,53 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0,4 & 0,53 & 0,13 & 0,74 \\ 0,13 & 0,4 & 0,26 & 0 & 0,13 & 0,74 & 0,13 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,53 & 0,13 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,13 & 0 & 0 & 0,34 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,34 \\ 0 & 0,4 & 0,53 & 0,4 & 0 & 0,74 & 0 & 0,53 & 0,53 & 0,53 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0,74 \\ 0,13 & 0,4 & 0,26 & 0 & 0,13 & 0,4 & 0,13 & 0,26 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,13 & 0,13 & 0 & 0,53 & 0,13 & 0 \end{pmatrix}$$

Příloha N: Řešení v případě čtyř kritérií při zahrnutí dominovaných variant pro různé hodnoty vah v_1, v_2, v_3 a v_4

Řešení $R_1^{(7)}$		Řešení $R_2^{(7)}$		Řešení $R_3^{(7)}$	
$v_1 = 0,13, v_2 = 0,4,$ $v_3 = 0,34, v_4 = 0,13$		$v_1 = 0,13, v_2 = 0,4,$ $v_3 = 0,25, v_4 = 0,22$		$v_1 = 0,13, v_2 = 0,4,$ $v_3 = 0,02, v_4 = 0,45$	
Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_8	1.	a_8	1.	a_8
2.	a_1	2.	a_1	2.	a_6
3.	a_6	3.	a_6	3.	a_7
4.	a_9	4.	a_{15}	4.	a_2
5.	a_{15}	5.	a_2	5.	a_{15}
6.	a_{19}	6.	a_7		a_4
	a_4	7.	a_{19}	6.	a_{13}
7.	a_{13}	8.	a_9		a_{17}
	a_{17}		a_4	7.	a_{20}
	a_{11}	9.	a_{13}		a_{11}
8.	a_{12}		a_{17}	8.	a_{12}
	a_{14}		a_{11}	9.	a_{14}
9.	a_3	10.	a_{12}	10.	a_3
10.	a_2	11.	a_{20}	11.	a_1
11.	a_7	12.	a_{14}	12.	a_{19}
12.	a_{20}	13.	a_3	13.	a_9
13.	a_{18}	14.	a_{18}	14.	a_{18}

Příloha O: Výpis programového kódu v softwaru R pro nalezení indexních množin

```
nalezeniVztahu = function(Y){
  p = nrow(Y); h = ncol(Y);
  A = matrix(NA, nrow = p, ncol = p)
  for (i in 1:p){
    for (k in 1:p){
      if (k != i){
        for (j in 1:h){
          if (Y[i,j] > Y[k,j]){
            if (is.na(A[i,k])){A[i,k] = paste(j)}
            else {A[i,k] = paste(A[i,k], ',', j)}
          }
        }
      }
    }
  }
  A[is.na(A)] = paste('-', '-')
  return(A)
}
```

Příloha P: Výpis programového kódu v softwaru R pro řešení analýzy citlivosti pro dvě kritéria pomocí LP

```
# Load lpSolve
library(lpSolve)

M = 10^(-3)
IM = matrix(c(1,0,0,1), ncol = 2, byrow = T)
souctova = rep(1,times = ncol(IM))
nulova = diag(ncol(IM))
B = c(rep(M, times = nrow(IM)-1), 1, rep(M, times = ncol(IM)))
constranints_direction = c(">=", "=", ">=", ">=")
A=rbind(IM, souctova, nulova)
##inicializace reseni
typ = c("dve.1.max1", "dve.1.min1", "dve.2.max1", "dve.2.min1",
        "dve.1.max2", "dve.1.min2", "dve.2.max2", "dve.2.min2")
smer = rep(c("max", "min"), times = 2*nrow(IM))
status = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
v1 = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
v2 = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
reseni = data.frame(typ, smer, status, v1, v2)
##reseni pro všechny typy indiferenčních tříd (dvě váhy)
## max / min v1
C = c(1,0)
for (i in 1:nrow(IM)){
  d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1), byrow = T, ncol = ncol(IM))
  IM.bezmax = IM[-i,]
  IM.minus = d - IM.bezmax
  A = rbind(IM.minus, souctova, nulova)
  optimum.min = lp(direction="min",
```

```

        objective.in = C,
        const.mat = A,
        const.dir = constanints_direction,
        const.rhs = B,
        all.int = F)
optimum.max = lp(direction="max",
        objective.in = C,
        const.mat = A,
        const.dir = constanints_direction,
        const.rhs = B,
        all.int = F)
reseni$status[2*i-1] = optimum.max$status
reseni$status[2*i] = optimum.min$status
if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
reseni$v1[2*i-1] = optimum.max$solution[1]
reseni$v1[2*i] = optimum.min$solution[1]
reseni$v2[2*i-1] = optimum.max$solution[2]
reseni$v2[2*i] = optimum.min$solution[2]
}
}
## max / min v2
C = c(0,1)
for (i in 1:nrow(IM)){
d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1),byrow = T, ncol = ncol(IM))
IM.bezmax = IM[-i,]
IM.minus = d - IM.bezmax
A = rbind(IM.minus, souctova, nulova)
optimum.min = lp(direction="min",
        objective.in = C,
        const.mat = A,
        const.dir = constanints_direction,
        const.rhs = B,
        all.int = F)
optimum.max = lp(direction="max",
        objective.in = C,
        const.mat = A,
        const.dir = constanints_direction,
        const.rhs = B,
        all.int = F)
reseni$status[2*i-1+4] = optimum.max$status
reseni$status[2*i+4] = optimum.min$status
if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
reseni$v1[2*i-1+4] = optimum.max$solution[1]
reseni$v1[2*i+4] = optimum.min$solution[1]
reseni$v2[2*i-1+4] = optimum.max$solution[2]
reseni$v2[2*i+4] = optimum.min$solution[2]
}
}
}

```

Příloha Q: Výpis programového kódu v softwaru R pro řešení analýzy citlivosti pro tři kritéria při fixaci váhy v_1 pomocí LP

```
# Load lpSolve
library(lpSolve)

M = 10^(-3)
IM = matrix(c(1,0,0,
              0,1,0,
              0,0,1,
              1,0,1,
              0,1,1), ncol = 3, byrow = T)
souctova = rep(1,times = 3)
nulova = diag(3)
B = c(rep(M, times = nrow(IM)-1), 1, 0.2, rep(M, times = 2))
constranints_direction = c(">=", ">=", ">=", ">=",
                           "=",
                           "=", ">=", ">=")

##inicializace matice reseni
typ = c("fix.1.max2", "fix.1.min2",
        "fix.2.max2", "fix.2.min2",
        "fix.3.max2", "fix.3.min2",
        "fix.13.max2", "fix.13.min2",
        "fix.23.max2", "fix.23.min2",
        "fix.1.max3", "fix.1.min3",
        "fix.2.max3", "fix.2.min3",
        "fix.3.max3", "fix.3.min3",
        "fix.13.max3", "fix.13.min3",
        "fix.23.max3", "fix.23.min3")
status = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
v1 = rep(0.2, times = 4*nrow(IM))
v2 = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
v3 = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
reseni = data.frame(typ, status, v1, v2, v3)
## max / min v2
C = c(0,1,0)
i=1
for (i in 1:nrow(IM)){
  d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1),byrow = T, ncol = ncol(IM))
  IM.bezmax = IM[-i,]
  IM.minus = d - IM.bezmax
  A = rbind(IM.minus, souctova, nulova)

  optimum.min = lp(direction="min",
                    objective.in = C,
                    const.mat = A,
                    const.dir = constranints_direction,
                    const.rhs = B,
                    all.int = F)
```

```

optimum.max = lp(direction="max",
                 objective.in = C,
                 const.mat = A,
                 const.dir = constrainints_direction,
                 const.rhs = B,
                 all.int = F)

reseni$status[2*i-1] = optimum.max$status
reseni$status[2*i] = optimum.min$status
if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
  reseni$v2[2*i-1] = optimum.max$solution[2]
  reseni$v2[2*i] = optimum.min$solution[2]
  reseni$v3[2*i-1] = optimum.max$solution[3]
  reseni$v3[2*i] = optimum.min$solution[3]
}
}
## max / min v3
C = c(0,0,1)
for (i in 1:nrow(IM)){
  d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1),byrow = T, ncol = ncol(IM))
  IM.bezmax = IM[-i,]
  IM.minus = d - IM.bezmax
  A = rbind(IM.minus, souctova, nulova)

  optimum.min = lp(direction="min",
                   objective.in = C,
                   const.mat = A,
                   const.dir = constrainints_direction,
                   const.rhs = B,
                   all.int = F)

  optimum.max = lp(direction="max",
                   objective.in = C,
                   const.mat = A,
                   const.dir = constrainints_direction,
                   const.rhs = B,
                   all.int = F)

  reseni$status[2*i-1 + 10] = optimum.max$status
  reseni$status[2*i +10] = optimum.min$status
  if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
    reseni$v2[2*i-1+10] = optimum.max$solution[2]
    reseni$v2[2*i+10] = optimum.min$solution[2]
    reseni$v3[2*i-1+10] = optimum.max$solution[3]
    reseni$v3[2*i+10] = optimum.min$solution[3]
  }
}
}

```

Příloha R: Výpis programového kódu v softwaru R pro řešení analýzy citlivosti pro tři kritéria při postupných změnách váhy v_1 a rovnoměrnému rozdělení rozdílu $1 - v_1$ mezi váhy v_2 a v_3 pomocí LP

```
# Load lpSolve
library(lpSolve)

M = 10^(-3)
IM = matrix(c(1,0,0,
              0,1,0,
              0,0,1,
              1,0,1,
              0,1,1), ncol = 3, byrow = T)
souctova = rep(1,times = ncol(IM))
nulova = diag(ncol(IM))
hodnoty = matrix(c(1/2,1,0,
                  1/2,0,1), byrow = T, ncol = ncol(IM))
B = c(rep(M, times = nrow(IM)-1), 1, rep(M, times = ncol(IM)), 1/2, 1/2)
constranints_direction = c(">=", ">=", ">=", ">=",
                           "=",
                           ">=", ">=", ">=",
                           "=", "=")

##inicializace reseni
typ = c("roz.1.max1", "roz.1.min1", "roz.2.max1", "roz.2.min1",
        "roz.3.max1", "roz.3.min1", "roz.13.max1", "roz.13.min1",
        "roz.23.max1", "roz.23.min1",

        "roz.1.max2", "roz.1.min2", "roz.2.max2", "roz.2.min2",
        "roz.3.max2", "roz.3.min2", "roz.13.max2", "roz.13.min2",
        "roz.23.max2", "roz.23.min2",

        "roz.1.max3", "roz.1.min3", "roz.2.max3", "roz.2.min3",
        "roz.3.max3", "roz.3.min3", "roz.13.max3", "roz.13.min3",
        "roz.23.max3", "roz.23.min3")
status = rep(NA, times = 6*nrow(IM))
v1 = rep(NA, times = 6*nrow(IM))
v2 = rep(NA, times = 6*nrow(IM))
v3 = rep(NA, times = 6*nrow(IM))
reseni = data.frame(typ, status, v1, v2, v3)

C = c(1,0,0)
## max / min v1
for (i in 1:nrow(IM)){
  d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1),byrow = T, ncol = ncol(IM))
  IM.bezmax = IM[-i,]
  IM.minus = d - IM.bezmax
  A = rbind(IM.minus, souctova, nulova, hodnoty)

  optimum.min = lp(direction="min",
                   objective.in = C,
                   const.mat = A,
```

```

        const.dir = constanints_direction,
        const.rhs = B,
        all.int = F)

    optimum.max = lp(direction="max",
        objective.in = C,
        const.mat = A,
        const.dir = constanints_direction,
        const.rhs = B,
        all.int = F)

    reseni$status[2*i-1] = optimum.max$status
    reseni$status[2*i] = optimum.min$status
    if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
    reseni$v1[2*i-1] = optimum.max$solution[1]
    reseni$v1[2*i] = optimum.min$solution[1]
    reseni$v2[2*i-1] = optimum.max$solution[2]
    reseni$v2[2*i] = optimum.min$solution[2]
    reseni$v3[2*i-1] = optimum.max$solution[3]
    reseni$v3[2*i] = optimum.min$solution[3]
    }
}

C = c(0,1,0)
## max / min v2
for (i in 1:nrow(IM)){
  d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1),byrow = T, ncol = ncol(IM))
  IM.bezmax = IM[-i,]
  IM.minus = d - IM.bezmax
  A = rbind(IM.minus, souctova, nulova, hodnoty)

  optimum.min = lp(direction="min",
    objective.in = C,
    const.mat = A,
    const.dir = constanints_direction,
    const.rhs = B,
    all.int = F)

  optimum.max = lp(direction="max",
    objective.in = C,
    const.mat = A,
    const.dir = constanints_direction,
    const.rhs = B,
    all.int = F)

  reseni$status[2*i-1+10] = optimum.max$status
  reseni$status[2*i+10] = optimum.min$status
  if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
    reseni$v1[2*i-1+10] = optimum.max$solution[1]

```

```

    reseni$v1[2*i+10] = optimum.min$solution[1]
    reseni$v2[2*i-1+10] = optimum.max$solution[2]
    reseni$v2[2*i+10] = optimum.min$solution[2]
    reseni$v3[2*i-1+10] = optimum.max$solution[3]
    reseni$v3[2*i+10] = optimum.min$solution[3]
  }
}

C = c(0,0,1)
## max / min v3
for (i in 1:nrow(IM)){
  d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1),byrow = T, ncol = ncol(IM))
  IM.bezmax = IM[-i,]
  IM.minus = d - IM.bezmax
  A = rbind(IM.minus, souctova, nulova, hodnoty)

  optimum.min = lp(direction="min",
                    objective.in = C,
                    const.mat = A,
                    const.dir = constrainints_direction,
                    const.rhs = B,
                    all.int = F)

  optimum.max = lp(direction="max",
                    objective.in = C,
                    const.mat = A,
                    const.dir = constrainints_direction,
                    const.rhs = B,
                    all.int = F)

  reseni$status[2*i-1+20] = optimum.max$status
  reseni$status[2*i+20] = optimum.min$status
  if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
    reseni$v1[2*i-1+20] = optimum.max$solution[1]
    reseni$v1[2*i+20] = optimum.min$solution[1]
    reseni$v2[2*i-1+20] = optimum.max$solution[2]
    reseni$v2[2*i+20] = optimum.min$solution[2]
    reseni$v3[2*i-1+20] = optimum.max$solution[3]
    reseni$v3[2*i+20] = optimum.min$solution[3]
  }
}

```

Příloha S: Výpis programového kódu v softwaru R pro řešení analýzy citlivosti pro čtyři pomocí LP

```
# Load lpSolve
library(lpSolve)
M = 10^(-3)
IM = matrix(c(1,0,0,0,
              0,1,0,0,
              0,0,1,0,
              0,0,0,1,
              1,1,0,0,
              1,0,1,0,
              1,0,0,1,
              0,1,1,0,
              1,1,1,0), ncol = 4, byrow = T)
souctova = rep(1,times = 4)
nulova = diag(4)
B = c(rep(M, times = nrow(IM)-1), 1, 0.13,0.4, rep(M, times = 2))
constranints_direction = c (">=",">=",">=",">=",">=",">=",">=",">=",
                             "=", "=", "=", ">=", ">=")
##inicializace matice reseni
typ = c("fix.1.max3","fix.1.min3",
        "fix.2.max3","fix.2.min3",
        "fix.3.max3","fix.3.min3",
        "fix.4.max3","fix.4.min3",
        "fix.12.max3","fix.12.min3",
        "fix.13.max3","fix.13.min3",
        "fix.14.max3","fix.14.min3",
        "fix.23.max3","fix.23.min3",
        "fix.123.max3","fix.123.min3",
        "fix.1.max4","fix.1.min4",
        "fix.2.max4","fix.2.min4",
        "fix.3.max4","fix.3.min4",
        "fix.4.max4","fix.4.min4",
        "fix.12.max4","fix.12.min4",
        "fix.13.max4","fix.13.min4",
        "fix.14.max4","fix.14.min4",
        "fix.23.max4","fix.23.min4",
        "fix.123.max4","fix.123.min4")
status = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
v1 = rep(0.13, times = 4*nrow(IM))
v2 = rep(0.4, times = 4*nrow(IM))
v3 = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
v4 = rep(NA, times = 4*nrow(IM))
reseni = data.frame(typ, status, v1, v2, v3,v4)
## max / min v3
C = c(0,0,1,0)
for (i in 1:nrow(IM)){
  d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1),byrow = T, ncol = ncol(IM))
  IM.bezmax = IM[-i,]
  IM.minus = d - IM.bezmax
```

```

A = rbind(IM.minus, souctova, nulova)
optimum.min = lp(direction="min",
                 objective.in = C,
                 const.mat = A,
                 const.dir = constrainints_direction,
                 const.rhs = B,
                 all.int = F)
optimum.max = lp(direction="max",
                 objective.in = C,
                 const.mat = A,
                 const.dir = constrainints_direction,
                 const.rhs = B,
                 all.int = F)
reseni$status[2*i-1] = optimum.max$status
reseni$status[2*i] = optimum.min$status
if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
  reseni$v3[2*i-1] = optimum.max$solution[3]
  reseni$v3[2*i] = optimum.min$solution[3]
  reseni$v4[2*i-1] = optimum.max$solution[4]
  reseni$v4[2*i] = optimum.min$solution[4]
}
}
## max / min v4
C = c(0,0,0,1)
for (i in 1:nrow(IM)){
  d = matrix(rep(IM[i,], times = nrow(IM)-1),byrow = T, ncol = ncol(IM))
  IM.bezmax = IM[-i,]
  IM.minus = d - IM.bezmax
  A = rbind(IM.minus, souctova, nulova)
  optimum.min = lp(direction="min",
                  objective.in = C,
                  const.mat = A,
                  const.dir = constrainints_direction,
                  const.rhs = B,
                  all.int = F)
  optimum.max = lp(direction="max",
                  objective.in = C,
                  const.mat = A,
                  const.dir = constrainints_direction,
                  const.rhs = B,
                  all.int = F)
  reseni$status[2*i-1 + 18] = optimum.max$status
  reseni$status[2*i + 18] = optimum.min$status
  if (optimum.max$status == 0 && optimum.min$status == 0){
    reseni$v3[2*i-1+18] = optimum.max$solution[3]
    reseni$v3[2*i+18] = optimum.min$solution[3]
    reseni$v4[2*i-1+18] = optimum.max$solution[4]
    reseni$v4[2*i+18] = optimum.min$solution[4]
  }
}
}

```

Analýza citlivosti získaného pořadí variant postupnými změnami ve váhovém vektoru

Fancello [7] ve svém článku založil analýzu citlivosti získaného pořadí indifferenčních tříd na postupných změnách agregovaných kritérií. Prvním krokem je agregace kritérií do menšího počtu makrokritérií podle věcné souvislosti. Dále jsou vytvořeny tři sety vah, které obsahují příslušný počet testovaných kombinací vah.

V prvním setu vah jsou postupně váhy jednotlivých makrokritérií zvyšovány a snižovány o 25 %, ve druhém setu o 35 % a ve třetím setu jsou váhy měněny o 50 %. Ze všech získaných řešení je provedena frekvenční analýza možných ohodnocení pro všechny varianty, na základě které je učiněn závěr ohledně stability původního řešení.

Značení bylo převzato z článku [7], jednotlivá řešení jsou značena jako s_i , případně $s_i^{(\pm \cdot \%)}$, $i = 2, \dots, 9$ a sety vah jsou značeny jako P_i , $i = 1, 2, 3$.

Analýza kompletního datového souboru

První variantou analýzy citlivosti je analýza celého souboru z pohledu všech relevantních kritérií. Aplikujeme-li na množinu nedominovaných alternativ A_N (výchozí datový soubor je v příloze C) s uvažovaným vektorem $\mathbf{v}$ (viz str. 13) metodu ELECTRE III, získáme řešení s_1 , které zachycuje tabulka 31.

Tabulka 31: Výchozí řešení pro analýzu kompletního souboru

Ind. třída	Varianta	Ind. třída	Varianta
1.	a_{13}	10.	a_6
2.	a_1	11.	a_{15}
3.	a_{19}	12.	a_{12}
4.	a_8	13.	a_3
5.	a_{20}	14.	a_9
6.	a_{18}	15.	a_2
7.	a_{17}	16.	a_7
8.	a_{11}	17.	a_4
9.	a_{14}		

V rámci analyzovaných dat budou kritéria seskupena do čtyř makrokritérií:

- (i) Ekonomický pilíř: $z_1 = \{\text{HDP, náklady, příjmy, zemědělství, lesnictví, dotace}\}$;
- (ii) Sociální pilíř: $z_2 = \{\text{krátkodobá zaměstnanost, dlouhodobá zaměstnanost, ceny energií, vzdělání, vzhled}\}$;
- (iii) Environmentální pilíř: $z_3 = \{\text{eroze, biodiverzita, kvalita vzduchu, hluk, zábor půdy}\}$;
- (iv) Inovační pilíř: $z_4 = \{\text{infrastruktura}\}$.

Výchozí váhy makrokritérií $w_i, i = 1, 2, 3, 4$ jsou určeny jako

$$w_1 = v_{\text{HDP}} + v_{\text{náklady}} + v_{\text{příjmy}} + v_{\text{zemědělství}} + v_{\text{lesnictví}} + v_{\text{dotace}} = 0,371,$$

$$w_2 = v_{\text{krátkodobá zaměstnanost}} + v_{\text{dlouhodobá zaměstnanost}} + v_{\text{ceny energií}} + v_{\text{vzdělání}} + v_{\text{vzhled}} = 0,286,$$

$$w_3 = v_{\text{eroze}} + v_{\text{biodiverzita}} + v_{\text{kvalita vzduchu}} + v_{\text{hluk}} + v_{\text{záběr půdy}} = 0,293,$$

$$w_4 = v_{\text{infrastruktura}} = 0,050,$$

přičemž nové váhy jednotlivých kritérií při aplikaci metody ELECTRE III budou v rámci jednoho makrokritéria rovnoměrně rozděleny, tedy např. $v'_{\text{HDP}} = \frac{w_1}{6}$ nebo $v'_{\text{eroze}} = \frac{w_3}{5}$ atd.

V prvním setu vah P_1 byly váhy $w_i \forall i$ postupně zvýšeny a sníženy o 25 %, v setu P_2 byly váhy střídavě zvýšeny a sníženy o 35 % a v setu P_3 byly váhy střídavě zvýšeny a sníženy o 50 %. V rámci každého setu je testováno 8 alternativ $S = \{s_2^{(\cdot)}, s_3^{(\cdot)}, s_4^{(\cdot)}, s_5^{(\cdot)}, s_6^{(\cdot)}, s_7^{(\cdot)}, s_8^{(\cdot)}, s_9^{(\cdot)}\}$. Např. pro řešení $s_2^{(\pm 25\%)}$ byly použity váhy $\mathbf{w} = (1,25 \cdot w_1, w_2, w_3, w_4)$ a pro řešení $s_3^{(\pm 25\%)}$ byly použity váhy $\mathbf{w} = (0,75 \cdot w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Sety jsou znázorněny v tabulkách 32, 33 a 34 (pro lepší zobrazení byly numerické hodnoty zaokrouhleny na 3 desetinná místa). Zvýrazněny jsou vždy hodnoty váhy, které se v daném případě mění. Např. v alternativě $s_2^{(\pm 25\%)}$ byla zvýšena hodnota váhy w_1 o 25 % a v alternativě $s_3^{(\pm 25\%)}$ byla snížena hodnota váhy w_1 o 25 %.

Tabulka 32: Set vah $P_1, \pm 25\%$

	$s_2^{(\pm 25\%)}$	$s_3^{(\pm 25\%)}$	$s_4^{(\pm 25\%)}$	$s_5^{(\pm 25\%)}$	$s_6^{(\pm 25\%)}$	$s_7^{(\pm 25\%)}$	$s_8^{(\pm 25\%)}$	$s_9^{(\pm 25\%)}$
w_1	0,464	0,279	0,371	0,371	0,371	0,371	0,371	0,371
w_2	0,286	0,286	0,357	0,214	0,286	0,286	0,286	0,286
w_3	0,293	0,293	0,293	0,293	0,366	0,220	0,293	0,293
w_4	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,063	0,038

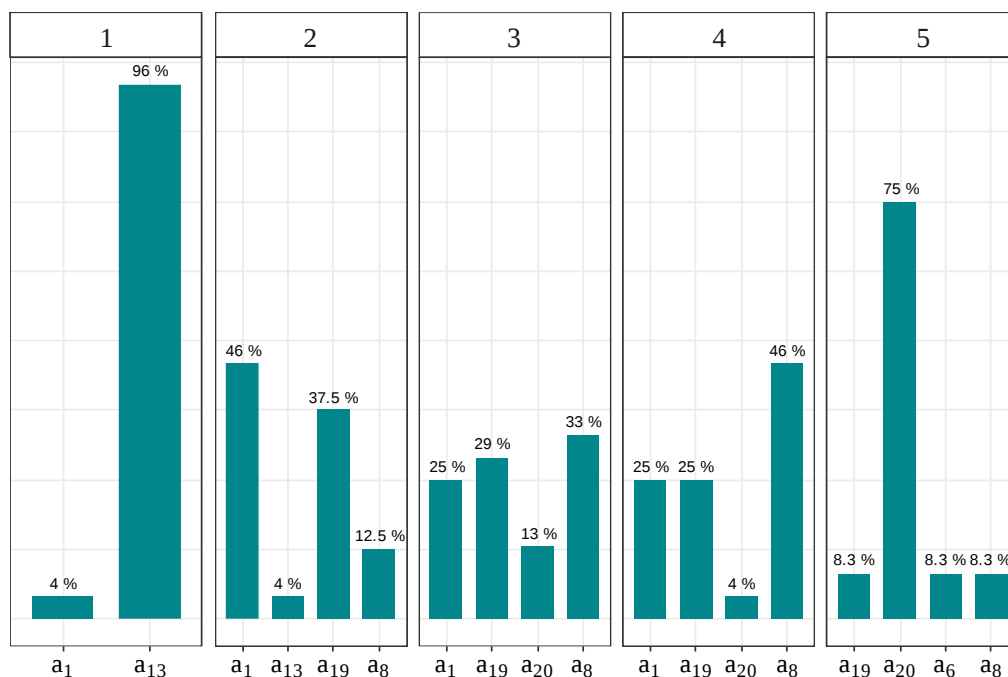
Tabulka 33: Set vah $P_2, \pm 35\%$

	$s_2^{(\pm 35\%)}$	$s_3^{(\pm 35\%)}$	$s_4^{(\pm 35\%)}$	$s_5^{(\pm 35\%)}$	$s_6^{(\pm 35\%)}$	$s_7^{(\pm 35\%)}$	$s_8^{(\pm 35\%)}$	$s_9^{(\pm 35\%)}$
w_1	0,501	0,241	0,371	0,371	0,371	0,371	0,371	0,371
w_2	0,286	0,286	0,386	0,186	0,286	0,286	0,286	0,286
w_3	0,293	0,293	0,293	0,293	0,395	0,190	0,293	0,293
w_4	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,068	0,033

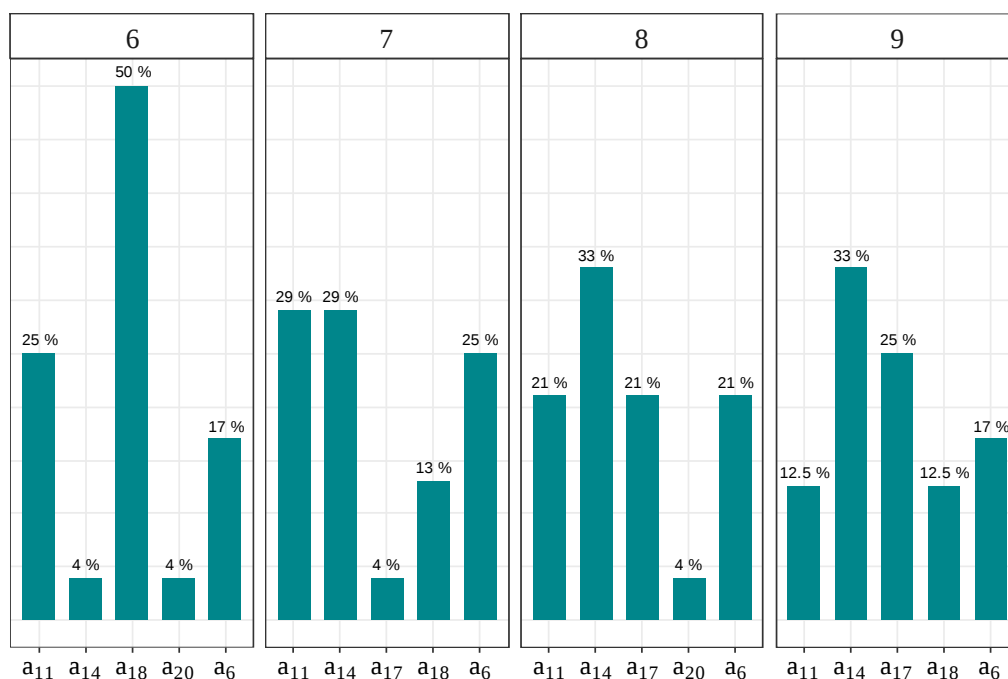
Tabulka 34: Set vah $P_3, \pm 50\%$

	$s_2^{(\pm 50\%)}$	$s_3^{(\pm 50\%)}$	$s_4^{(\pm 50\%)}$	$s_5^{(\pm 50\%)}$	$s_6^{(\pm 50\%)}$	$s_7^{(\pm 50\%)}$	$s_8^{(\pm 50\%)}$	$s_9^{(\pm 50\%)}$
w_1	0,557	0,186	0,371	0,371	0,371	0,371	0,371	0,371
w_2	0,286	0,286	0,429	0,143	0,286	0,286	0,286	0,286
w_3	0,293	0,293	0,293	0,293	0,439	0,146	0,293	0,293
w_4	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,075	0,025

Po normalizaci vah byla na každou kombinaci v sítích P_1 , P_2 a P_3 aplikována metoda ELECTRE III. Graf 4 znázorňuje procentuální zastoupení případů, ve kterých tvoří daná alternativa 1. až 5. indifferenční třídu (hodnoty jsou zaokrouhlené). Frekvence dosažení 6. až 17. indifferenční třídy jsou znázorněny v grafech 5, 6 a 7.



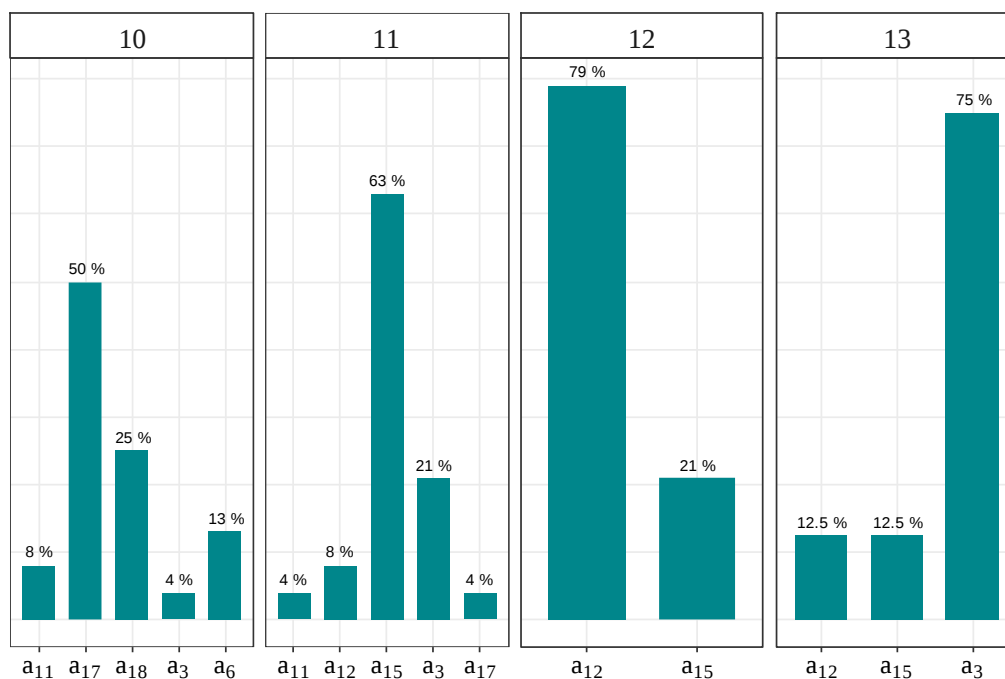
Graf 4: Frekvence dosažení 1. až 5. indifferenční třídy danými alternativami



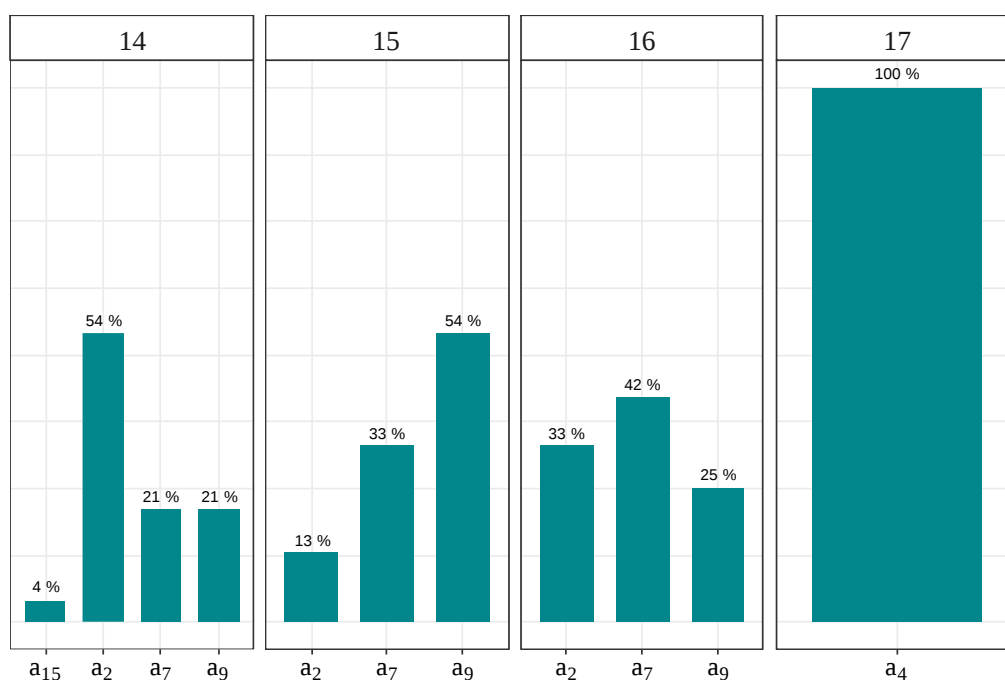
Graf 5: Frekvence dosažení 6. až 9. indifferenční třídy danými alternativami

První a poslední indifferenční třída jsou velmi stabilní, neboť z 95,8 % tvořila první indifferenční třídu varianta a_{13} a ze 100 % tvořila poslední indifferenční třídu varianta a_4 . Obsazení dalších indifferenčních tříd se ukázalo jako značně nestabilní, ale je možné pozorovat, že alternativy obsazují

indiferenční třídy v rozpětí maximálně 6. Příkladem je varianta a_{19} , která obsazuje 2. – 5. indiferenční třídu nebo varianta a_2 , která obsazuje 14. – 16. indiferenční třídu. Nikdy se tedy nejedná o razantní změnu v celkovém pořadí, kdy by se např. na první místo dostala varianta v jiné instanci umístěná na posledním místě, jako bylo možné např. sledovat v kapitole 3.4. Z výsledku citlivostní analýzy můžeme konstatovat, že varianty a_1 , a_8 , a_{13} , a_8 , a_{19} a a_{20} se vždy vyskytují v první třetině indiferenčních tříd, varianty a_6 , a_{11} , a_{14} , a_{17} a a_{18} ve druhé třetině a varianty a_2 , a_3 , a_4 , a_7 , a_9 , a_{12} a a_{15} v poslední třetině indiferenčních tříd.



Graf 6: Frekvence dosažení 10. až 13. indiferenční třídy danými alternativami



Graf 7: Frekvence dosažení 14. až 17. indiferenční třídy danými alternativami

Z pohledu výběru jedné kompromisní varianty, je řešení poměrně stabilní. Pokud by ale bylo cílem uspořádání všech variant, řešení se ukázalo jako nestabilní a je vhodné rozdělit soubor do několika málo skupin (např. tři skupiny viz výše) nebo výsledek srovnat s řešením pomocí jiné metody.

Analýza citlivosti pro 4 kritéria

Druhá varianta analýzy citlivosti, založená na postupných procentuálních změnách vah, je zaměřena na analýzu dat pouze z pohledu čtyř kritérií, která se shodují s kritérii v analýze citlivosti založené na rozboru indexních množin pro čtyři kritéria (kapitola 3.4). Jedná se o kritéria *Regionální HDP*, *Příjmy pro obec*, *Dopady na vzhled obce/krajiny* a *Krátkodobá zaměstnanost*, s odpovídajícími vahami v_1, v_2, v_3 a v_4 . Uvažované jsou jen nedominované varianty.

Ve výchozím řešení byl uvažován vektor s normalizovanými vahami navrženými v [5] $\mathbf{v} = (0,1\bar{3}; 0,4; 0, \bar{3}; 0,1\bar{3})$. V úvahu jsou brány jen nedominované varianty $A_N = \{a_1, a_2, a_4, a_6, a_7, a_8, a_{13}, a_{17}\}$. Aplikací metody ELECTRE III bylo získáno řešení, které zachycuje tabulka 35.

Tabulka 35: Výchozí řešení pro 4 kritéria

Ind. třída	Varianta
1.	a_1
2.	a_8
3.	a_6
	a_4
4.	a_{13}
	a_{17}
5.	a_2
6.	a_7

Vzhledem k tomu, že předmětem analýzy je značně menší počet optimalizačních kritérií, není třeba kritéria seskupit do makrokritérií. Opět byly vytvořeny tři sady vah, přičemž v prvním setu vah P_1 byly váhy střídavě zvýšeny a sníženy o 25 %, v setu P_2 byly váhy střídavě zvýšeny a sníženy o 35 % a v setu P_3 byly váhy střídavě zvýšeny a sníženy o 50 %. V rámci každého setu je testováno 8 alternativ $S = \{s_2^{(\cdot)}, s_3^{(\cdot)}, s_4^{(\cdot)}, s_5^{(\cdot)}, s_6^{(\cdot)}, s_7^{(\cdot)}, s_8^{(\cdot)}, s_9^{(\cdot)}\}$. Sety jsou znázorněny v tabulkách 36, 37 a 38 (pro lepší zobrazení byly numerické hodnoty zaokrouhleny na 3 desetinná místa).

Tabulka 36: Set vah $P_1, \pm 25\%$

	$s_2^{(\pm 25\%)}$	$s_3^{(\pm 25\%)}$	$s_4^{(\pm 25\%)}$	$s_5^{(\pm 25\%)}$	$s_6^{(\pm 25\%)}$	$s_7^{(\pm 25\%)}$	$s_8^{(\pm 25\%)}$	$s_9^{(\pm 25\%)}$
v_1	0,167	0,100	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133
v_2	0,400	0,400	0,500	0,300	0,400	0,400	0,400	0,400
v_3	0,333	0,333	0,333	0,333	0,417	0,250	0,333	0,333
v_4	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,167	0,100

Tabulka 37: Set vah $P_2, \pm 35\%$

	$s_2^{(\pm 35\%)}$	$s_3^{(\pm 35\%)}$	$s_4^{(\pm 35\%)}$	$s_5^{(\pm 35\%)}$	$s_6^{(\pm 35\%)}$	$s_7^{(\pm 35\%)}$	$s_8^{(\pm 35\%)}$	$s_9^{(\pm 35\%)}$
v_1	0,180	0,087	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133
v_2	0,400	0,400	0,540	0,260	0,400	0,400	0,400	0,400
v_3	0,333	0,333	0,333	0,333	0,450	0,217	0,333	0,333
v_4	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,180	0,087

Tabulka 38: Set vah $P_3, \pm 50\%$

	$s_2^{(\pm 50\%)}$	$s_3^{(\pm 50\%)}$	$s_4^{(\pm 50\%)}$	$s_5^{(\pm 50\%)}$	$s_6^{(\pm 50\%)}$	$s_7^{(\pm 50\%)}$	$s_8^{(\pm 50\%)}$	$s_9^{(\pm 50\%)}$
v_1	0,200	0,067	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133
v_2	0,400	0,400	0,600	0,200	0,400	0,400	0,400	0,400
v_3	0,333	0,333	0,333	0,333	0,500	0,167	0,333	0,333
v_4	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,133	0,200	0,067

Po normalizaci vah byla na každou kombinaci v setech P_1 , P_2 a P_3 aplikována metoda ELECTRE III. Řešení tohoto problému se ukázalo jako velmi stabilní, neboť ve všech sledovaných případech se získané řešení shodovalo s výchozím řešením. Získané řešení koresponduje s druhým možným řešením z analýzy citlivosti založené na rozboru indexních množin (tabulka 25), které je platné za podmínek, že $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 > 0,035$ a $v_4 < 0,435$. V případě, že $\mathbf{v} = (0,13; 0,4; 0,035; 0,435)$, se řešení významně nemění, změna nastává pouze v prohození obsahu posledních dvou indifferenčních tříd. Řešení je výrazně změněno pouze v případě, že $v_1 = 0,13$, $v_2 = 0,4$, $v_3 < 0,035$ a $v_4 > 0,435$. Nicméně jak bylo prokázáno touto analýzou citlivosti, toto řešení je zcela odlišné od původního řešení (změna je podstatně větší než 50%) a mírnými změnami ve váhovém vektoru není možné tohoto řešení dosáhnout.