Vysoká škola ekonomická
Fakulta financí a účetnictví
Katedra bankovnictví a pojišťovnictví

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2020 David Mesenský

Vysoká škola ekonomická v Praze
FAKULTA FINANCÍ A ÚČETNICTVÍ

Katedra bankovnictví a pojišťovnictví
Studijní obor: Finance

Modelování úrokové sazby LIBOR pomocí Vašíčkova modelu

Autor bakalářské práce: David Mesenský
Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Jiří Málek, Ph. D.
Rok obhajoby: 2020

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že bakalářskou práci na téma „Modelování úrokové sazby LIBOR pomocí Vašíčkova modelu“ jsem vypracoval samostatně a veškerou použitou literaturu a další prameny jsem řádně označil a uvedl v přiloženém seznamu.

V Praze dne ……

David Mesenský

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce panu doc. Mgr. Jiřímu Málkovi, Ph. D. za ochotu a zejména trpělivost, kterou se mnou během mého dlouhého studia měl.

Abstrakt

Tato bakalářská práce je věnována Vašíčkovu modelu, který je jedním z nejznámějších modelů úrokových sazeb. Cílem této práce je popsat základní principy fungování tohoto modelu a ukázat jeho praktické využití při modelování úrokové sazby LIBOR. Podrobněji je popsána funkce jednotlivých parametrů modelu a způsob jejich odhadu s využitím metody nejmenších čtverců. V praktické části je Vašíčkův model použit při simulování vývoje tříměsíční sazby LIBOR pro britskou libru.

Klíčová slova: LIBOR, Vašíčkův model, modelování úrokových sazeb

Abstract

This bachelor thesis deals with one of the best-known interest rate models called Vasicek model. The aim of this thesis is to describe its main features as well as to show its practical use within modelling of LIBOR. Special attention is paid to its parameters and process of their estimation using ordinary least squares method. The analytical part of this thesis focuses on simulating 3-Month LIBOR based on British Pound.

Key words: LIBOR, Vasicek model, interest rate modeling

Obsah

Úvod 8

1 Teoretická část 9

1.1 Finanční teorie 9

1.1.1 Úroková sazba 9

1.1.2 Druhy úrokových sazeb 11

1.1.3 Mezibankovní sazba LIBOR 12

1.1.4 Instrumenty vázané na sazbu LIBOR 15

1.2 Statistická a ekonometrická teorie 18

1.2.1 Wienerův proces 18

1.2.2 Normální rozdělení 19

1.2.3 Lineární regrese 20

1.2.4 Metoda nejmenších čtverců 22

1.3 Vašíčkův model 25

1.3.1 Vlastnosti modelu 25

1.3.2 Kalibrace modelu 29

2 Praktická část 32

2.1 Kalibrace modelu na reálná data 32

2.2 Simulace vývoje úrokové sazby 36

2.3 Shrnutí výsledků 39

Závěr 40

Seznam použité literatury a pramenů 41

Knižní publikace: 41

Online zdroje: 41

Úvod

Úroková sazba LIBOR je dlouhodobě jednou z nejvyužívanějších referenčních sazeb. Odhaduje se, že na ni jsou vázány finanční instrumenty s celkovou nominální hodnotou přesahující 300 bilionů dolarů. K tomu, aby byly finanční instituce schopny tyto instrumenty spolehlivě ocenit, využívají celou řadu různých finančních modelů, pomocí nichž budoucí vývoj této sazby předpovídají.

Tato práce je věnována tzv. Vašíčkovu modelu, který je jedním z nejstarších a zároveň nejznámějších modelů úrokových sazeb. Cílem práce je nejenom seznámit čtenáře s tím, jak tento model funguje, ale zejména ukázat jeho praktické využití, a to právě na modelování úrokové sazby LIBOR.

Práce je rozdělena do dvou hlavních částí – teoretické a praktické. Teoretická část se skládá ze tří podkapitol. V té první jsou vysvětleny základní pojmy z oblasti financí – úrok a úroková sazba. Představeny jsou zde také základní druhy úrokových sazeb. Podrobněji je představena sazba LIBOR., kdy jsou uvedeny její kombinace a je vysvětlen způsob, kterým je stanovována. V druhé podkapitole teoretické části jsou shrnuty statistické a ekonometrické metody, na nichž jsou založeny výpočty v praktické části práce. Představen je zde také tzv. Wienerův proces, který je základem modelů úrokových sazeb. Třetí podkapitola teoretické části se věnuje samotnému Vašíčkovu modelu. Popsána je jeho rovnice a s pomocí grafických ukázek je vysvětleno, jak se může úroková sazba v rámci tohoto modelu chovat. Podrobněji je také vysvětlen postup kalibrace modelu na reálná data, který spočívá v odhadu jeho parametrů. K tomu je využito lineární regrese a metody nejmenších čtverců, které jsou představeny v druhé podkapitole.

Praktická část rozebírá využití Vašíčkova modelu při modelování tříměsíční sazby LIBOR pro britskou libru. Na základě reálných dat je provedena jeho kalibrace a s pomocí odhadnutých parametrů je simulován vývoj úrokové sazby. Zároveň je zjišťováno, s jakou přesností sestrojený model odpovídá výchozím datům.

1 Teoretická část

1.1 Finanční teorie

V této kapitole definujeme úrokovou sazbu a popíšeme její základní druhy, se kterými se můžeme v ekonomice setkat. Zároveň rozebereme faktory, které jednotlivé sazby ovlivňují. Detailněji představíme sazbu LIBOR a popíšeme způsob, kterým je stanovována. Zároveň představíme základní instrumenty, které jsou na tuto sazbu vázány.

1.1.1 Úroková sazba

S pojmem úroková sazba se během svého života setká téměř každý, a to například při žádosti o půjčku nebo zakládání bankovního účtu. Jak však můžeme úrokovou sazbu definovat a co vyjadřuje? Abychom mohli na tuto otázku spolehlivě odpovědět, musíme nejdříve vysvětlit pojem **úrok**.

„Úrok vzniká jako důsledek vztahu dvou ekonomických subjektů, z nichž jeden má určitý záměr a na uskutečnění tohoto záměru potřebuje peníze, které nemá k dispozici. Jiný ekonomický subjekt může vlastnit potřebnou částku peněz, avšak nemusí mít předem pevný záměr, jak s touto částkou naložit. Tento subjekt vlastní volné peněžní prostředky, které může nabídnout subjektu, který nemá potřebné peníze k realizaci svého záměru.“ [1]

V rámci výše uvedeného vztahu představuje úrok odměnu, kterou bude subjekt disponující volnými peněžními prostředky (věřitel) za jejich poskytnutí druhému subjektu (dlužník) požadovat. Poskytnutá částka se označuje jako úvěr.

Samotnou **úrokovou sazbu** můžeme definovat jako procentní vyjádření úroku z celkové hodnoty poskytnutých peněžních prostředků. Jinými slovy lze říci, že úroková sazba vyjadřuje, o kolik procent navíc z celkové zapůjčené částky dlužník věřiteli za poskytnutí úvěru zaplatí.

Podle toho, zda bereme v úvahu inflaci, můžeme rozlišovat **nominální** a **reálnou** úrokovou sazbu. S nominální úrokovou sazbou se můžeme setkat např. ve smlouvě o

[1] REVENDA, Zbyněk. *Peněžní ekonomie a bankovnictví*. 6., aktualiz. vyd. Praha: Management Press, 2015, s. 44, ISBN 978-80-7261-279-6.

úvěru, kde představuje sjednanou sazbu, kterou za jeho poskytnutí budeme platit. Reálná úroková sazba naopak představuje nominální sazbu, která je upravena o inflaci.

Kromě inflace, ovlivňuje úrokovou sazbu celá řada dalších faktorů. Tím hlavním je **riziko**. Platí, že čím bude riziko nesplacení úvěru větší, tím větší úrokovou sazbu bude dlužník platit. Toto riziko však nemusí být spojené pouze s osobou dlužníka, může být spojeno např. s časem. Tato závislost mezi úrokovou sazbou a splatností úvěru, resp. lhůtou vkladu se označuje jako **časová struktura úrokových sazeb**.[2]

Časovou strukturu úrokových sazeb můžeme graficky znázornit pomocí výnosových křivek (yield curves). Výnosová křivka vyjadřuje závislost mezi splatností dluhopisu a jeho výnosností. Dluhopisy můžeme chápat jako specifikou formu úvěru, resp. vkladu.

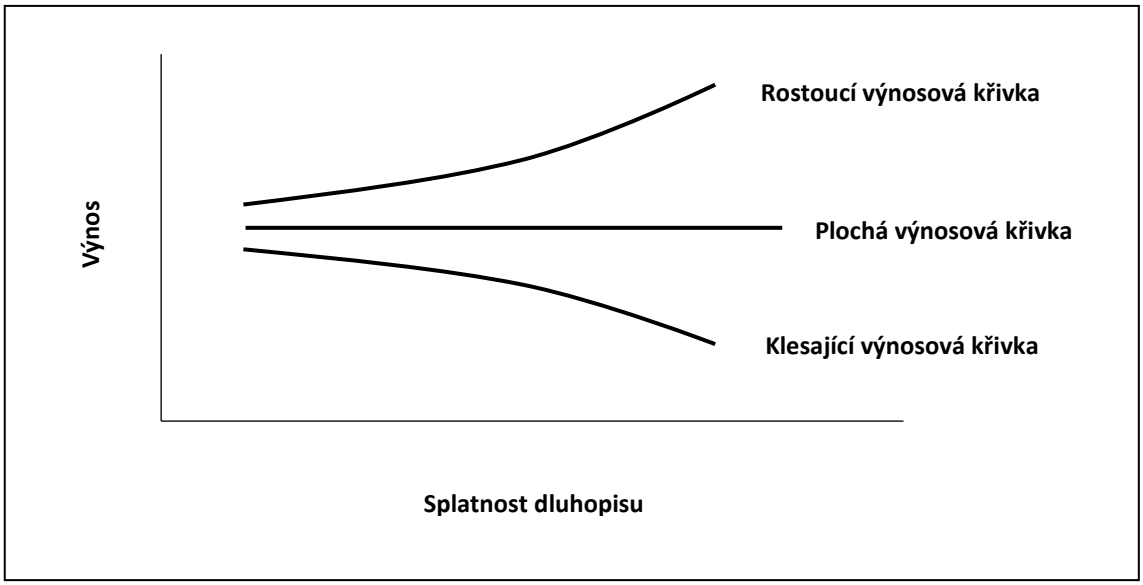
Základním požadavkem při konstrukci výnosové křivky je, aby dluhopisy, které jsou pro její sestrojení využity, měly podobné ne-li stejné vlastnosti (riziko, likvidita atd.) a lišily se pouze splatností.[3] Na Obrázku č.1 jsou ilustrovány základní tvary výnosové křivky**.** Rostoucí výnosová křivka popisuje situaci, kdy dluhopisy s kratší splatností mají nižší výnosnost než dluhopisy s delší dobou splatnosti. Tato situace je v praxi nejběžnější.[4] Opak znázorňuje klesající výnosová křivka, kdy dluhopisy s kratší splatností mají vyšší výnos než dluhopisy s delší dobou splatnosti. Při ploché výnosové křivce je pak v rámci všech splatností výnosnost dluhopisů stejná.

V praxi může mít výnosová křivka i jiné tvary než ty, které jsou uvedeny výše. Může být např. nejdříve rostoucí a pak klesající či naopak. Faktorům, které ovlivňují výnosové křivky, se také věnují různé teorie (např. Teorie očekávání nebo Teorie oddělených trhů).

---

[2] REVENDA, Zbyněk. *Peněžní ekonomie a bankovnictví*, s. 63.
[3] RADOVÁ, Jarmila, Petr DVOŘÁK a Jiří MÁLEK. *Finanční matematika pro každého*. 8., rozš. vyd. Praha: Grada, 2013. Finance (Grada), s. 229, ISBN 978-80-247-4831-3.
[4] Tamtéž.

Obrázek č.1: Základní druhy výnosových křivek



Zdroj: Vlastní zpracování

1.1.2 Druhy úrokových sazeb

V rámci teorie jsme zatím pracovali pouze s jednou úrokovou sazbou (nebereme-li v potaz rozdělení na nominální a reálnou úrokovou sazbu). V reálné ekonomice jich však existuje celá řada.

Z hlediska jejich struktury můžeme rozlišovat[5]:

- **Úrokové sazby centrální banky**, jejichž stanovování patří mezi jeden z hlavních nástrojů měnové politiky. Tyto sazby jsou zpravidla trojího druhu – diskontní, lombardní a repo.
- **Úrokové sazby mezibankovního trhu (mezibankovní sazby)**, za které mezi sebou banky navzájem obchodují (kromě centrální banky). Tyto sazby jsou také označovány jako referenční sazby, na jejichž základě jsou stanovány platby různých finančních produktů.
- **Základní (referenční) sazbu každé banky**, kterou si banky určují na základě vývoje mezibankovních sazeb. Z této sazby následně odvozují sazby nabízené klientům.

[5] ČERNOHORSKÝ, Jan a Petr TEPLÝ. *Základy financí*. 2., upr. vyd. Praha: Grada, 2011, s. 102-107, ISBN 978-80-247-3669-3.

Každá z výše uvedených sazeb je ovlivněna různými faktory. Při stanovování úrokové sazby centrální banky hraje roli celá řada ekonomických veličin, jako např. očekávaná míra inflace, vývoj devízového kurzu, vývoj úrokových sazeb v zahraničí, vývoj HDP a mnohé další. S úrokovými sazbami centrální banky jsou úzce propojeny mezibankovní sazby, které na změny úrokových sazeb centrální banky velmi citlivě reagují. Kromě toho jsou tyto sazby také ovlivněny aktuální likviditou bankovního trhu nebo např. různými politickými událostmi. Na základě vývoje mezibankovních sazeb si následně jednotlivé banky stanovují své referenční sazby. [6]

Klientské sazby, které jsou odvozeny právě z těchto referenčních sazeb, jsou značně individualizované. Ovlivňuje je ohodnocení rizikovosti dlužníka a jeho úvěrová historie, velikost konkrétního obchodu, doba splatnosti či kvalita zajištění úvěru.[7]

1.1.3 Mezibankovní sazba LIBOR

LIBOR (London Inter Bank Offered) můžeme definovat jako průměrnou úrokovou sazbu, za kterou jsou si mezi sebou banky na londýnském mezibankovním trhu ochotny půjčovat finanční prostředky. Jedná se o jednu z nejvyužívanějších referenčních sazeb, která je základem širokého spektra finančních instrumentů.

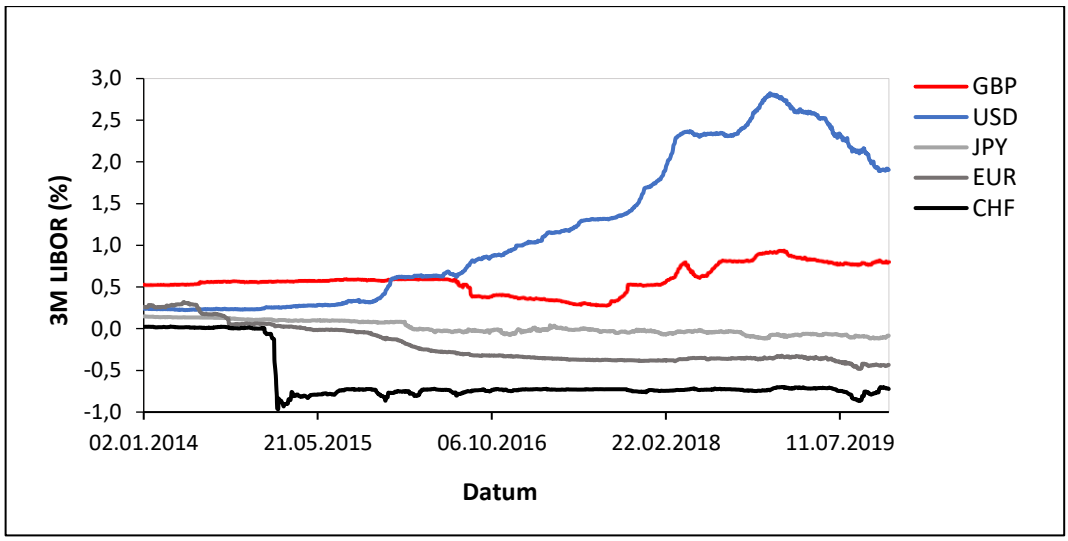
Sazba LIBOR je kotována pro pět hlavních měn – americký dolar, euro, britskou libru, švýcarský frank a japonský jen. V rámci každé z těchto měn je k dispozici několik různých splatností – přes noc, týdenní, jednoměsíční, dvouměsíční, tříměsíční, šestiměsíční a dvanáctiměsíční (roční). Výsledkem je celkem 35 možných kombinací této sazby.[8]

Obrázek č.2 ilustruje porovnání vývoje tříměsíční sazby LIBOR v rámci všech pěti měn. Jak můžeme vidět, tříměsíční sazby LIBOR jsou v současnosti kladné pouze pro americký dolar a britskou libru. Sazba pro japonský jen se pohybuje velmi blízko nule, kdy k 29.11.2019 byla její hodnota přibližně -0,08 %. Záporné hodnoty sazby LIBOR jsou dány zápornými úrokovými sazbami centrálních bank konkrétních zemí, přičemž sazba pro euro se odvíjí od úrokové sazby Evropské centrální banky (ECB). Politikou záporných úrokových sazeb se obecně jednotlivé centrální banky snaží reagovat na

[6] ČERNOHORSKÝ, Jan a Petr TEPLÝ. *Základy financí*, s.109-110
[7] Tamtéž
[8] *Libor* [online]. [cit. 2020-01-15]. Dostupné z: https://www.theice.com/iba/libor.

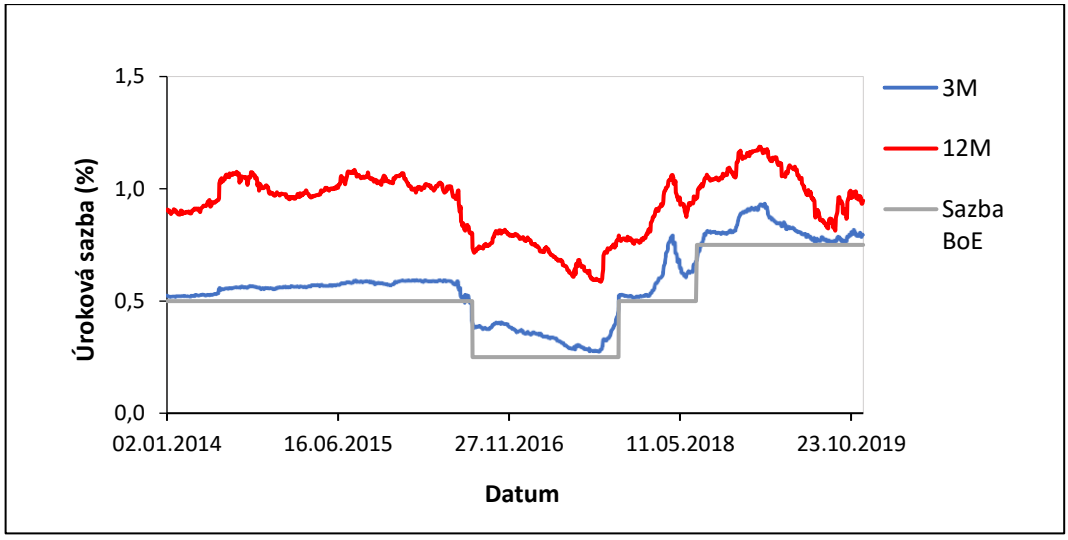
ekonomickou recesi, nízkou inflaci nebo např. nízkou úroveň investic.

Obrázek č.2: Vývoj tříměsíčních sazeb LIBOR



Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat z databáze FRED

Obrázek č.3: Porovnání vývoje sazeb GBP LIBOR a sazby BoE



Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat z databáze FRED

To, do jaké míry mohou sazby centrální banky ovlivňovat jednotlivé sazby LIBOR, je ilustrováno na Obrázku č.3, který porovnává vývoj tříměsíční (3M) a dvanáctiměsíční (12M) sazby LIBOR pro britskou libru s úrokovou sazbou Bank of England. V rámci něj je patrný téměř identický trend vývoje (pokles i růst) všech tří sazeb, přičemž lze zároveň pozorovat rozdíl v jednotlivých sazbách. Ten je dán nejenom různou splatností daných sazeb, ale i přirážkou za riziko jednotlivých bank, které nelze automaticky považovat za bezrizikové subjekty.

Výše sazby LIBOR pro jednotlivé měny a splatnosti je denně[9] stanovována prostřednictvím IBA (Intercontinental Currency Exchange Benchmark Administration) na základě dat poskytovaných panelem vybraných bank. Zastoupeny jsou zde pouze ty banky, které mají v rámci londýnského mezibankovního trhu signifikantní roli. Podle konkrétní měny se pak odvíjí počet bank, z jejichž dat se při stanovení sazby vychází.

Výpočet výsledné sazby probíhá tak, že se ze získaných dat odečte 25 % nejnižších a 25 % nejvyšších hodnot, přičemž ze zbylých hodnot se vypočte aritmetický průměr. Vypočtená hodnota je následně zveřejněna jako hodnota konkrétní sazby LIBOR pro daný den. Cílem tohoto postupu je „odfiltrovat“ extrémní hodnoty z výpočtu výsledné sazby.[10]

Právě v souvislosti procesem jejího výpočtu (stanovování) se sazba LIBOR dostlala do podvědomí široké veřejnosti, když se v roce 2012 objevily první zprávy o jejích možných manipulacích. Vzniklo podezření, že banky během finanční krize naschvál hlásily nižší sazby než ty, za které si byly schopny reálně půjčovat, a tím zkreslili pohled na své finanční zdraví. Banky byly zároveň obviněny z toho, že záměrně manipulovali se sazbou LIBOR za účelem dosáhnutí zisku z jejich na tuto sazbu vázaných kontraktů. Přestože byla do těchto manipulací pravděpodobně zapojena celá řada bank, přiznala se jen část z nich. Šlo například o švýcarskou UBS či britskou Barclays, které také v souvislosti s tím uhradily nemalé pokuty.[11]

Následkem těchto událostí prošla sazba LIBOR v poslední letech řadou úprav. Tou hlavní byla změna v procesu získávání samotných dat pro její stanovení, kde byla zavedena tzv. **vodopádová metodologie**, jejíž schéma je ilustrováno v Tabulce č.1. Tato metodologie se skládá ze tří úrovní, přičemž cílem je získat co nejvíce dat pro stanovení výsledné sazby v rámci první úrovně, která je založena na váženém průměru odpovídajících transakcí. Pokud však nejsou tato data v rámci dané banky dostupná, přechází se na další úroveň. Nejméně optimální situaci představuje 3.úroveň, která je založena pouze na expertním odhadu dané banky.

[9] Pouze v obchodní dny.
[10] *Libor* [online]. [cit. 2020-01-16]. Dostupné z: https://www.theice.com/iba/libor.
[11] David Hou a David Skeie. *LIBOR: Origins, Economics, Crisis, Scandal, and Reform* [online]. 2014, s. 6 [cit. 2020-01-16]. Dostupné z: https://www.newyorkfed.org/medialibrary /media/research/staff_reports/sr667.pdf

Tabulka č.1: Vodopádová metodologie

1.úroveň	Data založená na proběhlých transakcích	Vážený průměr dle objemu (VWAP) a času transakcí
2.úroveň	Data odvozená z historických transakcích	Časově vážený průměr historických transakcí, upravený vzhledem k možným tržním pohybům
3.úroveň	Odborný odhad	Odborný odhad na základě obdobných transakcí s využitím vnitřních procedur konkrétní banky

Zdroj: Vlastní zpracování na základě www.theice.com/iba/libor

I přes tuto změnu se však po roce 2021 očekává zrušení sazby LIBOR a její nahrazení alternativními referenčními sazbami Jako hlavní důvod je uváděna nedostatečná likvidita v samotných podkladových transakcích pro stanovení této sazby.[12] Svou roli však také sehrály výše zmíněné manipulace s touto sazbou, které značně podlomily její důvěryhodnost.

Referenčními sazbami, které mají LIBOR nahradit jsou např. sazby SONIA (Sterling Overnight Index Average) či SOFR (Secured Overnight Financing Rate). Tyto sazby jsou založeny pouze na overnight (přes noc) splatnosti. To znamená, že vycházejí pouze ze skutečných (proběhlých) transakcí a nedá se s nimi tedy nijak manipulovat.[13]

1.1.4 Instrumenty vázané na sazbu LIBOR

Jak jsme zmínili v předchozí kapitole, na sazbu LIBOR je vázána celá řada finanční instrumentů., které zároveň představují hlavní důvod, proč se jejím modelováním zabývat. Jejich držením se totiž finanční instituce mohou vystavovat značnému

[12] *Preparing for 2022: What you need to know about LIBOR transition* [online]. [cit. 2020-01-20]. Dostupné z: https://www.bankofengland.co.uk/-/media/boe/files/markets/benchmarks/what-you-need-to-know-about-libor-transition.
[13] Tamtéž.

úrokovému riziku.

Nejvýznamnější (co se objemu týče) jsou tzv. **finanční deriváty**. K rozvoji těchto instrumentů došlo v 80. letech minulého století, kdy vlivem nestability na finančních trzích vzrostla poptávka po zajištění proti základním druhům tržního rizika. Dnes existuje celá řada finančních derivátů, které lze využít k různým účelům (zajištění, spekulace, arbitráž). Právě rozmanitost derivátů zároveň značně stěžuje jejich jednotnou definici.

Obecně derivát představuje instrument, jehož hodnota je odvozena od hodnoty jiného instrumentu, který je označován jako tzv. podkladové aktivum. Tím mohou být např. akcie, komodity nebo právě úrokové sazby. Zároveň pro deriváty platí, že mají termínový charakter. To znamená, že umožňují zafixovat cenu pro určitý obchod, který je realizovaný až v budoucnosti. Poslední, avšak velmi důležitou vlastností derivátů je, že disponují pákovým efektem, kdy je s jejich sjednáním spojena velmi malá, či dokonce nulová počáteční investice.[14]

Finanční deriváty lze z různých hledisek dělit do mnoha kategorií. V rámci rozdělení podle druhu podkladového aktiva jsou nejvýznamnější úrokové deriváty, které z pohledu nominálních hodnot ostatní druhy výrazně převyšují. Právě značná část z úrokových derivátů je vázána na právě sazbu LIBOR. Konkrétně jde např. o[15]:

- swapy,
- swapce,
- opce,
- forward rate agreements (FRAs),
- futures,
- swapové futures.

Kromě derivátů jsou na sazbu LIBOR vázány i různé **úvěrové instrumenty**, které však svým objemem zdaleka nedosahují nominálních hodnot finančních derivátů. Jedná se o[16]:

- syndikované úvěry,
- podnikatelské úvěry,

[14] REVENDA, Zbyněk. *Peněžní ekonomie a bankovnictví*, s. 175.
[15] FSB. *Reforming Major Interest Rate Benchmarks* [online]. 2014 [cit. 2020-01-03]. Dostupné z: https://www.fsb.org/wp-content/uploads/r_140722.pdf
[16] Tamtéž.

- komerční hypotéky,
- retailové hypotéky.

1.2 Statistická a ekonometrická teorie

V této kapitole se budeme věnovat základní charakteristice statistických, resp. ekonometrických pojmů a metod, se kterými pracujeme v dalších částech práce. Konkrétně jde o Wienerův proces, normální (Gaussovo) rozdělení náhodné veličiny, lineární regresi a metodu nejmenších čtverců.

1.2.1 Wienerův proces

Wienerův proces představuje nejdůležitější stochastický (náhodný) proces, který nachází své uplatnění nejen v ekonomii, ale i v mnohých oblastech matematiky a fyziky. Tento proces je základem většiny finančních modelů, včetně modelů úrokových sazeb.

Definovat ho můžeme jako náhodný proces, pro který platí:

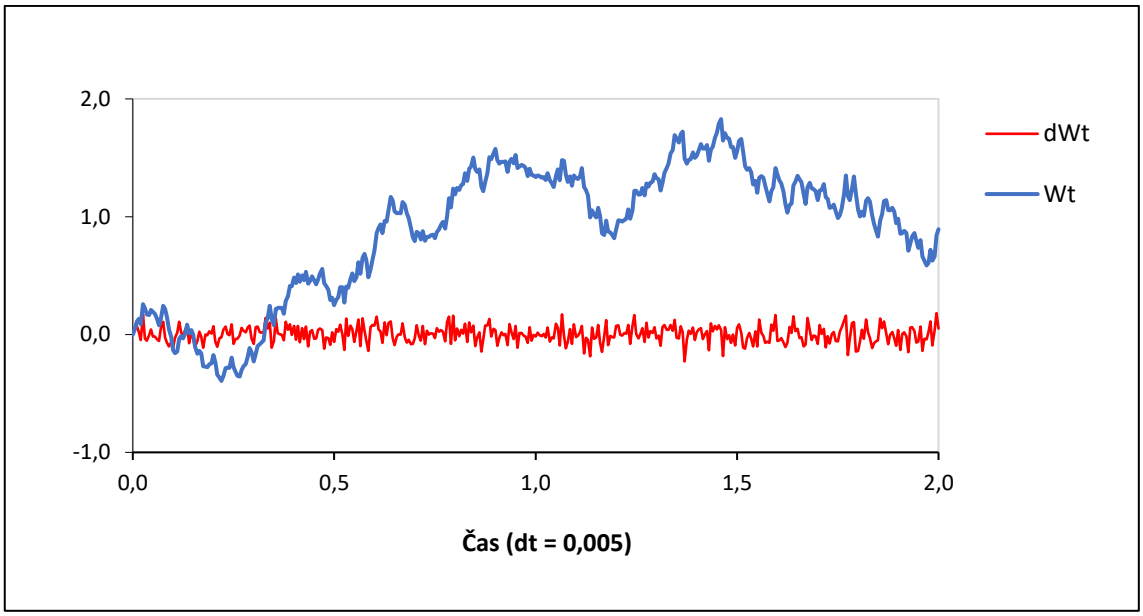
1. $W_0 = 0$,
2. $W_{t_2} - W_{t_1}$ má normální rozdělení $N(0, t_2 - t_1)$ pro každé $t_2 > t_1$,
3. náhodné veličiny $W_{t_4} - W_{t_3}$ a $W_{t_2} - W_{t_1}$ jsou nezávislé pro $t_4 > t_3 > t_2 > t_1$,
4. jeho trajektorie jsou skoro všechny spojité. [17]

Wienerův proces také můžeme označit jako tzv. **Brownův pohyb**.[18] Ten ve fyzice vyjadřuje náhodný a neuspořádaný pohyb částic v kapalině nebo plynu. V ekonomii je tento pohyb využíván pro vysvětlení chování cen různých finančních aktiv (např. akcií, měn nebo právě úrokových sazeb).

Na Obrázku č.4 je znázorněna jedna simulace Brownova pohybu, resp. Wienerova procesu v čase. dW_t značí jednotlivé přírůstky tohoto procesu, zatímco W_t značí stav procesu jako takového, který je průběžným součtem jeho jednotlivých přírůstků. Jelikož tyto přírůstky můžeme považovat za náhodné veličiny, představuje takováto situace pouze jeden z možných scénářů. Pokud bychom tyto simulace opakovali do nekonečna, dostaneme nekonečně mnoho takovýchto scénářů.

[17] MÁLEK, Jiří. *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*. Praha: Ekopress, 2005, s. 113, ISBN 80-86119-97-1.
[18] Pokud budeme uvažovat pouze jeho spojité trajektorie.

Obrázek č.4: Wienerův proces



Zdroj: Vlastní zpracování

1.2.2 Normální rozdělení

Chování náhodné veličiny je popsáno jejím rozdělením. V případě Wienerova procesu se jedná o normální (také označováno jako Gaussovo) rozdělení, které je hojně používáno jak v ekonomii, tak např. i v biologii či technice. Obecně je použití normálního rozdělení vhodné zejména tam, kde na kolísání náhodné veličiny působí celá řada nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů. Typickým příkladem normálního rozdělení je rozdělení chyb, které vznikly při měření nějaké veličiny. [19]

Zápis normálního rozdělení má tvar $N(\mu, \sigma^2)$, kde střední hodnota μ udává polohu tohoto rozdělení a rozptyl σ^2 charakterizuje rozptýlení hodnot okolo střední hodnoty.

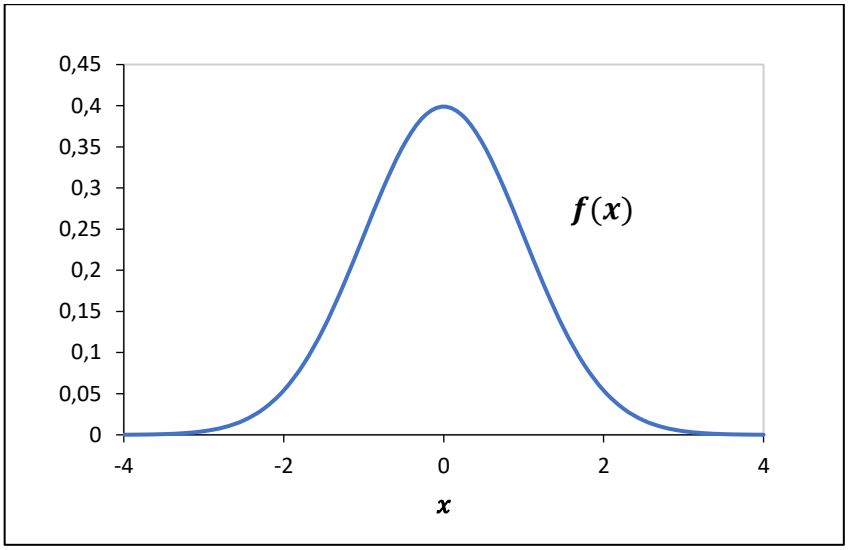
Normální rozdělení lze popsat buďto distribuční funkcí $F(x)$, která vyjadřuje pravděpodobnost, že výsledek náhodné veličiny bude menší nebo roven hodnotě x, nebo hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, která určuje samotný tvar křivky rozdělení.

V rámci zjednodušení výpočtu těchto funkcí je zavedeno tzv. **normované normální rozdělení**. To je normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1.[20] Tvar tohoto

[19] HINDLS, Richard. *Statistika pro ekonomy*. 8. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007, s.84, ISBN 978-80-86946-43-6.
[20] Tamtéž, s. 86.

rozdělení, které můžeme zapsat jako $N(0, 1)$, je ilustrován na Obrázku č.5.

Obrázek č.5: Normované normální rozdělení



Zdroj: Vlastní zpracování

1.2.3 Lineární regrese

Regresní analýza představuje jeden z nejdůležitějších ekonometrických nástrojů. Jejím úkolem je vysvětlit změny hodnot jedné veličiny (tzv. vysvětlované proměnné) na základě změn hodnot jiných veličin (tzv. vysvětlujících proměnných). Regresní analýzu můžeme v oblasti ekonomie využít v řadě různých případů. Jako příklad lze uvést sledovaní závislosti mezi hrubým domácím produktem a cenami na akciovém trhu. K tomu, abychom mohli podobné vztahy matematicky vyjádřit, se využívají regresní modely, které vysvětlují vztah mezi proměnnými pomocí parametrů.

V případě, že je regresní model lineární v parametrech, jedná se o tzv. **lineární regresní model** a jeho rovnici můžeme zapsat jako:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \qquad (1)$$

kde y_i je hodnota vysvětlované proměnné

$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ jsou hodnoty vysvětlujících proměnných

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ jsou neznámé parametry modelu,

ε_i je reziduální složka modelu (také označována jako reziduum),

k značí počet vysvětlujících proměnných, resp. parametrů modelu

$i = 1, \dots, n$.

Maticový zápis modelu (1) má tvar

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}$$

kde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Lineární regresní model (1), resp. jeho maticový zápis (2) můžeme interpretovat následujícím způsobem. Pokud dojde ke změně hodnoty vysvětlující proměnné x_i o jednotku a hodnoty ostatních prvků modelu se nezmění, změní se hodnota vysvětlované proměnné y o hodnotu parametru β_i. Zároveň platí, že hodnota vysvětlující proměnné x_1 je stále rovna jedné. Proto ani není v rovnici (1) uvedena a v maticovém zápisu její hodnoty nahrazuje sloupec jedniček. Její úlohou je společně s parametrem β_1 tvořit absolutní člen modelu (tzv. intercept). Důležitá je role reziduální složky (rezidua), která v sobě zahrnuje např. chyby v měření daných veličin, nepozorovatelné, neměřitelné nebo neznámé vlivy, či jevy, které pro jejich přílišnou náhodnost nelze do modelu přímo zahrnout.[21]

Nejjednodušším příkladem lineárně regresního modelu je tzv. **model regresní přímky**[22], pro který platí $k = 2$. To znamená, že model obsahuje jednu vysvětlující proměnnou (není-

[21] CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Ekopress. 2013, s. 33-34, ISBN 978-80-86929-93-4.

[22] Není-li brán v úvahu model bez vysvětlující proměnné, tzn. $y_i = \beta_1 + \varepsilon_i$.

li brána v potaz proměnná x_1) a dva parametry, které jsou značené α (absolutní člen) a β.

Rovnici tohoto modelu můžeme zapsat ve tvaru[23]

$$y_i = \alpha + \beta \cdot x_i + \varepsilon_i \tag{3}$$

a jeho maticový zápis vyjádřit jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{4}$$

kde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} \\ 1 & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Aby bylo možné výsledný model lineární regrese spočítat, resp. abychom mohli ideálně odhadnout jeho parametry, musí splňovat určité předpoklady. Ty zde stručně shrňme jako

1. střední hodnota reziduální složky je nulová;
2. rozptyl reziduální složky je konstantní a konečný;
3. vysvětlující proměnné jsou nezávislé na reziduální složce;
4. matice **X** má lineárně nezávislé sloupce. [24]

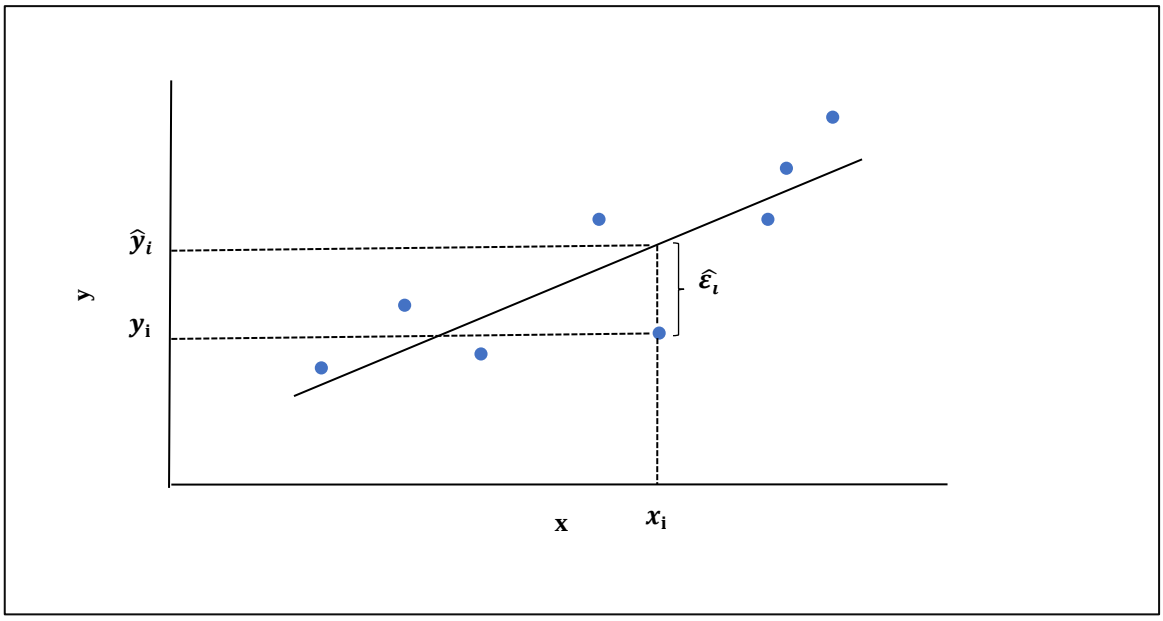
1.2.4 Metoda nejmenších čtverců

Nejpoužívanějším způsobem odhadu parametrů modelu lineární regrese je metoda nejmenších čtverců (tzv. OLS-odhad[25]). Ta odhaduje parametry $\boldsymbol{\beta}$ tak, že minimalizuje součet kvadratických odchylek vertikálních vzdáleností vysvětlované proměnné y_i od regresní nadroviny. Regresní nadrovina vzniká proložením body napozorovaných hodnot proměnných, přičemž v případě modelu s jednou vysvětlující proměnnou (3) jde o

[23] CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*, s. 38.
[24] Tamtéž, s. 40-42.
[25] OLS = Ordinary Least Squares.

regresní přímku.

Obrázek č.6: Metoda nejmenších čtverců



Zdroj: Vlastní zpracování

Jak můžeme vidět na Obrázku č.6, který ilustruje základní princip metody nejmenších čtverců, snažíme o takové proložení nadroviny body časové řady, aby součet reziduí $\hat{\varepsilon}_i$ byl co nejmenší.

Samotný odhad **b** parametrů **β** je možné vyjádřit jako

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}, \tag{5}$$

kde index **T** značí transponovanou matici.

V případě jednoduchého modelu regresní přímky (3) má odhad parametrů α a β tvar

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum y_i \sum x_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \tag{6}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

Odhadnuté hodnoty parametrů regresního modelu lze využít při odhadu hodnot reziduální složky. Nejprve se odhadnou hodnoty vysvětlované proměnné **y** jako

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Xb}. \tag{7}$$

S jejich pomocí lze hodnoty reziduální složky odhadnout jako

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}. \tag{8}$$

Ačkoliv je při praktickém využití metody nejmenších čtverců možné odhadnout parametry regresního modelu odhadnout ručně – dosazením do výše uvedených rovnic, mnohem jednodušší (jak z hlediska vynaloženého času, tak i složitosti výpočtů) je využít některý ze statistických programů. Uvést můžeme např. EViews, Gretl či uživatelsky přívětivý Microsoft Excel. Tyto programy nám zároveň poskytnou celou řadu doplňujících údajů, s pomocí kterých můžeme výsledný model nebo odhadnuté parametry dále testovat.

1.3 Vašíčkův model

V současnosti existuje celá řada modelů zabývající se chováním úrokových sazeb. Jedním z nejznámějších je model, který byl v roce 1977 představen českým matematikem Oldřichem Vašíčkem, podle něhož je také pojmenován.

Jestliže budeme uvažovat d jako velmi malé přírůstky proměnných, můžeme vývoj okamžité spotové úrokové sazby r_t ve Vašíčkově modelu zapsat rovnicí ve tvaru

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{8}$$

kde a, b, σ jsou konstantní parametry modelu, pro které platí $a > 0$, $b > 0$, $\sigma > 0$.[26]

Okamžitá úroková sazba vyjadřuje sazbu, která se vztahuje k nekonečně krátkému časovému intervalu. S touto sazbou je však pracováno pouze na teoretické úrovni, protože jako taková v praxi neexistuje.

1.3.1 Vlastnosti modelu

Rovnici Vašíčkova modelu (8) můžeme rozdělit na dvě části – tzv. **driftovou složku** modelu $a(b - r_t)dt$ a tzv. **difuzní složku** σdW_t.

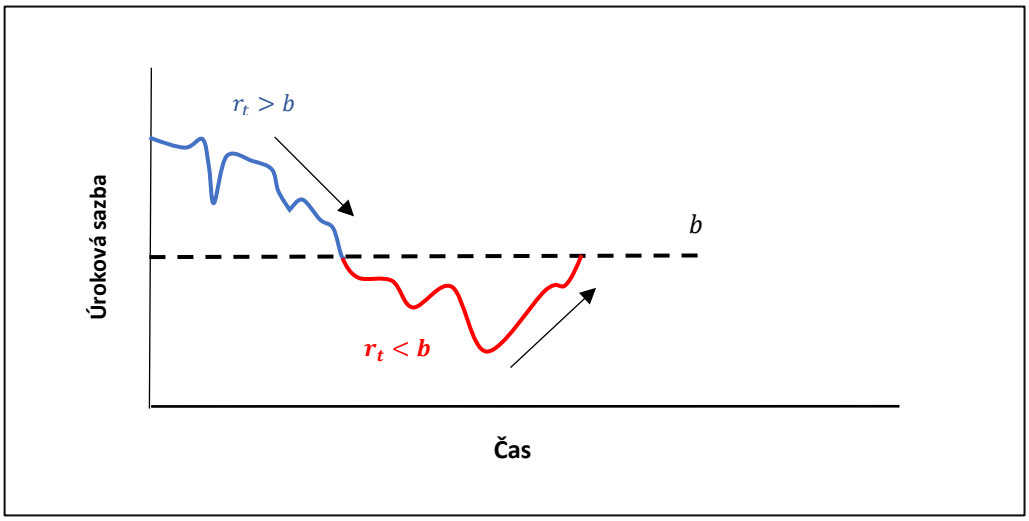
Základem driftové složky je drift $a(b - r_t)$, který udává trend vývoje úrokové sazby. Z jeho struktury je zřejmé, že když bude hodnota úrokové sazby r_t menší než hodnota parametru b, bude drift kladný a úroková sazba bude tlačena směrem nahoru. V opačné situaci, když bude hodnota úrokové sazby větší než hodnota parametru b, bude drift záporný a úroková sazba bude tlačena směrem dolů. **Parametr b** zde vyjadřuje tzv. dlouhodobě očekávanou úrokovou sazbu.[27]

Výše uvedenou a na Obrázku č.7 ilustrovanou vlastnost úrokové sazby, která se vrací k dlouhodobě očekávané sazbě, označujeme jako **mean reversion**. Z ekonomického hlediska můžeme přítomnost mean reversion ve vývoji úrokových sazeb vysvětlit následujícím způsobem. Když jsou hodnoty úrokových sazeb vysoké, poptávka po

[26] MÁLEK, Jiří. *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*, s. 17.
[27] Tamtéž.

finančních prostředcích se snižuje. Následkem toho úrokové sazby klesají. Naopak v situaci, kdy jsou hodnoty úrokových sazeb nízké, poptávka po finančních prostředcích roste. Výsledkem je růst úrokových sazeb.

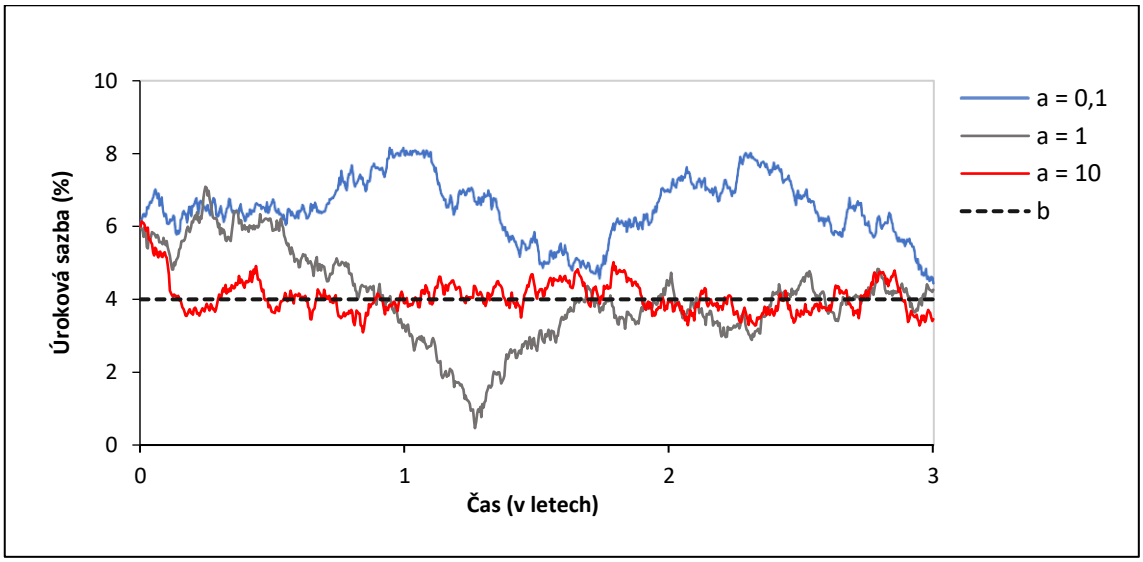
Obrázek č.7: Vlastnost mean reversion



Zdroj: Vlastní zpracování

Parametr $\boldsymbol{a}$ ve Vašíčkově modelu značí rychlost, kterou úroková sazba k hodnotě dlouhodobě očekávané sazby směřuje. Platí, že čím je hodnota tohoto parametru větší, tím méně času úroková sazba k návratu k dlouhodobě očekávané sazby potřebuje.

Obrázek č.8: Simulace úrokové sazby s různými hodnotami parametru *a*

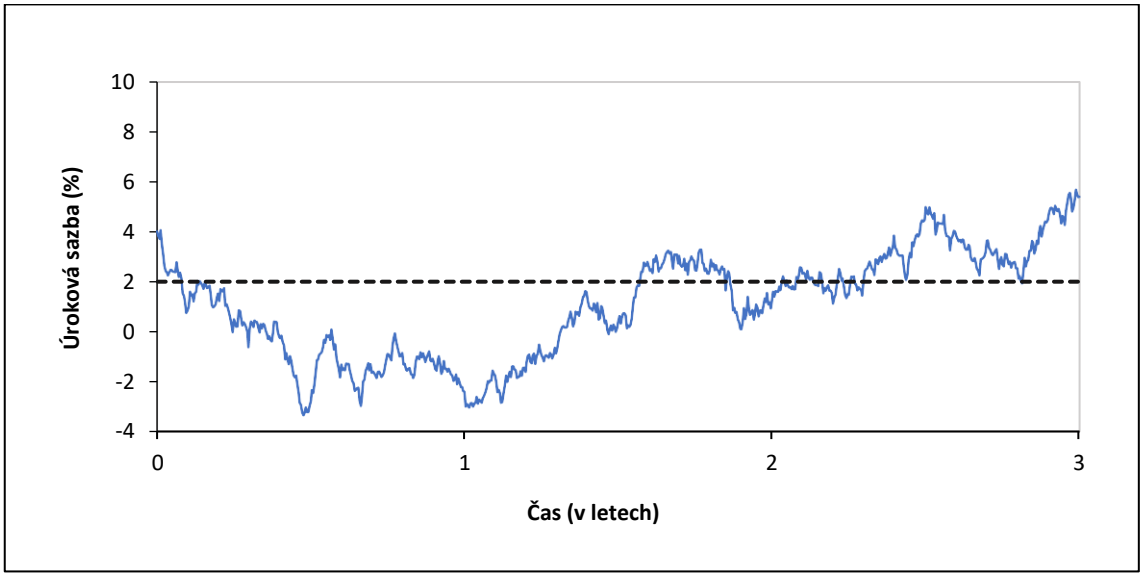


Zdroj: Vlastní zpracování

Obrázek č.8 porovnává chování úrokové sazby při různých hodnotách parametru a. Jak můžeme vidět, tak jeho hodnota ovlivňuje nejenom rychlost, kterou se úroková sazba vrací k hodnotě dlouhodobě očekávané sazby, ale i volatilitu výsledné sazby. Ta je při vysokých hodnotách parametrů a relativně malá a naopak.

Náhodné pohyby (šoky) ve vývoji úrokové sazby jsou ve Vašíčkově modelu dány difuzní složkou σdW_t. Na Obrázku č.9 je simulován vývoj úrokové sazby Vašíčkovým modelem s parametry $a = 1$, $b = 2\ \%$, $\sigma = 4\ \%$. Jak můžeme vidět, úroková sazba se relativně rychle dostává do záporných hodnot. To je způsobeno přírůstky Wienerova procesu, které, jak jsme ukázali v kapitole 1.2.1, mají normální rozdělení a tím pádem mohou nabývat záporných hodnot.

Obrázek č.9: Simulovaná úroková sazba se zápornými hodnotami



Zdroj: Vlastní zpracování

Pokud by byla úroková sazba záporná jen dočasně, tak by to nevadilo. Záporné úrokové sazby dnes nejsou ničím výjimečným, což jsme mohli vidět i na vývoji některých kombinací sazby LIBOR v kapitole 1.1.3. Problémem však je, že v rámci Vašíčkova modelu může být úroková sazba záporná od určitého okamžiku navždy, což z ekonomického hlediska nedává velký smysl.[28]

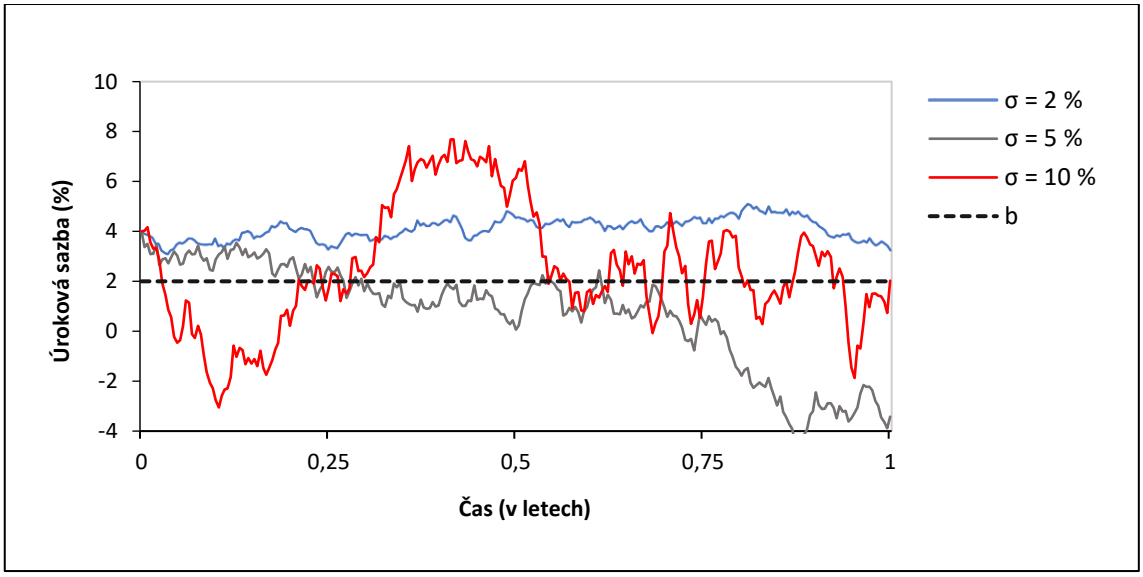
Pokud bychom se chtěli této nepříjemné vlastnosti Vašíčkova modelu vyhnout, mohli bychom použít např. Cox-Ingersol-Rossův (CIR) model, který, ač je téměř identický

[28] MÁLEK, Jiří. *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*, s. 18.

s Vašíčkovým modelem, možnost záporných úrokových sazeb nepřipouští.[29]

Kromě Wienerova procesu obsahuje difuzní složka také **parametr $\boldsymbol{\sigma}$**, který můžeme interpretovat jako volatilitu. Ta koriguje rozsah náhodných pohybů ve vývoji úrokové sazby. Na obrázku č.9 jsou ilustrovány tři simulované trajektorie úrokové sazby s různými hodnotami volatility. Ostatní parametry jsou stejné jako v předchozím případě, tedy $a = 1$ a $b = 2$ %.

Obrázek č.10: Simulace úrokové sazby s různými hodnotami parametru σ



Zdroj: Vlastní zpracování

Jak můžeme vidět, při vysokých hodnotách parametru σ jsou náhodné skoky ve vývoji simulované sazby výrazné. Vysoká hodnota tohoto parametru je v tomto případě také důvodem, proč zde úroková sazba nabývá záporných hodnot, přestože hodnota dlouhodobě očekávané sazby je 2 %.

V praxi lze Vašíčkův model využít např. při ocenění finančních derivátů nebo dluhopisů. Právě v rámci oceňování dluhopisů, resp. v rámci časové struktury úrokových sazeb je spatřována pravděpodobně největší nevýhoda Vašíčkova modelu, kdy dokáže tvořit na trhu pozorované výnosové křivky jen poměrně omezeně.[30] To může představovat problém nejen při ocenění samotných dluhopisů, ale zejména derivátů, které jsou na ně vázány. Jak jsme totiž uvedli v kapitole 1.1.4, deriváty disponují značným pákovým

[29] Rovnice CIR modelu má tvar $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$.
[30] MÁLEK, Jiří. *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*, s. 20.

efektem. To znamená, že i poměrně malá změna v ceně podkladového aktiva může vést k velkému zisku či naopak ztrátě a tím pádem i k velké změně v hodnotě derivátu. Např. Hull uvádí, že 1 % chyba v ocenění podkladového dluhopisu může vést až k 25 % chybě v ocenění opce.[31]

1.3.2 Kalibrace modelu[32]

Základem praktického využití modelů úrokových sazeb je jejich kalibrace na reálná data, která spočívá v odhadu parametrů. V případě Vašíčkova modelu k tomu můžeme využít dvě různé metody – metodu maximální věrohodnosti nebo metodu nejmenších čtverců. Právě postup metodou nejmenších čtverců, resp. lineární regrese zde podrobněji popíšeme.

Naším cílem je odhadnout parametry Vašíčkova modelu tak, aby výsledný model co nejpřesněji odpovídal napozorovaným hodnotám úrokových sazeb. Protože jsou tyto hodnoty pozorovány v diskrétním čase (dny, měsíce, …), vycházíme z rovnice jeho **diskrétní verze**. Tu lze zapsat jako

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\eta_t, \tag{9}$$

kde je η_i náhodné číslo z $N(0,1)$ rozdělení.

Jestliže označíme napozorované hodnoty úrokové sazby jako r_i $(i = 0, \dots, n)$, můžeme výše uvedenou rovnici (9) zapsat jako

$$r_{i+1} = r_i + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\eta_i, \tag{10}$$

Rovnici (10) můžeme dále upravit do tvaru

[31] HULL, John C. *Options, futures, and other derivatives*. Tenth edition. New York: Pearson, 2018, s. 715, ISBN 9780134472089.
[32] Matematický postup zpracován v souladu s BERNAL A., Victor. *Calibration of the Vasicek Model: An Step by Step Guide* [online]. 2016 [cit. 2090-10].
Dostupné z: https://victor-bernal.weebly.com/uploads/5/3/6/9/53696137/projectcalibration.pdf

$$r_{i+1} = ab\Delta t + (1 - a\Delta t)r_i + \sigma\sqrt{\Delta t}\eta_i. \tag{11}$$

Závislost mezi r_{i+1} a r_i můžeme zapsat pomocí rovnice lineárního regresního modelu, resp. modelu regresní přímky (3), jako

$$r_{i+1} = \alpha + \beta \cdot r_i + \varepsilon_i, \tag{12}$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha &= ab\Delta t, \\ \beta &= 1 - a\Delta t, \\ \varepsilon_i &= \sigma\sqrt{\Delta t}\eta_i, \end{aligned} \tag{13}$$

Maticový zápis modelu (12) má tvar

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{14}$$

kde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & r_0 \\ 1 & r_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Parametry tohoto modelu můžeme vypočítat metodou nejmenších čtverců na základě rovnic (6). S pomocí odhadnutých parametrů regresního modelu následně dopočítáme hodnoty parametrů Vašíčkova modelu, které vyjádříme z rovnic (1.12), jako

$$a = \frac{1-\beta}{\Delta t},$$
$$b = \frac{\alpha}{1-\beta}, \tag{15}$$

a parametr σ vypočítáme ze směrodatné odchylky reziduí regresního modelu jako

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}. \tag{16}$$

2 Praktická část

Tato část práce je zaměřena na praktické využití Vašíčkova modelu při modelování úrokové sazby LIBOR. Konkrétně zde podrobněji představíme postup a okomentujeme výsledky modelování vývoje tříměsíční sazby LIBOR pro britskou libru.

Nejdříve provedeme kalibraci modelu, v rámci níž na základě kapitoly 1.3.2 odhadneme jeho parametry. Vycházet budeme z historických hodnot sazby LIBOR, které jsme získali z databáze FRED[33]. Odhadnuté parametry následně dosadíme do rovnice diskrétní verze Vašíčkova modelu, kterou použijeme pro simulaci vývoje úrokové sazby.

Jako první budeme simulovat vývoj úrokové sazby pro období, z něhož vycházíme při kalibraci modelu. Simulované hodnoty úrokové sazby Vašíčkovým modelem následně porovnáme s hodnotami, které byly v daném obdobím reálně pozorovány. Naším cílem je zjistit, s jakou přesností výsledný model odráží vstupní hodnoty úrokových sazeb. Dále provedeme simulaci budoucího vývoje úrokové sazby pro období jednoho roku.

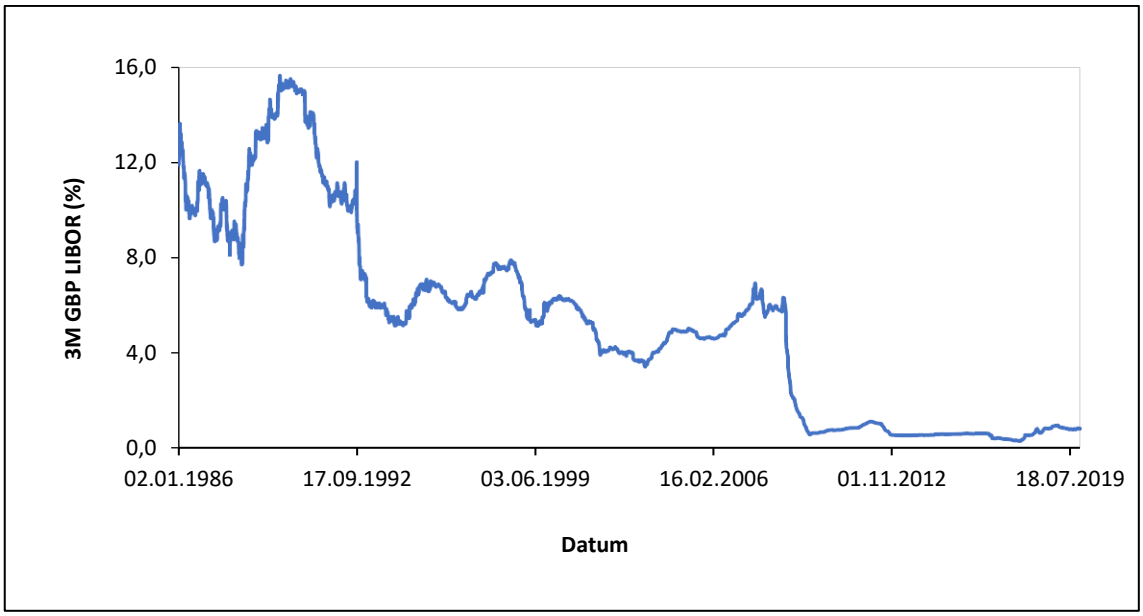
Odhad parametrů modelu i samotné simulace vývoje úrokové sazby jsme provedli v programu Microsoft Excel, přičemž při kalibraci modelu jsme navíc využili doplněk *Analýza dat*. Veškeré výpočty jsou obsaženy v příloze práce ve formě *xlsx* souboru. Zároveň dodejme, že při výpočtech pracujeme namísto s desetinnými čísly s procenty.

2.1 Kalibrace modelu na reálná data

Prvním krokem v rámci kalibrace modelu je výběr dat, ze kterých budeme vycházet při odhadu jeho parametrů. Obrázek č.11 zachycuje kompletní historický vývoj sazby LIBOR (od 2.1.1986 do 29.11.2019). Jak můžeme vidět, úroková sazba měla obecně klesající trend, přičemž po roce 2010 se její hodnoty pohybovaly většinu času pod hranicí 1 %. Svého maxima sazba dosáhla 27.10.1989 (15,625 %), naopak minimum bylo pozorováno 1.9.2017 (0,2765 %). Kompletní přehled popisné statistiky vypočítané z celého historického vývoje této sazby je uveden v Tabulce č.2.

[33] https://fred.stlouisfed.org

Obrázek č.11: Vývoj 3M GBP LIBORu v období 1986-2019



Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat z databáze FRED

Tabulka č.2: Popisná statistika období 1989-2019

Popisná statistika	
Střední hodnota	5,2393
Směrodatná odchylka	4,0767
Medián	5,2375
Minimum	0,2765
Maximum	15,625
Počet pozorování	8525

Zdroj: Vlastní zpracování

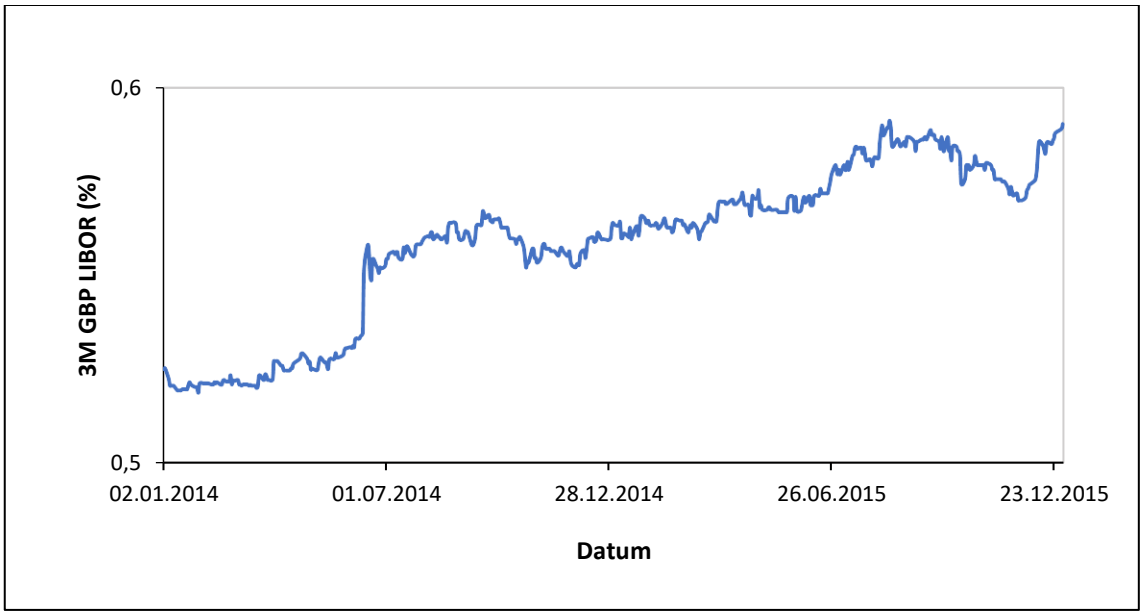
V našem případě zvolíme časovou řadu obsahující napozorované hodnoty sazby LIBOR v období od 2.1.2014 do 31.12.2015. Jedním z hlavních důvodů, proč byla vybrána právě tato data je to, že při výběru dat z jiných časových úseků často vycházely hodnoty parametrů regresního modelu tak, že výsledné hodnoty parametrů Vašíčkova modelu byly záporné. Jako příklad můžeme uvést situaci, kdy hodnota regresního parametru β vyšla větší než 1. Z rovnic (15) vyplývá, že v takovém případě by byla hodnota parametru a záporná. To je však v rozporu se základními předpoklady Vašíčkova modelu.

Lze předpokládat, že jedním z faktorů, který odhady tímto způsobem zkresloval, byla přítomnost velkých výkyvů (výrazný pokles či růst) ve vývoji úrokové sazby. Ty byly

obvykle způsobeny změnou úrokové sazby centrální banky.

Vývoj úrokové sazby v námi zvoleném období (2.1.2014-31.12.2015) je ilustrován na Obrázku č.12. Jak můžeme vidět, úroková sazba se zde pohybovala mezi hodnotami 0,5 až 0,6 %, přičemž měla rostoucí trend. Základní popisná statistika charakterizující napozorované hodnoty sazby v tomto období je zahrnuta v Tabulce č.3.

Obrázek č.12: Vývoj 3M GBP LIBORu v období 2014-15



Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat z databáze FRED

Tabulka č.3: Popisná statistika období 2014-15

Popisná statistika	
Střední hodnota	0,5587
Směrodatná odchylka	0,0207
Medián	0,5628
Minimum	0,5188
Maximum	0,5913
Počet pozorování	506

Zdroj: Vlastní zpracování

Vybraný časový úsek obsahuje celkem 506 pozorování sazby LIBOR. Hodnoty těchto pozorování vepíšeme do lineárního regresního modelu v souladu se zápisem (14). Pro odhad parametrů regresního modelu použijeme metodu nejmenších čtverců, kterou provedeme pomocí funkce *regrese* v aplikaci Microsoft Excel. Její výsledky jsou shrnuty v Tabulce č.4.

Tabulka č.4: Výstup regrese MS Excel

Metoda nejmenších čtverců	
α	0,00226
β	0,99618
s	0,00174

Zdroj: Vlastní zpracování

Při znalosti parametrů rovnice lineární regrese a směrodatné odchylky reziduí můžeme hodnoty parametrů Vašíčková modelu vypočítat jednoduchým dosazením do rovnic (15) a (16). Protože pracujeme s denními pozorováními úrokové sazby, zvolíme Δt = 1/252 (Jeden rok obsahuje přibližně 252 obchodních dnů). Odhadnuté hodnoty parametrů Vašíčkova modely jsou zobrazeny v Tabulce č.4.

Tabulka č.5: Odhadnuté parametry VM

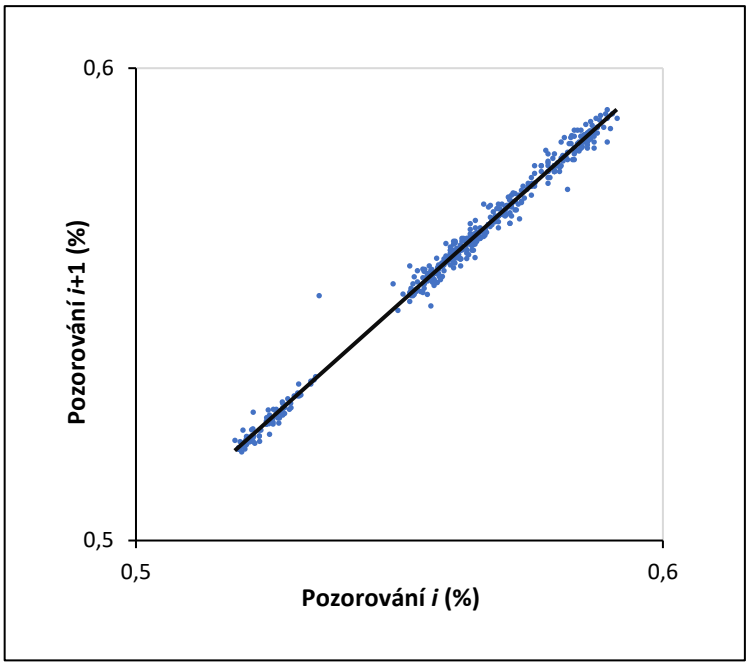
Parametry modelu	
a	0,96301
b	0,59254
σ	0,02755

Zdroj: Vlastní zpracování

Jak můžeme vidět, odhadnutá hodnota dlouhodbě očekávaná úrokové (0,5925 %) je vyšší něž střední hodnota úrokové sazby v daném období (0,5587 %). To je způsobeno rostoucím trendem vývoje sazby LIBOR. Zároveň si lze všimnout, že hodnota parametru σ je pouze 0,02755 %, což je dáno nízkou volatilitou úrokové sazby v námi vybraném období.

Obrázek č.13 navíc ilustruje proložení regresní přímky napozorovánými hodnotami úrokové sazby. Jak můžeme vidět, rozptyl bodů pozorování v okolí regresní přímky je minimální. Tomu odpovídá i nízká hodnota směrodatné odchylky reziduí (0,00174).

Obrázek č.13: Proložení regresní přímky body pozorování úrokové sazby



Zdroj: Vlastní Zpracování

2.2 Simulace vývoje úrokové sazby

Pro simulaci vývoje sazby LIBOR použijeme rovnici diskrétní verze Vašíčkova modelu. Tu můžeme pro připomenutí zapsat jako

$$r_{i+1} = r_i + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\eta_i.$$

Na základě výše uvedené zápisu bude mít rovnice pro simulaci prvního pozorování úrokové sazby r_1 tvar

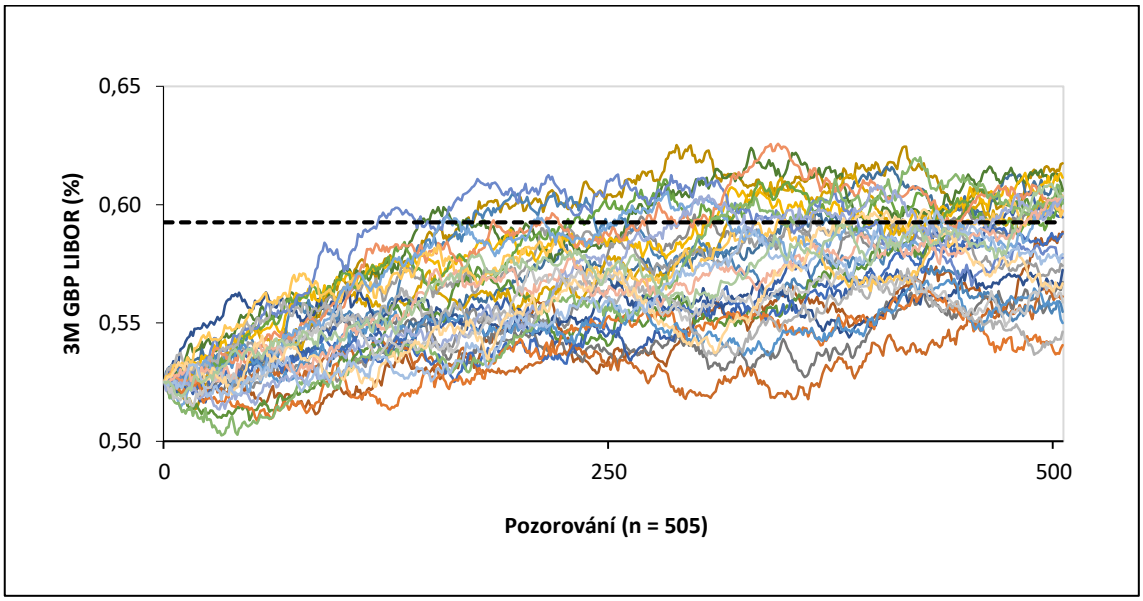
$$r_1 = r_0 + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\eta_i.$$

Nejprve budeme simulovat vývoj úrokové sazby pro období od 2.1.2014 do 31.12.2015. Hodnoty úrokové sazby simulujeme pouze pro 505 pozorování (i = 1,…, 505), přičemž jako hodnotu pozorování r_0 zvolíme reálně pozorovanou hodnotu úrokové sazby z 2.1. 2014 (0,525 %).

Jelikož simulujeme denní hodnoty úrokové sazby, platí že Δt = 1/252. Dále už jen stačí dosadit hodnoty odhadnutých parametrů z tabulky č.4 a vygenerovat náhodné číslo z $N(0,1)$ rozdělení. K tomu v programu Microsoft Excel použijeme funkci *NORMSINV*.

Pro každé pozorování jsme provedli 30 různých simulací, jejichž výstup je ilustrován na Obrázku č.14. Jak můžeme vidět, jednotlivé trajektorie vývoje úrokové sazby se relativně rychle přibližují k dlouhodobě očekávané úrokové sazbě. Její hodnota je 0,5925 % a na obrázku je vyjádřena přerušovanou linií.

Obrázek č.14: 30 simulací Vašíčkova modelu pro 505 pozorování

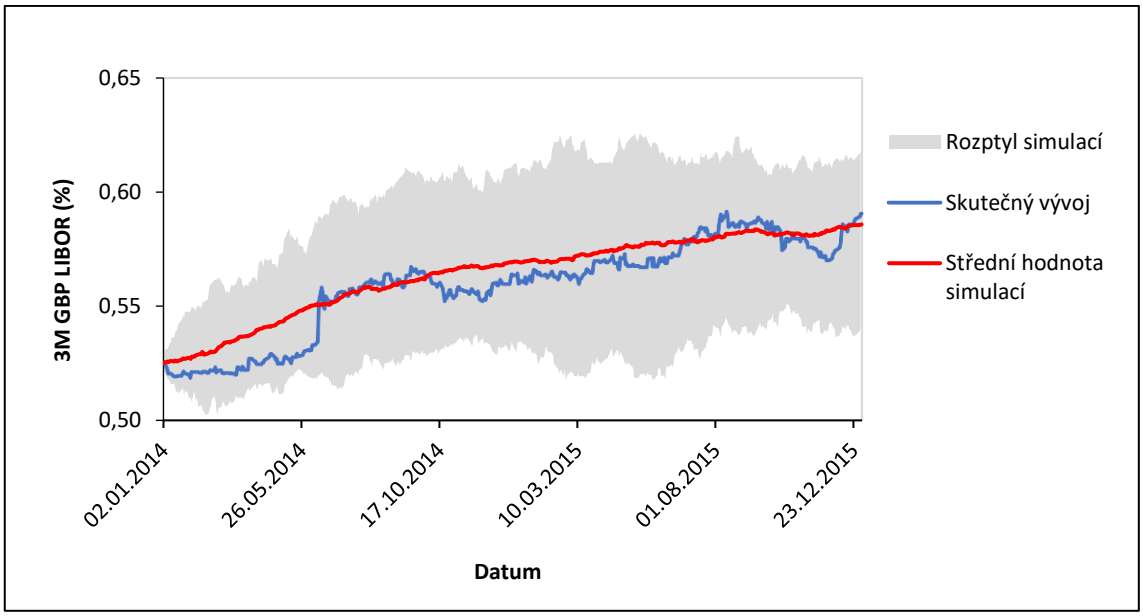


Zdroj: Vlastní Zpracování

Zároveň si můžeme všimnout, že se všechny simulované hodnoty sazby LIBOR nacházejí v relativně úzkém rozpětí (0,5-0,65 %). To je způsobenou nízkou hodnotou parametru σ (0,0276 %). Ta odpovídá malé volatilitě úrokové sazby ve výchozím období.

Obrázek č.15 nabízí porovnání simulovaných hodnot úrokové sazby Vašíčkův modelem s hodnotami, které byly reálně pozorovány v období, ze kterého jsme vycházeli při jeho kalibraci. Jak můžeme vidět, křivka střední hodnoty (aritmetického průměru) simulovaných trajektorií poměrně spolehlivě vystihuje rostoucí trend skutečného vývoje pozorované sazby. Křivka skutečného vývoje úrokové sazby se navíc v celém sledovaném období nachází v oblasti trajektorií jednotlivých simulací.

Obrázek č.15: Porovnání skutečného a simulovaného vývoje



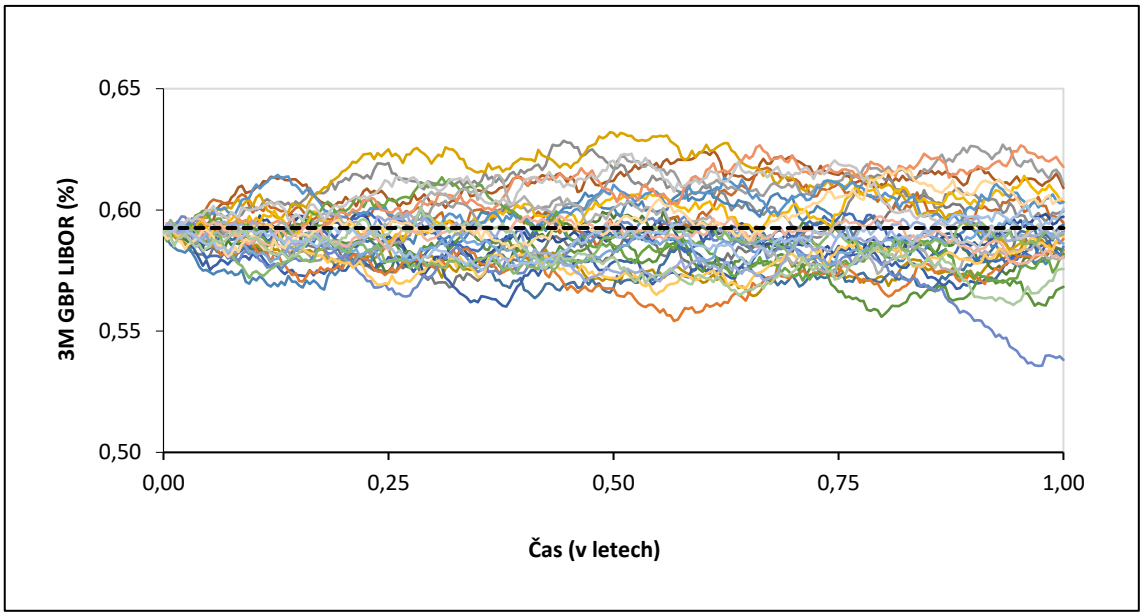
Zdroj: Vlastní Zpracování

Rozhodně však nemůžeme říci, že by byl Vašíčkův model schopen zachytit všechny výraznější pohyby ve vývoji sazby LIBOR. Jak můžeme vidět, tak zatímco na začátku sledovaného období skutečná úroková sazba spíše stagnovala, vývoj úrokové sazby simulovaný Vašíčkovým modelem měl ve stejném časovém úseku rostoucí trend. Vašíčkův model totiž nezachytil skok ve vývoji úrokové sazby z 13.6.2014, kdy mezidenně hodnota sazby LIBOR vzrostla z 0,5347 % na 0,5552 %. Limitujícím faktorem zde může být jak omezený počet parametrů modelu, tak i fakt, že jejich hodnoty jsou v čase konstantí.

Postup při simulování budoucího vývoje úrokové sazby je obdobný s tím, který jsme použili při simulovaní sazby v období od 2.1.2014 do 31.12.2015. Za r_0 zde však dosadíme hodnotu posledního pozorování úrokové sazby z výchozích dat, tj. 0,5904 %, a simulace provedeme pro 252 pozorování (i =1,…,252). Tuto předpověď budoucího vývoje sazby LIBOR lze chápat jako odhad jejích hodnot pro rok 2016. Samotný postup by však byl stejný pro jakékoliv jiné období.

Jak můžeme sledovat na Obrázku č.16, simulovaná sazba osciluje v okolí dlouhodobě očekávané sazby, přičemž její vývoj nemá žádný výrazný trend. To je dáno tím, že hodnota úrokové sazby r_0 (0,5904 %) je velmi blízko hodnotě dlouhodobě očekávané sazby (0,5925 %).

Obrázek č.16: 30 simulací Vašíčkova modelu pro období jednoho roku



Zdroj: Vlastní Zpracování

2.3 Shrnutí výsledků

V této kapitole jsme využili Vašíčkův model pro simulování vývoje tříměsíční sazby LIBOR pro britskou libru. Nejdříve jsme provedli odhad parametrů modelu metodou nejmenších čtverců. S jejich pomocí jsme následně simulovali vývoj sazby LIBOR nejprve pro výchozí období. V rámci porovnání simulovaných hodnot této sazby s hodnotami, které byly reálně pozorovány, se ukázalo, že ačkoliv Vašíčkův model dokázal relativně spolehlivě vystihnout trend sazby LIBOR, nebyl schopný si poradit s většími skoky v jejím vývoji. Nutné je však uvést, že vzhledem k tvaru jeho rovnice a datům, které jsme zvolili pro jeho kalibraci, se toto dalo do určité míry předpokládat. Zajímavější by v takovém případě mohla být volba období, ve kterém byla úroková sazba volatilnější. Při simulování budoucího vývoje sazby LIBOR pro jeden rok pak oscilovaly úrokové sazby v okolí dlouhodobě očekávané sazby, a to v přibližném pásmu 0,05 %. Při interpretaci našich výsledků je potřeba brát v úvahu, že kromě metody nejmenších čtverců je možné model kalibrovat i metodou maximální věrohodnosti, která může pro stejné hodnoty výchozích sazeb vrátit jiné hodnoty odhadovaných parametrů modelu a tím pádem bychom dostali i jiné výsledky simulací.

Závěr

Cílem této práce bylo představit princip fungování Vašíčkova modelu a ukázat jeho praktické využití při modelování úrokových sazeb.

V první podkapitole teoretické části práce jsme představili základní pojmy z oblasti financí, přičemž podrobněji jsme se věnovali zejména charakteristice mezibankovní sazby LIBOR. V druhé podkapitole jsme definovali Wienerův proces a popsali lineární regresi a metodu nejmenších čtverců, z kterých jsme v praktické části vycházeli při odhadu parametrů modelu. Třetí podkapitola byla věnována samotnému Vašíčkovu modelu. Představili jsme tvar jeho rovnice a popsali jeho základní vlastnosti. Dále jsme vysvětlili postup kalibrace Vašíčkova modelu na reálná data.

V praktické části jsme nejdříve provedli odhad parametrů Vašíčkova modelu z reálných hodnot historického vývoje tříměsíční sazby LIBOR pro britskou libru. Na základě odhadnutých parametrů jsme následně provedli simulace jejího vývoje. Simulace jsme provedli nejenom pro budoucí období, ale i pro to, z kterého jsme vycházeli při kalibraci modelu. V rámci porovnání výchozích hodnot se skutečnými hodnotami se ukázalo, proč je mnohými Vašíčkův model odsuzován. Nedokáže totiž vystihnout mnohé změny ve vývoji úrokových sazeb, což může vést k chybnému ocenění celé řady úrokových instrumentů.

To je dáno jeho jednoduchostí, která, ač je považována za jednu z jeho hlavních výhod, jde ruku v ruce s jeho nižší flexibilitou, kdy Vašíčkův model nenabízí tak široké spektrum využití jako mnohé složitější, např. vícefaktorové modely. Právě porovnání Vašíčkova modelu s jinými modely úrokových sazeb by mohlo představovat jedno z možných rozšíření této práce.

Seznam použité literatury a pramenů

Knižní publikace:

1. CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-93-4.
2. ČERNOHORSKÝ, Jan a Petr TEPLÝ. *Základy financí*. 2., upr. vyd. Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-3669-3.
3. HINDLS, Richard a Petr TEPLÝ. *Statistika pro ekonomy*. 8. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-43-6.
4. HULL, John C. *Options, futures, and other derivatives*. Tenth edition. New York: Pearson, 2018. ISBN 9780134472089.
5. MÁLEK, Jiří. *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*. Praha: Ekopress, 2005. ISBN isbn80-86119-97-1.
6. RADOVÁ, Jarmila, Petr DVOŘÁK a Jiří MÁLEK. *Finanční matematika pro každého*. 8., rozš. vyd. Praha: Grada, 2013. Finance (Grada). ISBN 978-80-247-4831-3.
7. REVENDA, Zbyněk. *Peněžní ekonomie a bankovnictví*. 6., aktualiz. vyd. Praha: Management Press, 2015. ISBN 978-80-7261-279-6.

Online zdroje:

1. David Hou a David Skeie. *LIBOR: Origins, Economics, Crisis, Scandal, and Reform* [online]. 2014 [cit. 2020-01-16]. Dostupné z: https://www.newyorkfed.org/medialibrary/media/research/staff_reports/sr667.pdf
2. FSB. *Reforming Major Interest Rate Benchmarks* [online]. 2014 [cit. 2020-01-03]. Dostupné z: https://www.fsb.org/wp-content/uploads/r_140722.pdf
3. *Libor* [online]. [cit. 2020-01-20]. Dostupné z: https://www.theice.com/iba/libor.
4. *Federal Reserve Economic Data* [online]. [cit. 2020-01-18]. Dostupné z: https://fred.stlouisfed.org/
5. *Preparing for 2022: What you need to know about LIBOR transition* [online]. [cit. 2020-01-20]. Dostupné z: https://www.bankofengland.co.uk/-/media/boe/files/markets/benchmarks/what-

you-need-to-know-about-libor-transition

6. *Reforming Major Interest Rate Benchmarks* [online]. Financial Stability Board, 2014 [cit. 2020-01-10]. Dostupné z: https://www.fsb.org/wp-content/uploads/r_140722.pdf.

Seznam obrázků

Obrázek č.1: Základní druhy výnosových křivek 11

Obrázek č.2: Vývoj tříměsíčních sazeb LIBOR 13

Obrázek č.3: Porovnání vývoje sazeb GBP LIBOR a sazby BoE 13

Obrázek č.4: Wienerův proces 19

Obrázek č.5: Normované normální rozdělení 20

Obrázek č.6: Metoda nejmenších čtverců 23

Obrázek č.7: Vlastnost mean reversion 26

Obrázek č.8: Simulace úrokové sazby s různými hodnotami parametru a 26

Obrázek č.9: Simulovaná úroková sazba se zápornými hodnotami 27

Obrázek č.10: Simulace úrokové sazby s různými hodnotami parametru σ 28

Obrázek č.11: Vývoj 3M GBP LIBORu v období 1986-2019 33

Obrázek č.12: Vývoj 3M GBP LIBORu v období 2014-15 34

Obrázek č.13: Proložení regresní přímky body pozorování úrokové sazby 36

Obrázek č.14: 30 simulací Vašíčkova modelu pro 505 pozorování 37

Obrázek č.15: Porovnání skutečného a simulovaného vývoje 38

Obrázek č.16: 30 simulací Vašíčkova modelu pro období jednoho roku 39

Seznam tabulek

Tabulka č.1: Vodopádová metodologie 15

Tabulka č.2: Popisná statistika období 1989-2019 33

Tabulka č.3: Popisná statistika období 2014-15 34

Tabulka č.4: Výstup regrese MS Excel 35

Tabulka č.5: Odhadnuté parametry VM 35